

2022 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160010

參展科別 物理與天文學

作品名稱 還有「轉環」的餘地—探討鋼球在自轉圓環軌道的運動

得獎獎項 四等獎

就讀學校 高雄市立高雄高級中學

指導教師 盧政良、高執貴

作者姓名 蘇盈翰、方宥鈞

關鍵詞 歐拉-拉格朗日方程式、阻尼振盪、旋轉坐標系

作者簡介



蘇盈翰(左)、方宥鈞(右)

蘇盈翰

我對物理有極高的興趣英文能力也不錯，曾參加台灣英文物理辯論賽獲選參加國手選訓。高中三年持續參加物理科展競賽，曾兩度獲得高雄市科展第一名，全國科展獲得佳作。除了實驗相關的能力之外，我對理論模擬也很感興趣，高二曾選修學校的「AI 人工智慧與科學探究」多元選修課程，程式方面的能力提昇不少。

方宥鈞

我對積木式程式語言興趣是來自於小學老師的點醒，發現我有程式結構上的天賦！曾參加高雄區校際盃國際奧林匹亞機器人大賽(WRO)獲得第二名晉級，全國賽更是得到滿分獲選為國手。代表台灣到俄羅斯獲得世界第五名的成績，收到總統及副總統的賀電恭喜。小學曾與同學參加科展，獲得高雄市第三名！埋下我對研究嚮往的種子。

摘要

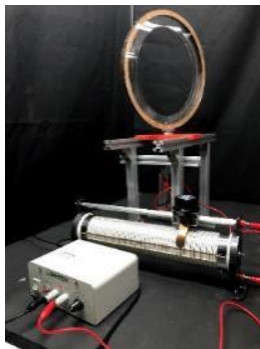
將鋼球放入一個鉛直站立的圓環凹槽內，當圓環由靜止開始轉動的過程中，鋼球沿著圓環向上運動，經過我們設計並改良的實驗架設，製作出穩定的實驗裝置進行量測，探討各種變因對鋼球運動的影響，並彙整出鋼球運動的幾個階段，進行理論建模與實驗數據的比較分析；我們參考幾篇論文嘗試在理論建模的方程式逐步加入模擬修正，從最單純的質點運動方程式逐步考慮旋轉、搖晃、阻力、鋼球體積等等，比較理論模擬結果與實驗數據的差異，也驗證了一些論文中缺乏實驗驗證的理論計算之正確性。

壹、 研究動機

稍早因為看到遊樂設施有趣的 360 度旋轉運動引發我們的興趣，嘗試先簡化這個現象，觀察並分析將小球放置於旋轉環內的運動，可惜之前的裝置設計製作未能達到有效的穩定旋轉，分析的方法與理論模擬能力也未臻成熟，因此我們延續以前的研究基礎做了許多調整與改良，理論分析的部分我們也進一步理解相關文獻論文的研究成果，搭配我們的實驗設備進行相對應的實驗設計，比較實驗數據與理論計算的差異並討論其原因，同時繼續深入探討球的動態過程。



(改良版圓環軌道)



(實驗架設)



(改良版旋轉台)

貳、 研究目的

- 一、探討鋼球運動軌跡
- 二、探討不同圓環之轉速對鋼球之影響
- 三、探討不同質量之鋼球對自身平衡點之影響
- 四、探討不同質量之鋼球對自身動態之影響
- 五、探討不同圓環傾角對鋼球之影響

參、 研究設備及器材架設

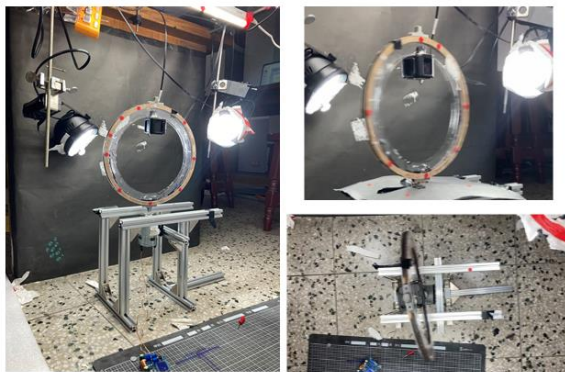
一、研究設備

		
GoPro(攝影)	游標尺(測量)	Tracker(影片分析)
		
Python(繪圖)	Jupyter Notebook(模擬)	Premiere Pro(製作影片)
		
小鋼球(實驗器材)	可變電阻(實驗器材)	其他

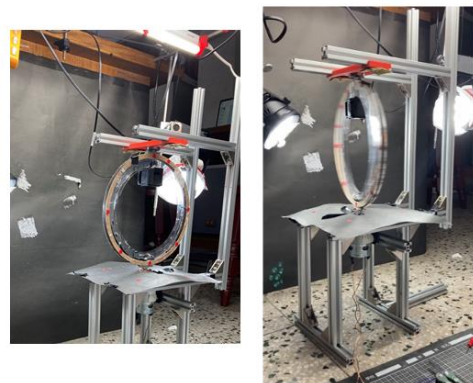
二、實驗架設

實驗架設改良

第一代



第二代



1. 利用垂直放置在圓環外之手機進行拍攝

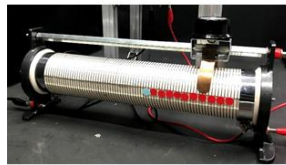
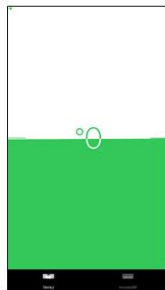
本實驗起初手機之架設是放置在圓環外，如下圖。但經實驗後發現，此種架設會導致將影片分析時，會因攝影角度而導致鋼球位於一樣的角度，但卻會有不一樣的 y 值(右下圖為一物品在桌面上水平滑動，可在 Tracker 結果中發現)。雖然已有解決方法，但此架設仍會導致當圓環轉到 90 度附近時，鋼球被圓環遮擋，意味著不能了解鋼球完整運動過程。故本實驗之解決方法為將 GoPro 架設在圓環內。



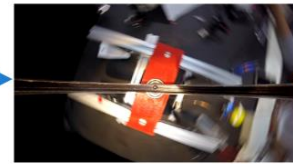
實驗架設



架設攝影機



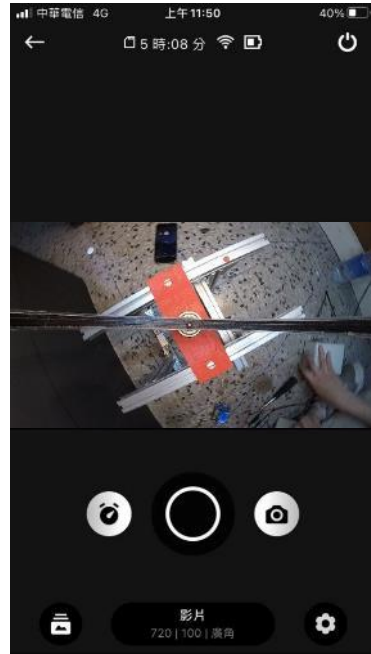
調整轉速(可變電阻)



擷取影片

2. 將 GoPro 置於圓環上

由下圖可知，GoPro 是利用熱熔膠黏在圓環之頂部，並確保攝影機畫面之中心點對準圓環最底部，故可利用在手機上的 APP 即時監控 GoPro 之畫面。但此架設仍無法直接直觀的取得鋼球，而計算方法在研究方法內將有更詳細之敘述。

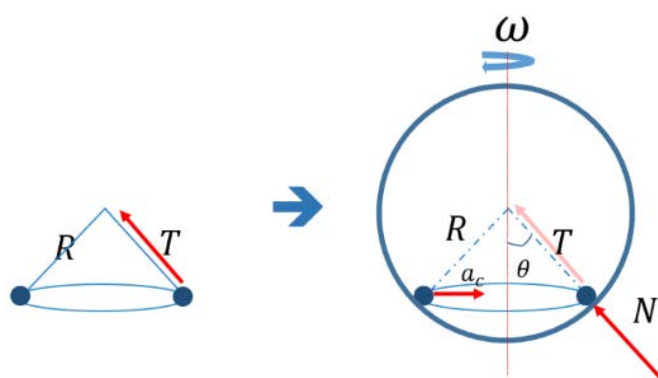


肆、 實驗理論與研究方法

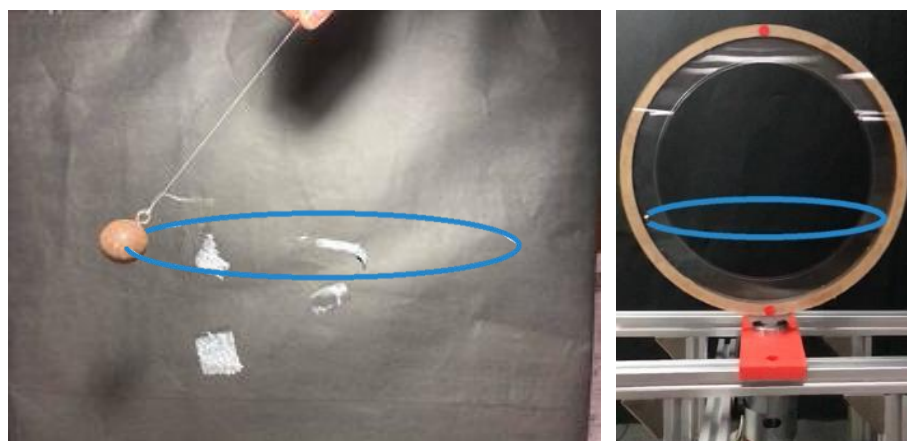
一、 實驗理論

(一) 錐動擺(牛頓力學分析)

由於本實驗裝置中的鋼球運動與錐動擺上球體的運動軌跡十分相似，而且在實驗中鋼球所受的正向力恰好可比擬為錐動擺上球體所受的繩子張力。因此本實驗裝置可以以錐動擺進行簡化並分析。



錐動擺應用在本實驗之示意圖



由下列公式可大致求得本實驗鋼球之位置為 $\cos^{-1}(g/R\omega^2)$ 。其中 g 為重力加速度； R 為圓環中心到鋼球中心的距離， ω 為馬達之轉速。

$$\begin{cases} X = N\sin\theta = ma_c \\ Y = N\cos\theta = mg \end{cases}$$

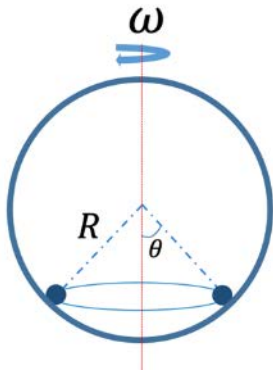
$$\frac{x}{y} = \frac{a_c}{g} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \rightarrow \frac{g}{R\sin\theta\omega^2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

由此公式可以得知，一個圓環轉速對應的鋼球位置，然而此解沒有考慮現實中，鋼球會受到外界阻力之影響，且也尚未完全了解小球完整的運動過程。經過一番搜索，發現國外論文使用尤拉·拉格朗日公式來解小球在環上的運動方程式。

(二) 尤拉·拉格朗日解

為了了解鋼球隨時間連續的變化，且最後也方便將模擬與實驗做比較，運動方程式便是一個相當必要的工具，而為了解物理模型中的運動方程式，需要使用拉格朗日方程式。

經過參考國外論文(Lisandro A Raviola.(2017). Eur. J. Phys. 38 015005.):
鋼球的動能，位能，和阻力項如下:



$$\text{動能：} \quad T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\omega^2)$$

$$\text{位能：} \quad V = -mgR\cos\theta$$

$$\text{阻力：} \quad \vec{F} = -b\vec{v}$$

將以上獲得的動能、位能、阻力導入下列拉格朗日標準方程式(F 即為廣義力)。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F$$

就可得到鋼球的運動方程式(Equation of Motion)

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = \frac{g}{R}\cos(\omega t)\cos\theta$$

而當 $\ddot{\theta}$ 和 $\dot{\theta}$ 為零時，也就是沒有 θ 的加速度或速度時，鋼球應處於一個穩定平衡階段，而透過公式轉換可得到的鋼球的平衡位置之結果與錐動擺分析的結果相同。

$$\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = \frac{g}{R}\cos(\omega t)\cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

由前述所提，拉格朗日運動方程式的價值在於其可以了解鋼球在圓環內的位置對於時間的連續變化，最後也可以將實驗與理論模擬進行比對。

(三) 穩定平衡與不穩定平衡

1. 穩定平衡

如下圖。一顆鋼球放置於一碗內部，若碗未獲的任何之擾動，鋼球將沒有外力的產生，意味著鋼球會一直待在此此點。但此時若有任何擾動，例如風吹，將可能導致鋼球離開此點，但鋼球經過一段時間後，會回到此點，故此點定義為此鋼球之穩定平衡點。



2. 不穩定平衡

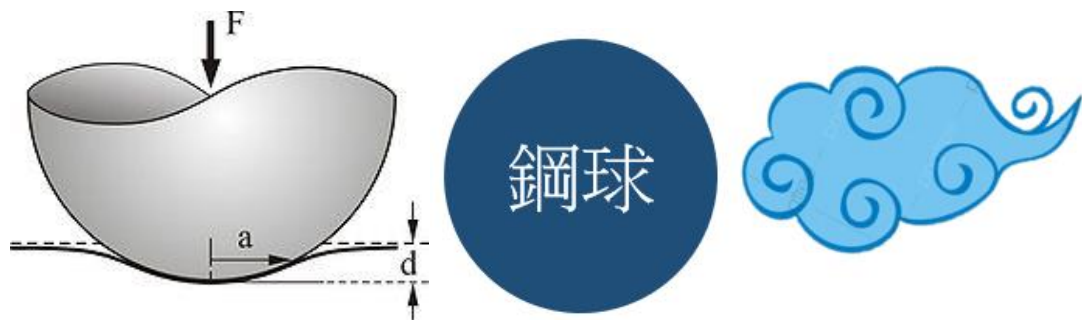
如下圖。不穩定平衡就像是將鋼球放置於一倒立碗上之頂點，如同穩定平衡般，碗未獲的任何形式之擾動，鋼球將沒有外力的產生，意味著鋼球會一直待在此點。但若任何擾動發生，球將離開此點，而鋼球並不會像穩定平衡之鋼球一樣回到原點，故鋼球放在倒立碗上之頂點時為不穩定平衡點。



