

2022 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 100037
參展科別 工程學
作品名稱 改良型非整數次方 PID 控制器設計
得獎獎項 三等獎
突尼西亞國際工程與科技節正選代表

就讀學校 臺北市立中山女子高級中學
指導教師 吳政郎、蘇益加
作者姓名 張璫勻、陳芊竹

關鍵詞 PID、倒立擺、分數階控制

作者簡介



大家好，我們是張璫勻和陳芊竹，目前就讀中山女高二年級。

我們都對物理和資訊很有興趣及熱情。在高中接觸到「控制」這門學科時，我們對其廣闊的應用範圍感到訝異，在進一步研究的過程中亦收穫良多。

非常感謝吳政郎教授及蘇益加悉心的指導，也很開心能夠一起參加此次的國際科展，分享我們在認識及研究這門學科時發現的驚喜和樂趣。

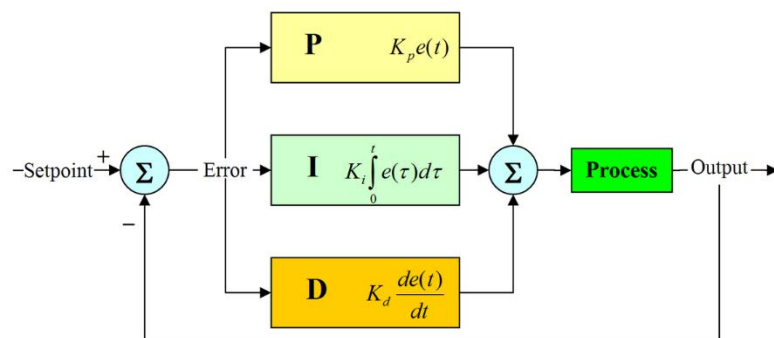
摘要

傳統控制器都以一次方線性模式調整系統的比例、積分、微分等三參數減少誤差。為發展更佳誤差控制模式，本研究嘗試加入誤差變數的次方運算。我們先以程式模擬一受固定阻力的線性系統，測試誤差變數次方的可行性，利用倒立擺系統進行模擬，並使倒立擺追蹤正弦波，以印證次方模式的控制效果。

經程式模擬後，我們認為不論目標值的大小，修改誤差參數的次方模式皆可使系統響應更快，控制效果更好。後續將利用倒立擺實測確認調整誤差次方可行性，並調整倒立擺的質量分布來模擬不同情況。相較於傳統的PID控制器，本研究拓增比例參數次方，建立PID三參數的次方模式，確認具更佳控制效果的可能性。希望未來可持續強化模式，將同步PID各參數次方模式，實際應用在機器手臂、溫度控制、建築防震等工程與工業。

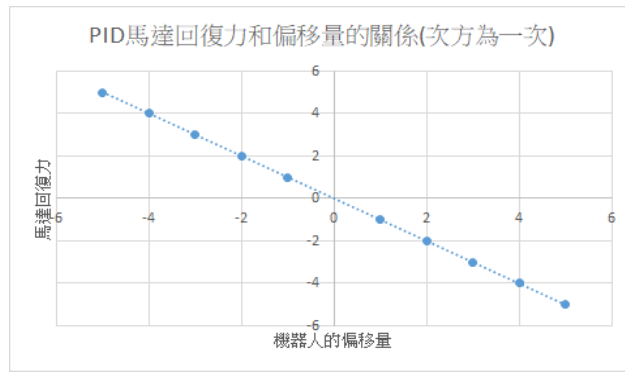
壹、前言

PID控制器為工業界常用的控制方法，因為它相較於其他的控制方法簡單且好上手。PID控制器分為三個部分：比例單元(Proportional)、積分單元(Integral)、微分單元(Derivative)所組成。控制輸出 $u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t)$ ，其中 K_p 為比例增益，它是控制的主要部分； K_i 為積分增益，主要解決穩態誤差的問題； K_d 為微分增益，避免過衝過多。

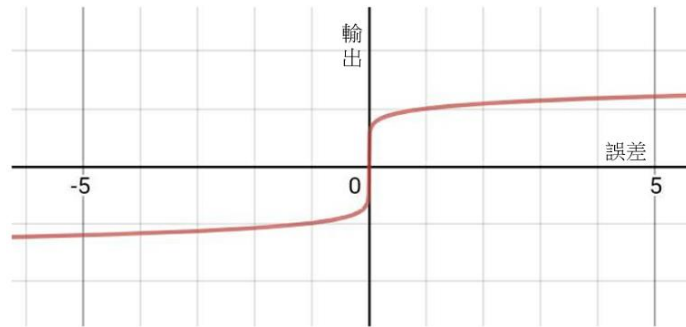


貳、研究動機

PID控制器分為比例項、積分項、微分項，三者相加後就是控制器的輸出。在PID的式子中，誤差變數的次方為1次方，而當誤差較小時，只依靠比例項會無法抵銷穩態誤差，造成系統無法達到目標值。我們猜測可能是因為當時電腦還並未普及，若是在誤差變數加上次方項可能會不好計算。但以現今電腦強大的計算能力，能否調整式子中的次方數以減少偏移量，進而達到更好的控制效果。我們希望可以透過修改誤差變數的次方，使誤差的函數圖形由圖一變為類似圖二 ($y = x^{1.2}$) 的圖形，在誤差較小時可以有較大的改變量。



