

2022 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	160006
參展科別	物理與天文學
作品名稱	黏滯流體與固態粒子對馬克士威爾滾輪的物理 影響及探討
得獎獎項	三等獎

就讀學校 新北市立板橋高級中學

指導教師 李瑋舒、李柏翰

作者姓名 李騏維

關鍵詞 邊界層、力矩、黏滯係數

作者簡介



我是李騏維，新北市立板橋高中三年級。「科展」這兩字曾經離我十分遙遠，但隨著對實驗越來越熱衷的那股熱忱，高二開始一頭栽入科展研究，從校內競爭到全國科展，並 TISF 有幸能通過初審。非常感謝李瑋舒老師對我的指導以及李柏翰老師總是在我科展迷失方向時提點我，也感謝母親以及許多人的陪伴與支持。很開心能參與科展，能為自己人生寫下精彩無悔的一頁。

摘要

將黏滯流體放入空心帶軸圓盤中(稱作黏流滾擺)，以繩繞軸芯捲至 25.17 cm 高度落下，實驗發現填充量為 22.500 %~87.500 %時，相對其他填充量以非常緩慢的速度落下且不會彈跳，而圓盤角速度具有週期性，並整合參考文獻理論公式分析邊界層對圓盤運動的趨勢，發現若邊界層變薄則讓液體質心處於 $\alpha > 0$ ，滾擺加速滾動，若變厚，則反之。當釋放高度大於 8.55cm 無彈跳填充範圍將維持在 22.500 %~87.500 %，不受高度影響。而黏流滾擺落下的時間約為空圓盤的 122 倍。改以黏滯性較小的水作為填充液體則不存在無彈跳填充區域。若改以填充混和質量濃度比例 100:6 及 100:20 的黏滯流體與水，則可發現臨界線向左偏移。若填充液體改為固態粒子(細沙)，實驗發現填充比例為 4.242 %~93.196 %時，細沙滾擺會固定於高空而不落下。比較黏滯流體、水、細沙三種填充物質，黏滯流體緩衝效果與穩定性最佳。

Abstract

The wheel that hung in the air with two strings and an axle, with viscous fluid in different filling ratios, is set up to release at the initial height as 25.17 cm. According to the experimental results in the condition that the filling ratios ranges from 22.500% to 87.500%, the wheel drops at a very slow speed and does not rise upward, meanwhile the angular velocity of the wheel illustrates regular vibration with period. In considering the theoretic work in reference [7-12] which analyze the tendency of the wheel motion related to the boundary layer, we found that if the boundary layer becomes thinner and the center of mass of the liquid locates at the region of $\alpha > 0$, the wheel accelerates by rolling, and and vice versa. This phenomenon of bounce-free remains as long when the wheel is released at a height of 8.55 cm or higher. Furthermore, the time that the wheel fall down from top to the bottom is 122 times larger than that of an empty wheel. Considering the water, being less viscosity, as the filling liquid, we disclosed the fact that the wheel, once released, is able to rise upward. Then, if we change the concentration of viscous fluid with water, for examples the mass ratio of 100:6 and 100:20, we find that the point of phase transition shifts to left and depend on the concentration. After changing the material as sand, in addition, the wheel will suspend in the air when the filling ratio is about 4.2%~93.2%. All the experiments with viscous fluid, water, and fine sand, illustrate that the wheel with viscous fluid is then able to exhibit the best effect of buffering and stability.

壹、研究動機

直上直下的溜溜球是我們日常普遍隨手可得的玩具，而最傳統的溜溜球，它的軸心與圓盤是無分離的，所以無論是向下丟還是靜止釋放，都不需要額外的力量向上拉之，溜溜球會因角動量守恆的關係自動向上滾動。而馬克士威爾滾輪與傳統型溜溜球的物理原理大致相同，由側面觀看便是溜溜球的運動情形，如下圖 1，但馬克士威爾滾輪是由兩條線及實心圓盤所組成，相較於溜溜球會更加穩定。我突發奇想，若將滾擺由實心改為空心，並加入黏滯流體或其他不同介質，會產生什麼樣的物理現象？

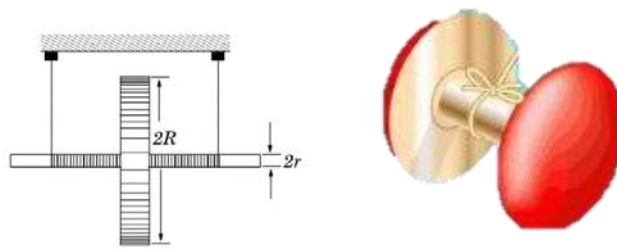


圖 1 由左至右分別是馬克士威爾滾輪示意圖與傳統型溜溜球

貳、研究目的

- 一、探討空圓盤的運動情形。
- 二、探討不同填充比例的黏滯流體滾擺在同高度釋放的運動情形。
- 三、探討黏流滾擺無彈跳範圍的週期性。
- 四、理論分析滾擺週期性運動
- 五、探討不同釋放高度對黏流滾擺的影響。
- 六、探討滾擺填充水的運動情形。
- 七、探討不同濃度的黏滯流體對彈跳次數的影響。
- 八、探討滾擺填充細沙的運動情形。

參、研究設備及器材

表 1 實驗設備

編號	設備名稱	用途	圖示
1	不鏽鋼棒軸芯	支撐圓盤運動	
2	純蜂蜜與紅細沙	待測物: 黏滯流體 固態粒子	
3	側面:Iphone11 MWM22TA/A 慢 動作:1080pHD/240fps/480MB 錄影:4K/30fps/400MB	錄影紀錄 TRACKER 分析	
4	角鐵架(含釋放帶裝置) (寬 26.50cm、高 48.00cm、長 30.80cm)	支撐固定整個 滾擺運作	
5	電子秤	測量物品重量	
6	(大)透明塑膠圓盤直徑 9.00cm	裝載液體	
7	無限力量感應器 Pasco PS-3202	測繩張力	



8	軟體分析:Tracker;Auto CAD2022	圓盤追蹤;質心尋找		
---	---------------------------	-----------	-------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

表 2-1 液體裝置變因及各規格表

編號	液體種類	液體轉動慣量	液體質量	總轉動慣量	液體佔圓盤容積百分比
單位	--	(g · cm ²)	(g)	(g · cm ²)	(%)
X00/Y00	空圓盤	0	0.000	815.010	0.000
X(n) X:共 20 組	蜂蜜	I _液 計算 (肆-二-(三)-3.)	5n%·168.622	815.010+I _液	5n%
Y(n) Y:共 20 組	水	I _液 計算 (肆-二-(三)-3.)	5n%·121.573	815.010+I _液	5n%

表 2-2 細沙各規格表

編號	待測物	質量	佔圓盤容積百分比
單位	--	(g)	(%)
S(n) S:共 22 組	細沙	4+0.5·(n-1)	$\frac{m_{\text{細沙}}}{182.678}$
S008-1		7.600	4.160
S333-1		170.400	93.278
S334		170.500	93.333

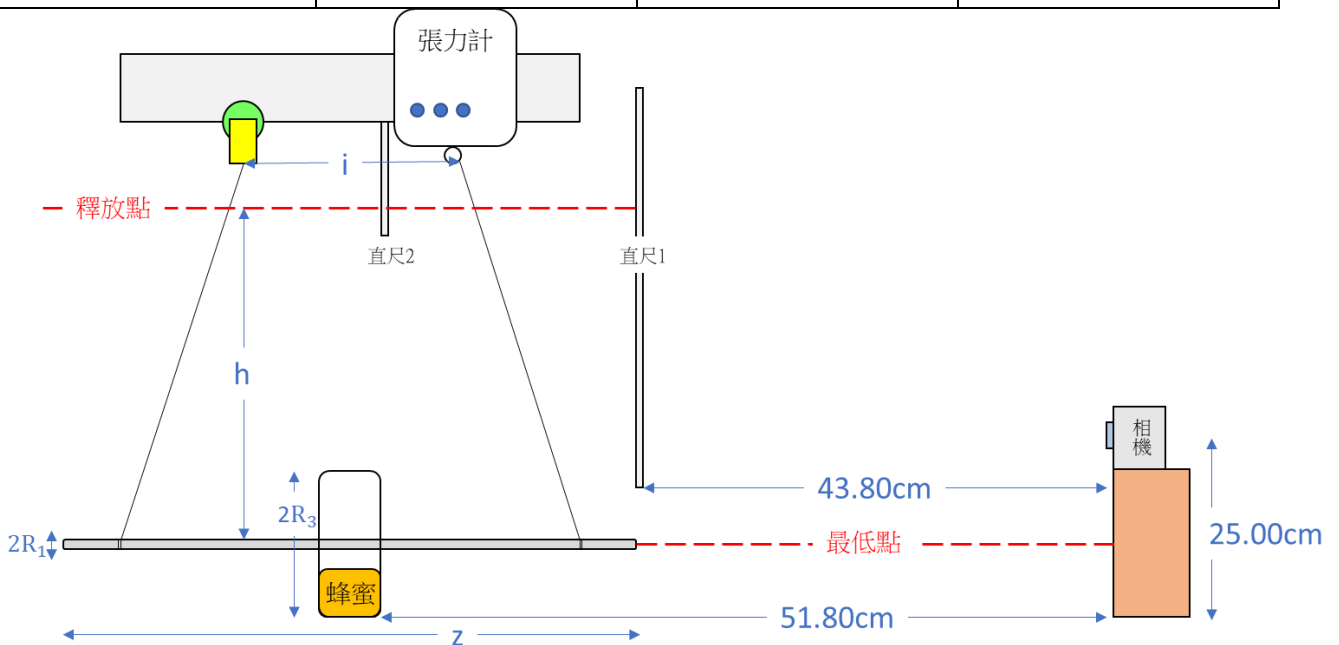


圖 2 裝置未捲繩時的正面示意圖

裝置向上捲時，線與線不重疊，如此會產生線捲越多時，線傾斜的方向會愈朝向中心圓盤，為確保捲到固定高度時，線的傾斜角度不會越大，故將綁線點靠近兩側端點處。

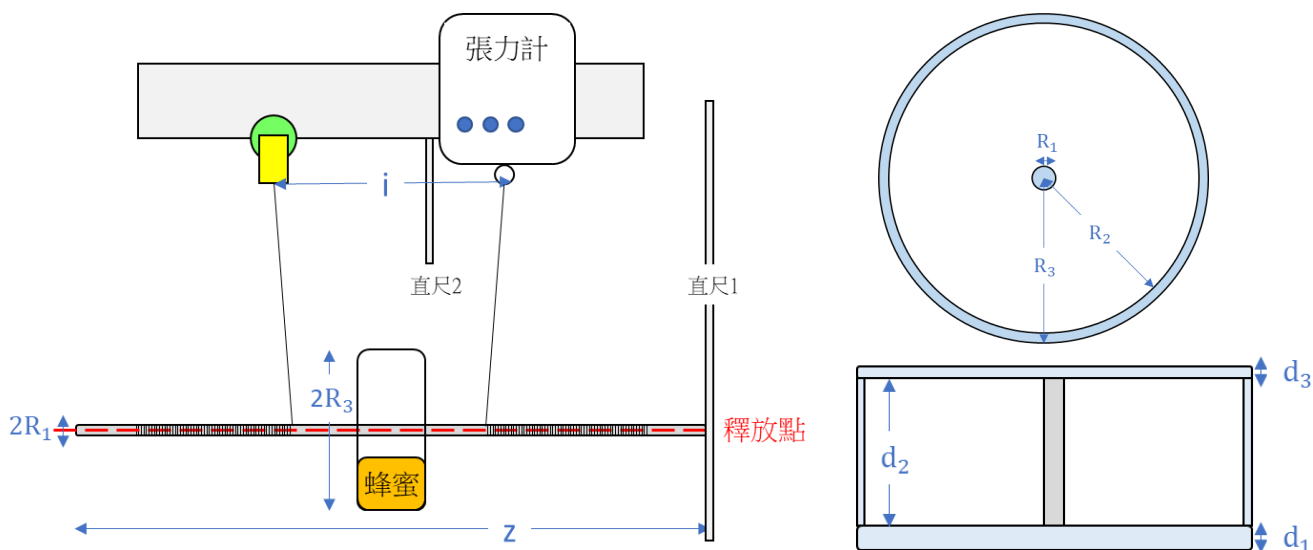


圖 3 左圖為裝置釋放瞬間捲繩正面示意圖。右上圖為空圓盤軸心俯視圖， R_1 為軸心半徑、 R_2 為圓盤內側半徑、 R_3 為外側半徑。右下圖為空圓盤側面透視圖， d_1 為圓盤底部厚度、 d_2 為圓盤中間空氣塊厚度、 d_3 為圓盤上方厚度

表 3 實驗控制變因

磁鐵夾相距 i	7.50cm	兩條繩質量	0.390g	繩切面直徑	0.10cm
空圓盤質量	53.260g	空圓盤直徑 R_3	9.00cm	空圓盤內側半徑 R_2	4.10cm
蜂蜜密度 D	1.38g/cm ³	塑膠密度 ρ	1.00g/cm ³	落下高度 $h-h_1$	25.17cm
棒軸長 Z	18.00cm	棒軸半徑 R_1	0.25cm	棒軸質量	3.000g
d_1	0.30cm	d_2	2.30cm	d_3	0.10cm

肆、研究過程及方法

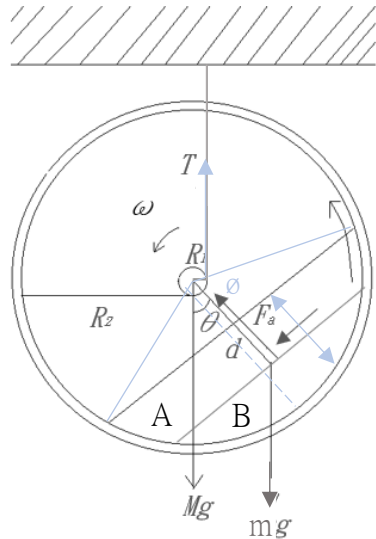
一、研究過程及方法

- (一) 將直徑 9.00cm 的透明塑膠空圓盤，在雙側中心點利用高溫鐵棒熔出直徑 0.50cm 圓洞。
- (二) 先將鐵棒穿入圓盤底部的圓洞，把圓洞縫隙利用雙面膠填滿(不讓液體流出)，再置入 5.000%的黏滯流體，並使用止瀉帶把旋轉處黏合(不讓液體滲出)，再將空圓盤蓋子蓋上，並把蓋上圓洞縫隙用雙面膠填滿(不讓液體流出)，盤面貼上

標示點，以便分析，並架設好攝影機(如圖 2 系統圖)。

- (三) 接著把兩條玉線分別纏在各距鐵棒兩端 2.00cm 處，並捲至垂直高度 25.17cm 處，由釋放帶固定，當蜂蜜完全靜置於圓盤底部後釋放裝置，影片圓盤的路徑與旋轉透過 Tracker 分析，液體質心位置則使用 Auto CAD2022 計算與尋找。
- (四) 填充不同比例的黏滯流體，並重複步驟(二)(三)。
- (五) 改變填充黏滯流體的濃度，並重複步驟(二)(三)(四)。
- (六) 改變釋放高度，並重複步驟(二)(三)(四)。
- (七) 將黏滯流體改成黏滯係數較小的水，並重覆步驟(二)(三)(四)。
- (八) 將黏滯流體改成填充細沙，並重複步驟(二)(三)(四)。
- (九) 探討空圓盤、黏流滾擺、水滾擺、細沙滾擺的緩衝效果。

二、馬克士威爾滾輪修正成黏流滾擺的物理原理



- ω : 圓盤相對軸心角速度
- θ : 黏滯流體質心相對軸心的鉛直夾角
- d : 黏滯流體質心與軸心的距離
- g : 重力加速度
- M : 滾擺扣除填充流體的質量
- m : 黏滯流體質量
- ϕ : 黏滯流體側面劣弓形與圓心的夾角一半
- R_1 : 軸的半徑
- R_2 : 圓盤內部半徑
- A : 上層蜂蜜
- B : 下層蜂蜜
- T : 繩張力
- F_a : 液體受到的向心力
- y : 相對液面最深處的高度

圖 4 黏流滾擺力圖及物理量說明

(一) 能量

$$E = (Mgh + mg(h - d\cos\theta)) + \frac{1}{2}(M + m)v_{com}^2 + \frac{1}{2}I_{圓}\omega^2 + \frac{1}{2}I_{液}\omega^2 + \text{液體內能}$$

由純滾動原理得出 $v_{com} = R_1\omega$

$$E = (Mgh + mg(h - d\cos\theta)) + \frac{1}{2}\omega^2 (R_1^2(M + m) + I_{圓}) + \frac{1}{2}I_{液}\omega^2 + \text{液體內能} \quad (1)$$

(二) 力矩

$$\tau = TR_1 - mgdsin\theta = I_{圓}\alpha_{圓} + I_{液}\alpha_{液} \quad (2)$$

(三) 黏滯力

$$F_{黏} = \mu A \frac{du}{dy} \quad (3)$$

$F_{黏}$:黏滯力/ μ :黏滯係數/ u :平行液面的速度分量/ y :相對於液面最深處的高度/ A :平行速度方向的面積

(四) 轉動慣量

1. 棒軸轉動慣量(參數對應如圖 3):

$$\frac{1}{2}m_{棒}R_1^2 \quad (4)$$

2. 空圓盤轉動慣量(參數對應如圖 3):

$$\frac{1}{2}\pi\rho(d_3 + d_1) \cdot (R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2}\pi\rho(d_1 + d_2 + d_3)(R_3^4 - R_2^4) \quad (5)$$

3. 液體靜置轉動慣量(參數對應如圖 4):

表 4 液體靜置轉動慣量對應表(填充比例未過半與過半)