(四) 阻尼震盪

若有一個半徑為 R 的球體在一個彈性半空間上壓出的凹痕深度為 d ，若產生的接觸區域的半徑為 $a = \sqrt{Rd}$ ，則作用力 $F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$ 。

而阻尼震盪是可以指任何振動系統在振動中，由於外界作用（如流體阻力、摩擦力等）或系統本身固有的原因引起的振動幅度逐漸下降的特性，而透過拉格朗日方程的假設，可以看到阻尼項最主要來自空氣給的空氣阻力。



二、研究方法

(一)實驗方法

1. 改變圓環轉速

本實驗在起初架設為直接將馬達接上電源供應器(如下圖左),並直接調整電源供應器輸出之電壓(3V、6V、9V、12V)。但經實驗後發現,4個不同圓環轉速並無法驗證實驗與理論。故後續實驗將接上可變電阻模組(無限段之電壓),進而可以取更多不同圓環轉速之數據。



2. 改變鋼球

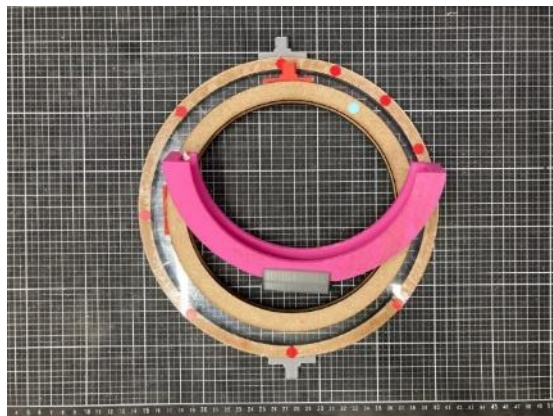
如下圖所示,本實驗採用相同密度鋼球,並改變鋼球之大小,進而改變鋼球之質量。



上方圖片之鋼球,由左至右分別是:

0.7mm、1.1g; 0.55mm、0.6g; 0.8mm、2.2g

3. 圓環演變史



	<p>受限於 3D 列印機之大小，此圓環只有一半，進而導致當馬達達到高轉速時，鋼球會超過 90 度，意味著鋼球將飛離圓環。</p>
	<p>雖然此圓環已完整，但從照片中仍可發現，軌道側板並非透明，導致無法使用將攝影機架設在環外之方法。</p>
	<p>將上述圓環重做並改為壓克力側板，便可利用將攝影機架設在環外之方法知道鋼球之位置。 實驗後發現軌道並不光滑，故使用打磨器打磨。</p>

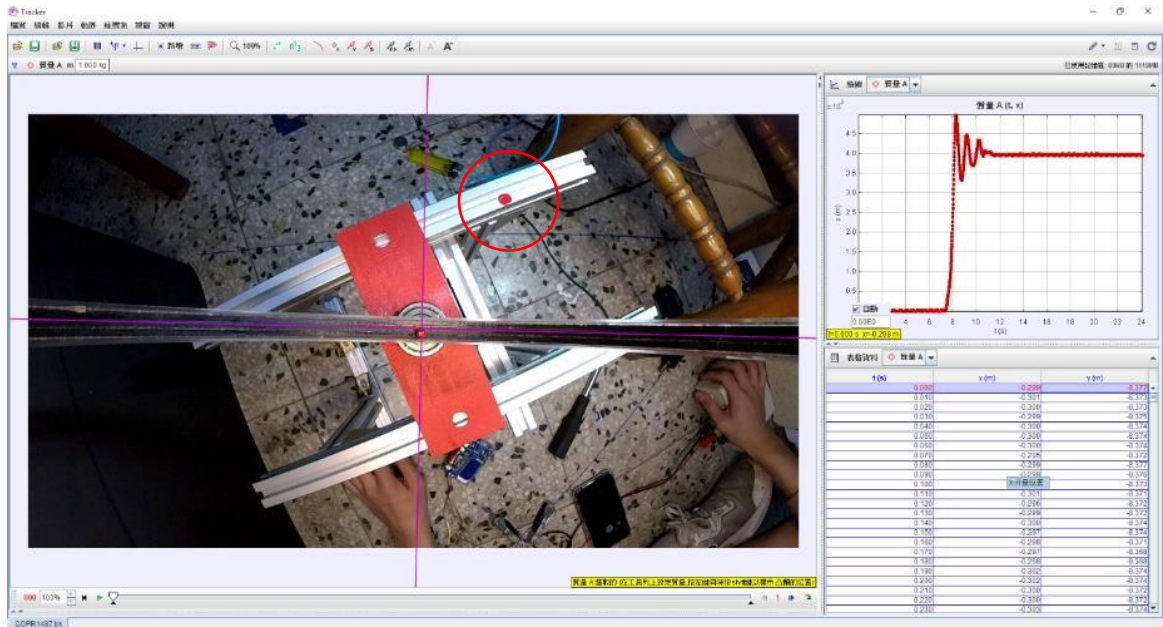


將鋁架加入培玲後，將使本實驗之裝置更加穩定。

(二)影片分析

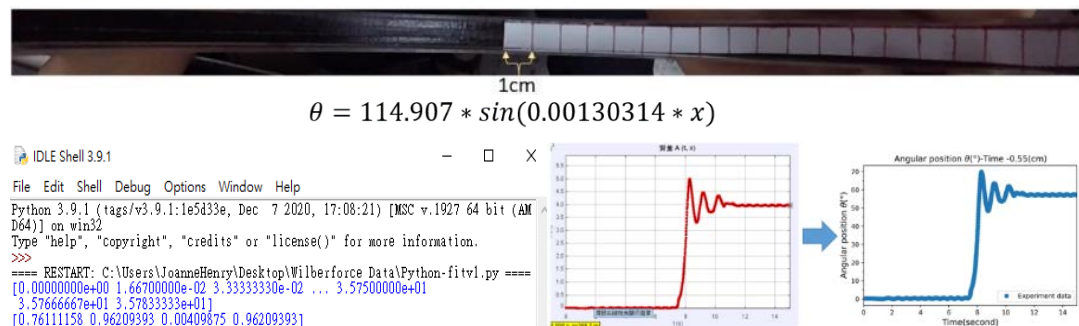
在確立了研究主題後，我們開始假設究竟有那些參數會影響鋼球的運動。當然，最容易觀測的無非是鋼球運動時所能抵達的「平衡點」。於是，我們初步的設想了幾個容易改變的參數：鋼球的質量、半徑，環所連接的馬達的轉速等等…。經過實驗並錄製成影片後，匯入 Tracker 進行分析，繪出鋼球在環內的軌跡隨時時間變化圖。

在下圖紅色圈圈中之紅點，為本實驗追蹤圓環轉速之標記。



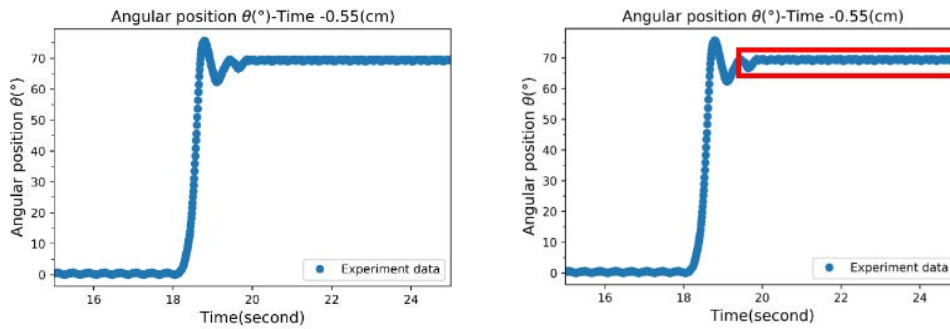
(三)數據處理

將 Tracker 裡之 x-t 資料輸出時，由於攝影機之結構，無法將 x-t 圖直接當成 θ -t 圖。故解決方法為：將一張紙條每 1cm 做一記號(如下圖)，並將此丟進 Tracker 得到不同 x 值對應之 θ ，並使用 python 擬合函數去了解 tracker 的 x 值和實際 θ 之關係，以利於之後能直接將 Tracker 資料輸出並直接換算成 θ ，並利用 Python 繪圖。



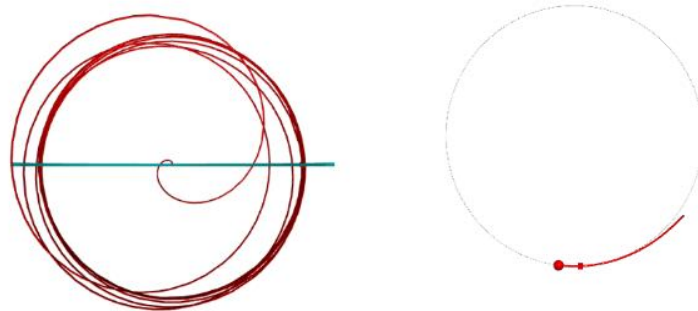
(四) 鋼球平衡位置定義

在先前的錐動擺公式中可得知，一個轉速對應一個平衡位置，但是平衡位置在實驗中的意義仍待釐清。下圖左為其中一次實驗之 θ - t 圖。

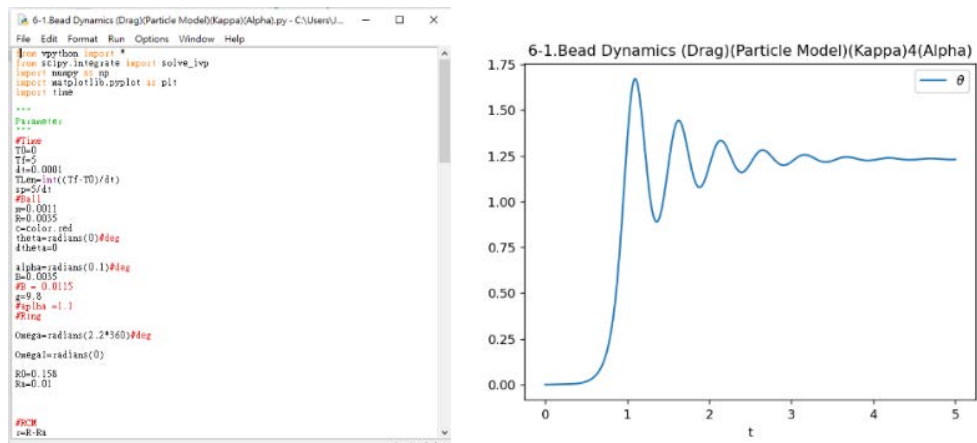


由上圖右中，發現當小球約在第 20 秒時到達一個穩定的狀態如上圖右，此穩定狀態「持續」直到實驗結束(前 18 秒為理論部分提到之不穩定平衡，在之後探討鋼球運動軌跡之實驗將會有更詳細的敘述)，故本實驗將此狀態定義為此小球之平衡位置，且取該段所獲得之數據並平均而得到此小球之平衡位置。

(五) 架設模擬環境



使用 Python 模擬，必須先找到合適的 Python Package，而經過搜 Vpython 的物理模擬最為合適，而模擬設定與運動方程式細節將會在後續實驗中有更詳細之敘述。



程式碼說明如下：

```
6-2.Bead Dynamics (Drag)(Particle Model)(Kappa) (Small Alpha).py
F: > TYPT > 2-20210216T023411Z-001 > 2 > 6-2.Bead Dynamics (Drag)(Particle Model)(Kappa) (Small Alpha).py
1  from vpython import *
2  from scipy.integrate import solve_ivp
3  import numpy as np
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  import time
```

匯入所需函式庫，例如: numpy 和 matplotlib

```
7  """
8  Parameter
9  """
10 #Time
11 T0=0
12 Tf=3
13 dt=0.0001
14 TLen=int((Tf-T0)/dt)
15 sp=5/dt
16 #Ball
17 m=0.0066
18 R=0.003
19 c=color.red
20 theta=radians(0)#deg
21 dtheta=0
```

T0、Tf：執行時間(開始，結束)

dt：運算時間間隔

m：鋼球質量

R：鋼球半徑

```
23  alpha=radians(5)#deg
24  B=0.9
25  g=9.8
26  #alpha =5
27  #Ring
28
29  Omega=radians(360*8)#deg
30
31  OmegaI=radians(0)
32
33  R0=0.155
34  Ra=0.01
```

alpha： α 偏差角修正

g：重力加速度

Omega：圓環旋轉速度

R0：圓環厚度

Ra：圓環寬度

```
38  #RCM
39  r=R-Ra
40  RCM=R0-Ra-r
41  gamma=2/5
42  Kappa=(1+gamma*(R/RCM)**2*(RCM/r+1)**2)**-1
```

Kappa：KAPPA 修正項(考慮鋼球體積效應)

```

52 Windows
53 """
54 titlename="6-2.Bead Dynamics (Drag)(Particle Model)(Kappa) (Small Alpha)"
55 savename=titlename+" a="+str(alpha)+" B="+str(B)+" m="+str(m)+" theta="+str(theta)+" Omega"+str(Omega)
56 scene = canvas(title=titlename, width=1280, height=720, background=vec(1, 1, 1), center=vec(0, 0, 0),range=3*L)
57
58 scene.camera.pos=vec(0,L,0)
59 scene.camera.axis=vec(0,-3*L,0)

```

建立執行視窗

場景基本參數(寬度，高度，位置向量)

相機基本參數(位置向量)

```

61 camera
62 """
63 |
64 scene.up
65 """
66 Object
67 """
68 Ring=extrusion(path+paths.arc(radius=R0, angle1=pi/2, angle2=pi/2,pos=vec(-R0/2,-R0/2,0)),shape=shapes.rectangle(width=Ra, height=Ra), up=vec(0,0,1), radius=R0, color=color.cyan,axis=vec(sin(Omega*t),0,cos(Omega*t)))
69 Ring.rotate(angle=radians(90),axis=vec(0,1,0))
70 #Ring = ring(pos=vec(0,0,0),axis=vec(sin(Omega*t),0,cos(Omega*t)),radius=R0, thickness=0.1*r)
71 Ball = sphere(pos=vec(R0*sin(theta),-R0*cos(theta),0), mm, radius=R, color=c, make_trail=True)
72
73 Box = box(pos=vec(0,-R0,0), size=vector(R,R,R), color=color.red, make_trail=False)