(圖一)



(圖二)

參、研究目的及研究問題

- 一、調整不同參數對此線性系統的影響
- 二、修改線性系統的誤差次方
- 三、調整不同參數對倒立擺系統的影響
- 四、修改倒立擺系統的誤差次方
- 五、調整不同參數對模擬倒立擺系統，並期之做簡諧運動的影響
- 六、修改做簡諧運動之倒立擺系統的誤差次方

肆、研究方法

一、研究設備及器材

(一) Dev C++

用來寫程式的開發環境

(二) 相機

在倒立擺的實作時架在旁邊紀錄數據

(三) 倒立擺(inverted pendulum)

後續實際測試改良型PID的控制效果。

二、實驗設計與方法

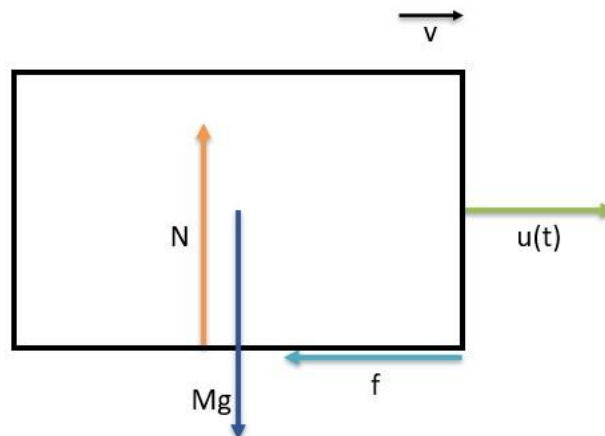
(一) 調整不同參數對此線性系統的影響

1. 研究目的

為實驗二調整PID比例項的誤差的指數做先前研究。因為 K_p 、 K_i 、 K_d 在不同的系統會有不同的效果，因此在確認調整指數項對該系統的控制效果前，希望可以先透過嘗試調整 m （質量）、 f （阻力）、 K_p 、 K_i 、 K_d 來理解原本的PID對此系統的控制程度。

2. 程式模擬的模型

模擬一個有固定受摩擦力(與物體速度無關、固定大小、和運動方向相反的摩擦力)的系統。



3. 實驗設計

變因 \ 實驗	起始值	目標值 (target)	M	f	K_p (比例項)	K_i (積分項)	K_d (微分項)
M (模擬質量)	0	1000	1~10	0	1	0	0
f (模擬摩擦力)	0	1000	1	0, 1, 5, 10, 15, 20, 50, 100	1	0	0
K_p (比例項)	0	1000	10	10	1~10	1	1
K_i (積分項)	0	1000	10	10	1	1~10	1
K_d (微分項)	0	1000	10	10	1	1	1~10

4. 實驗步驟

- (1) 以 C++ 寫一個程式模擬一個系統
- (2) 分別調整 m 、 f 、 K_p 、 K_i 、 K_d ，並透過輸出每單位時間該物體的位置，畫出 $x-t$ 圖
- (3) 分析不同的參數的影響

(二) 修改線性系統的誤差次方

1. 實驗目的

藉由調整 PID 比例項、積分項、微分項的次方，希望可以解決 K_p 很接近 0 時，無法解決穩態誤差的問題，或是減少使用 K_i 避免過衝。

2. 實驗設計

- (1) 一項比例項加指數

$$u(t) = K_p \cdot e^{index_1} + K_i \cdot \int e + K_d \cdot \frac{de}{dt}$$

最初比例項加上指數的版本

- (2) 兩項比例項加指數

$$u(t) = K_{p-1} \cdot e^{index_1} + K_{p-2} \cdot e^{index_2} + K_i \cdot \int e + K_d \cdot \frac{de}{dt}$$

一項指數項也許還不能找到最理想的函式，所以想利用多項式的想法逼近最佳函式，但變數太多不好調控，因此先以兩項測試多項是否會有比較好的效果。

- (3) 比例項、微分項、積分項都加上指數

$$u(t) = K_p \cdot e^{index} + K_i \cdot \int e^{index} + K_d \cdot \frac{de^{index}}{dt}$$