	填充比例未過半
液體轉動慣量	$\frac{1}{6} \frac{mR_2^2}{2\phi - \sin 2\phi} (6\phi - 2\sin 2\phi - \sin 2\phi \cos 2\phi)$
質量對應 2ϕ 關係式	$m = \frac{1}{2} R_2^2 D d_2 (2\phi - \sin 2\phi)$
	填充比例過半
液體轉動慣量	$\frac{1}{2} \pi D d_2 (R_2^4 - R_1^4) - \frac{1}{6} \frac{(\pi D d_2 (R_2^2 - R_1^2) - m) R_2^2}{2\phi - \sin 2\phi} (6\phi - 2\sin 2\phi - \sin 2\phi \cos 2\phi)$
質量對應 2ϕ 關係式	$m = D d_2 \left(\pi R_2^2 - \left(\frac{1}{2} R_2^2 (2\phi - \sin 2\phi) \right) \right)$

伍、研究結果

一、空圓盤運動情形(釋放高度 25.17cm)

彈跳次數計算方式：計算方式滾擺到達最低點後可上旋超過一圈則納入彈跳次數，也就是軸心周長 0.01cm(簡稱定義高度，如下圖 5(a)紅線)。

空圓盤參數如下表，物理量如下圖 5。

名稱	編號	空圓盤轉動慣量($g \cdot cm^2$)	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
空圓盤	X00	815.010	0.000	0.000	10

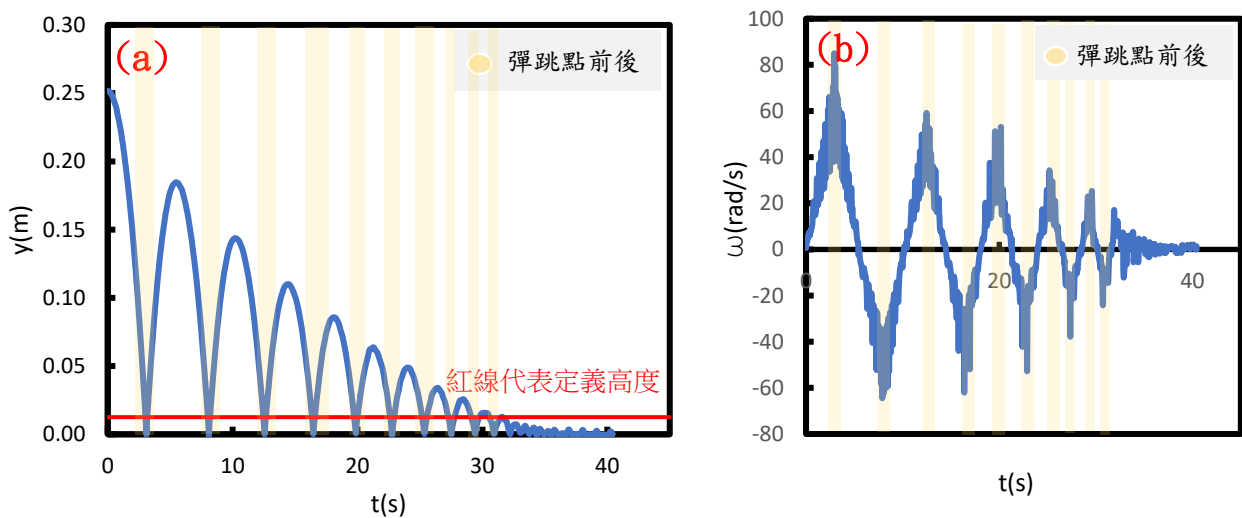


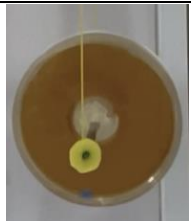


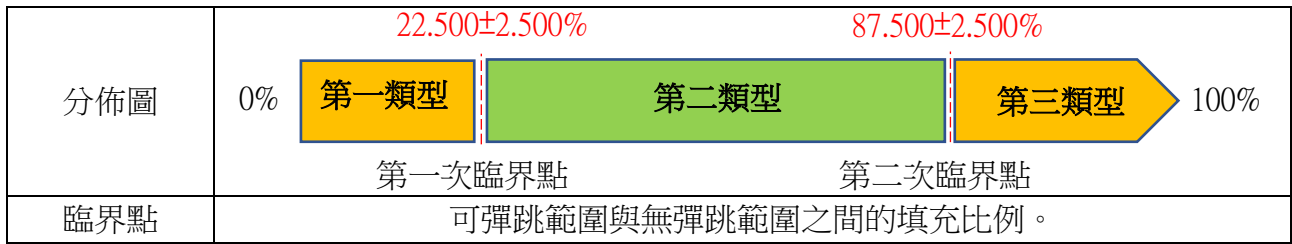
圖 5 (a)、(b)分別為空圓盤 X00 $y-t$ 圖與 $\omega-t$ 圖

二、填充不同比例的黏流滾擺運動情形(釋放高度 25.17cm，定溫 $23.6^\circ C$ ， $\eta = 5.58 Pa \cdot s$)

黏流滾擺依照填充過半與否與彈跳情況分成下列三種類型

表 5 黏滯流體的類型、名稱、填充比例對照圖表

類型	第一類型	第二類型	第三類型
名稱	未過半且能彈跳	無彈跳	過半且能彈跳
填充比例(%)	0.000~22.500±2.500	22.500±2.500~87.500±2.500	87.500±2.500~100.000
擇一樣品圖片與影片來呈現	 5.000%(X01)原速影片	 50.000%(X10)原速影片	 99.980%(X20)原速影片



以下每一種類型各挑一項樣品來呈現實驗數據。

(一) 黏流滾擺第一類型(未過半且可彈跳)

類型	名稱	編號	液體靜置轉動慣量($g \cdot cm^2$)	空圓盤轉動慣量($g \cdot cm^2$)	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
一	未過半且能彈跳	X01	121.279	815.010	5.000	8.431	14

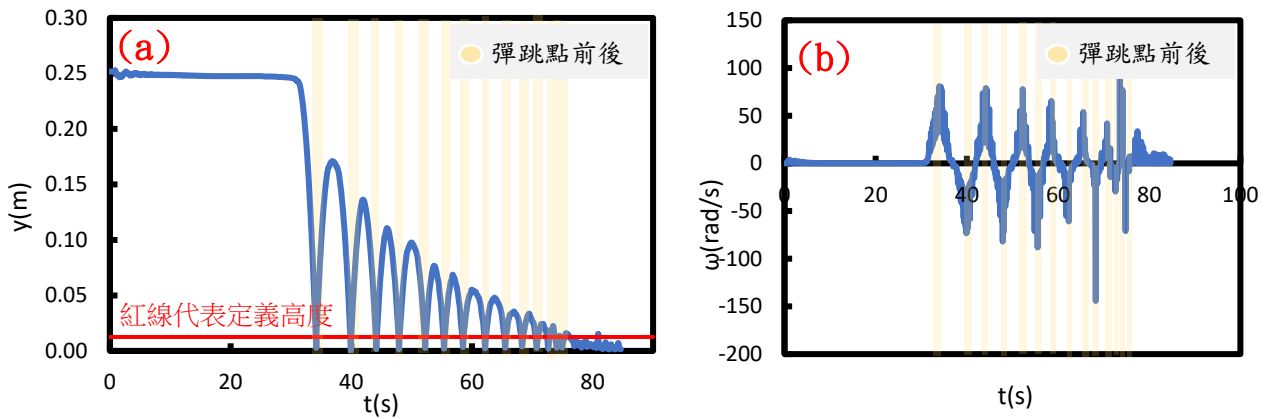


圖 6 (a)、(b)分別為第一類型填充比例 5.000%(X01)的 y-t 圖與 ω -t 圖

(二) 黏流滾擺第二類型(無彈跳)

類型	名稱	編號	液體靜置轉動慣量($g \cdot cm^2$)	空圓盤轉動慣量($g \cdot cm^2$)	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
二	無彈跳	X10	707.019	815.010	50.000	84.311	0

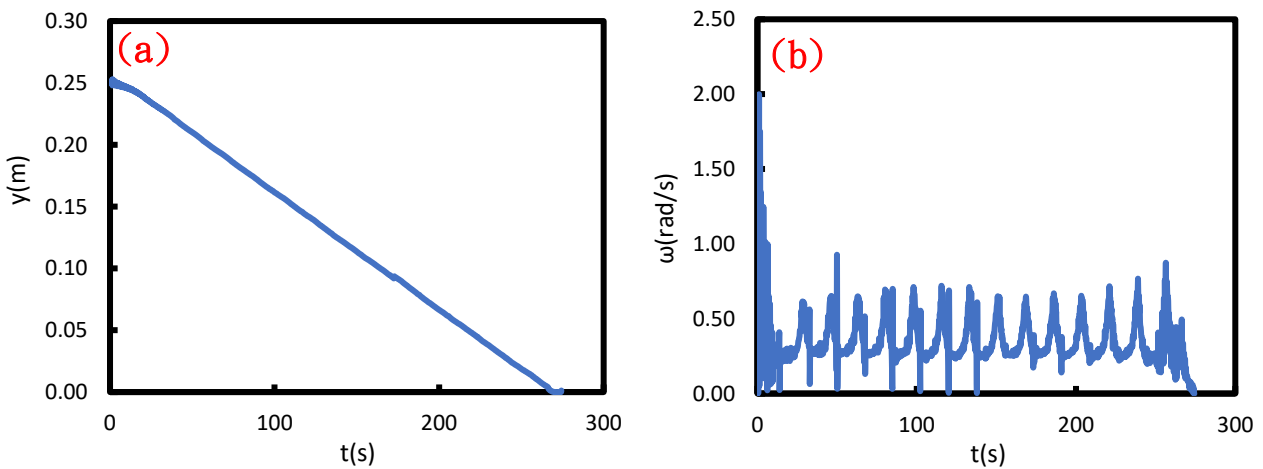


圖 7 (a)、(b)分別為第二類型填充比例 50.000%(X10)的 y-t 圖與 ω -t 圖

(三) 黏流滾擺第三類型(過半且能彈跳)

類型	名稱	編號	液體靜置轉動慣量($g \cdot cm^2$)	空圓盤轉動慣量($g \cdot cm^2$)	填充比例 (%)	液體質量 (g)	彈跳次數
三	過半且能彈跳	X20	1422.250	815.010	99.980	168.588	14

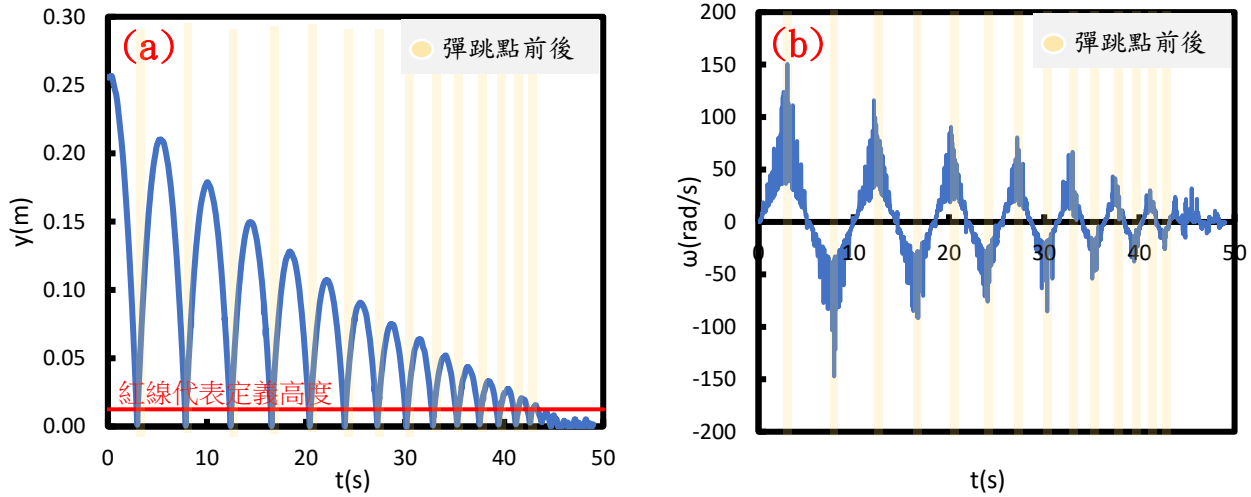


圖 8 (a)、(b)分別為第三類型填充比例 99.980%(X20)的 $y-t$ 圖與 $\omega-t$ 圖

三、填充不同比例的水滾擺運動情形

以下挑選與黏流滾擺呈現數據有相同填充比例來呈現。

(一) 水滾擺運動情形(與黏流滾擺第一類型 X01 有相同的填充比例)

填充液體	類型	編號	液體靜置轉動慣量($g \cdot cm^2$)	空圓盤轉動慣量($g \cdot cm^2$)	填充比例 (%)	液體質量 (g)	彈跳次數
水	對應黏流滾擺第一類	Y01	87.228	815.010	5.000	6.07	3

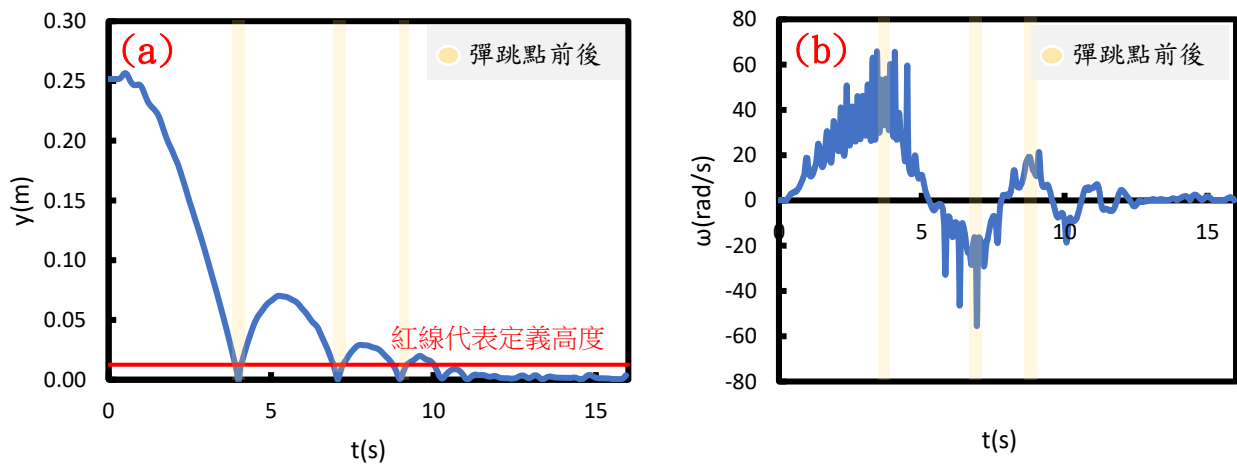


圖 9 (a)、(b)分別為填充比例 5.000%水滾擺(Y01)的 $y-t$ 圖與 $\omega-t$ 圖

(二) 水滾擺運動情形(與黏流滾擺第二類型 X10 有相同的填充比例)

填充液體	類型	編號	液體靜置轉動慣量($g \cdot cm^2$)	空圓盤轉動慣量($g \cdot cm^2$)	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
水	對應黏流滾擺第二類	Y10	510.790	815.010	50.000	60.79	3

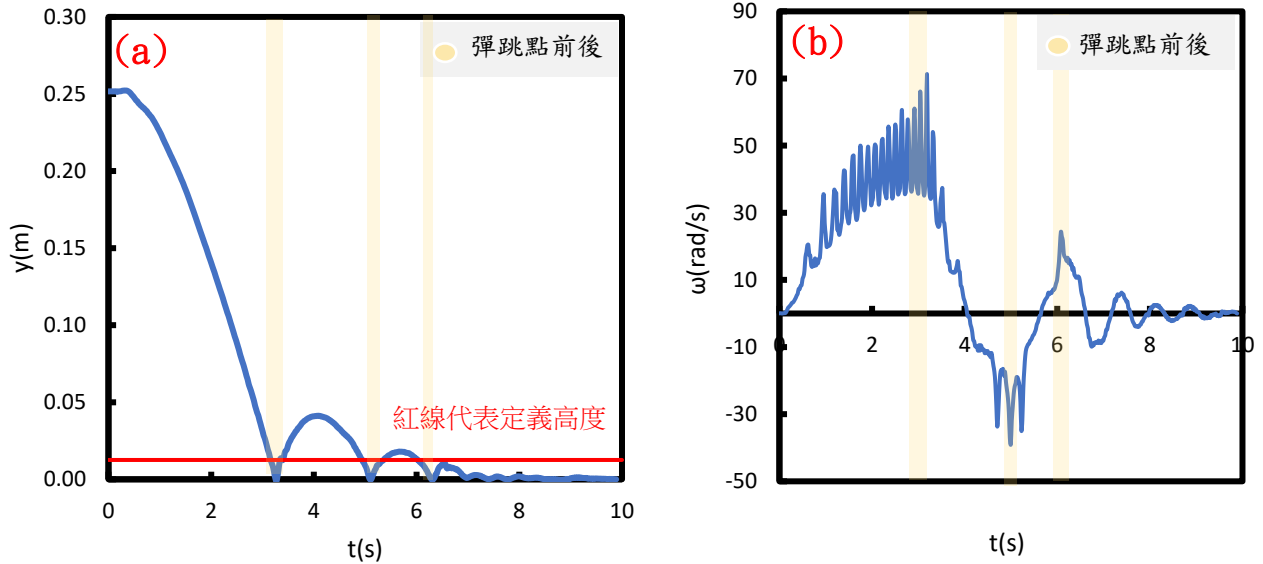


圖 10 (a)、(b)分別為填充比例 50.000%水滾擺(Y10)的 $y-t$ 圖與 $\omega-t$ 圖

(三) 水滾擺運動情形(與黏流滾擺第三類型 X20 有相同的填充比例)