```

建立 VPYTHON 模擬物件

Ring：圓環

Ring.rotate：圓環位置

Ball：鋼球

```

80 Graph
81 """
82
83
84 Graph1 = graph(title="theta-t plot", width=600, height=450, x=0, y=600, xtitle="t(s)", ytitle="theta")
85 Ballthetat = gcurve(graph=Graph1, color=color.blue)
86 Graph2 = graph(title="dtheta-t plot", width=600, height=450, x=0, y=600, xtitle="t(s)", ytitle="dtheta")
87 Balldthetat = gcurve(graph=Graph2, color=c)

```

建立模擬執行時的動態圖表

Graph1：圖一(THETA-TIME)

Graph2：圖二(dTHETA-TIME)

```

100 File
101 """
102 file = open(savename+".csv", "w", encoding="UTF-8")
103 file.write("t(s), theta(rad), dtheta(rad/s), x(m), y(m), z(m)\n")
104 """
105 Animation
106 """

```

建立資料處存位置

```

111 def Bead_Dynamics(t, y, m, r, R0, RCM, Kappa, Omega, alpha, B, g):
112     dtheta, theta = y
113     return [Kappa*(Omega**2*cos(theta)*sin(theta)+(g/RCM)*alpha*cos(Omega*t)*cos(theta)+(-g/RCM)*sin(theta)+(-B/m)*dtheta), dtheta]
114 t = np.linspace(T0, Tf, TLen)
115 sol = solve_ivp(Bead_Dynamics, t_span=[T0, Tf], y0=[dtheta, theta], method='RK45', t_eval=t, args=(m, r, R0, RCM, Kappa, Omega, alpha, B, g), dense_output=True)

```

定義運動方程式

Bead_Dynamics：運動方程

t：執行時間長度

sol：數值解工具

```

119 #time.sleep(2)
120
121 for now in t:
122     theta=sol.sol(now)[1]
123     dtheta=sol.sol(now)[0]
124     # File
125     file.write(str(t) + "," + str(theta) + "," + str(dtheta) + "," + str(Ball.pos.x) + "," + str(Ball.pos.y) + "," + str(Ball.pos.z)+"\n")
126     rate(sp)
127     #Refresh graph
128
129     Ballthetat.plot(pos = (now, theta))
130     Balldthetat.plot(pos = (now, dtheta))
131
132     Ring.rotate(angle=Omega*dt,axis=vec(0,1,0))
133
134     Ball.pos=vec(R0*sin(theta)*cos(OmegaI+Omega*now),-R0*cos(theta),-R0*sin(theta)*sin(OmegaI+Omega*now))
135
136     scene.camera.axis=vec(-L*sin(OmegaI+Omega*now)/6,-3*L,-L*cos(OmegaI+Omega*now)/6)

```

迴圈執行

`theta=sol.sol(now)[1]`：執行數值解運算

`dtheta=sol.sol(now)[0]`：執行數值解運算

將上述執行結果匯入資料存放處

將執行解果顯示在 VPYTHON 模擬動畫上

```

142 file.close()
143 print(len(sol.t))
144 plt.plot(t, sol.sol(t).T)
145 plt.xlabel('t')
146 plt.legend([r'\frac{d\theta}{dt}',r'\theta'], shadow=True)
147 plt.title(titlename)
148
149 plt.savefig(savename+".png")
150
151 plt.show()

```

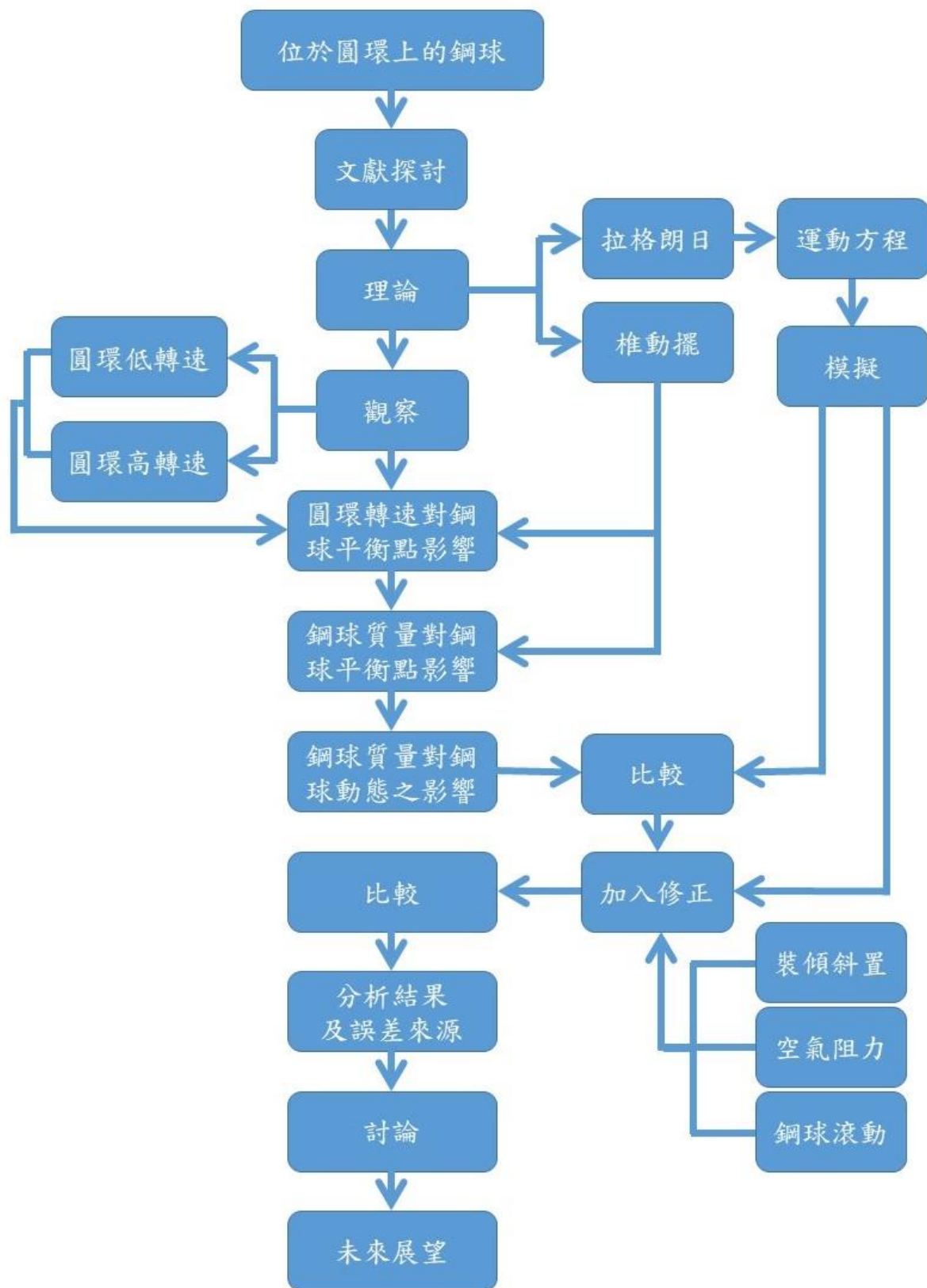
匯出結果圖表

匯出結果

定義圖表 X,Y 名稱

儲存圖表

(六) 實驗流程圖



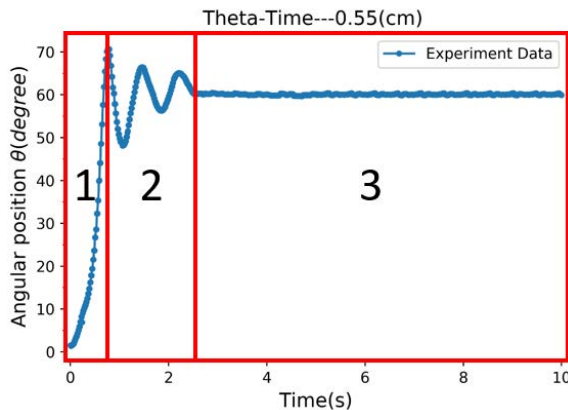
伍、 研究結果

一、 探究鋼球運動軌跡

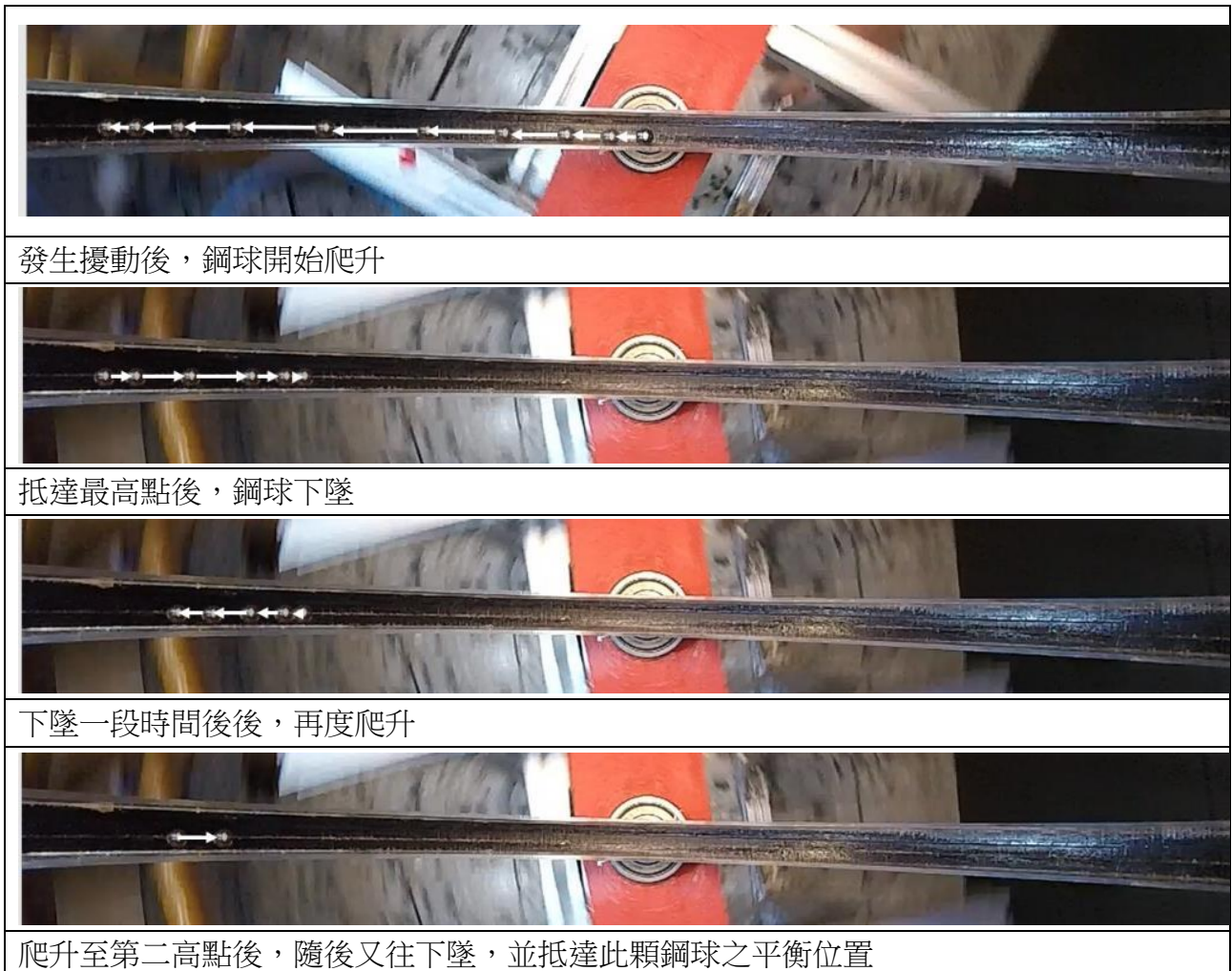
透過 $\theta = \cos^{-1}(g/R\omega^2)$ 和先前不穩定與穩定的發現，為使 θ 有解， ω 必須大於 $\sqrt{g/R}$ ，所以本實驗將轉速分為大於 $\sqrt{g/R}$ 和小於 $\sqrt{g/R}$ 來做討論。

(一) 高轉速 ($\omega > \sqrt{g/R}$)

1. 從下圖中，可發現小球的運動過程會有三個階段，分別是第一階段: 小球待在 $\theta = 0$ ；第二階段: 小球上升，並且多次上上下下；第三階段: 小球穩定在一定的位置。

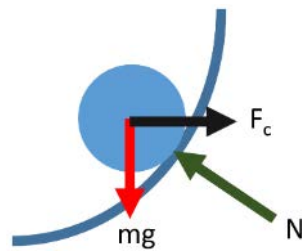


Status 1. 上升階段
 Status 2. 震盪階段
 Status 3. 穩定階段



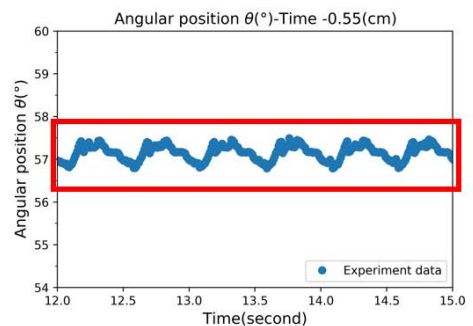
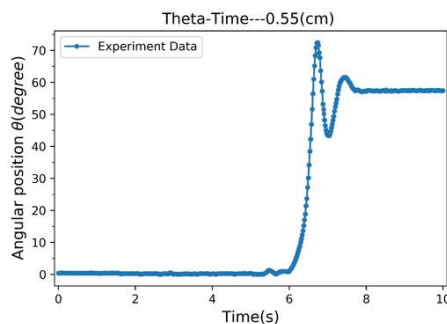
2. 將影片進行更進階的分析，可得到以下結果:

- (1) 第一階段：小球在約5秒前皆待在圓環底部，在5.5秒時小球突然離開原點。推測這就是在理論提到的不穩定平衡，當5.5秒時，擾動發生，球離開此不穩定平衡階段。
- (2) 第二階段：小球離開不穩定平衡後，開始上升，但到達一定高度後下墜，但之後又上升，最後趨於穩定。如下圖，而原因可以從拉格朗日的運動方程看出，但同時也可以直觀的理解，當小球位置上升到相對高處時，重力分力(切線方向分力)提升，導致球下墜；而當小球又盪到相對低處時重力分力又相對減弱。