將三個參數的誤差都加上指數

3. 實驗步驟

- (1) 延續實驗一所使用的系統
- (2) 分別依照實驗設計調整PID的函式，觀察不同參數大小對控制效果的影響
- (3) 分析不同參數的影響

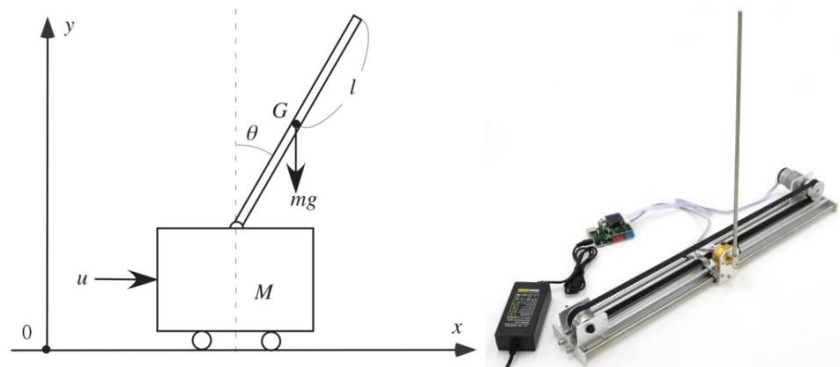
(三) 調整不同參數對倒立擺系統的影響

1. 實驗目的

同實驗一，由於 K_p 、 K_i 、 K_d 對於不同系統有不同影響，在確認調整指數項對實驗四模擬倒立擺的控制效果前，透過調整 K_p 、 K_i 、 K_d 三個參數來理解原本的PID對此系統的響應

2. 實驗設計

以程式模擬倒立擺（以Arduino做為控制器，透過程式控制的自動控制系統）



3. 實驗步驟

- (1) 以C++寫一個程式模擬倒立擺

- (2) 分別調整 K_p 、 K_i 、 K_d 三個參數
 - (3) 繪製控制輸出 $u(t)$ 、台車位置、台車速度、桿子傾斜角度、桿子傾斜的角速度與時間的關係圖
 - (4) 分析不同參數的影響
- (四) 修改倒立擺系統的誤差次方

1. 實驗目的

測試倒立擺模型在改良後的 PID 的控制下，能否有更好的控制效果。

2. 實驗設計

比例項、微分項、積分項都加上指數，用以控制倒立擺系統

$$u(t) = K_p \cdot e^{index} + K_i \cdot \int e^{index} + K_d \cdot \frac{de^{index}}{dt}$$

3. 實驗步驟

- (1) 以 C++ 寫一個程式模擬倒立擺
 - (2) 分別調整 K_p 、 K_i 、 K_d 三個參數
 - (3) 繪製控制輸出 $u(t)$ 、台車位置、台車速度、桿子傾斜角度、桿子傾斜的角速度與時間的關係圖
 - (4) 分析次方的影響
- (五) 調整不同參數對模擬倒立擺系統，並期之做簡諧運動的影響

1. 實驗目的

相較於將桿子維持在角度為 0 的地方，使桿子做簡諧運動更具挑戰性，可以更明顯看出控制系統的優劣，但是在比較次方對系統的影響前，先了解 K_p 、 K_i 、 K_d 的影響。

2. 實驗設計

延續上述的系統，改以一個正弦波為目標。

3. 實驗步驟

- (1) 以 C++ 寫一個程式模擬追蹤正弦波的系統
- (2) 分別調整 K_p 、 K_i 、 K_d 三個參數，和比例項的指數
- (3) 繪製控制輸出台車位置、台車速度、桿子傾斜角度、桿子傾斜的角速度與時間的關係圖
- (4) 分析不同參數的影響

(六) 修改做簡諧運動之倒立擺系統的誤差次方

1. 實驗目的

以控制難度較高的系統測試改良後的 PID 控制器是否較傳統的 PID 有更好的控制效果。

2. 實驗設計

延續上述的系統，改以一個正弦波為目標，並用程式模擬倒立擺追蹤此整正弦波

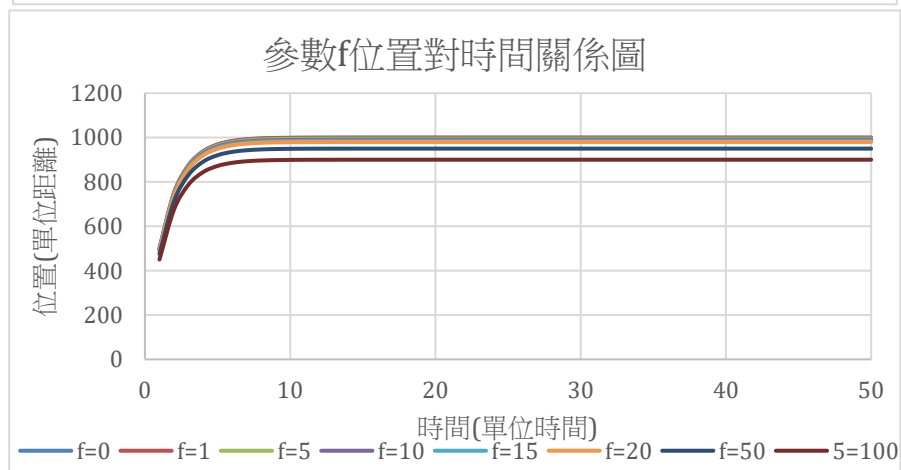
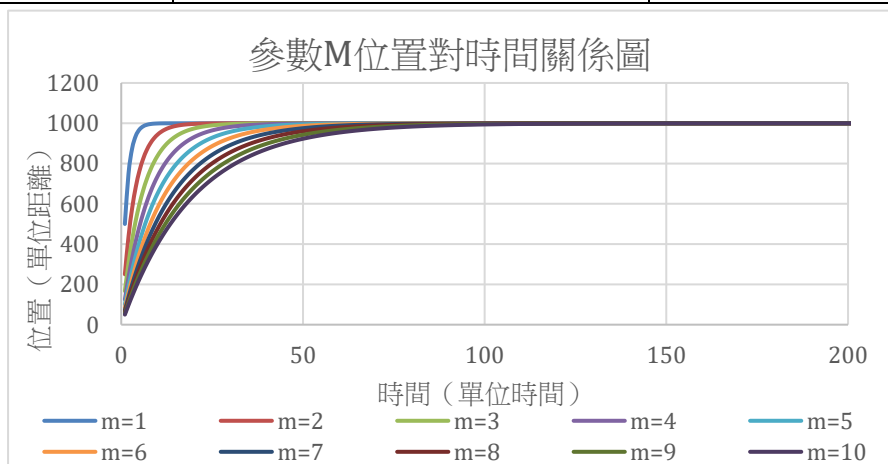
3. 實驗步驟