填充液體	類型	編號	液體靜置轉動慣量($g \cdot cm^2$)	空圓盤轉動慣量($g \cdot cm^2$)	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
水	對應黏流滾擺第三類	Y20	1005.208	815.010	99.000	120.36	3

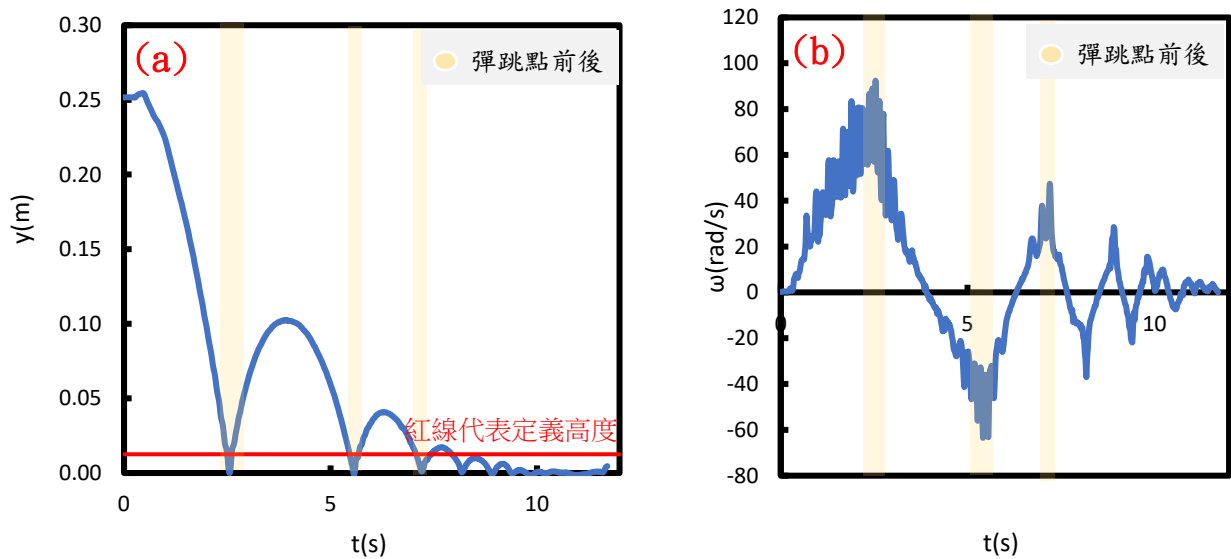


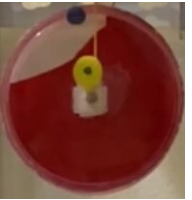

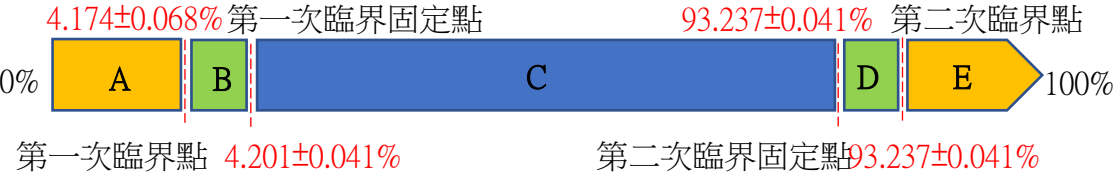


圖 11 (a)、(b)分別為填充比例 99.000%水滾擺(Y20)的 $y-t$ 圖與 $\omega-t$ 圖

四、填充不同比例細沙滾擺運動情形

表 6 細沙滾擺的類型、名稱、填充比例對照圖表

類型	A	B	C	D	E
名稱	未過半且能彈跳	未過半且無彈跳	中途即固定不動	已過半且無彈跳	已過半且能彈跳
填充比例(%)	0.000~4.174 ±0.068	4.174±0.068 ~4.201±0.041	4.201±0.041 ~93.237±0.041	93.237±0.041~ 93.237±0.041	93.237±0.041 ~100.000
擇一樣品圖片與影片來呈現	 2.463%(S002) 原速影片	 4.105%(S008) 原 速影片	 93.059%(S333) 原速影片	沙子過半之後與圓盤的摩擦力增大，使沙子不容易掉落，導致圓盤易高速轉動，不容易找到 D 區。	 94.154%(S335) 原速影片
分佈圖					
臨界固定點	跨過此填充比例，則滾擺將於落下途中固定住，無法降至最低點。				

以下每一種類型各挑一項樣品來呈現實驗數據。

(一) 細沙滾擺 A 類型(未過半且能彈跳)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	A(未過半且能彈跳)	S001	2.189	4.000	2

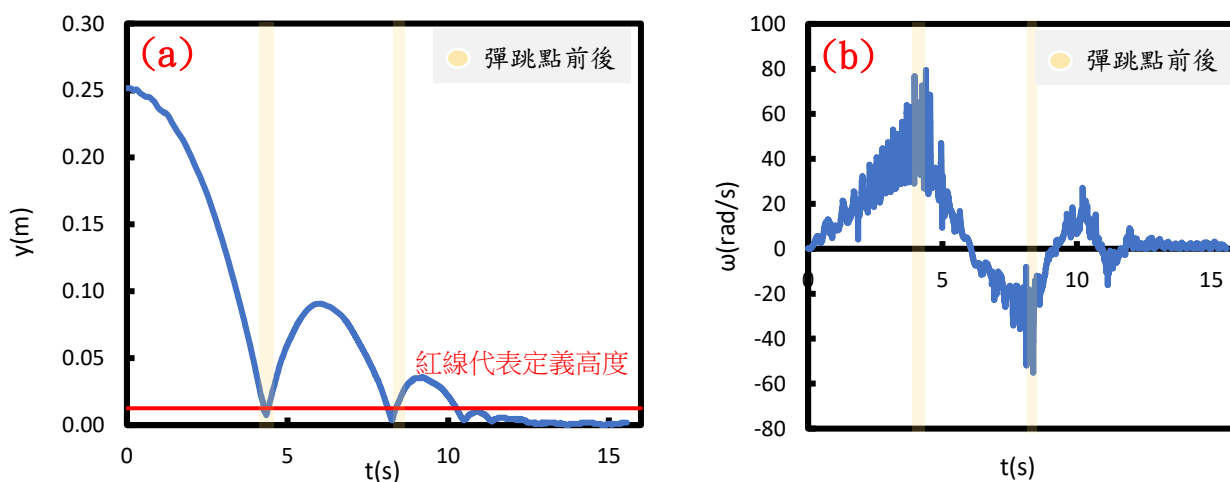


圖 12 (a)、(b)分別為 A 類型(未過半且能彈跳)填充比例 2.189%(S001)細沙滾擺 y-t 圖與 ω -t 圖

(二) 細沙滾擺 B 類型(未過半且無彈跳)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	B(未過半且無彈跳)	S008	4.105	7.500	0

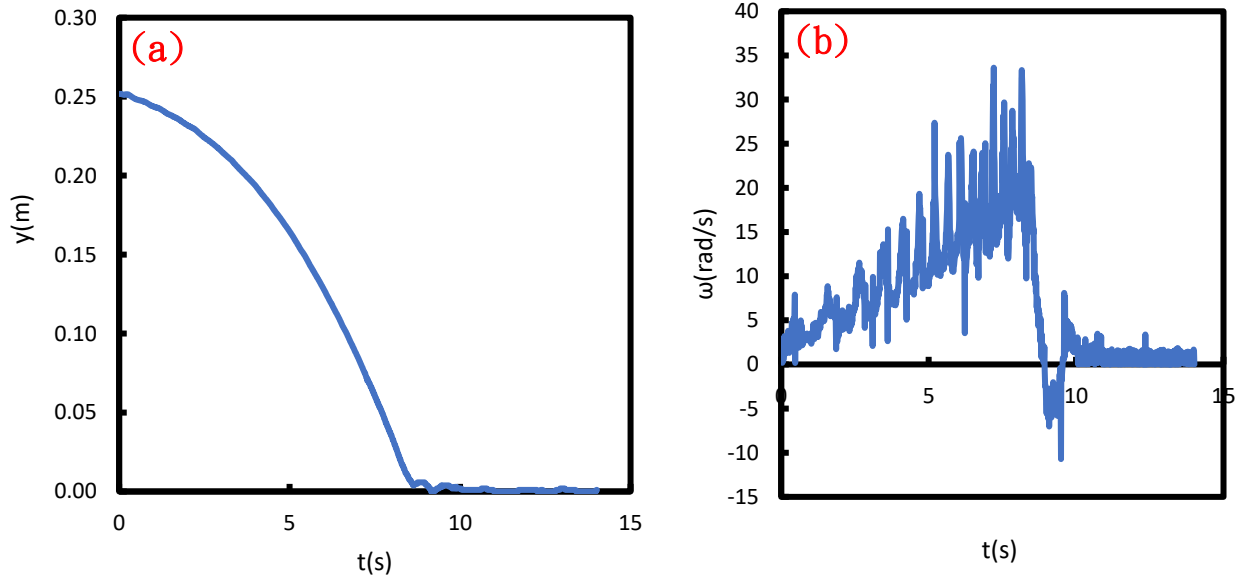


圖 13 (a)、(b)分別為 B 類型(未過半且無彈跳)填充比例 4.105%細沙滾擺(S008)y-t 圖與 ω -t 圖

(三) 細沙滾擺 C 類型(中途即固定不動)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	C(中途即固定不動)	S333	93.059	170.000	0

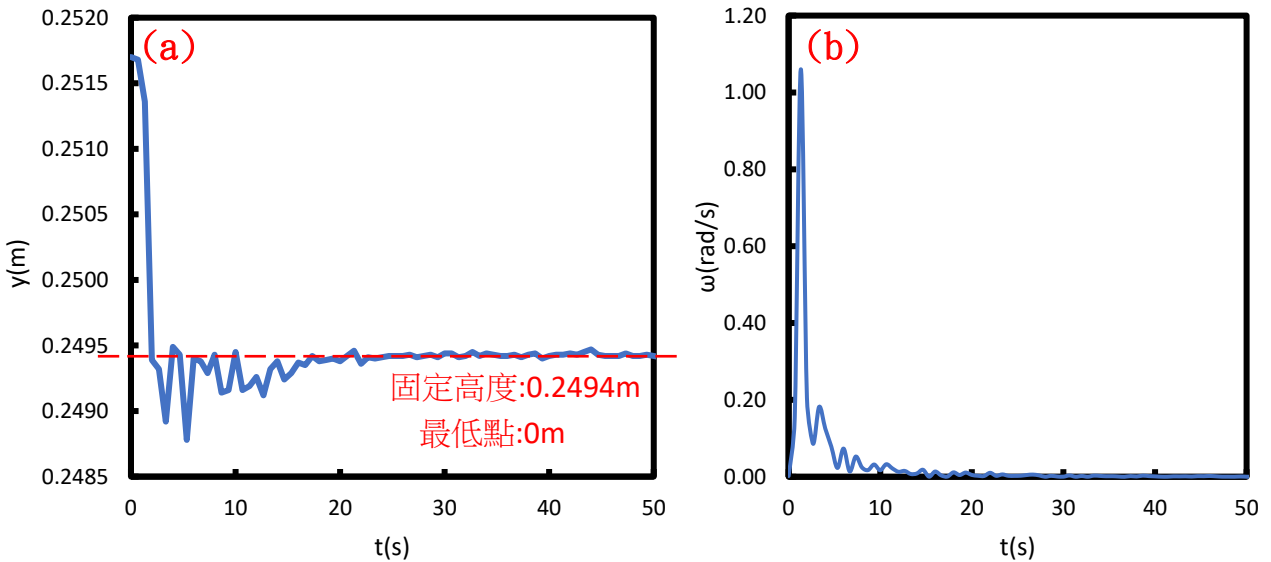


圖 14 (a)、(b)分別為 C 類型(中途即固定不動)填充比例 93.059%細沙滾擺(S333)y-t 圖與 ω -t 圖

(四) 細沙滾擺 E 類型(過半且能彈跳)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	E(過半且能彈跳)	S337	94.154	172.000	4

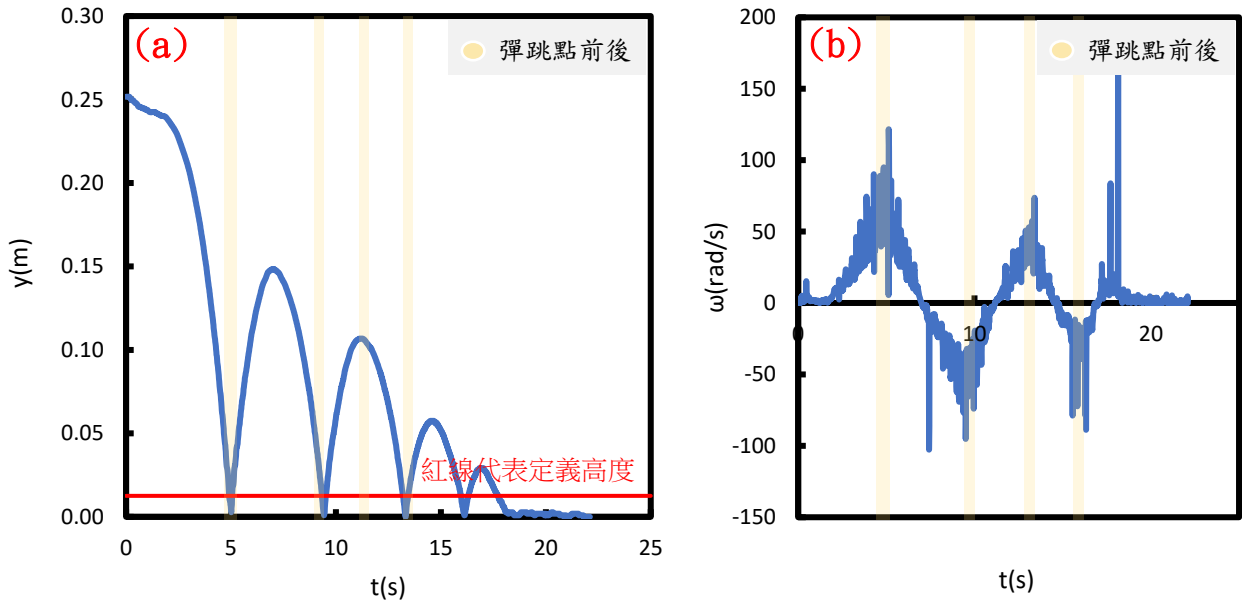


圖 15 (a)、(b)分別為 E 類型(過半且能彈跳)填充比例 94.154%細沙滾擺(S337)y-t 圖與 ω -t 圖

陸、討論

一、黏流滾擺彈跳次數與填充比例的關係

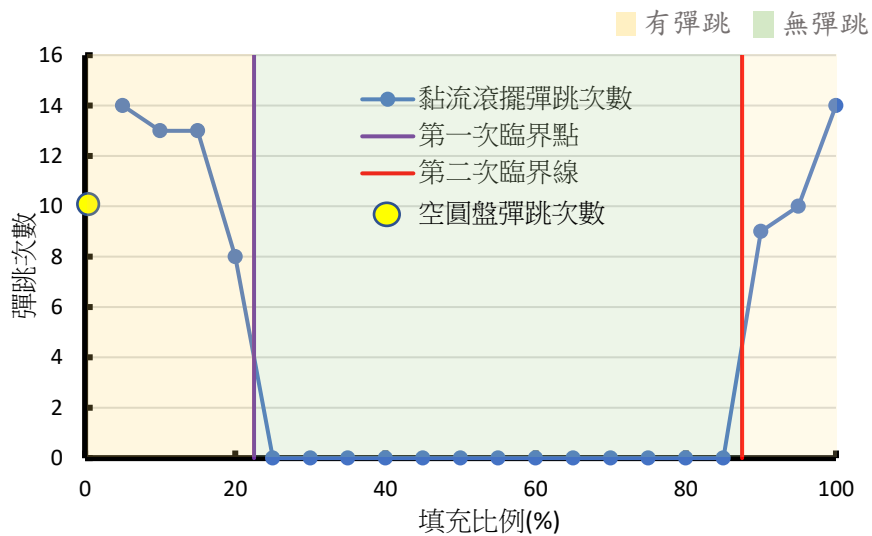


圖 16 黏流滾擺彈跳次數對應填充比例關係圖

黏滯流體填充比例增加至 $22.500 \pm 2.500(\%)$ 時，會從「未過半且能彈跳」變成「無彈跳」，此填充比例 $22.500 \pm 2.500(\%)$ 稱為**第一次臨界點**，越靠近臨界點的過程彈跳次數會減少。填充比例增加至 $87.500 \pm 2.500(\%)$ 時，會從「無彈跳」變成「過半且能彈跳」，此填充比例 $87.500 \pm 2.500(\%)$ 稱為**第二次臨界點**，隨著填充比例增加彈跳次數會跟著增加。