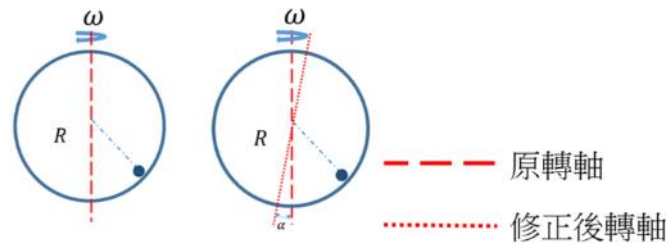


- (3) 第三階段：小球待在平衡位置附近，並且若在此第三階段對裝置給予人為擾動，鋼球也會回到此點，故我們可推測此點即為此小球在特定初始情況下的穩定平衡點。但如果將此階段放大來檢視，又會發現一個神奇的現象。
- (4) 小幅度震盪

由下圖可知，此鋼球並非穩定的待在平衡位置，相反的，此鋼球在平衡位置附近做小幅度震盪。



在了解此現象之原因前，必須先回到拉格朗日論文內。在論文中，研究人員發現圓環並非每次都以垂直旋轉，而是以一小傾角 α 當做旋轉軸，研究人員發現此事並對拉格朗日運動方程式稍作修改，加入 α ，發現在鋼球抵達第三階段後，鋼球確實會在平衡點附近做小幅度震盪。此理論與本實驗之結果相同。



$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\theta \right) \sin\theta = 0$$

研究人員將原本鋼球之運動方程式加入 α ，並修改為下列方程式

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) \theta = \frac{g}{R} \alpha \cos(\omega t) \cos\theta$$

由此公式可得知，鋼球位於第三階段時，小幅度震盪之頻率、振幅呈現如下。

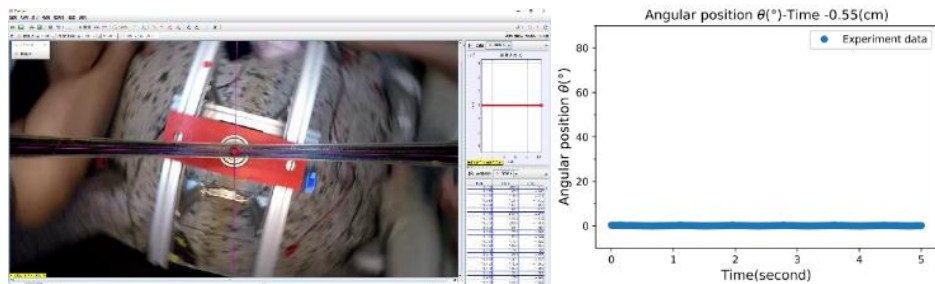
$$f = \sqrt{\frac{g}{2R} - \frac{b^2}{8m^2}}$$

$$\text{amplitude} = \frac{\alpha g}{R \sqrt{\left(2\omega^2 - \frac{g}{R} \right)^2 + \left(\frac{b}{m} \right)^2 \omega^2}}$$

3. 了解小球的運動後，便是降低圓環轉速，但卻發現了截然不同的結果。

(二)低轉速($\omega < \sqrt{g/R}$)

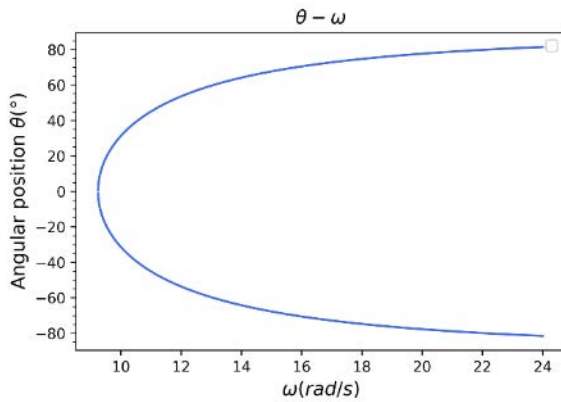
1. 從下圖中可發現，當圓環處於低轉速時，小球即使有擾動，小球也會回到原點，由此可推斷此點即為此小球在此初始情況下的穩定平衡點。



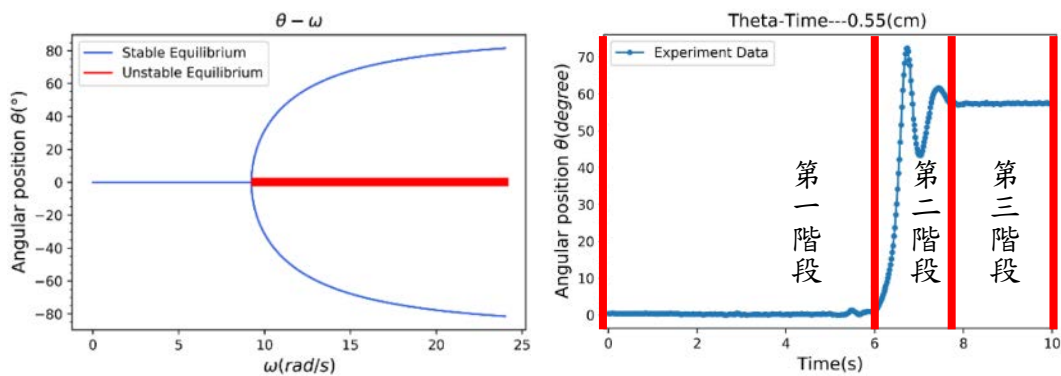
2. 在認知到圓環不同轉速會使鋼球有巨大影響後，不同轉速便為下一個實驗之研究目的。

二、探討不同圓環之轉速對鋼球平衡點之影響

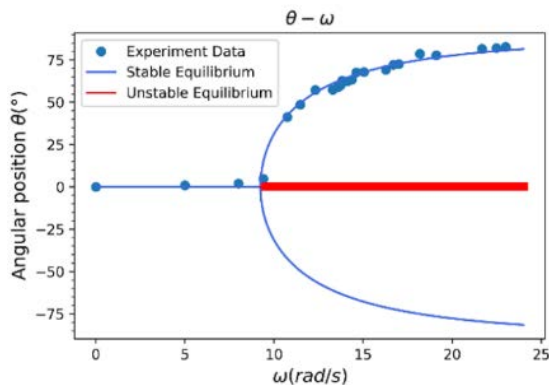
由理論部分可推知，鋼球位於圓環上之平衡位置 $\theta = \cos^{-1}(g/R\omega^2)$ ，故我們可以得知理論線如下圖。由第一個實驗可得知， ω 必須大於 $\sqrt{g/R}$ ， θ 才有解，我們便可從理論線明顯的看出 ω 之界線。



由上述所提及，理論線並未包含 $\omega < \sqrt{g/R}$ 之情況，但由第一個探究中關於低轉速之實驗，已經了解到當圓環處於低轉速時，鋼球會位於 $\theta = 0$ 之位置，固可將理論線修正成下左圖。從下左圖中可以看到紅線為第一個探究中關於高轉速實驗之第一階段，也就是不穩定平衡(如下圖右)。



實驗結果呈現如下圖

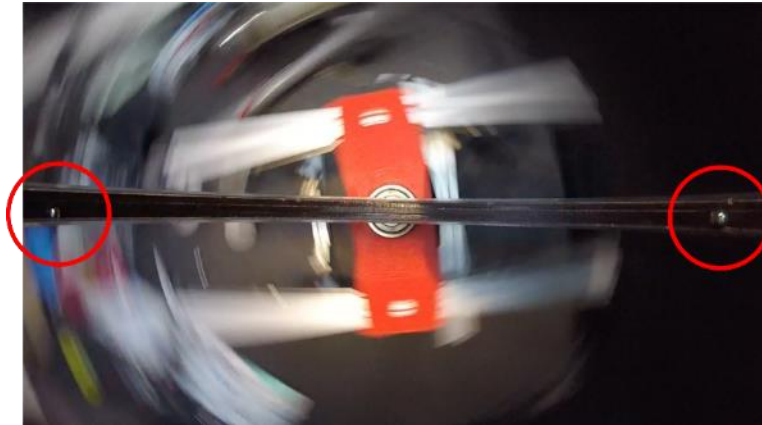


由實驗結果可得知，本實驗之結果相當接近於理論值。

三、探討不同鋼球的質量對平衡點的影響

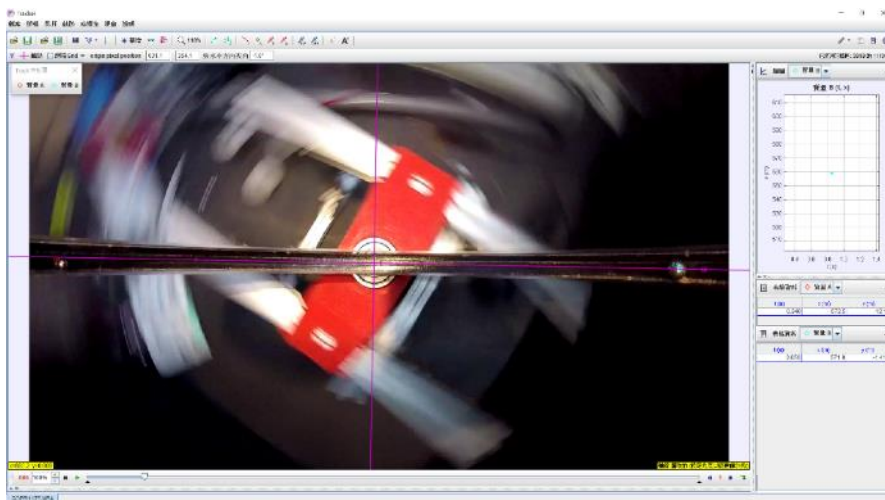
確立了一個轉速應對應一個平衡位置(穩定平衡位置)的事實之後,可發現靜態的平衡公式 $\theta = \cos^{-1}(g/R\omega^2)$ 跟質量並沒有關係,而為了印證質量的改變的確對平衡位置並無影響,所以進行以下實驗。

在環內放入質量不同的兩顆鋼球(0.66g, 1.1g)後,接著將變壓器調製定電壓(也就是固定轉速)



實驗影片

讓鋼球上升後可發現位置大致上相同,而為了進一步確認,需將影片匯入 Tracker 分析,



經過分析(帶入誤差矯正公式)之後發現不同質量不同的鋼球角度確實大致一樣

表格資料			質量 A
t (s)	x (m)	y (m)	
0.840	-572.5	-12.15	$X=-572.5 \rightarrow \theta = 78.28^\circ$

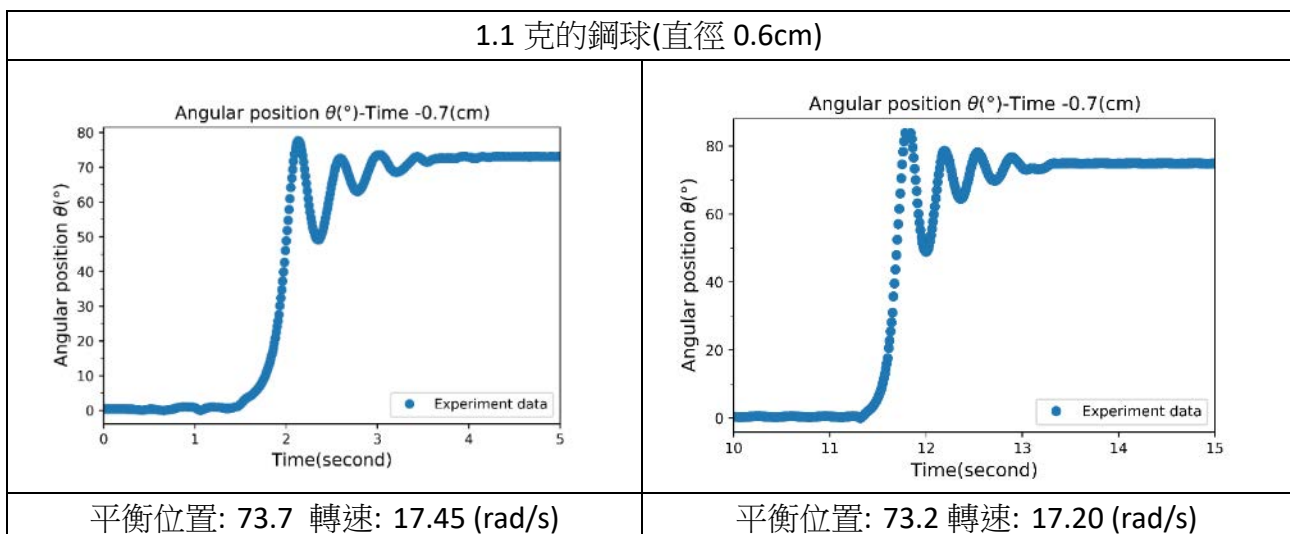
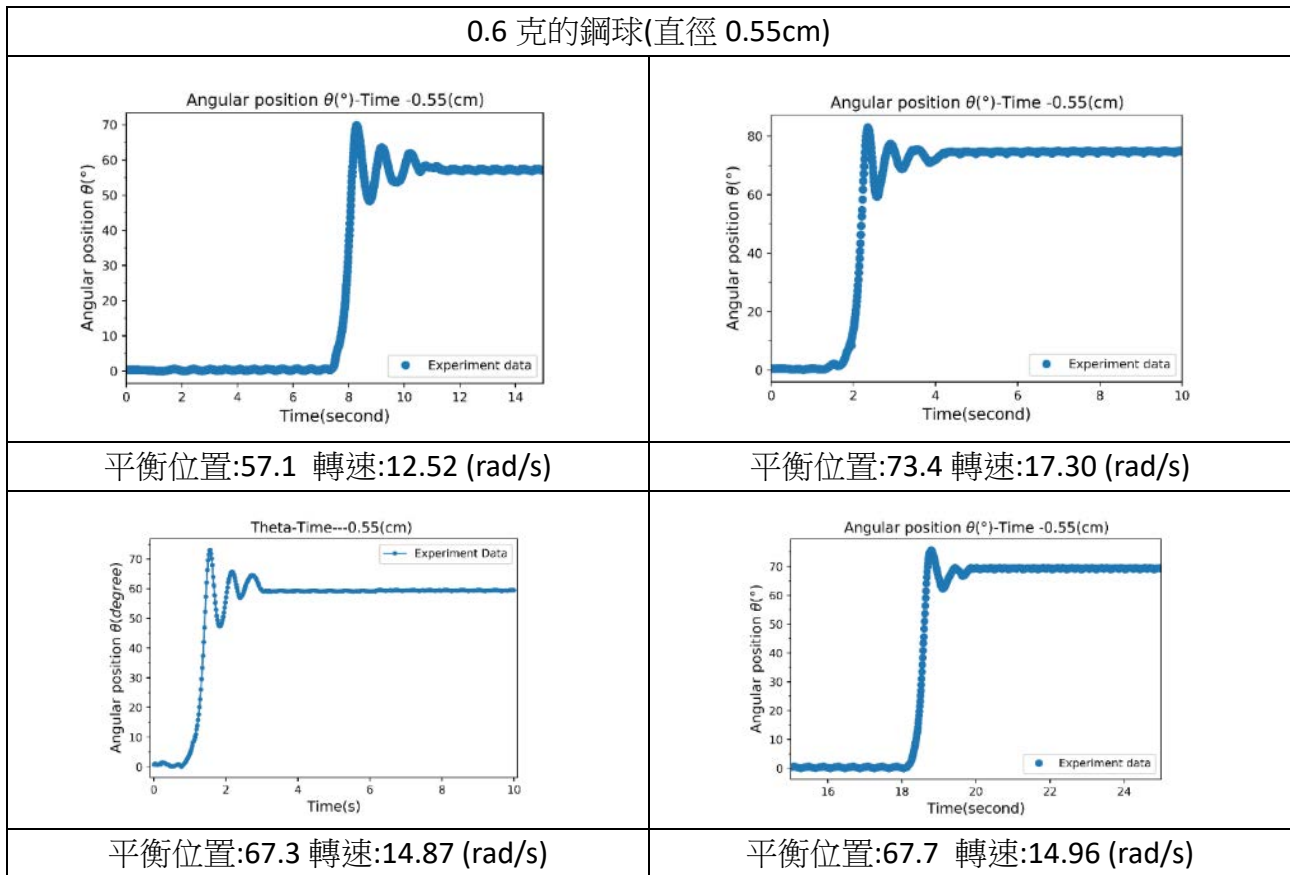
表格資料			質量 B
t (s)	x (m)	y (m)	
0.850	571.9	-1.419	$X= 571.9 \rightarrow \theta = 78.22^\circ$