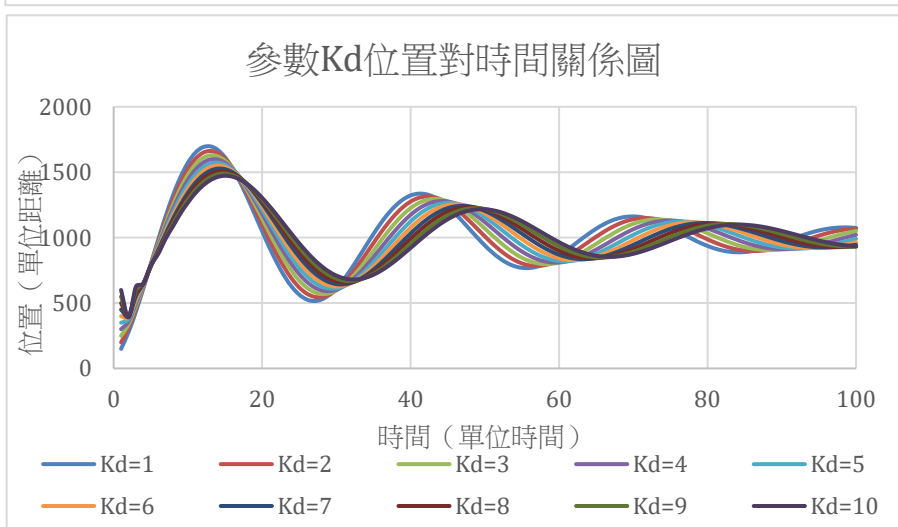
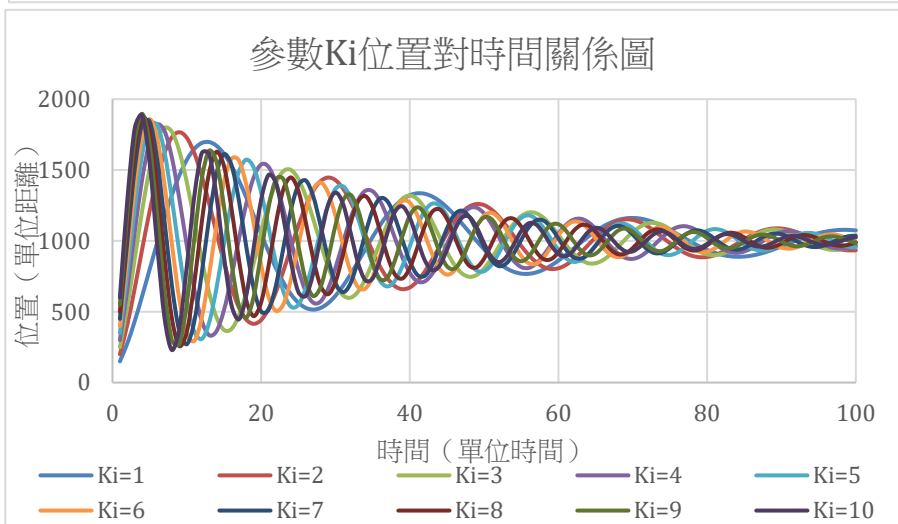
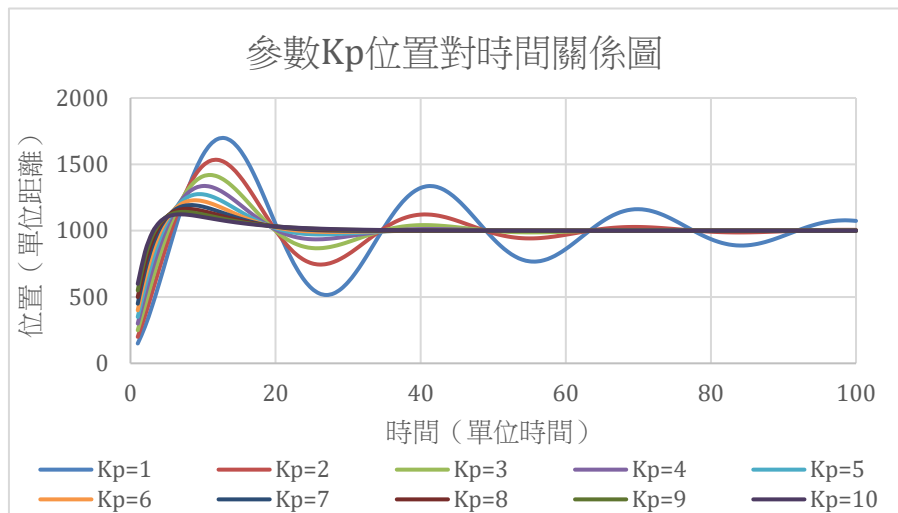
- (1) 以 C++ 寫一個程式模擬追蹤正弦波的系統
- (2) 分別調整 K_p 、 K_i 、 K_d 三個參數，和比例項的指數
- (3) 繪製控制輸出台車位置、台車速度、桿子傾斜角度、桿子傾斜的角速度與時間的關係圖
- (4) 分析不同參數的影響