二、黏流滾擺有彈跳與無彈跳的影像分格圖

(一) 有彈跳影像分格圖

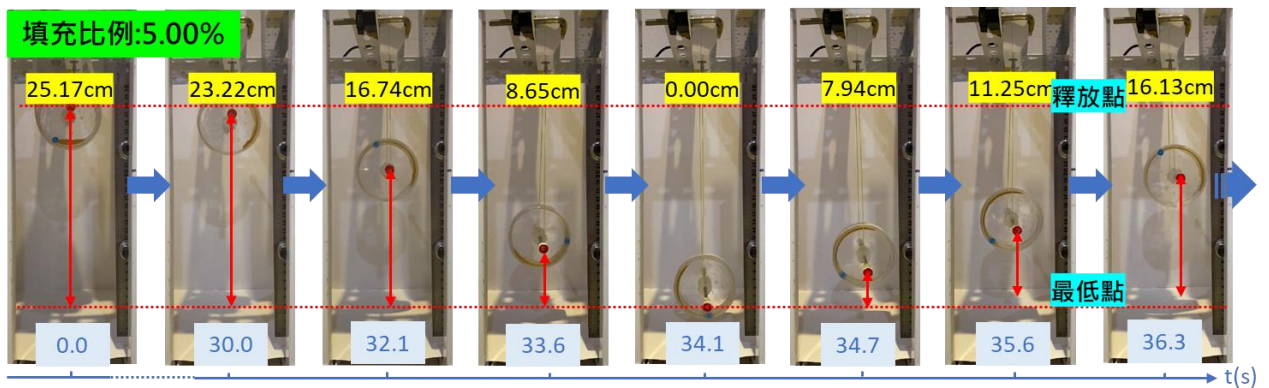


圖 17 填充比例 5.000(%)的(X01)運動情形影像分格圖

(二) 無彈跳影像分格圖

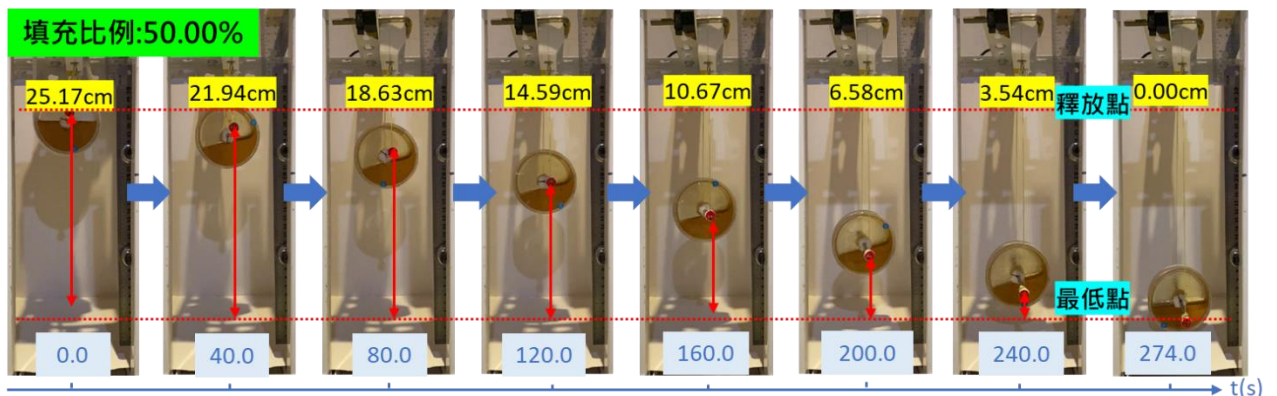


圖 18 填充比例 50.000(%)的(X10)運動情形影像分格圖

三、探討造成黏流滾擺三種類型的成因

(一) 平衡初始 b 線所夾的 θ_b 角

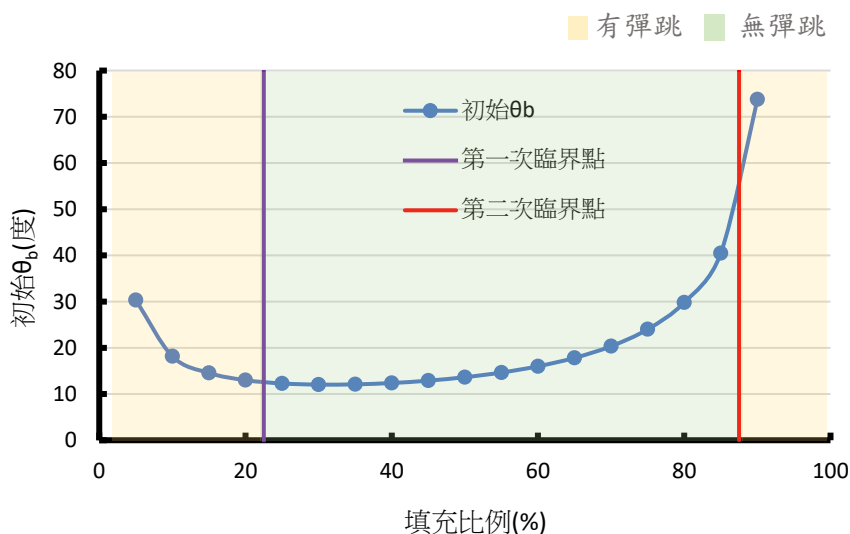


圖 19 初始 θ_b 與黏滯流體填充比例關係圖

滾擺受張力和液體重量兩個力矩，而隨著填充比例不同可找出一個力矩為 0 的角度，此角度為 b 線與垂直軸的夾角(稱為 θ_b)，如下圖 20，當液體質心轉過 b 線，圓盤從加速變成減速。由第 6 頁式子(2) $\tau = TR_1 - mgs \sin \theta d = I_{總} \alpha_{總}$ ，如果兩個角加速度為 0 時，可得 $TR_1 - mgs \sin \theta d = 0$ ，考量等角速度情況 $T = (m + M)g$ 與不同填充比例造成的 d 和 m，如下表 7，得 $\theta = \sin^{-1}(\frac{(M+m)R_1}{md})$ ，利用 Excel 計算模擬出圖 19 初始平衡角 θ_b 對應填充比例關係圖。

表 7 填充比例未過半及過半待測物質心與圓心距離 d 的計算

	填充比例未過半
待測物質心與圓心距離 d	$\frac{2}{3}R_2 \left(\frac{2 \sin \phi - \sin 2\phi \cos \phi}{2\phi - \sin 2\phi} \right)$
質量對應 ϕ 關係式	$m = Dh(R_2^2 \phi - R_2^2 \sin \phi \cos \phi)$
	填充比例過半
待測物質心與圓心距離 d	$\frac{2}{3}R_2 \sin \phi \left(\frac{\sin^2 \phi}{\pi - \phi + \sin \phi \cos \phi} \right)$
質量對應 ϕ 關係式	$m = Dh(\pi R_2^2 - R_2^2 \phi + R_2^2 \sin \phi \cos \phi)$

(二) 黏流滾擺可彈跳的物理運動情形(第一類型與第三類型)

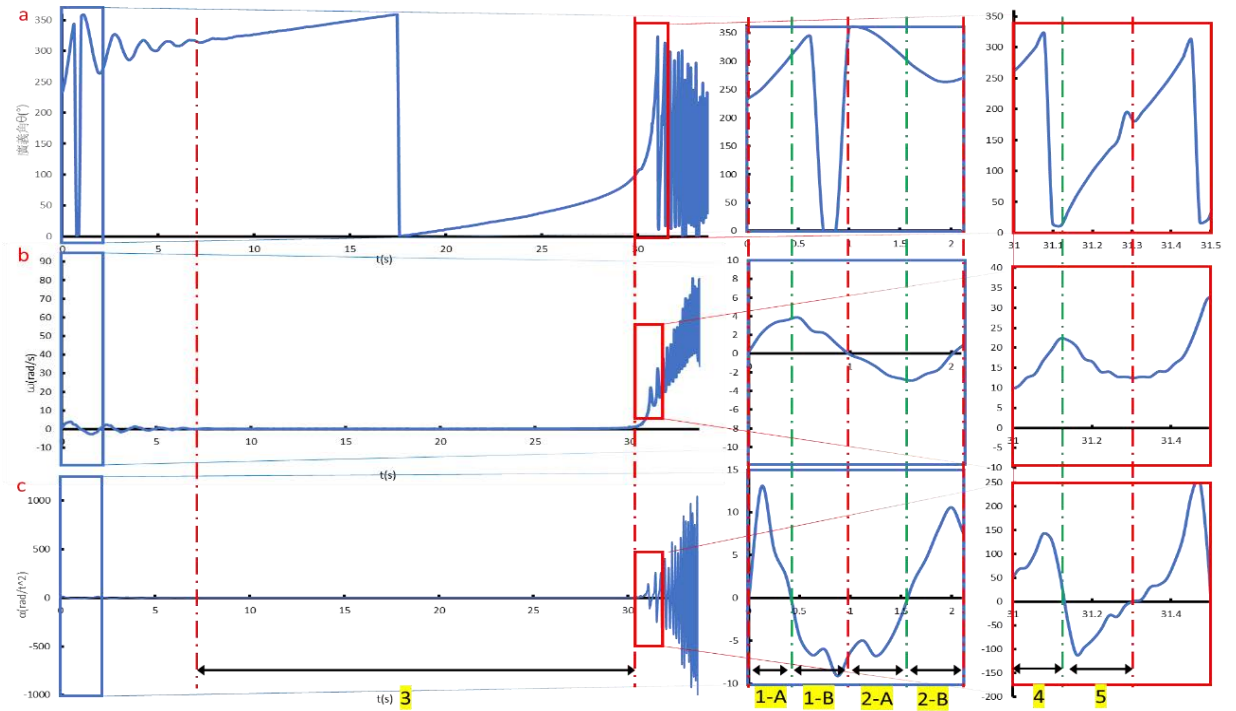


圖 20 黏流滾擺第一類型(未過半且能彈跳)填充比例 5.000%(X01)的物理量變化。a 圓盤廣義角對應時間圖 b 圓盤角速度對應時間圖 c 圓盤標示點角度對應時間圖到達第一次彈跳點之前。右側圖表由左至右分別為藍色框和紅色框的放大圖。

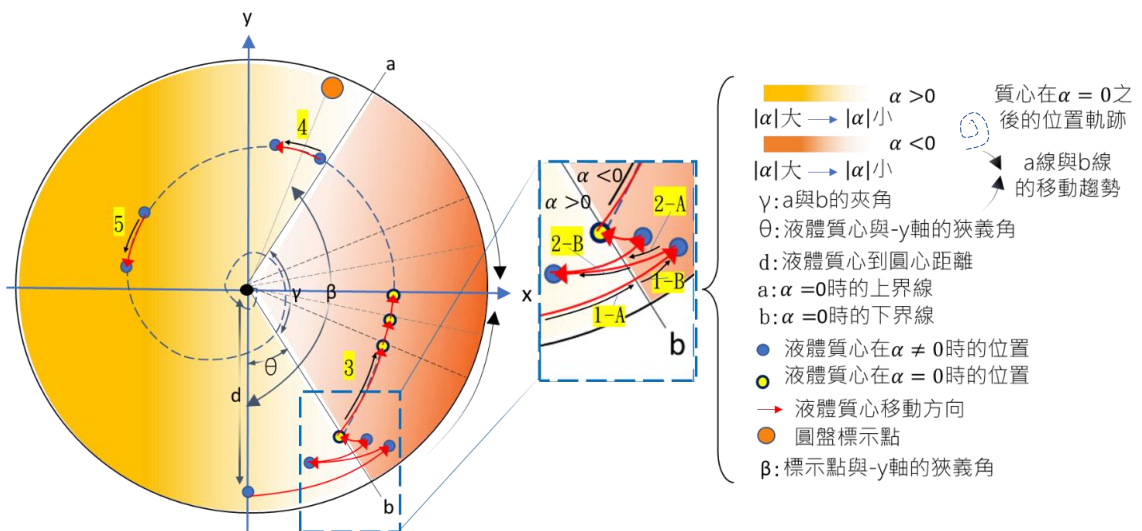


圖 21 黏流滾擺第一類型圓盤中液體質心與各物理量變動圖

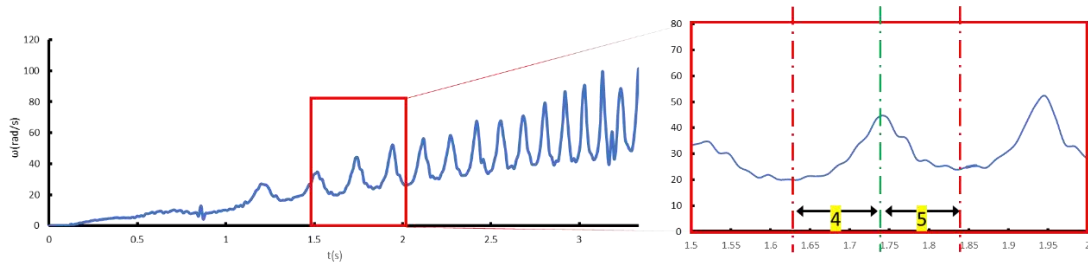
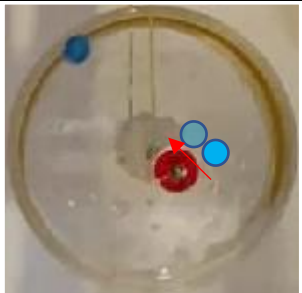

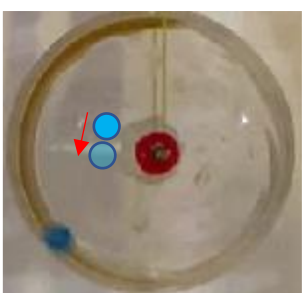



圖 22 黏流滾擺第三類型填充比例 90.000%(X18)的圓盤角速度-時間圖及部分放大圖
表 8 第一類型與第三類型特色區間的物理運動情形(填充比例 5.000%(X01)與 90.000%(X18)為例)

標示	● 質心位置 ● 前後瞬間質心位置 ← 質心行進方向 ● 圓盤標示點
公式	由於編號(1↔2)震盪時間極小，因此液體與圓盤的加速度可視為 $\alpha_{總}$ ，公式更正為： $\vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I_{圓}\vec{\alpha}_{圓} + I_{液}\vec{\alpha}_{液} \Rightarrow \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I_{總}\vec{\alpha}_{總}$ ；若為編號 3，由於圓盤等速轉動，相對於盤心無角加速度 $\alpha_{圓}$ ，公式更正為： $\vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I_{液}\vec{\alpha}_{液}$
編號	圖片(第一類型) 說明
1-A	<p>將線綁至於軸心右側，並使蜂蜜靜置一段時間，此時蜂蜜重力直接作用於軸心，力矩為 0。釋放後，液體由圖 19 黃色區域 ($\alpha > 0$) 到橘色區域 ($\alpha < 0$)，因液體質心力矩作用下，液體質心回到黃色區域 ($\alpha > 0$)，不斷重複 1、2 來回，最終趨近於 b 線 ($\alpha = 0$)。</p>
1-B	
2-A	
2-B	
1-A	$\theta \uparrow$ 、 $\sin \theta \uparrow$ 、 $ TR_1 > mgd \sin \theta \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha > 0$ 、 $ \alpha \downarrow$
1-B	$\theta \uparrow$ 、 $\sin \theta \uparrow$ 、 $ TR_1 < mgd \sin \theta \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha < 0$ 、 $ \alpha \uparrow$
2-A	$\theta \downarrow$ 、 $\sin \theta \downarrow$ 、 $ TR_1 < mgd \sin \theta \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha < 0$ 、 $ \alpha \downarrow$
2-B	$\theta \downarrow$ 、 $\sin \theta \downarrow$ 、 $ TR_1 > mgd \sin \theta \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha > 0$ 、 $ \alpha \uparrow$
1↔2	液體力矩會愈趨向等於繩張力矩，因此質心愈趨近於 b 線 $\Rightarrow \alpha = 0$ ， $(\alpha_{1-A}\Delta t_{1-A} + \alpha_{1-B}\Delta t_{1-B}) + (\alpha_{2-A}\Delta t_{2-A} + \alpha_{2-B}\Delta t_{2-B}) + (\alpha_{1-A}'\Delta t_{1-A}' + \alpha_{1-B}'\Delta t_{1-B}') + \dots = \Delta\omega = 0 \Rightarrow$ 等角速度(直至液體質心達 b 線)
3	<p>當液體質心達 b 線，圓盤旋轉的過程中，下層蜂蜜會不斷的殘留於圓壁上，因此使得黏滯流體的厚度變薄，造成黏滯力越大，附著於圓盤壁更強，圓盤等速上升，$\alpha_{圓} = 0$，且 $d \downarrow$ 使得 $\theta \uparrow$ 做平衡，此時 $\vec{T}R_1$、$m\vec{g}d \sin \theta$、$I_{液}\vec{\alpha}_{液}$ 達動平衡，得 $\vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta - I_{液}\vec{\alpha}_{液} = 0$。</p> <p>第一類型：$\because m$ 小 $\therefore y$ 小 $\Rightarrow \because F_{黏} \propto \frac{1}{y} \therefore F_{黏}$ 大，所以相對於無彈跳類型質心容易爬升至 $\theta = 90^\circ$ (加速點)。</p>
說明	如圖 19，可發現第三類型初始 θ_b ，幾乎不存在，甚至是非常靠近 90° ，到達加速點所需時間更短，或是釋放後直接加速，因此第三類型無編號 1、2、3。
編號	圖片(第一類型) 圖片(第三類型) 說明

4			<p>當液體質心到達 $\theta = 90^\circ$ 之後，會開始加速，若當液體質心的切線加速度向上時，繩張力舉會變大，進而影響滾擺加速。</p>
5			<p>當液體質心轉至左側時，因液體質心加速度使繩張力矩變小，$\alpha < 0$。</p>

(三) 黏流滾擺無彈跳的物理運動情形(第二類型)