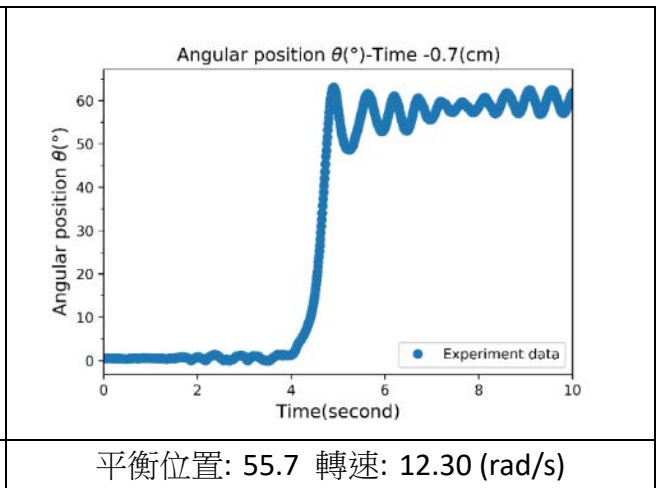
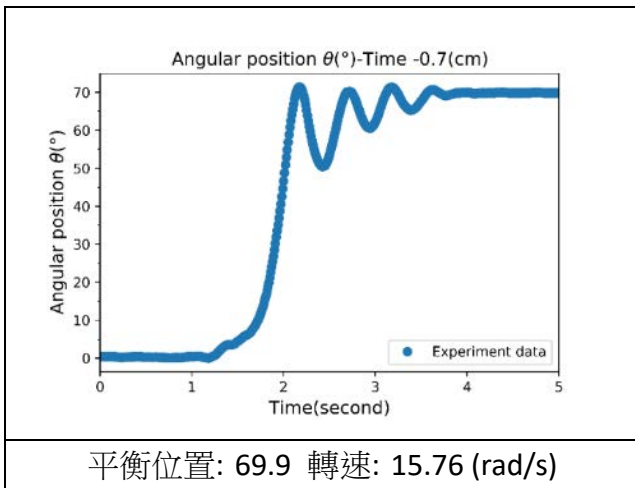
這樣的結果印證理論公式沒有質量的確實性,也讓鋼球位於環內靜態的平衡位置的結果更為完整

四、探討不同鋼球的質量對運動的影響

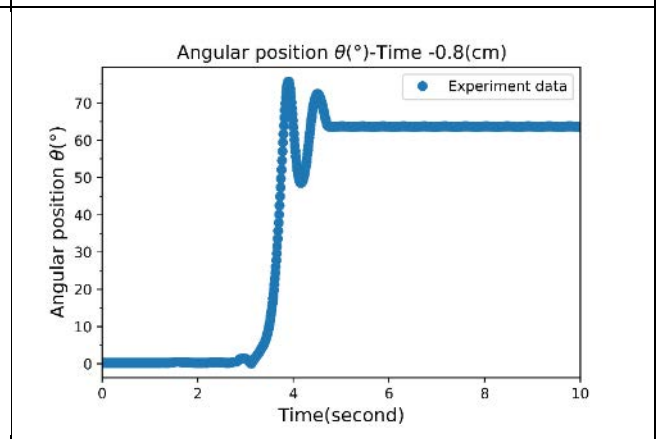
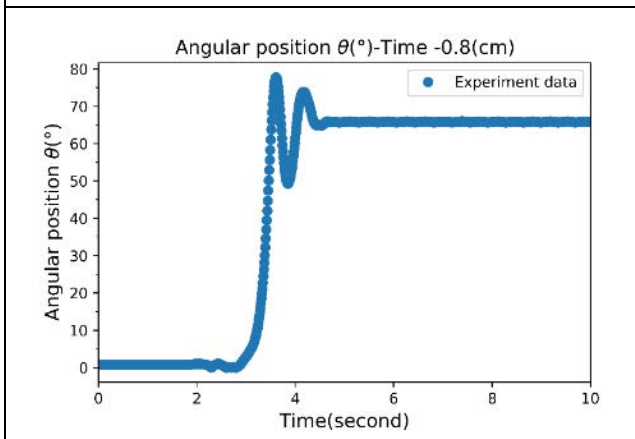
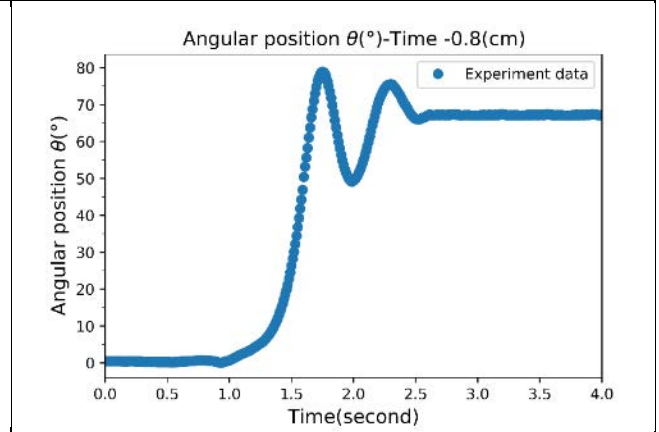
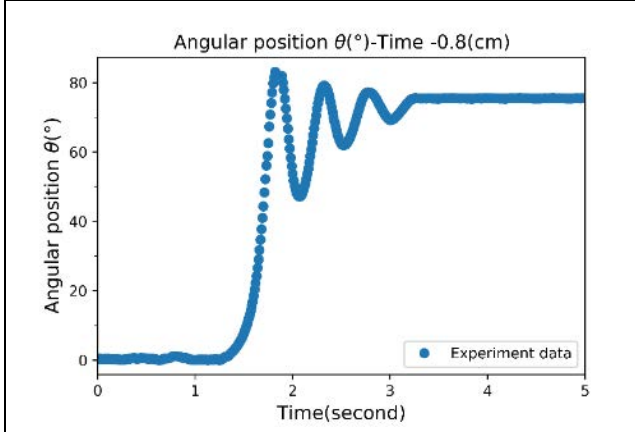
當瞭解完鋼球靜態的效果和基本的軌跡運動之後，還有沒有其他變因會影響鋼球的運動呢？根據觀察和推測，即便鋼球質量對於靜態的平衡位置並沒有影響，但卻會鋼球上升過程和第二階段震盪過程有影響。

此實驗使用三個質量的球((0.66 克, 1.1 克, 2.2 克)，並且才用與先前實驗一樣的步驟，而以下為結果





2.2 克的鋼球(直徑 0.8cm)



統計結果可以發現鋼球質量較輕時阻尼的效果似乎比質量大時還小，而透過對於第三階段的小幅度震盪頻分析運動方程式內的 b 之後，發現當質量越大時 b 也隨質量變大。

$$f = \sqrt{\frac{g}{2R} - \frac{b^2}{8m^2}}$$

三個質量鋼球 b 質的比較		
	平衡位置:73.4 轉速:17.30 (rad/s)	$b = 0.0035$ $f = 6.17$
	平衡位置: 73.2 轉速: 17.20 (rad/s)	$b = 0.006$ $f = 6.23$
	平衡位置: 75.6 轉速: 18.56 (rad/s)	$b = 0.015$ $f = 6.06$

而**b**質變大的原因，經過分析為球因密度一樣，質量造成體積的改變，體積愈大有效表面積就越大，所以質量越大阻力係數**b**質也就隨之變大(成正相關)

三個質量鋼球與 b 質的比較		
質量:0.6 克， 體積: 3.1×10^{-5}	質量:1.1 克， 體積: 5.1×10^{-5}	質量:2.2 克， 體積: 6.7×10^{-5}
$b : 0.0035$	$b : 0.006$	$b : 0.015$

而這樣的結果是否與模擬相同嗎？為了回答這個問題，接著必須討論模擬和實驗的吻合程度。

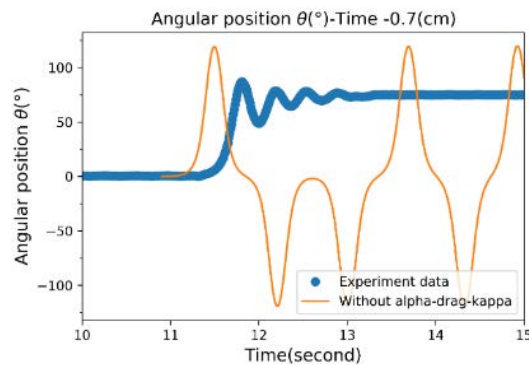
五、探討模擬和實驗吻合的效果

先前有提到模擬使用的環境是 python 的 Vpython package，然而並沒有對模擬公式提出一個詳盡的敘述，所以這章將做一個完整的敘述。

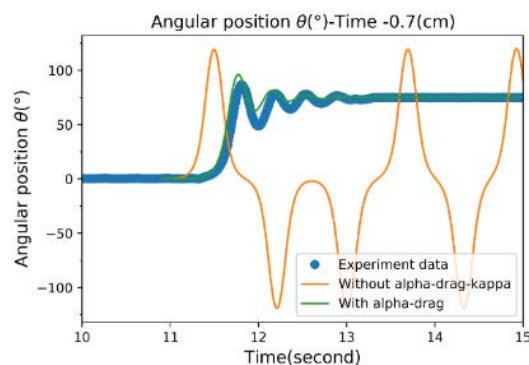
首先，透過先前理論的推導可以了解有兩個變數可以影響環的運動方程式，分別是阻力項和環的傾斜(β 和 α)，所以我們先對這兩項討論，諾沒有這兩項模擬寫出會是如何呢？先必須觀察諾沒有這兩項變因會對運動方程式造成甚麼影響，而經過簡化公式如下：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 \cos\theta \sin\theta + \frac{-g}{R} \sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = \frac{g}{R} \cos(\omega t) \cos\theta$$

將實驗與理論線做圖會如下圖：



然而可以明顯看到完美的量子模型(**particle mode**)是沒辦法符合現實世界的(先前在理論推導也有提到)，.所以加上兩項阻力項才會比較接近現實世界，結果如下：



加上兩項變因之後的確如假設更接近真實世界，然而可發現第二階段尾端依然有不符合的地方，這樣代表模擬或許依然有考慮不完全的地方，而在先前理論推導參考的論文(Lisandro A Raviola.(2017). Eur. J. Phys. 38 015005.)中有提及**轉動**的效果若考慮進去模擬的效果會更好，所以在繪圖之前必須重新推導運動方程式，經過推導後如下式：

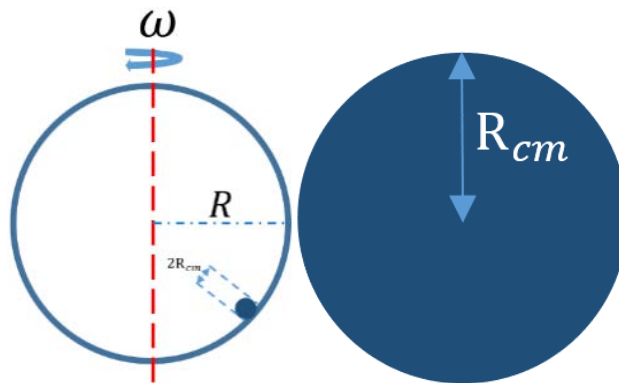
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \kappa \left(\omega^2 \cos\theta \sin\theta + \frac{g}{R_{cm}} \sin\alpha \cos(\omega t) \cos\theta + \frac{-g}{R_{cm}} \sin\theta \cos\alpha + \frac{-b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{-a}{m} \theta \right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \kappa \left[\frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R_{CM}} \cos\alpha - \omega^2 \cos\theta \right) \sin\theta \right] = \kappa \frac{g}{R_{CM}} \sin\alpha \cos(\omega t) \cos\theta$$