伍、研究結果

一、調整不同參數對此線性系統的影響

操縱變因	控制變因	結果
質量 (m=1~10)	f=0, target=1000, (Kp, Ki, Kd)=(1, 0, 0)	質量和物體到達目標值得時間成正比
阻力 (f=0, 1, 5, 10, 15, 20, 50, 100)	m=1, target=1000, (Kp, Ki, Kd)=(1, 0, 0)	飽和的值=target-f
Kp (比例項 =1~5)	m=10, f=10, target=1000, (Kp, Ki, Kd)=(1~10, 1, 1)	週期沒有影響, 衰減程度改變
Ki (積分項=1~8)	m=10, f=10, target=1000, (Kp, Ki, Kd)=(1, 1~10, 1)	衰減程度沒有影響, 週期改變
Kd (微分項=1~10)	m=10, f=10, target=1000, (Kp, Ki, Kd)=(1, 1, 1~10)	週期變長, 振幅變小

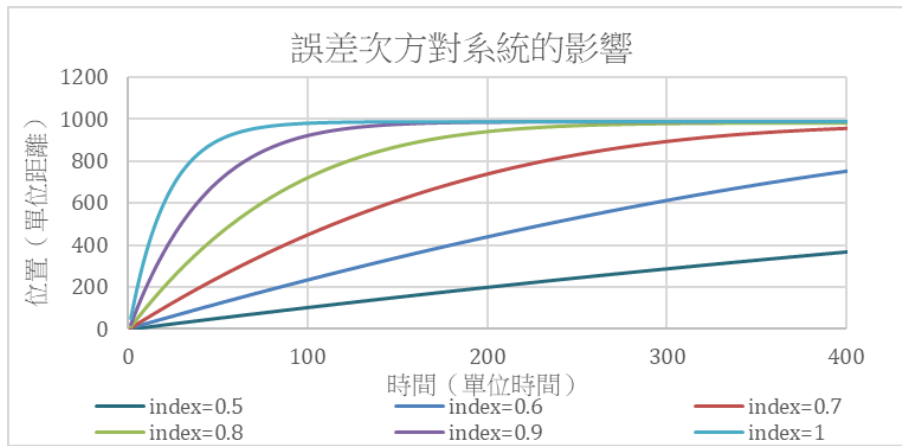




二、 修改線性系統的誤差次方

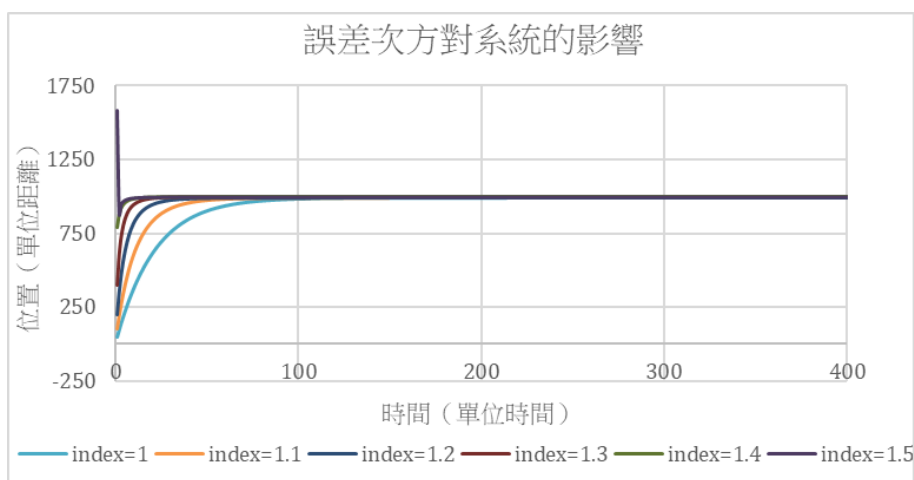
(一) 一項比例項加指數 (index=1 為傳統 PID)

1. 誤差次方對系統的影響 (指數小於 1)