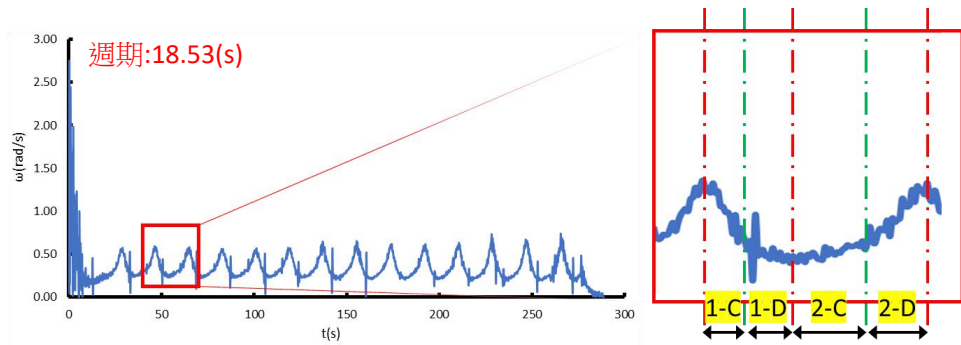


圖 23 黏流滾擺第二類型(無彈跳)填充比例 45.000%(X09)的角速度-時間圖

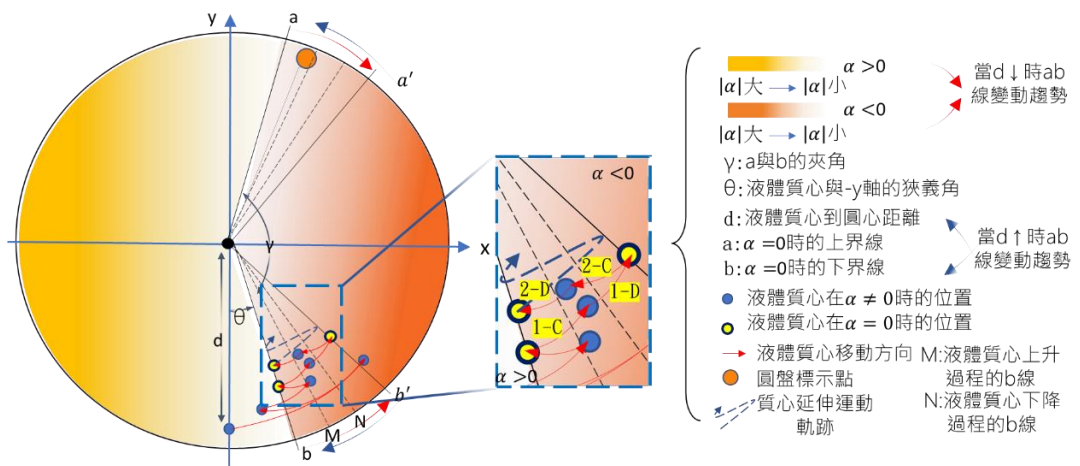

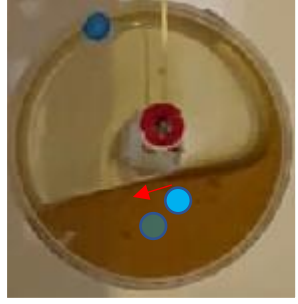


圖 24 黏流滾擺第二類型(無彈跳)圓盤中液體質心與各物理量變動圖

表 9 黏流滾擺第二類型(無彈跳)特色區間物理運動情形(填充比例 45.000%(X09)為例)

標示	● 質心位置	○ 下一瞬間質心位置	← 質心行進方向	● 圓盤標示點	
編號	圖片		說明		
1-C			當液體質心到達 b 線時，因下方液體不斷殘留於圓壁上，使得 d 變小， θ_b 上升，而液體質心初始上升速度大於 b 線(圖中 M 線)上升速度，因此順力矩大於逆力矩， $\alpha < 0$ ；液體質心後期上升速度小於 b 線上升速度，因此在質心最高處 b' 線重合，此時 $\alpha = 0$ 。		
1-D					
2-C			但由於黏滯力仍小於重力，因此液體再次滑落，而由於液體的滑落使蜂蜜聚集(d 變大)，因此 θ_b 又變小，而液體質心初始下降速度大於 b' 線(圖中 N 線)下降速度，因此逆力矩大於順力矩 $\alpha > 0$ ；液體質心後期下降速度小於 b' 線下降速度，因此在質心最低處 b 線重合，此時 $\alpha = 0$ 。		
2-D					
1-C	\therefore 液體分布周圍(d ↓)： $\therefore \theta_b \uparrow$ 、 $\omega_{液} > \omega_b$ 、 $ TR_1 < mgd \sin \theta \Rightarrow \alpha < 0$ 、 $ \alpha \uparrow$				
1-D	\therefore 液體分布周圍(d ↓)： $\therefore \theta_b \uparrow$ 、 $\omega_{液} < \omega_b$ 、 $ TR_1 < mgd \sin \theta \Rightarrow \alpha < 0$ 、 $ \alpha \downarrow$				
2-C	\therefore 液體分布聚集(d ↑)： $\therefore \theta_b \downarrow$ 、 $\omega_{液} > \omega_b$ 、 $ TR_1 > mgd \sin \theta \Rightarrow \alpha > 0$ 、 $ \alpha \uparrow$				
2-D	\therefore 液體分布聚集(d ↑)： $\therefore \theta_b \downarrow$ 、 $\omega_{液} < \omega_b$ 、 $ TR_1 > mgd \sin \theta \Rightarrow \alpha > 0$ 、 $ \alpha \downarrow$				
1 \rightleftharpoons 2	來回震盪於角速度平均值(指 1 \rightleftharpoons 2)直至落地： $(\alpha_{1-C}\Delta t_{1-C} + \alpha_{1-D}\Delta t_{1-D}) + (\alpha_{2-C}\Delta t_{2-C} + \alpha_{2-D}\Delta t_{2-D}) + (\alpha_{1-C}'\Delta t_{1-C}' + \alpha_{1-D}'\Delta t_{1-D}') + \dots = \sum \Delta \omega = 0$				

1. 黏流滾擺無彈跳填充範圍內 ω -t 圖與 b 線的變化關係

分析 ω -t 圖與影片可發現 b 線隨著填充範圍不同有不同狀態如下表 10。

表 10 黏流滾擺無彈跳填充範圍內 ω -t 圖與 b 線的變化關係表

標示	M:質心上升高度平均值；H:質心上升最高處；L:質心下降最低處		
類型	液體質心在 $\omega - t$ 圖的位置	b 線於圓盤運動情形	舉例與備註

I			<p>X05 b 線固定不動，液體質心在 b 線左右來回震盪。</p>
II			<p>X08 b 線隨著液體質心緩慢移動，且無法到達質心最低點或最高點。</p>
III			<p>X11 b 線追在液體質心後方，且可以到達質心最低點或最高點。</p>
II			<p>X14 b 線隨著液體質心緩慢移動，且無法到達質心最低點或最高點。</p>
I			<p>X17 b 線固定不動，液體質心在 b 線左右來回震盪。</p>
b 線類型			

(四) 黏流滾擺臨界點成因

表 11 兩臨界點的成因及是否彈跳的關鍵要素

第一、二類型臨界點附近的差異	第二、三類型臨界點附近的差異
<p>由圖 19 可發現θ_b均小，但第一類蜂蜜少，因此根據$F_{黏} \propto \frac{1}{y}$，當蜂蜜厚度越薄時，黏滯力就越強，使蜂蜜質心越快到達$\theta = 90^\circ$(加速點)，讓黏流滾擺滾至底部具有較大的速度彈起。而第二類θ_b小，蜂蜜厚度已不易附著，因此質心不易到達$\theta = 90^\circ$(加速點)，導致液體於$\alpha > 0$、$\alpha < 0$ 來回，使圓盤ω在一小數值震盪直到圓盤落至最低點，此速度已不足以彈起。</p>	<p>由圖 19 可得知，第三類型θ_b本來就接近$\theta = 90^\circ$(加速點)，且液體近乎全滿的填充狀態，因此易產生較大的速度並彈起。第二類型於二三臨界點附近，雖然θ_b很大，附著厚度達飽和後，上層液體滑落使其無法容易達到$\theta = 90^\circ$(加速點)。</p>
<p>結論</p>	<p>是否彈跳要考慮初始θ_b和液體厚度兩因素。</p>

四、黏流滾擺第二類型(無彈跳)的週期性

(一) 黏流滾擺 b 線在第二類型中上升與落下的成因(以 b 線變化關係第 III 類型為例)

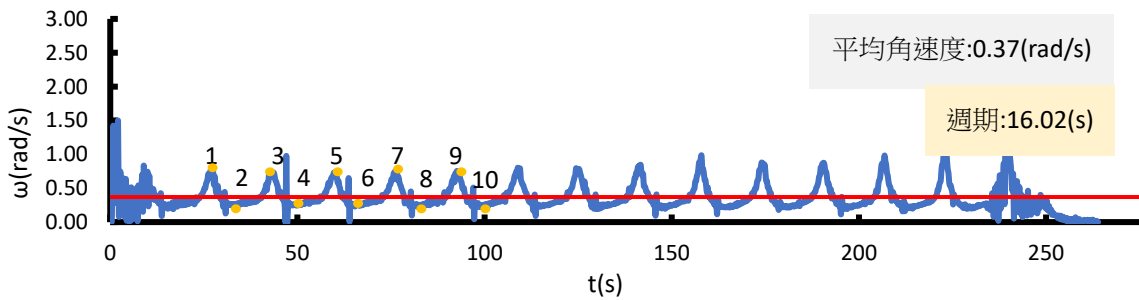







圖 25 黏流滾擺第二類型(無彈跳)填充比例 55.000%(X11)的角速度-時間圖

由圖 25 無彈跳的角速度對應時間圖可以看出角速度具有週期性，且角速度在一平均值來回震盪。從影片可分析出編號 1~10 的液面的斜率如下表 12。

表 12 填充比例 55.000%(X11)液體隨著編號而改變的液面斜率

編號	1	2	3	4	5
圖片					
斜率	0.269	0.337	0.265	0.313	0.245
編號	6	7	8	9	10

圖片					
斜率	0.343	0.280	0.317	0.243	0.277

由表 12 可得知液面斜率會隨著週期忽高忽低，而編號所在位置位於角加速度為 0 的地方，也就是 $\omega - t$ 圖的凹點或凸點，顯示出 b 線是會隨著週期忽高忽低，b 線上升與下降分別對應於液體質心至圓心的距離 d 受到附著與滑落變小和變大。

(二) 黏流滾擺第二類型(無彈跳)的圓盤角速度的週期

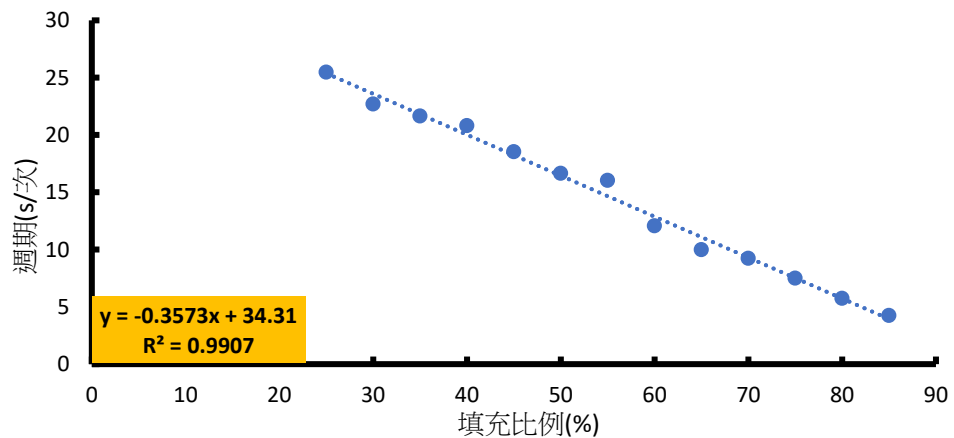


圖 26 黏流滾擺第二類型(無彈跳)範圍與角速度震盪週期對填充比例關係圖

從圖 26 可以得知，當黏流滾擺在第二類型(無彈跳)的範圍內，角速度的震盪週期會隨著填充比例增大而縮小，推測原因為，當填充比例越來越大時，質量也越來越大，造成初始繩張力較大，導致一開始角加速度能讓圓盤飆升至較高的角速度，如下圖 27，當填充比例越大時圓盤平均角速度越大。從圖 25 與表 12 可對照出，角速度震盪一個週期大致對應圓盤轉一圈，也因此較高填充液體比例的平均角速度將產生較小的角速度震盪週期。

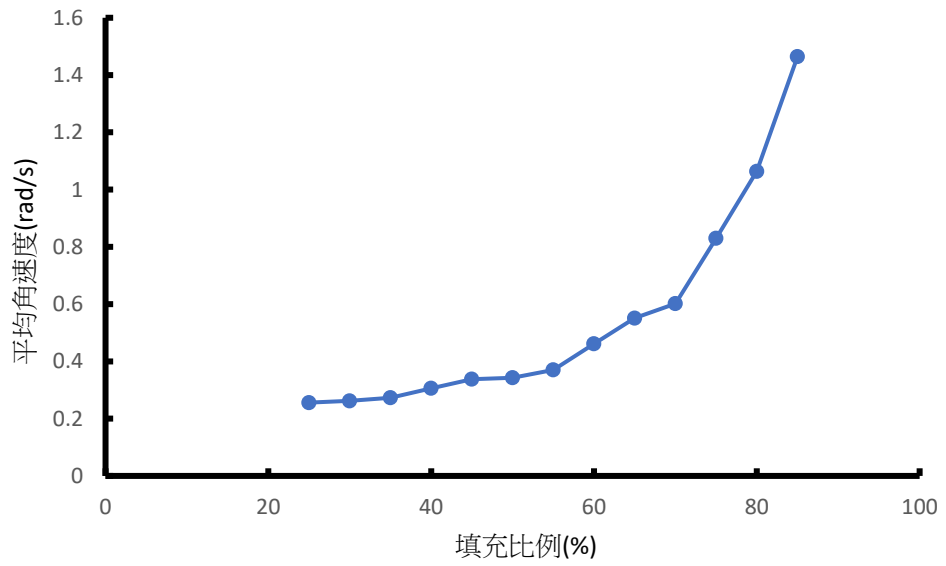


圖 27 黏流滾擺第二類型(無彈跳)的平均角速度

(三) 理論推導邊緣流通量公式

根據參考文獻[7]，對於垂直旋轉圓柱體內邊緣流(Rimming flows)分析。

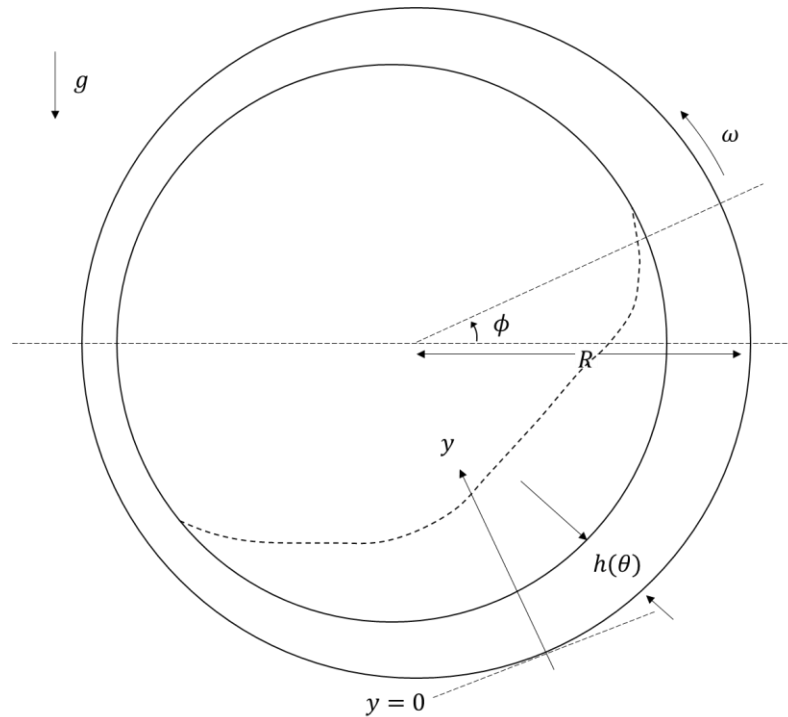


圖 28 邊界層及各項物理參數($h(\theta)$:邊界層厚度， ϕ :以橫軸上方逆時針為正的角度， ω :圓盤角速度， R :圓盤內半徑， g :重力加速度， y :垂直圓盤板面座標系統)

以穩態二維牛頓流體分析，慣性與表面張力忽略不計，適用標準潤滑近似動量控制方程，參考文獻[7、8]:

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = g \cos \phi \quad (6)$$

式(6)中， ν 為運動黏度， $\nu = \mu/\rho$ ，單位： m^2/s 。 v 為平行 y 的速度向量。有兩個邊界條件，當在圓盤 $y = h$ 時，液體表面剪應力為0，而在 $y = 0$ 時，流體速度會與圓盤相同:

$$\text{當 } y = h \text{ 時，則 } \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\text{當 } y = 0 \text{ 時，則 } v = \omega R \quad (8)$$

對式(6)做一次積分:

$$\int \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy = \int \frac{g}{\nu} \cos \phi dy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{g}{\nu} \cos \phi y + C_1 \quad (9)$$

將(7)邊界條件代入(9):

$$0 = \frac{g}{\nu} \cos \phi h + C_1$$

$$C_1 = -\frac{g}{\nu} \cos \phi h \quad (10)$$

將(10)代入(9)得:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{g}{\nu} \cos \phi y - \frac{g}{\nu} \cos \phi h \quad (11)$$

對式(11)做一次積分:

$$\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \left(\frac{g}{\nu} \cos \phi y - \frac{g}{\nu} \cos \phi h \right) dy$$

$$v(y) = \frac{g}{\nu} \frac{1}{2} y^2 \cos \phi - \frac{g}{\nu} \cos \phi h y + C_2 \quad (12)$$

將(8)邊界條件代入(12):

$$v(0) = \omega R = C_2 \quad (13)$$

將(10)代入(9)得:

$$v(y) = \frac{g}{\nu} \frac{1}{2} y^2 \cos\phi - \frac{g}{\nu} \cos\phi hy + \omega R \quad (14)$$