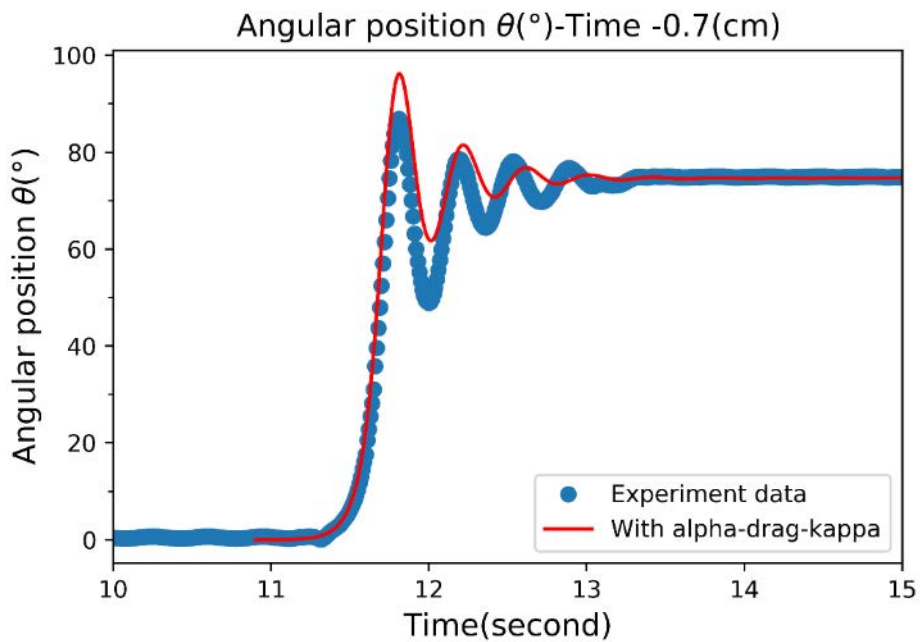
而其中的 κ (kappa) 定義如下:

$$\kappa = \left[1 + \gamma \frac{R^2}{R_{CM}^2} \left(\frac{R_{CM}}{r} + 1 \right)^2 \right]^{-1}$$

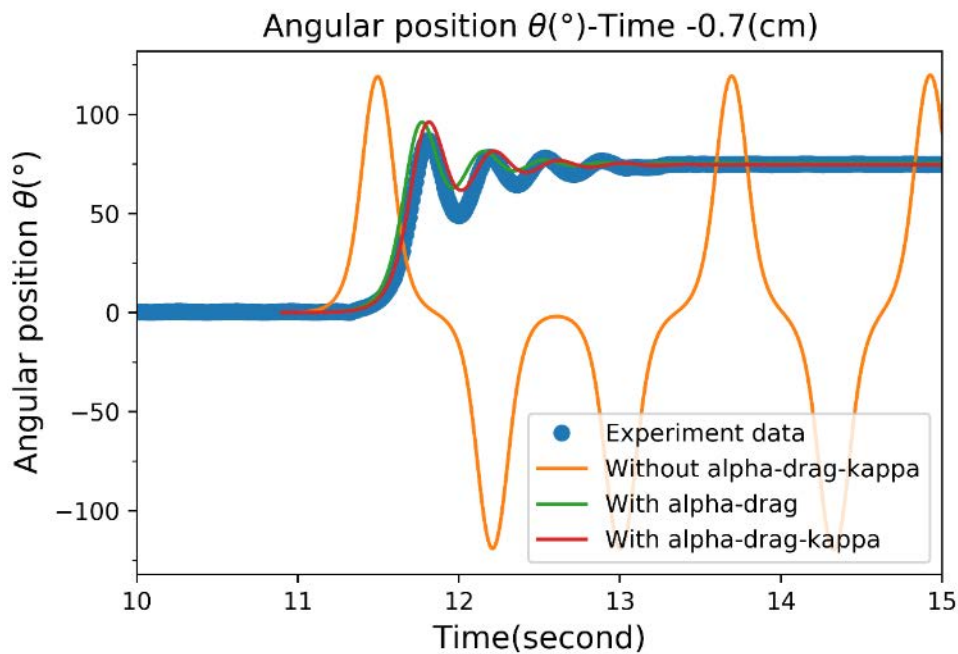
且其中的 γ 為鋼球的轉動慣量、 R_{CM} 為鋼球的半徑、且 $r = R - R_{CM}$ ，示意圖如下:



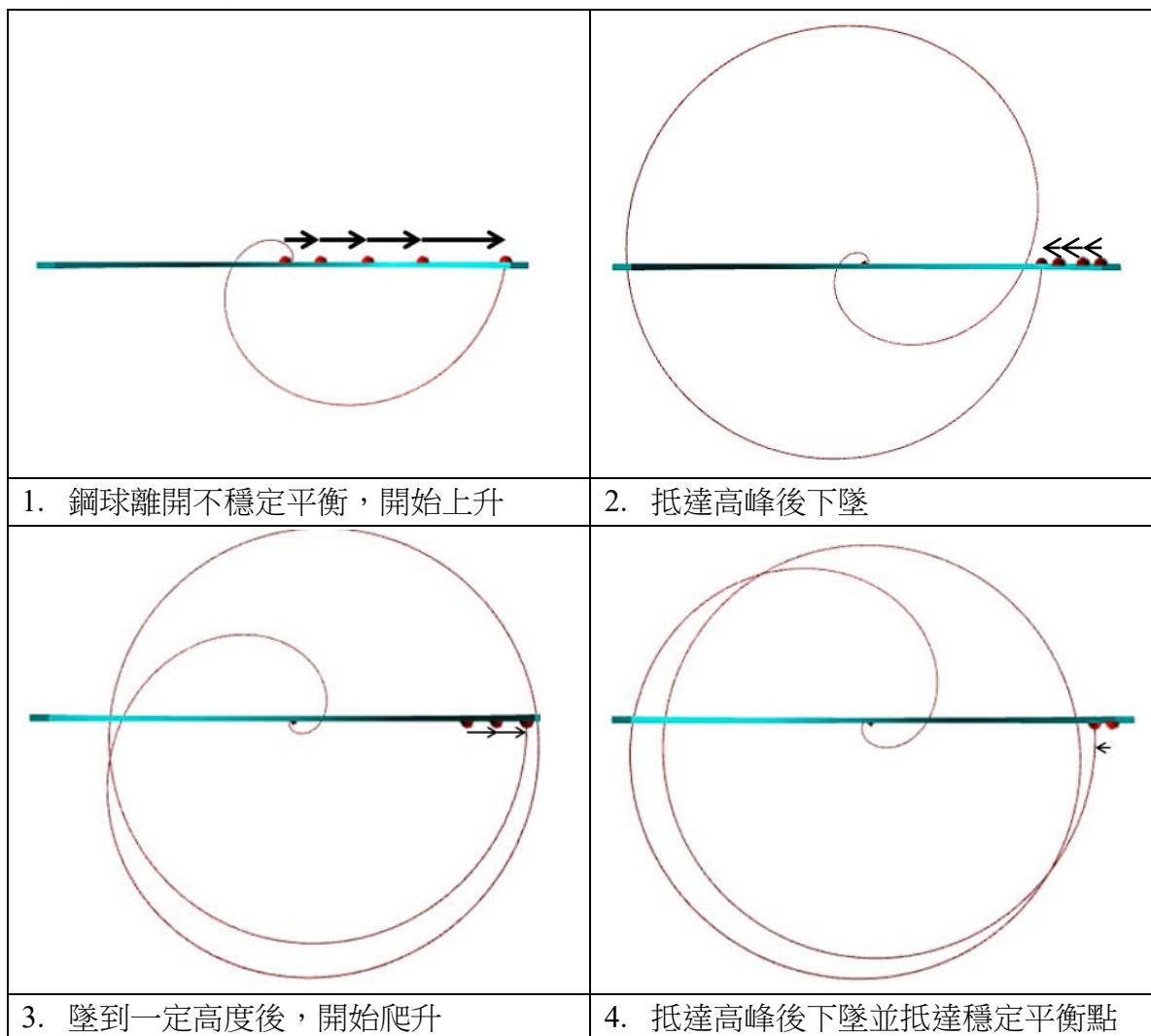
完整了解運動方程式之後重新繪製如下:



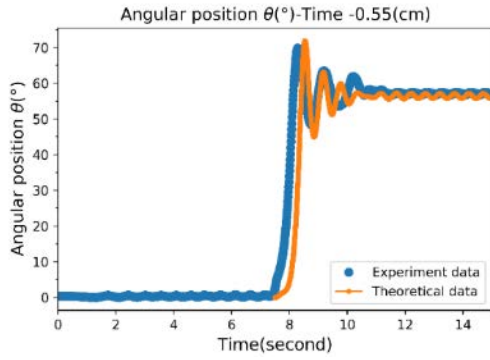
而比較三者更能發現其中的差別



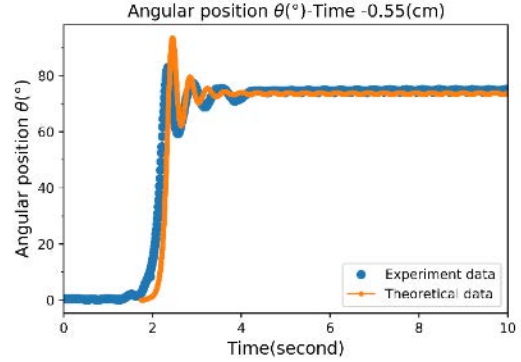
所以完整了解與真實世界較相符的模擬之後，就可將我們所有的實驗與 python 的模擬進行比較。



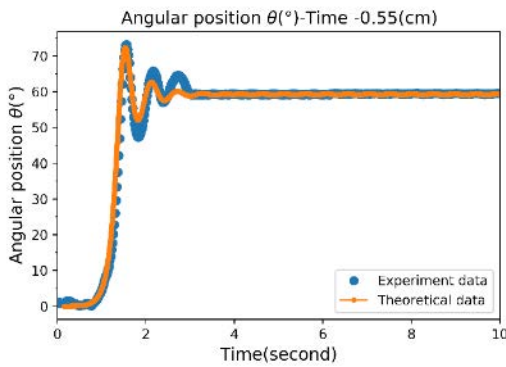
0.6 克的鋼球(直徑 0.55cm)



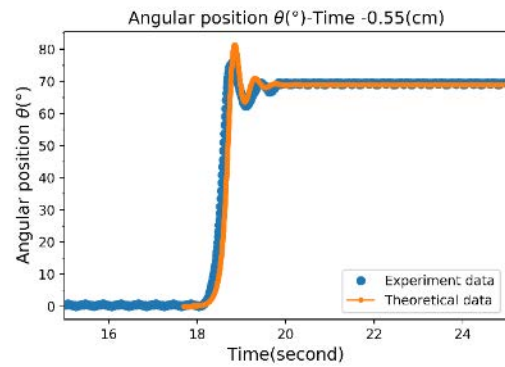
平衡位置:57.1 轉速:12.52 (rad/s)



平衡位置:73.4 轉速:17.30 (rad/s)

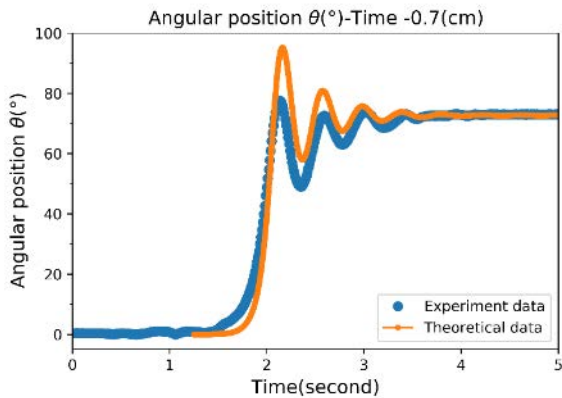


平衡位置:67.3 轉速:14.87 (rad/s)

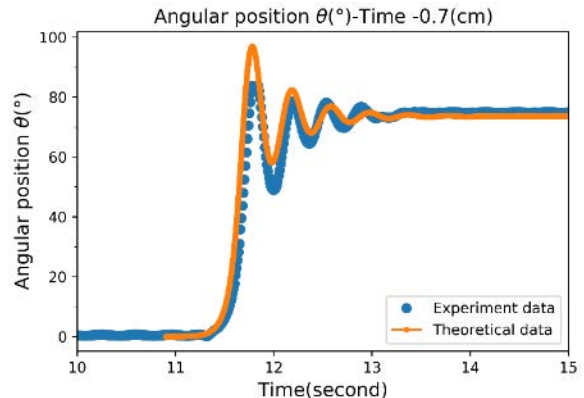


平衡位置:67.7 轉速:14.96 (rad/s)

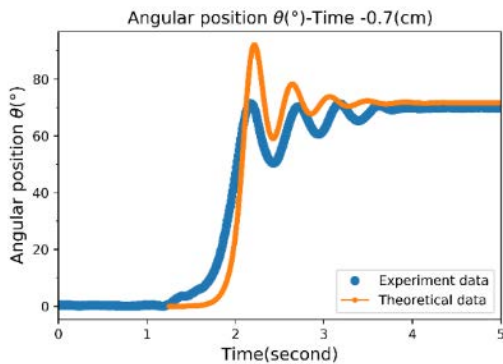
1.1 克的鋼球(直徑 0.6cm)



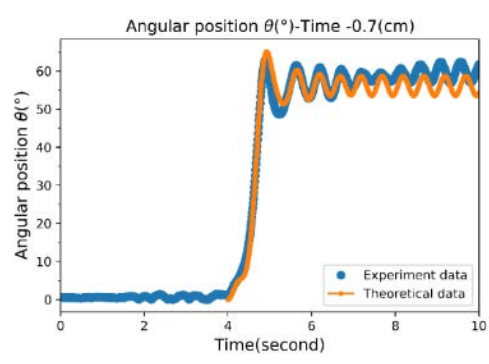
平衡位置: 73.7 轉速: 17.45 (rad/s)



平衡位置: 73.2 轉速: 17.20 (rad/s)

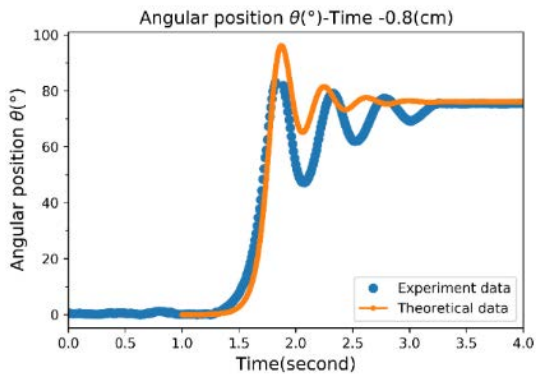


平衡位置: 69.9 轉速: 15.76 (rad/s)

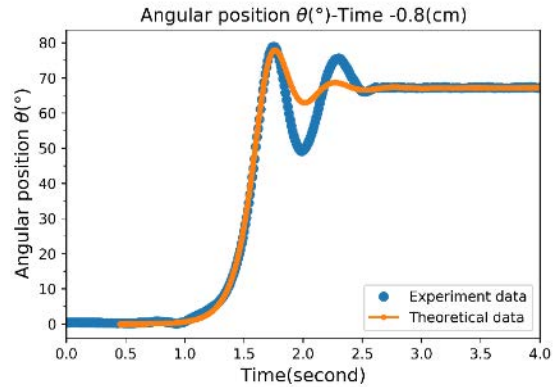


平衡位置: 55.7 轉速: 12.30 (rad/s)