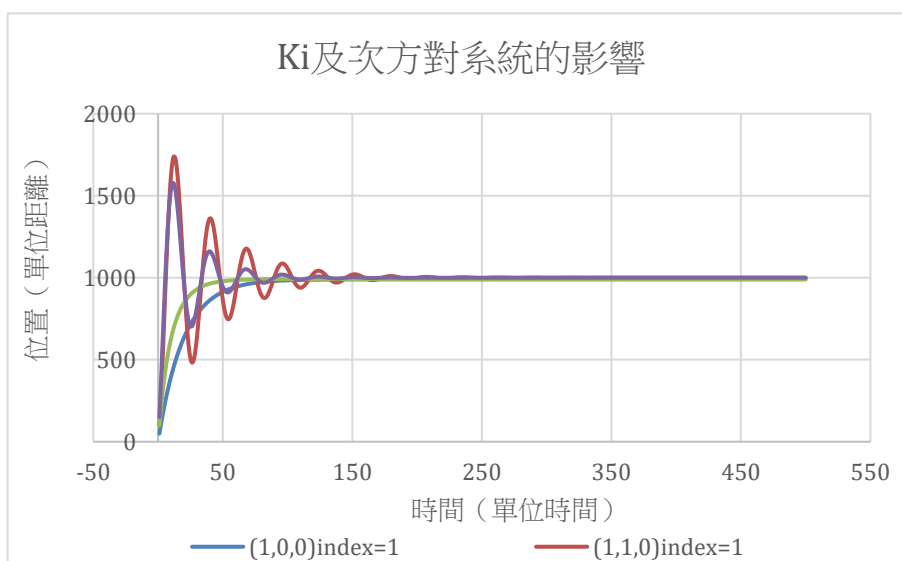
$$(K_p, K_i, K_d) = (1, 0, 0)$$

2. 誤差次方對系統的影響 (指數大於 1)