參考文獻[9]，對式(14)做一次積分，從 $y = 0$ 到 $y = h$ ，得薄膜內每單位軸向距離的體積流量 Q :

$$\int_0^h v(y) dy = \int_0^h \left(\frac{g}{\nu} \frac{1}{2} y^2 \cos\phi - \frac{g}{\nu} \cos\phi hy + \omega R \right) dy$$

$$Q = \omega R h - \frac{1}{3} \frac{g}{\nu} \cos\phi h^3 \quad (15)$$

參考文獻[10]，將式(15)無量綱化，方便運算時數量級相同， Q 的特徵量為 Q_0 ，且無量綱式為 q ； h 的特徵量為 h_0 ，且無量綱式為 η :

$$\frac{Q}{Q_0} \equiv q, \quad \frac{h}{h_0} \equiv \eta \quad (16)$$

將式(15)兩側同除以 Q_0 ，使整個公式無量綱化:

$$q = \frac{\omega R h}{Q_0} - \frac{1}{3} \frac{g}{\nu} \frac{h^3}{Q_0} \cos\phi \quad (17)$$

由於無量綱化，式(17)各項應無單位，因此

$$\frac{\omega R h}{Q_0} \Rightarrow Q_0 = \omega R h_0 \quad (18-1)$$

$$\frac{g}{\nu} \frac{h^3}{Q_0} \Rightarrow Q_0 = \frac{g}{\nu} h_0^3 \quad (18-2)$$

因為 q 、 h 為「變量」，無量綱化應除以自身的特徵量，如： Q_0 、 h_0 ，而其他「不會變量」則應直接除以自身，如： ω 、 R 、 g 、 ν 。

由(18-1)、(18-2)聯立，得

$$\omega R h_0 = \frac{g}{\nu} h_0^3$$

$$h_0 = \sqrt{\frac{\omega R v}{g}} \quad (19-1)$$

將(19-1)代入(18-1)，得

$$Q_0 = \omega R \sqrt{\frac{\omega R v}{g}} \quad (19-2)$$

整合(19-1)、(19-2)，設

$$\begin{aligned} \alpha &= h_0 = \sqrt{\frac{\omega R v}{g}} \\ \Rightarrow \frac{h}{h_0} &= \frac{h}{\sqrt{\frac{\omega R v}{g}}} = \frac{h}{\alpha} = \eta \end{aligned} \quad (20-1)$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{Q_0} = \frac{Q}{\omega R \sqrt{\frac{\omega R v}{g}}} = \frac{Q}{\omega R \alpha} = q \quad (20-2)$$

將(20-1)、(20-2)代入(17)，得

$$q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi \quad (21)$$

(四) 推導邊緣流臨界通量

參考文獻[11]，式(21)中的 q 為一常數值，此為三次函數 $q(\theta)$ ，求解 η ，

$\eta > 0$ ，由於邊界層 η ，解為一實數正根。而且為了要求得臨界最大 η ，所以

$\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = 1$ 。因此三次函數判別式 $\Delta = 0$ ，解為實數重根，式(21)改寫。

$$\frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi - \eta + q = 0$$

$$a = \frac{1}{3}, b = 0, c = -1, d = q$$

$$X = \frac{c}{a} - \frac{(b/a)^2}{3} = 3q, Y = \frac{2(b/a)^3}{27} - \frac{(b/a)(c/a)}{3} + \frac{d}{a} = -3$$

$$\Delta = \frac{X^2}{4} + \frac{Y^3}{27} = \frac{9q^2}{4} + \frac{-27}{27} = 0 \Rightarrow q = \frac{2}{3} \quad (22)$$

當 $q = \frac{2}{3}$ 時，在 $\phi = 0$ 處， η 為最大值(於任意 q 下)，將(22)代入(21)，得

$$\frac{2}{3} = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi \quad (23)$$

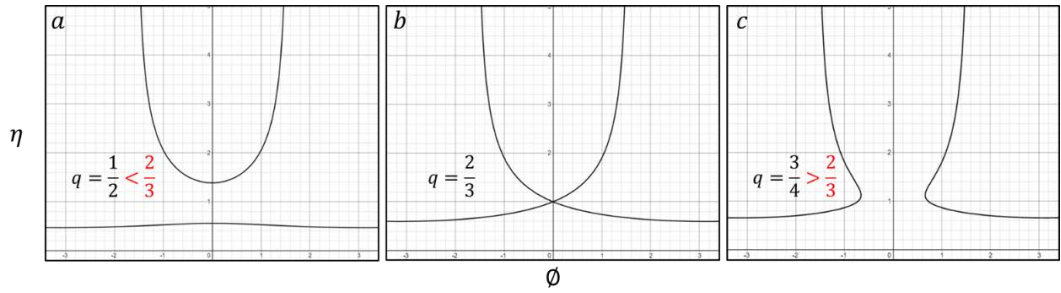


圖 29 當通量小於等於大於 $\frac{2}{3}$ 時，所呈現的 η - ϕ 圖(使用 desmos 繪圖)

如圖 29a、圖 29b、圖 29c 下方線為合理，因為應為在 $\phi = 0$ 處最厚，而越往周遭厚度越小，而圖 29c 在 $\phi = 0$ 附近並沒有所對應的 η ，這是因為當固定轉速的圓盤，填充至一定比例時，邊界層在 $\phi = 0$ 處所造成的黏滯力以無法與自身液重平衡，因此無法求解邊界層。

(五) 加入表面張力項，以邊界層解釋黏流滾擺週期性的成因

參考文獻[9、12]，將原式(21)加入表面張力項，由於黏流滾擺在無彈跳區域是以非常緩慢且接近等速下降，但在 tracker 追蹤的數據發現圓盤呈現角速度週期性的變化，因此要加入表面張力項，得以分析當角速度不同時，所造成的邊界層厚度變化。

$$\epsilon = \frac{\gamma}{\rho g R^2} \sqrt{\frac{v\omega}{gR}}$$

$$q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi + \frac{1}{3}\epsilon\eta^3 \left(\frac{\partial\eta}{\partial\phi} + \frac{\partial^3\eta}{\partial\phi^3} \right) \quad (24)$$

無彈跳範圍的黏流滾擺以極緩慢速度落下，因此 $\frac{\partial^3\eta}{\partial\phi^3} \sim 0$ ，故得

$$q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi + \frac{1}{3}\epsilon\eta^3 \frac{\partial\eta}{\partial\phi} \quad (25)$$

1. 理論分析 X05(填充比例 25%，週期長)

由於式(25)為穩態方程，並未有時間項，因此我們採以擷取 10 個時間點

(範圍為一個週期)再進行比較與分析。

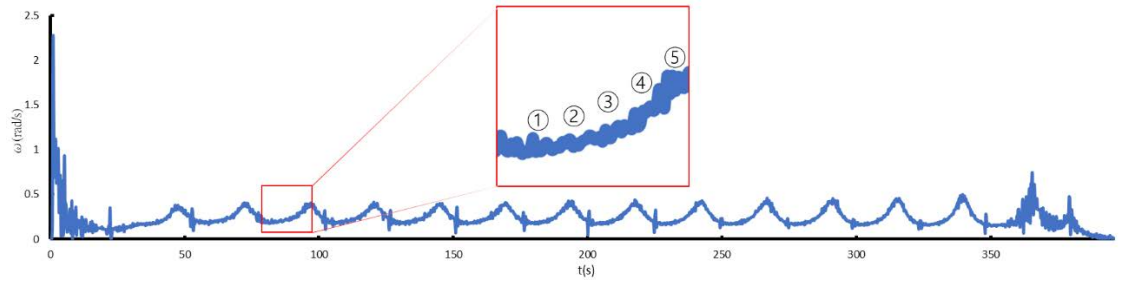
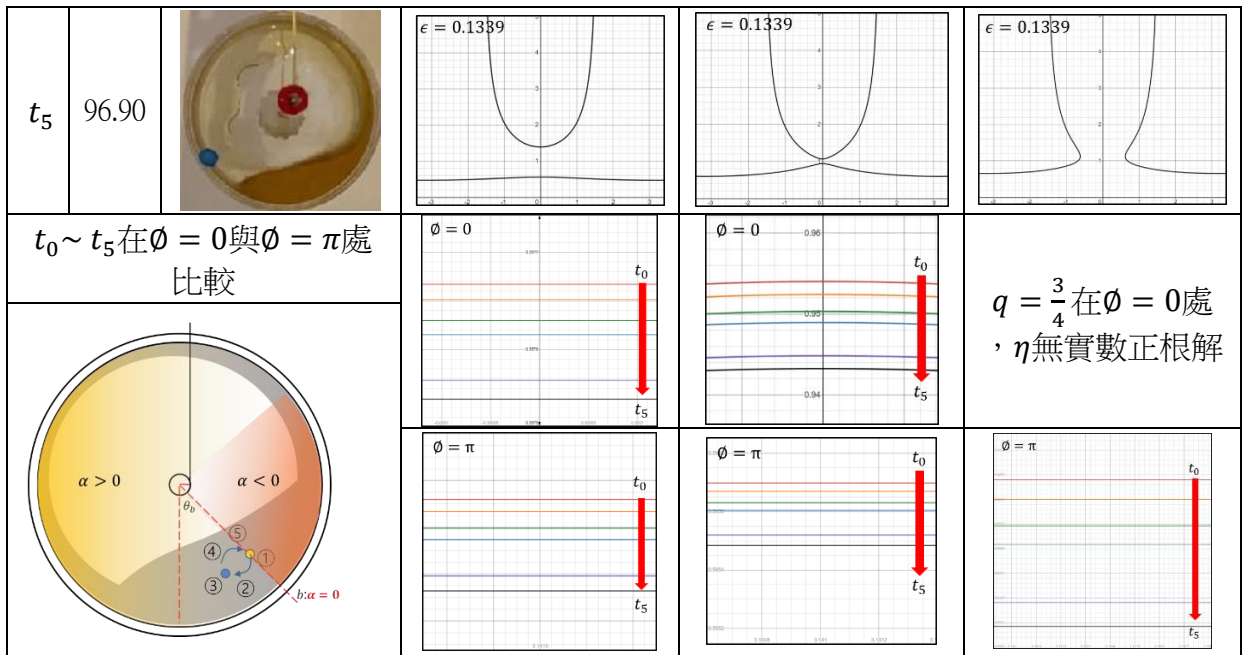


圖 30 X05 無彈跳類型填充比例 25%的 ω - t 圖(前半週期)

表 13 X05 在 $\alpha > 0$ 的區域，邊界層厚度隨時間變化圖(前半週期)

編號	時間 (s)	影像圖	$q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi + \frac{1}{3}\epsilon\eta^3 \frac{\partial\eta}{\partial\phi}$ ，縱軸為 η ，橫軸為 $\phi(-\pi, \pi)$		
			$q = \frac{1}{2}$ ， $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0290$	$q = \frac{2}{3}$ ， $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0843$	$q = \frac{3}{4}$ ， $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.188$
t_0	81.42		$\epsilon = 0.0853$ 	$\epsilon = 0.0853$ 	$\epsilon = 0.0853$
t_1	84.52		$\epsilon = 0.0917$ 	$\epsilon = 0.0917$ 	$\epsilon = 0.0917$
t_2	87.61		$\epsilon = 0.1006$ 	$\epsilon = 0.1006$ 	$\epsilon = 0.1006$
t_3	90.71		$\epsilon = 0.1067$ 	$\epsilon = 0.1067$ 	$\epsilon = 0.1067$
t_4	93.80		$\epsilon = 0.1260$ 	$\epsilon = 0.1260$ 	$\epsilon = 0.1260$



如表 13①~⑤，無論是 $q = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 顯示，邊界層會隨時間越來越薄，而剩餘液體就越來越多，代表抗力矩變大，因此質心位置下降至 $\alpha > 0$ 的區域，黏流滾擺行加速狀態。

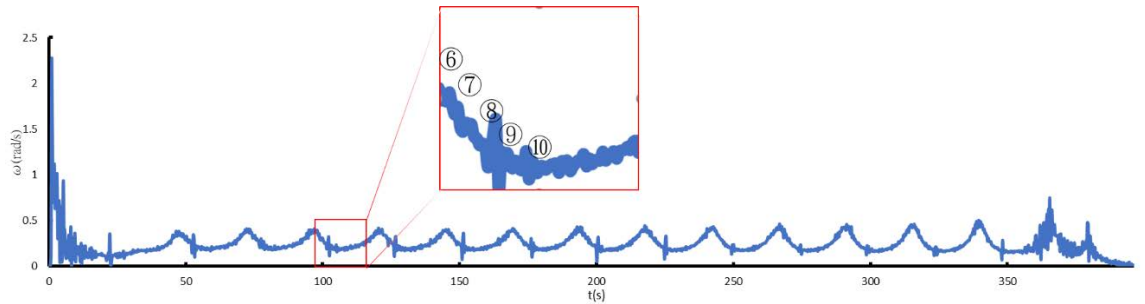


圖 31 X05 無彈跳類型填充比例 25%的 ω - t 圖(後半週期)

表 14 X05 在 $\alpha > 0$ 的區域，邊界層厚度隨時間變化圖(後半週期)

編號	時間 (s)	影像圖	$q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi + \frac{1}{3}\epsilon\eta^3 \frac{\partial\eta}{\partial\phi}$ ，縱軸為 η ，橫軸為 $\phi(-\pi, \pi)$		
			$q = \frac{1}{2}, \frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0290$	$q = \frac{2}{3}, \frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0843$	$q = \frac{3}{4}, \frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.188$
t_6	98.55				
t_7	100.2				
t_8	101.85				
t_9	103.5				
t_{10}	105.15				
$t_6 \sim t_{10}$ 在 $\phi = 0$ 與 $\phi = \pi$ 處比較					$q = \frac{3}{4}$ 在 $\phi = 0$ 處， η 無實數正根解

如表 13⑥~⑩，無論是 $q = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 顯示，邊界層會隨時間越來越厚，而剩餘液體就越來越少，代表抗力矩變小，因此質心位置上升至 $\alpha < 0$ 的區域，黏流滾擺行減速狀態。

2. 比較理論分析 X05 與 X17(填充比例 85%，週期短)

表 15 X05 與 X17 在三種 q 下，於 $\phi = 0$ and π 之邊界層厚度隨(前半週期)時間的模擬比較圖

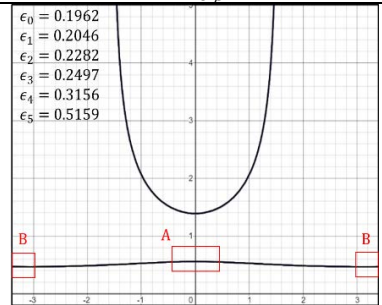
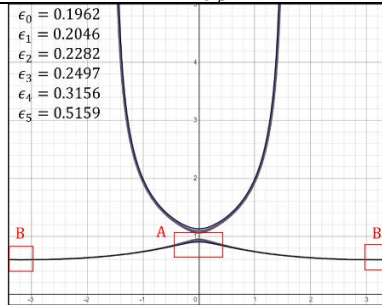
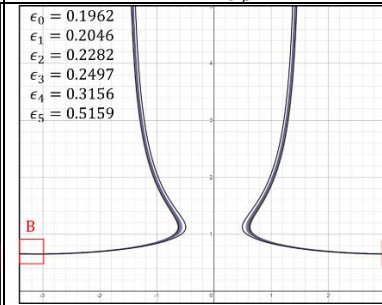
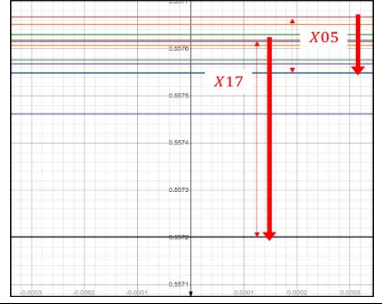
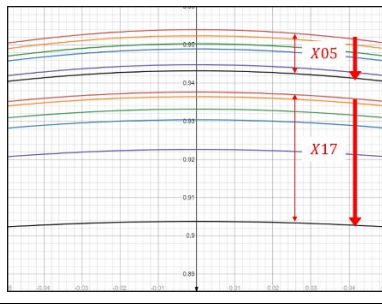
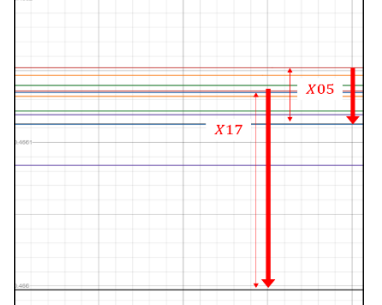
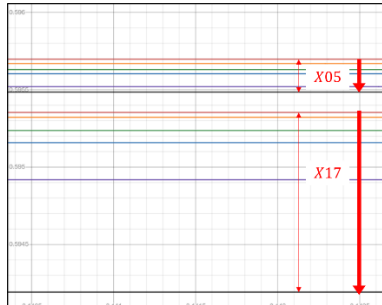
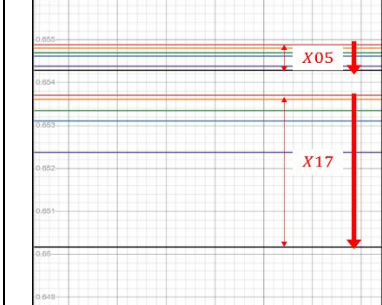
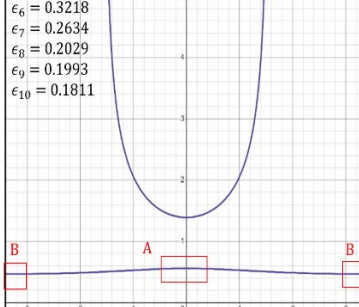
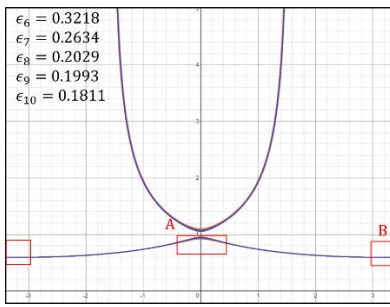
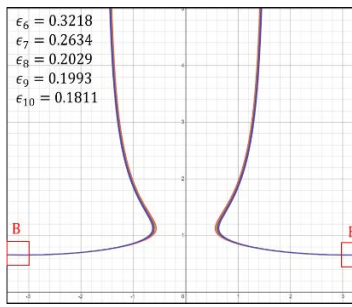
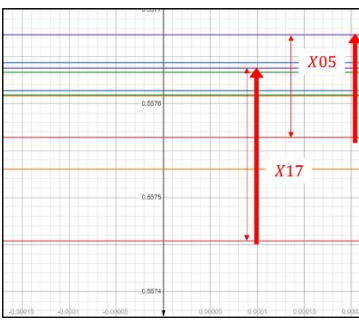
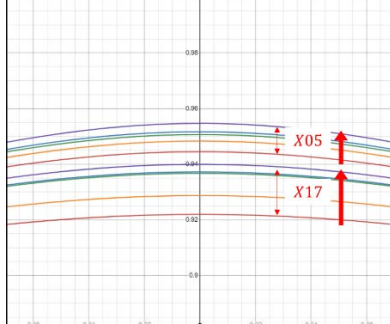
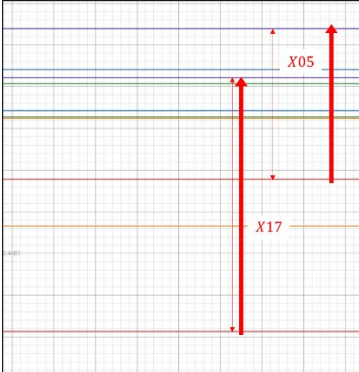
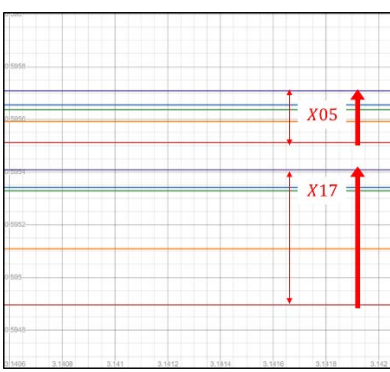
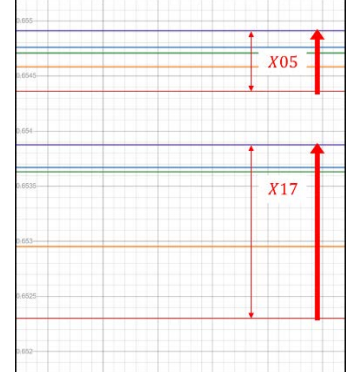
公式	$q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi + \frac{1}{3}\epsilon\eta^3 \frac{\partial\eta}{\partial\phi}$ ，縱軸為 η ，橫軸為 $\phi(-\pi, \pi)$		
q	$q = \frac{1}{2}$ ，X17 的 $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0156$	$q = \frac{2}{3}$ ，X17 的 $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0705$	$q = \frac{3}{4}$ ，X17 的 $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.174$
模擬比較圖	$\epsilon_0 = 0.1962$ $\epsilon_1 = 0.2046$ $\epsilon_2 = 0.2282$ $\epsilon_3 = 0.2497$ $\epsilon_4 = 0.3156$ $\epsilon_5 = 0.5159$ 	$\epsilon_0 = 0.1962$ $\epsilon_1 = 0.2046$ $\epsilon_2 = 0.2282$ $\epsilon_3 = 0.2497$ $\epsilon_4 = 0.3156$ $\epsilon_5 = 0.5159$ 	$\epsilon_0 = 0.1962$ $\epsilon_1 = 0.2046$ $\epsilon_2 = 0.2282$ $\epsilon_3 = 0.2497$ $\epsilon_4 = 0.3156$ $\epsilon_5 = 0.5159$ 
A($\phi = 0$)			$q = \frac{3}{4}$ 在 $\phi = 0$ 處 η 無實數正根解
B($\phi = \pi$)			