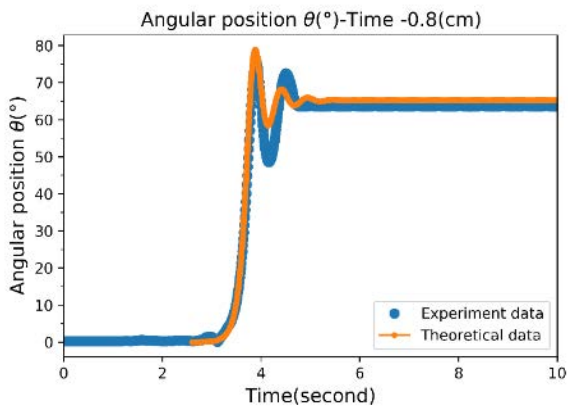
2.2 克的鋼球(直徑 0.8cm)



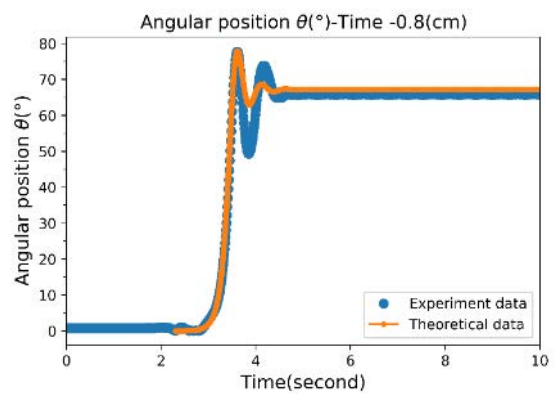
平衡位置: 75.6 轉速: 18.56 (rad/s)



平衡位置: 69.3 轉速: 15.4 (rad/s)



平衡位置: 65.2 轉速: 14.27 (rad/s)

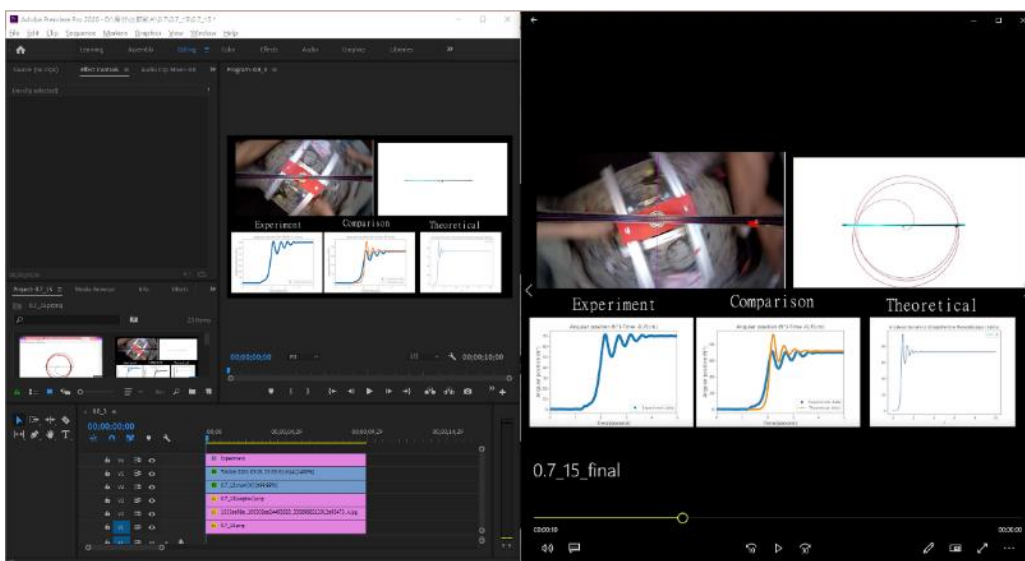


平衡位置: 67.0 轉速: 14.78 (rad/s)

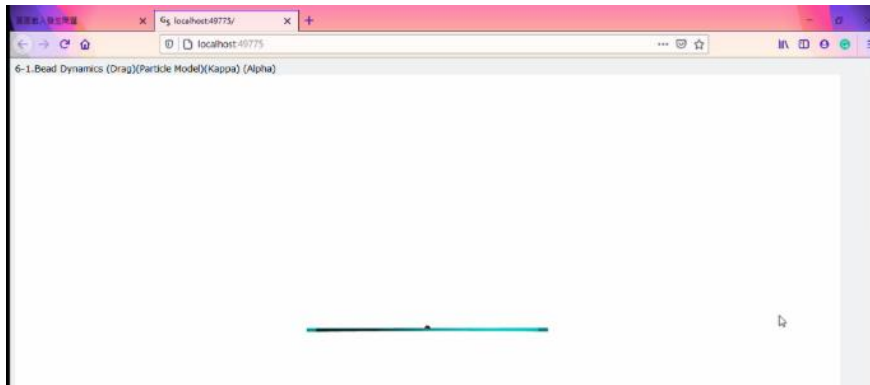
利用圖表比較實驗與理論似乎無法直觀的看到其中之差別，故本實驗將模擬之結果輸出成影片，放入 Pr 中與實驗影片直接比較。利用此方式可更加了解模擬與實驗之比較。

利用PR製作比較影片

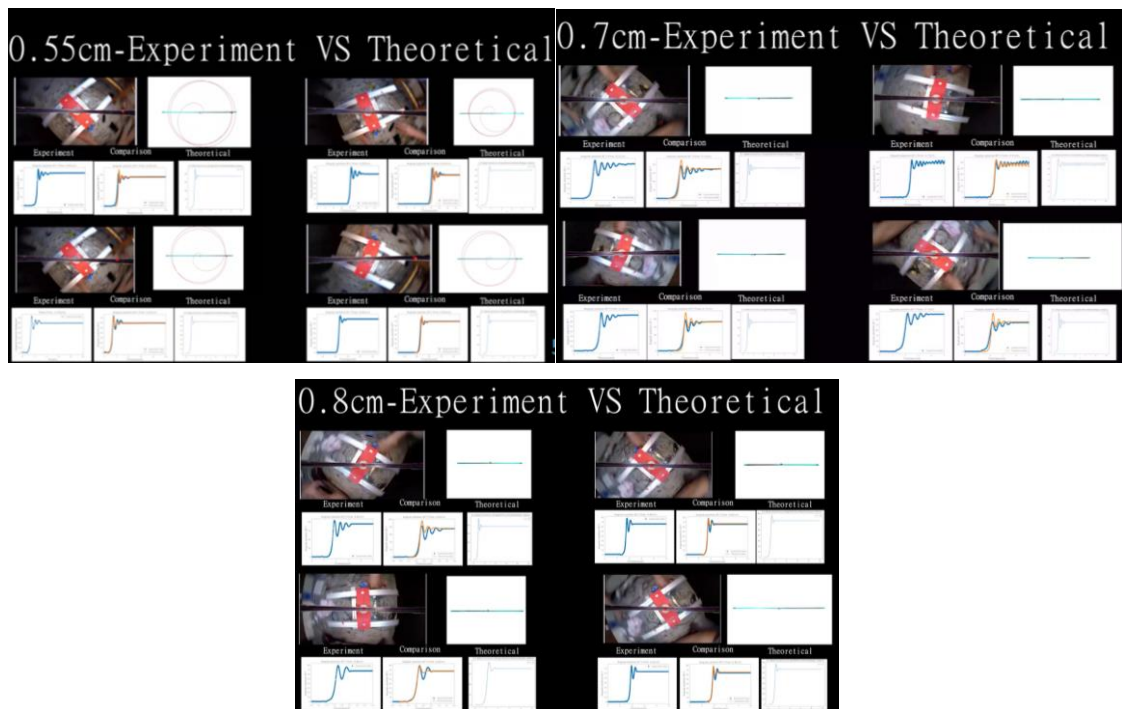
影片輸出結果



為了達到比較效果，在 Vpython 執行的過程的時需要使用螢幕錄影，如下圖：

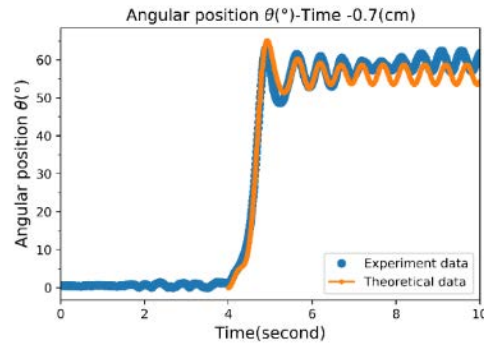


錄完後以下為結果：



六、探討環傾斜對鋼球運動的影響

先前的公式的理論推導有討論到，諾環有傾斜會對鋼球造成運動的影響(改變運動方程式)，然而沒有詳細的闡述，這章會將其補足。

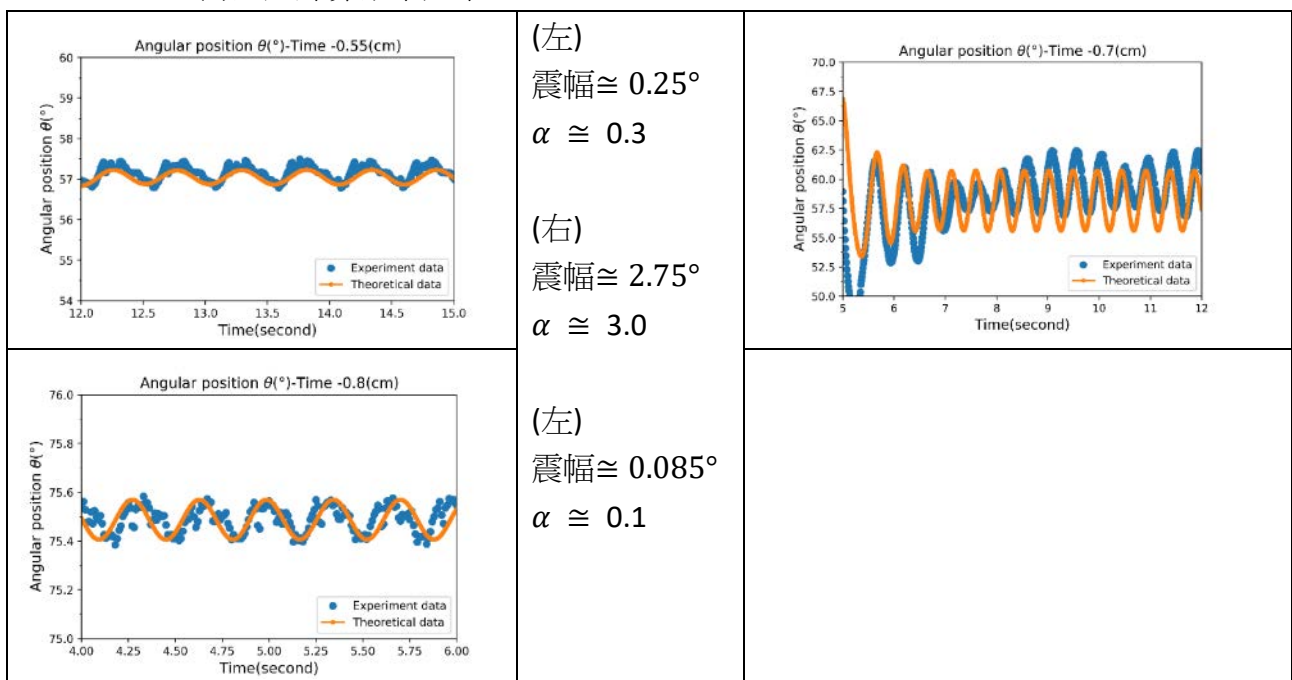


透過先前實驗的數據可以發現，某些特定狀態的第三階段，有震幅特別大的震盪而且沒有減少的效果，經過計算可發現 b 似乎不變，所以可能是 α 造成的影響，為了進行驗證，需要尋找不同狀況 α 對於震幅的影響。

先觀察先前推論的震幅公式，可以發現 α 與震幅成正相關，所以須要在實驗中觀察震幅越大 α 越大的趨勢：

$$\text{amplitude} = \frac{\alpha g}{R \sqrt{\left(2\omega^2 - \frac{g}{R}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2}}$$

而經過計算結果如下：

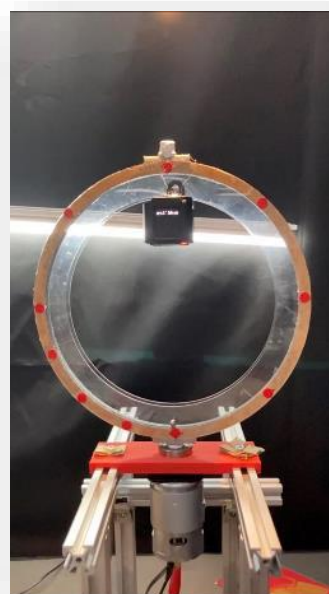
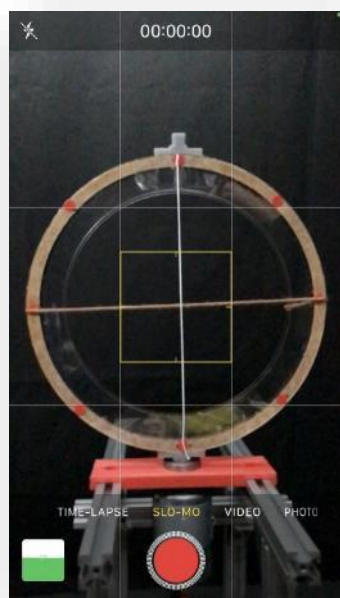


所以經過計算和觀察發現，當環傾斜越大，第三階段的震盪就越大，這就與先前假設相同，然而上述三張圖也可發現傾斜似乎跟鋼球的質量還是環的轉速沒有關係，而這似乎合理，因為在實驗中並沒有特定改變環當作操縱變因(況且也幾乎不可能自造完全垂直平面的環)，只是透過先前發現環傾斜有特殊現象，在從實驗數據中去做證實，進而再次論證了理論模型的可信性。