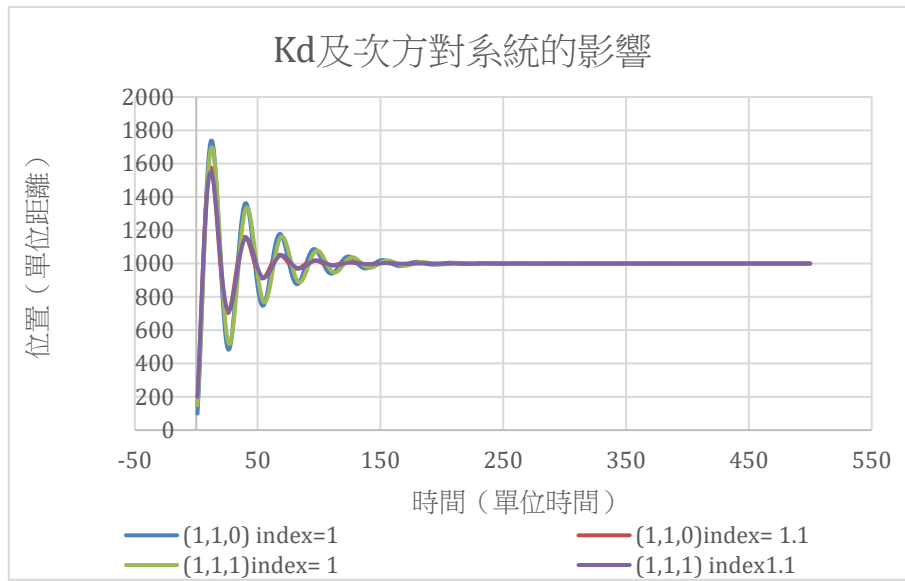


$$(K_p, K_i, K_d) = (1, 0, 0)$$

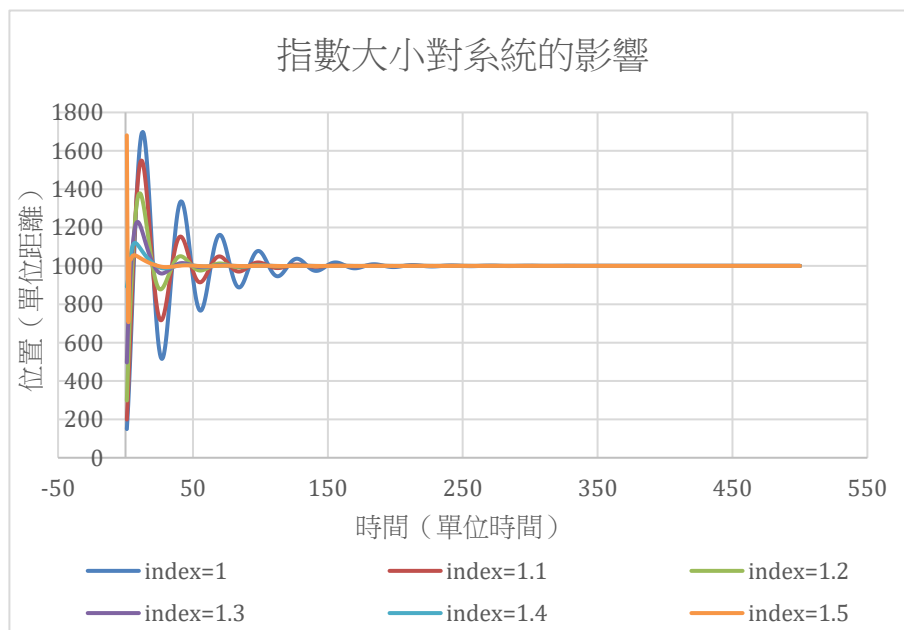
3. K_i 及次方對系統的影響



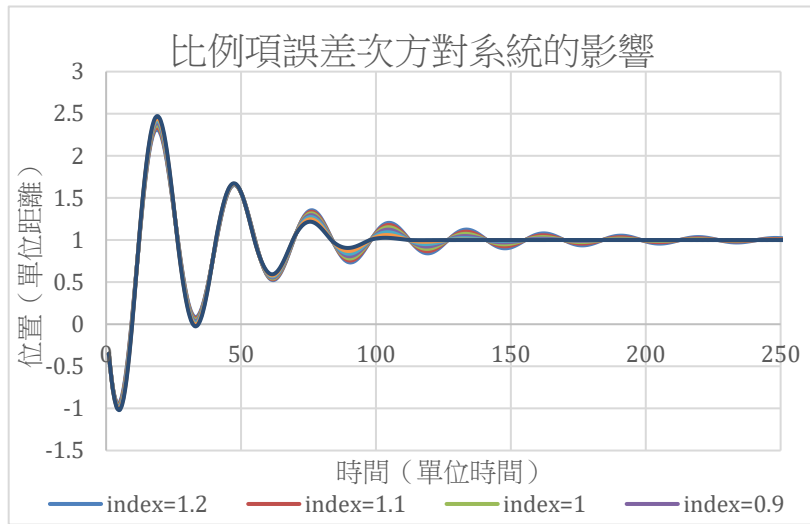
4. K_d 及指數對系統的影響



5. 指數對 $(K_p, K_i, K_d) = (1,1,1)$ 的系統的影響