表 16 X05 與 X17 在三種 q 下，於 $\phi = 0$ and π 之邊界層厚度隨(後半週期)時間的模擬比較圖

公式	$q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\phi + \frac{1}{3}\epsilon\eta^3 \frac{\partial\eta}{\partial\phi}$ ，縱軸為 η ，橫軸為 $\phi(-\pi, \pi)$		
q	$q = \frac{1}{2}$ ，X17 的 $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0156$	$q = \frac{2}{3}$ ，X17 的 $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.0705$	$q = \frac{3}{4}$ ，X17 的 $\frac{\partial\eta}{\partial\phi} = 0.174$
模擬比較圖			
$A(\phi = 0)$			<p style="text-align: center;">$q = \frac{3}{4}$ 在 $\phi = 0$ 處 ，η 無實數正根解</p>
$B(\phi = \pi)$			

如表 15、16，無論是在前半週期還是後半週期時， $q = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，我們可以發現填充量較大的 X17，由於速度較 X05 落下的快，因此在 X17 最大邊界層比 X05 最大邊界層還小，同樣在最小邊界層也一樣。X05 與 X17 兩者在前半週期邊界層皆隨時間而下降，由於速度提升，而後半週期邊界層則會隨時間而上升，由於速度下降。

五、黏流滾擺改由不同高度釋放的彈跳狀況

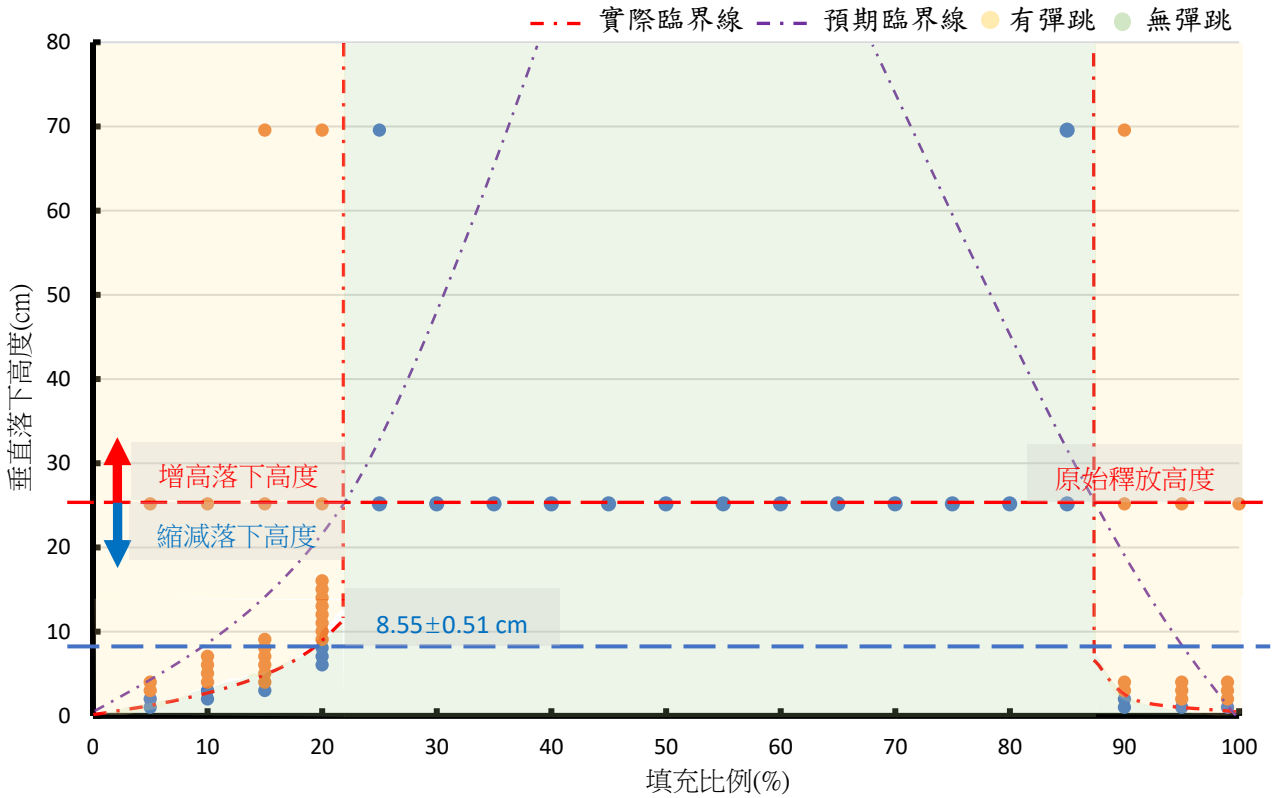


圖 32 不同高度對應填充比例的彈跳類型分佈圖

原先預期從更高的地方釋放，重力位能越大可以使落至最低點速度變大，無彈跳的填充臨界範圍會因此隨高度變大而變窄，如圖 28 紫色虛線的預期線。而實驗結果卻顯示釋放高度超過 8.55cm 無彈跳的填充範圍完全不會改變，代表這個範圍的填充量即使更高釋放也無法彈起，原因可對照圖 25，無彈跳的角速度只在一個平均值震盪，即便釋放高度增加，也無法增加到達最低點的速度，所以彈不起來。另一方面釋放高度如果低於 8.55±0.51cm 時，高度可能不足以讓滾擺加速至足夠的速度彈起，導致無彈跳填充範圍變大。

六、水滾擺的運動分析.

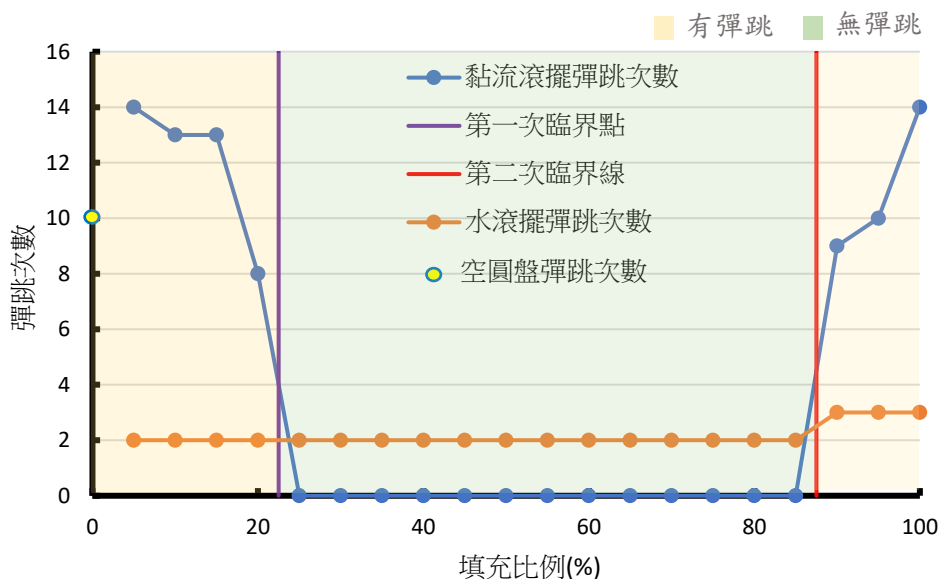


圖 33 水滾擺與黏流滾擺彈跳次數對應填充比例關係圖

由圖 33 可發現相較於黏流滾擺，水滾擺彈跳次數較不會因填充比例改變而有特殊變化，平均彈跳次數為 2 次左右。在兩種液體均有彈跳的填充比例中，黏流滾擺彈跳次數遠超過水滾擺。

表 17 可彈跳類型黏流滾擺與水滾擺相同填充比例下落至最低點的角速度變化表

A:第幾次落至最低點 B:每兩次最低點的角速度變化量(rad/s) C:編號							
B \ C	A	1~3	3~5	5~7	9~11	平均角速度變化量(rad/s)
X01(黏流滾擺)		-16.544	-11.025	-9.016		-7.305	-9.959
Y01(水滾擺)		-47.334	-11.897	--		--	-29.615

如表 17，可看出黏流滾擺落至最低點的角速度不像水滾擺損耗那麼快，因為水的黏滯係數較小，因此不容易服貼地附著於圓盤，導致滾擺的轉動動能轉移到水面的波動動能，因此黏流滾擺在可彈跳範圍內的彈跳次數大於水滾擺。

而水滾擺沒有無彈跳範圍的原因是水無法附著於壁面上，因此無法產生持久的順力矩，使得水滾擺無法產生持久的負角加速度，因此水滾擺不具有無彈跳範圍。

七、比較不同濃度流體的黏滯係數對滾擺彈跳次數產生的影響

分別以濃度質量比 100:6 與 100:20 的純蜂蜜與水均勻混和，混合液定溫 23.6°C，並與原本黏流滾擺及水滾擺隨著填充比例的彈跳次數做比較。

(一) 確認混和液黏滯效果的重複性

將填充比例 5.000% 的混和液(質量比 100:6)放置 30 分鐘、90 分鐘、120 分鐘，比較三者 y-t 圖的差異，證實在 120 分鐘內所作的滾擺實驗，皆具有均勻混和的黏性效果。

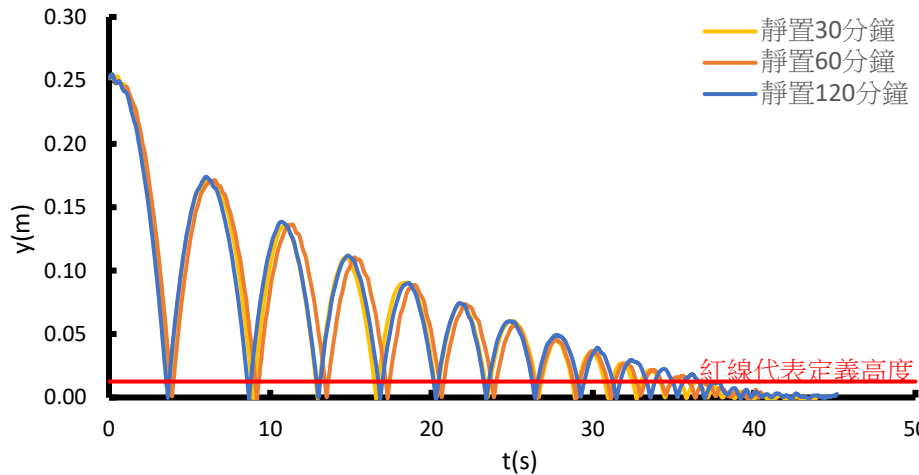


圖 34 填充比例 5.000% 的混和液(質量比 100:6)三種不同靜置時間 y-t 疊合圖

如圖 34，在釋放後的前期數線大致相同，後期可能因為彈跳時的角度些微誤差，造成後期運動情形較不一致，但三者皆彈跳 12 次，確認溶液黏滯效果並不會因時間影響彈跳次數，且黏流滾擺具有運動現象的重複性。

(二) 比較四種滾擺彈跳次數圖

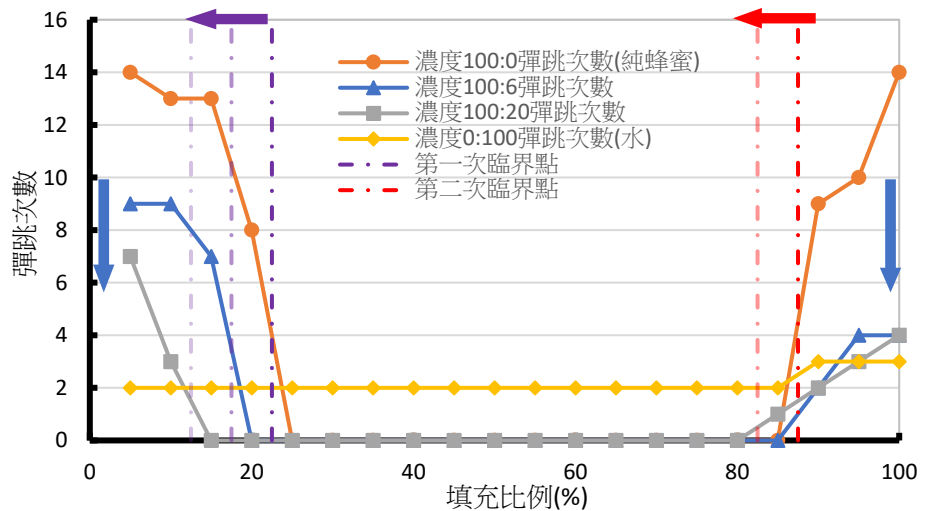


圖 35 不同濃度的滾擺對應填充比例的彈跳次數

如圖 35，發現隨著蜂蜜濃度越小，兩臨界點會產生偏移，第一與第二臨界點會往填充比例較小的方向偏移，同時在原本可彈跳的範圍中，會因水稀釋越多，彈跳次數越少。

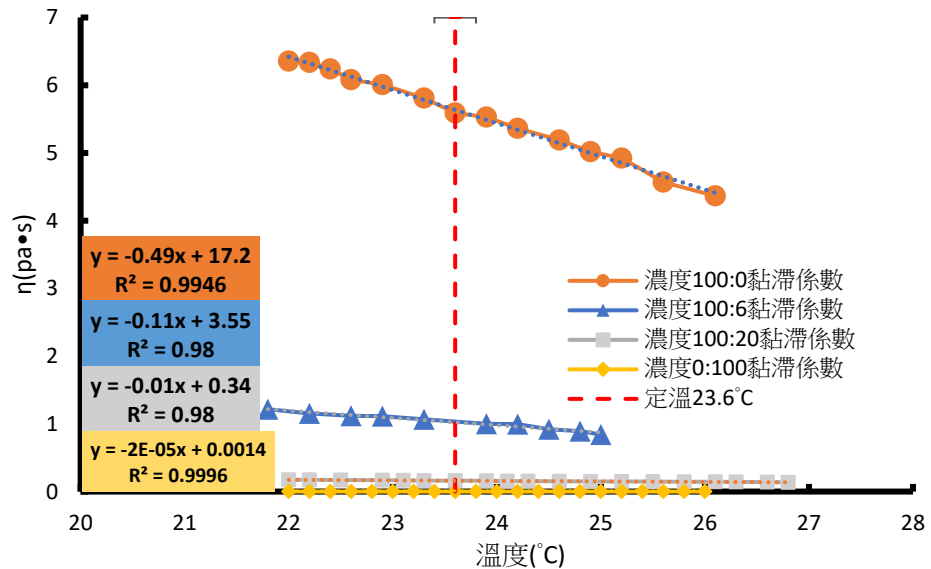


圖 36 不同濃度的滾擺對應溫度的黏滯係數，與定溫 $23.6 \pm 0.2^\circ\text{C}$

如圖 36，本實驗將混合液控溫於 $23.6 \pm 0.2^\circ\text{C}$ 進行滾擺的實驗，以上四種容液皆會因溫度越大而黏滯係數越小，溫度越小，則黏滯係數越大。