陸、 討論

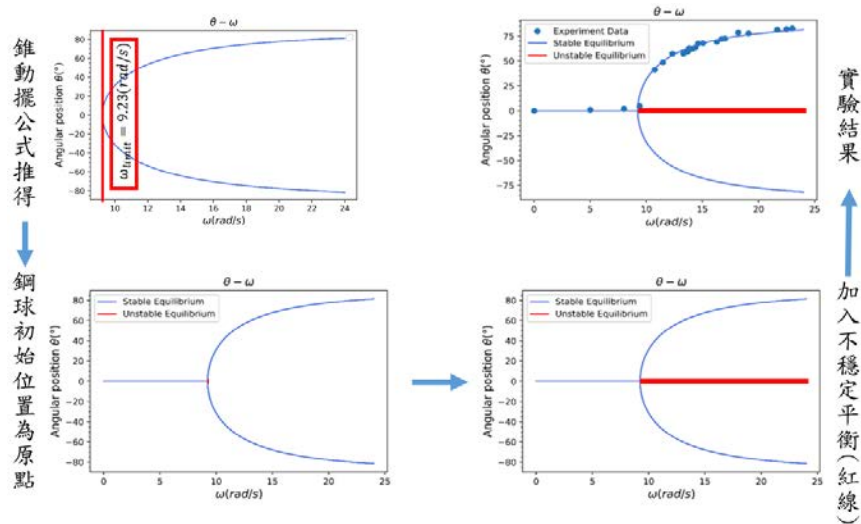
一、攝影機架設

將手機垂直架設在圓環外將導致數據必須再經過複雜之修正、運算，才能求得鋼球位於環內之數據，加上此設計將會導致幾個影格將被圓環本身遮擋。故架設經修正後，將攝影機(GoPro)架設於圓環內(如下圖右)，確保能準確得到每個時間點鋼球位於圓環內之位置。



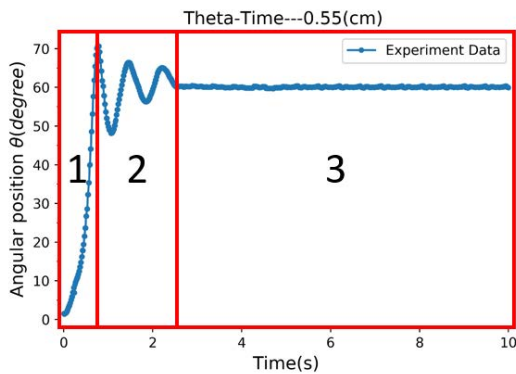
二、高轉速與低轉速

在前面提到使用錐動擺可求出轉速對位置角度的關係公式，而透過實驗也驗證公式的正確性，接著可以利用分岔圖來表示這個關係，並且發現低轉速與高轉速有差異極大的現象，進而在最後發現有穩定平衡與不穩定平衡的差別。而低轉速中，平衡位置位於最低處時為穩定平衡；但若高轉速時，且小球還在低處的話，那就會是不穩定平衡，可用藍線與紅線作為區別，所以一個轉速也可以有兩個相對位置角度(穩定和不穩定)，但相對的穩定平衡點在本實驗中只有一個(取絕對值)。

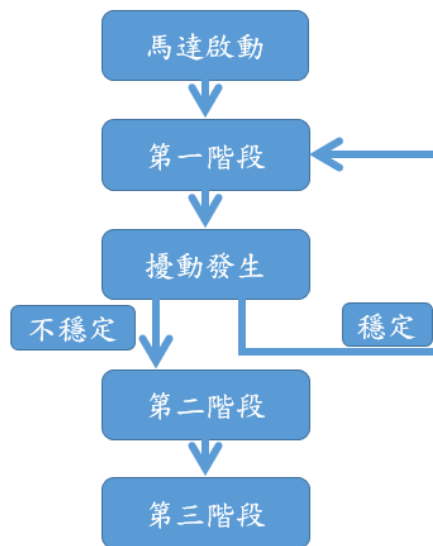


三、穩定與不穩定平衡

由理論關於穩定與不穩定之部分可得知，鋼球在低轉速的圓環上時，即使受到擾動並離開原點，鋼球也會在一段時間後回到原點，即原點為此顆鋼球之穩定平衡點。相反的，當鋼球處於高轉速的圓環上，原點反而變成此顆鋼球之不穩定平衡點，意味著若鋼球受到擾動，鋼球便會離開此點，並且經過一系列之運動到達穩定平衡點，但在本實驗中也發現，有時鋼球受到擾動也不會離開此點，甚至需要人為給的強制擾動鋼球才會離開此點，可得知擾動大小也是不穩定和穩定平衡的關鍵。而由此可推知，鋼球處於第一階段之時間和擾動發生之時間，大小有關聯。(以下討論將建立在圓環處於高轉速時鋼球之運動)

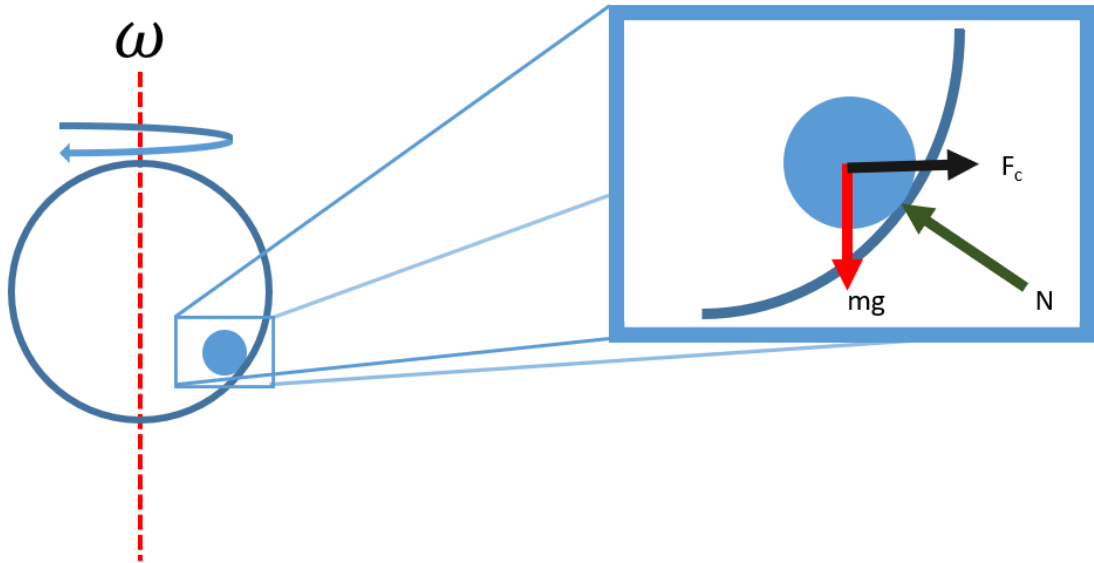


- Status 1. 上升階段
- Status 2. 震盪階段
- Status 3. 穩定階段



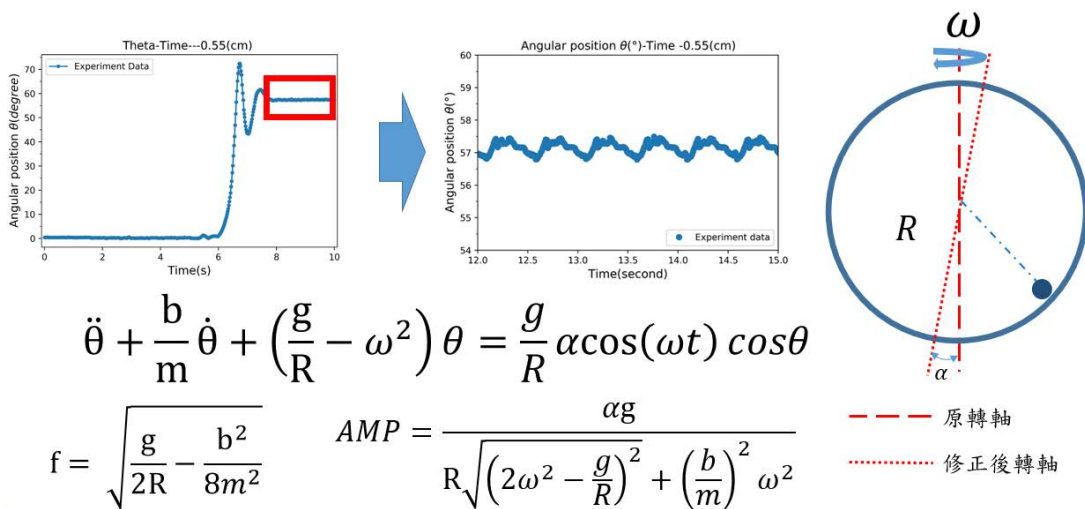
四、第二階段上下震盪之原因

由實驗中可得知，當球發生擾動後，球離開原點，並因為正向力分力與重力分力未達平衡導致鋼球產生 $\ddot{\theta}$ ，但同時又因理論提到的阻尼震盪(也就是拉格朗日方程中的阻力 $F = -bv$)，導致震幅隨著時間逐漸降低，進而使鋼球趨向於穩定。



五、第三階段小幅度震盪之原因

在起初未加入裝置傾斜角度時，鋼球並不會做小幅度震盪，但當參考論文並加入裝置傾斜的修正後，發現鋼球確實會在平衡點附近做小幅度震盪。



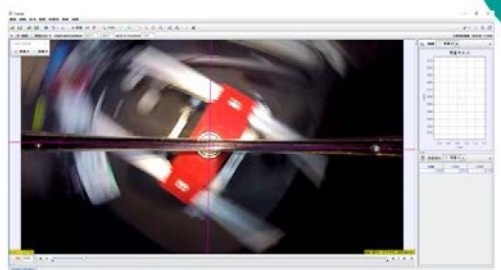
並且可由拉格朗日方程推出此小幅度震盪之頻率、震幅等等。

六、質量對於鋼球之影響

由錐動擺之公式可得鋼球之平衡位置不受鋼球重量影響，而本實驗方法為同時將不同重量之鋼球放置於圓環內，可以發現重量確實不影響平衡點。



分
析



環內放入**質量不同**的兩顆鋼球(0.66g, 1.1g)

表格資料			質量 A		
t (s)	x (m)	y (m)	t (s)	x (m)	y (m)
0.840	-572.5	-12.15	0.850	571.9	-1.419

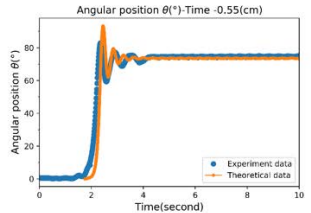
X= 571.9 → $\theta = 78.22^\circ$

X=-572.5 → $\theta = 78.28^\circ$

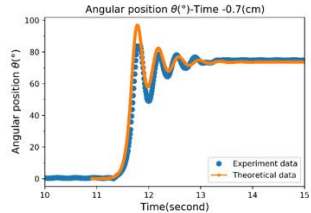
但當檢視鋼球之運動過程時，可發現不同質量之鋼球會導致鋼球之阻力改變，經過計算，便可發現鋼球質量與阻力係數 **b** (阻力項: $F = -bv$) 成正相關。

阻力係數比較

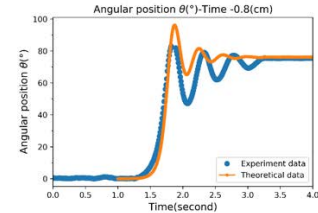
阻力係數與鋼球質量呈正相關



$b = 0.0035$



$b = 0.006$



$b = 0.015$

柒、 結論

- 一、我們深入地探討球的動態過程，並進行更進一步分析，並加入不同圓環半徑、裝置傾斜角度或改變軌道材質、形狀等變因，探討這些變因對球的平衡位置、動態過程產生之影響並與理論、模擬進行比較，獲得理論數值與實驗數據高度吻合的結果，並深入探討誤差對實驗所帶來之影響。
- 二、經過多次的實驗裝置的改良以及理論模擬的修正與加強，我們可以獲得更穩定的實驗數據，同時計算出更符合真實情境的理論模擬，進行討論比較。
- 三、實驗裝置經過幾次的改良，最後採用以上端支架固定轉軸的方式，同時在裝置的上下端皆使用較好的培林之後可以達到極佳的穩定轉動，甚至發生達到臨界轉速之後，鋼球仍處於不穩定平衡而停在下方的現象，此時需給予一個輕微擾動，才會發生上升的轉動振盪。
- 四、鋼球在圓環上的運動大致分成三個階段：上升階段、振盪階段、穩定階段，上升階段的實驗數據與模擬的結果非常吻合；振盪階段的實驗數據與模擬計算有較大差異，經過 α 修正(轉軸偏差)與 κ 修正(考慮鋼球體積)，可看出漸趨符合實驗數值；穩定階段由原來的相對靜止修正為小幅度的穩定振盪，也可由 α 修正模擬出相似的結果。
- 五、我們參考期刊論文(Lisandro A Raviola.(2017). Eur. J. Phys. 38 015005.)理論推導獲得的 α 修正理論結果，惟該論文中並沒有實驗數據驗證，我們進行相關的實驗，獲得的數據與理論計算所得相當吻合，可進一步驗證論文的預測相當正確。
- 六、最後獲得的阻尼係數可看出與質量呈現正相關的趨勢，可惜目前還不能得到確定的原因，只能推測可能是軌道形狀與鋼球的接觸點可能因為鋼球質量增加而造成阻力變大，未來可以設計不同軌道形狀(U 型與 V 形軌道)進行探討。
- 七、 α 修正的理論模擬與實驗數值都顯示最後的穩定階段發生的小幅度穩定振盪居然與圓環轉速以及鋼球質量無關，僅與圓環軌道的微小傾斜角度有關。

捌、 參考資料及其他

- 一、Lisandro A Raviola, Maximiliano E Véliz, Horacio D Salomone, Néstor A Olivieri and Eduardo E Rodríguez. (2017) The bead on a rotating hoop revisited: an unexpected resonance. Eur. J. Phys. 38 015005.
- 二、Cross R. (2016) Coulomb's law for rolling friction Am. J. Phys. 84 221
- 三、Ochoa F and Clavijo J. (2006) Bead, hoop and spring as a classical spontaneous symmetry breaking problem Eur. J. Phys. 27 1277

【評語】 160010

雖然過去已有不少類似的研究工作，但作者改進過去的實驗與理論分析，簡易自製實驗裝置，而能讀取實驗主軸數據。紀錄鋼球的運動軌跡，據以分析鋼球高度的變化。經過實驗數據考慮轉軸偏差與鋼球體積的修正增加了對此現象的理解。