1. 臨界點偏移原因

表 18 第一、二臨界點偏移原因

第一、二類型臨界點附近的差異	第二、三類型臨界點附近的差異
<p>達第一次臨界點的首要條件是滾擺中的流體在旋轉時，在圓壁上附著的厚度達飽和，剩餘不附著液體與繩張力矩達動平衡，則產生無彈跳區域。若今改以黏滯係數較小的混和液，由於在相同填充比例之下，黏滯力較小的液體會比較不容易被圓盤帶往上到 $\theta = 90^\circ$ (加速點)，因此填充比例可以較快達到無彈跳範圍。雖然此時液體質心力矩與繩張力矩同時變小，彈繩張力矩的影響度大於液體質心力矩。</p>	<p>在第二次臨界點，由於在相同填充比例之下，黏滯係數較小的蜂蜜水密度較小，因此會產生較小的順力矩，雖然繩張力矩也會跟著變小，但此時液體質心力矩的影響度大於繩張力矩，所以液體質心力矩無法抗衡，黏流滾擺加速落下，開始彈跳。</p>
<p>結論</p>	<p>黏滯係數變小時，是否彈跳取決兩力矩變小的影響度與黏滯力變小跟重力抗衡的關係。</p>

八、細沙滾擺第 C 類型(中途即固定不動)的理論分析與應證

透過表 7 計算細沙滾擺合力矩為 0 的 θ ，對照影片中的細沙斜率，得到下列比較圖。

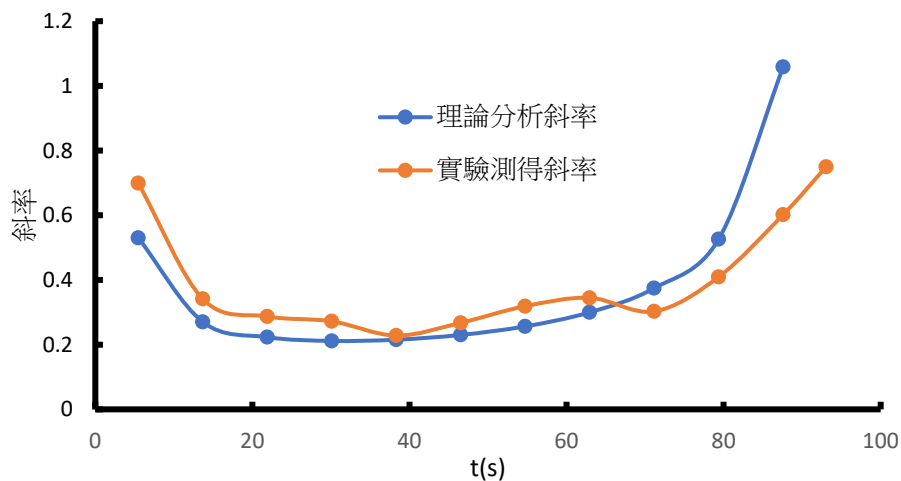
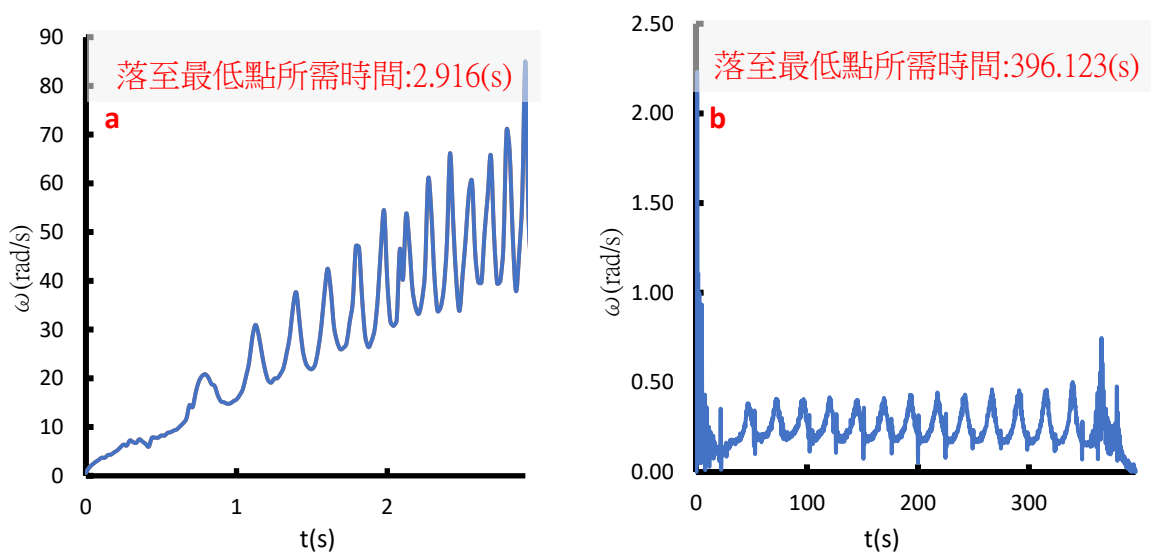


圖 37 細沙中途即固定不動時細沙面斜率與理論分析斜率比較圖

由圖 37 可得知，填充比例 62.952%之前兩者趨勢相同，超過 62.952%之後理論分析斜率大於實驗測得斜率，推測原因為，當細沙質量過多時，無法維持結構而坍塌，造成真實斜率較低。

九、空圓盤與黏滯流體、水、細沙對滾擺的比較與延伸應用

不同填充介質各取一樣品(滾擺至底部且緩衝效果最好)的角速度-時間圖來做比較，如圖 38 a、b、c、d。



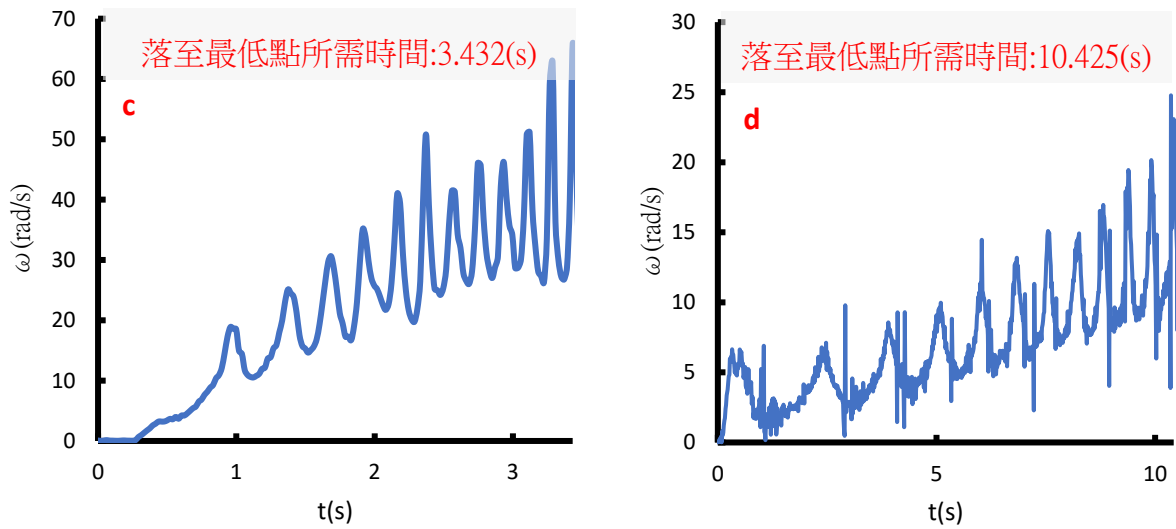


圖 38 a、b、c、d 分別為空圓盤(X00)、黏流滾擺第二類型(無彈跳)25.000%(X05)、水滾擺 5.000%(Y01)、細沙滾擺 B 類型 4.160%(S008-1)第一次落至最低點前的角速度-時間圖

如要用於緩衝應用上，必須東西下降時間拉長，比較第一次落至最低點所需時間，黏流滾擺約為空圓盤 122 倍，而細沙雖有更長的第 C 類型(中途即固定不動)，但應用上應要使物體仍有降落，所以無法考慮細沙第 C 類型的情況，如觀察細沙滾擺的「未過半且無彈跳」的填充比例，如上圖 38d，落下時間只有空圓盤 3 倍且張力計顯示出張力穩定度也不如黏流滾擺，如下圖 39，因此如果未來有機會應用在降落緩衝裝置上，黏滯流體為較佳填充介質。

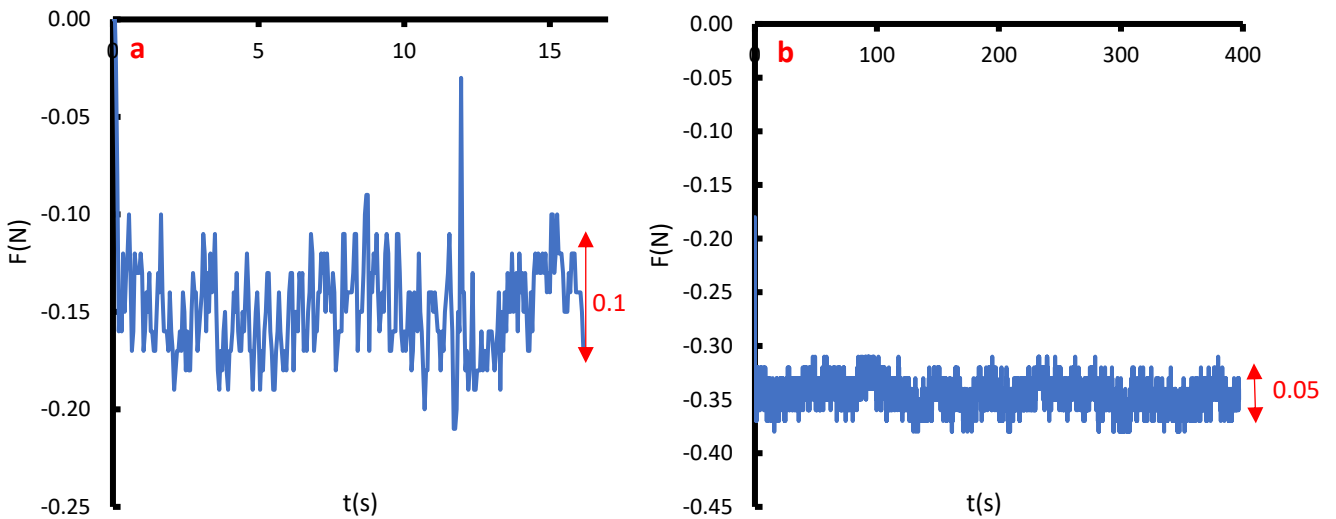



圖 39 a、b 分別為細沙滾擺 B 類型(未過半且無彈跳)4.160%與黏流滾擺第二類型(無彈跳)5.000%繩張力圖

表 19 各類型滾擺緩衝效果比較

類型	落地時間	有無彈跳且落至最低點填充比例	備註	落至最低點比例	最佳緩衝裝置
空圓盤	3.237(s)	無	--	1	
黏流滾擺	396.123(s)	有	1.高度超過 10.535cm 無彈跳填充範圍不變動 2.角速度具有穩定週期性 3.繩張力相較其他較穩定	約 122 倍	
水滾擺	3.432(s)	無	--	約 1 倍	
細沙滾擺	10.425(s)	有 (但填充範圍很窄)	1.繩張力相較於黏流滾擺較不穩定 2.沙子間的縫隙密實度會影響結果	約 3 倍	

柒、結論

- 一、黏流滾擺在黏滯流體填充量由少到多會有三種運動情形，分別為第一類型「未過半且能彈跳」、第二類型「無彈跳」、第三類型「過半且能彈跳」。
- 二、彈起條件為落到最低點角速度大於 ω_c (不同的樣品 ω_c 不一樣)，當液體質心到達 $\theta=90^\circ$ 之後，角速度才明確爬升，利用力矩和黏滯力可分析圓盤角速度的變化。
- 三、黏流滾擺在無彈跳填充範圍內，圓盤角速度對時間具有週期性，且填充比例越大週期越小，且填充比例越大平均角速度越大。
- 四、在研究中我們整合參考文獻的公式，得出以重力項、黏滯力項與表面張力項的公式 $q = \eta - \frac{1}{3}\eta^3 \cos\theta + \frac{1}{3}\epsilon\eta^3 \frac{\partial\eta}{\partial\theta}$ ，並將 q 以三次函數重根的方式求出臨界通量 $\frac{2}{3}$ ，此結果也符合參考文獻[11]，最後我們以常數 $q = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 的方式，觀察出邊界層厚度(η)對旋轉圓盤角速度(ω)的趨勢關係，發現當滾擺加速由於 η 的下降，而減速是由於 η 的上升。
- 五、本實驗所用的黏流滾擺釋放高度大於 8.55 cm 之後，無彈跳填充比例維持在 22.500%~87.500%，也就是此填充範圍因重力與黏滯力作用，即使高度再高，也無法使圓盤加速到可彈起角速度 ω_c 。

- 六、滾擺改為填充黏滯係數較小的水，不存在無彈跳狀態，且填充比例不影響彈跳次數，與黏流滾擺可彈跳的情況相比，彈跳次數普遍比黏滯流體少。
- 七、滾擺若改填充濃度較小的混合液，則黏滯係數下降、密度下降，使得兩臨界線往左偏移。
- 八、滾擺改為填充細沙，填充比例由少至多可分為五種運動情形，分別為「未過半且能彈跳」、「未過半且無彈跳」、「中途即固定不動」、「過半且無彈跳」、「過半且能彈跳」。
- 九、釋放高度同為 25.17 cm 情況下，填充比例 25.000 %的黏流滾擺，落下時間約為空圓盤的 122 倍，故黏流滾擺也許可以應用於緩衝系統中。

捌、未來展望

黏流滾擺是我突發奇想的實驗，還有很多的相關物理因素還沒有探討完全，而他非直觀的物理現象也引發我好奇，此實驗主題結合溜溜球的滾動力學，配合黏滯流體與細沙所創造出的特殊有趣物理現象，延展性十分高，不同的操作變因，產生不同的應變變因，**黏流滾擺**在未來相關的實驗也令我們十分期待。

- 一、填充同質量但不同黏滯係數的液體，找出彈跳次數與黏滯係數的關係圖，可作為黏滯係數測量儀。
- 二、基於結論第九點，黏流滾擺的穩定性及功效皆較固態粒子的滾擺及空圓盤佳，因此黏流滾擺的緩衝效果或許可以實際應用於安全工程學中。
- 三、未來希望能結合壓力梯度與慣性項的理論分析，更精確得求解於兩臨界點的發生與無彈跳範圍所產生的週期值。

玖、相關資料

- [1] 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 物理與天文學科 第二名 蝸牛球
- [2] Stephen Childress, The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid. J. of Fluid Mechanics, 1964, 20, 305-314.
- [3] Rohit Supekar & Mahesh V. Panchagnula, Dynamics and stability of a fluid filled cylinder rolling on an inclined plane, viscous fluid. J. of Fluid Mechanics, 2014, 28.

- [4] Muhammad Bilal, Dil Nawaz Khan & Marwat Aamir Ali, The flow of a viscous fluid over an infinite rotating and porous disk with stretching (shrinking) effects, viscous fluid. J. of Fluid Mechanics, 2020, 66.
- [5] Koichi Takahashi, Application of the viscosity-expansion method to a rotating thin fluid disk bound by central gravity, Prog. Theor. Exp. Phys, 2015, 7.
- [6] Ahmed Jarray, Vanessa Magnanimo, Stefan Luding, Wet granular flow control through liquid induced cohesion, PTEC 13221, 2018.
- [7] H. K. Moffatt, Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder, Journal de Mécanique, 1977, 16, 656-673.
- [8] Andreas Acrivos, Bo jin, Rimming flows within a rotating horizontal cylinder: asymptotic analysis of the thin-film lubrication equations and stability of their solutions, Journal of Engineering Mathematics, 2004, 50, 99-120.
- [9] E. S. Benilova and S. B. G. O'Brien, Inertial instability of a liquid film inside a rotating horizontal cylinder, Physics of fluids, 2005, 17.
- [10] E. S. Benilov, V. N. Lapin and S. B. G. O'Brien, On rimming flows with shocks, J Eng Math, 2012, 75, 49-62.
- [11] S. B. G. O'Brien, Linear stability of rimming flow, Quarterly of Applied Mathematics, 2002, 60, 201-211.
- [12] E. S. Benilov, M. S. Benilov and N. Kopteva, Steady rimming flows with surface tension, J. Fluid Mech, 2008, 597, 91-118.
- [13] S. D. R. Wilson and J. Williams, The flow of a liquid film on the inside of a rotating cylinder, and some related problems, Physics of Fluids, 1997, 9, 2184-2190.
- [14] S. B. G. O'Brien and E. G. Gath, The location of a shock in rimming flow, Physics of fluids, 1998, 10, 1040-1042.

【評語】 160006

實驗設計、數據分析和報告都相當內容完整，對這個問題有相當的理解，如果從數據中看出新的有趣的現象，或者想出更多的實驗挑戰自己的理解就更佳了。