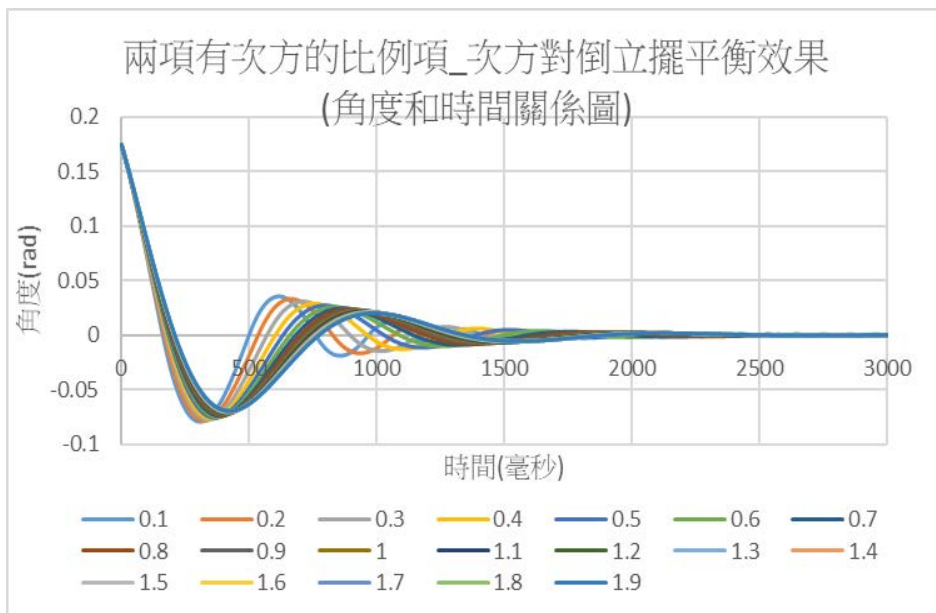
6. 將目標值設為 1

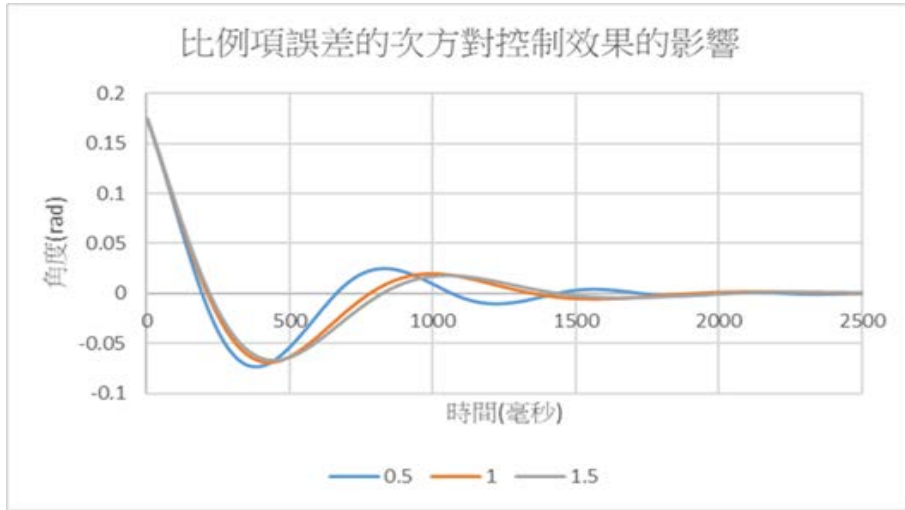


(二) 兩項比例項加指數

$$K_{p_1}=1, K_{p_2}=1, K_i=1, K_d=1, \text{index}_2=1;$$

下圖為 index_1 的變化和響應結果的關係圖

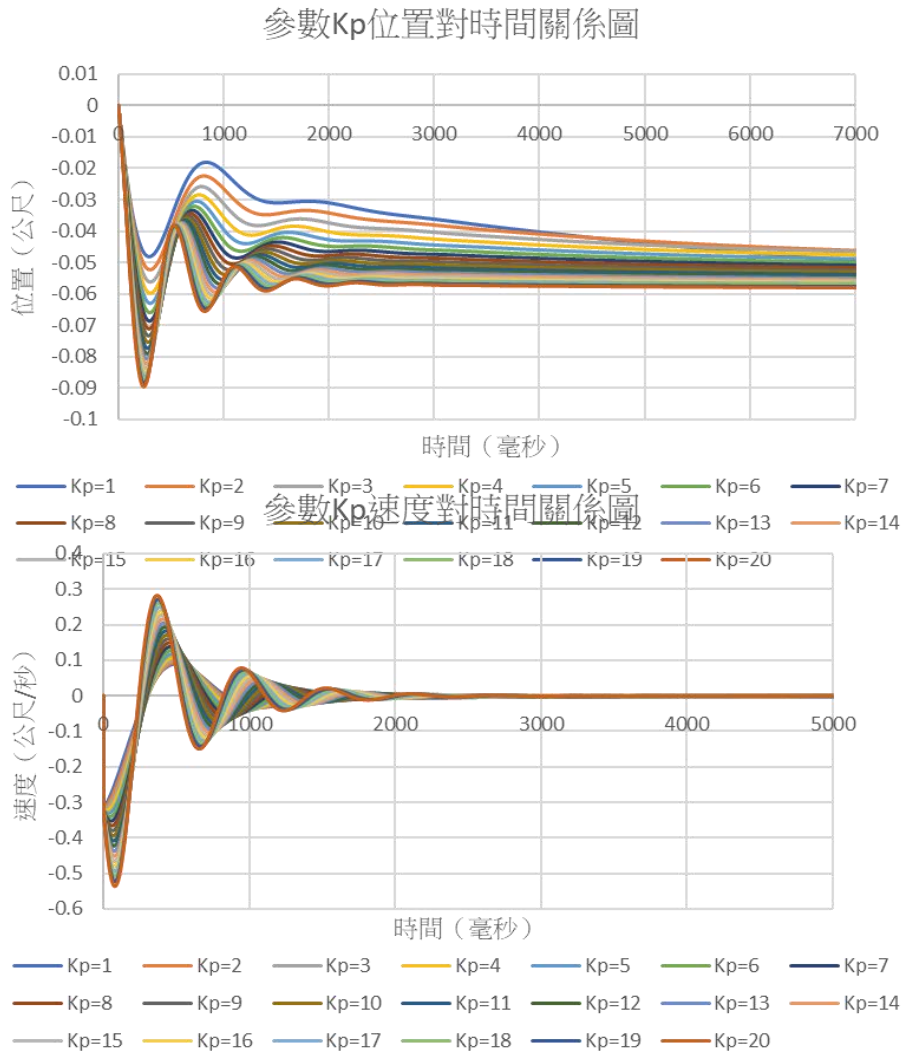


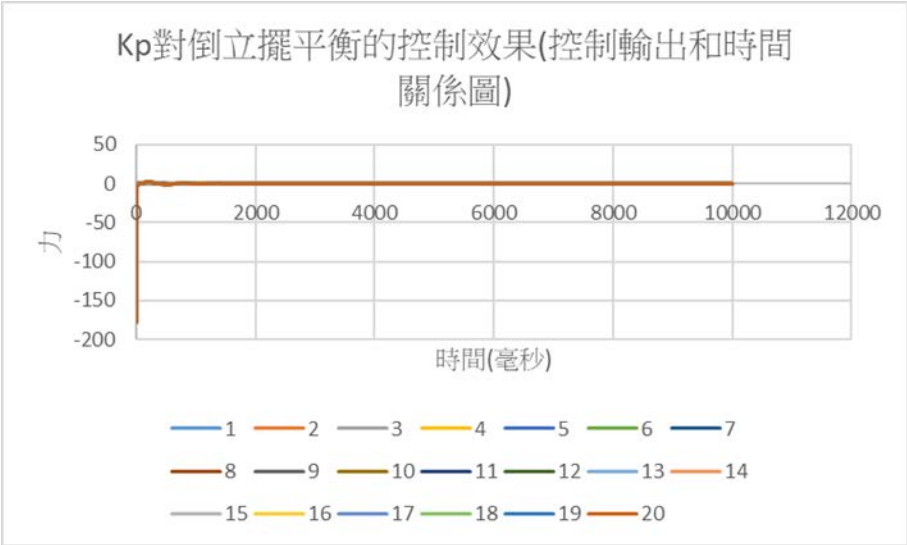
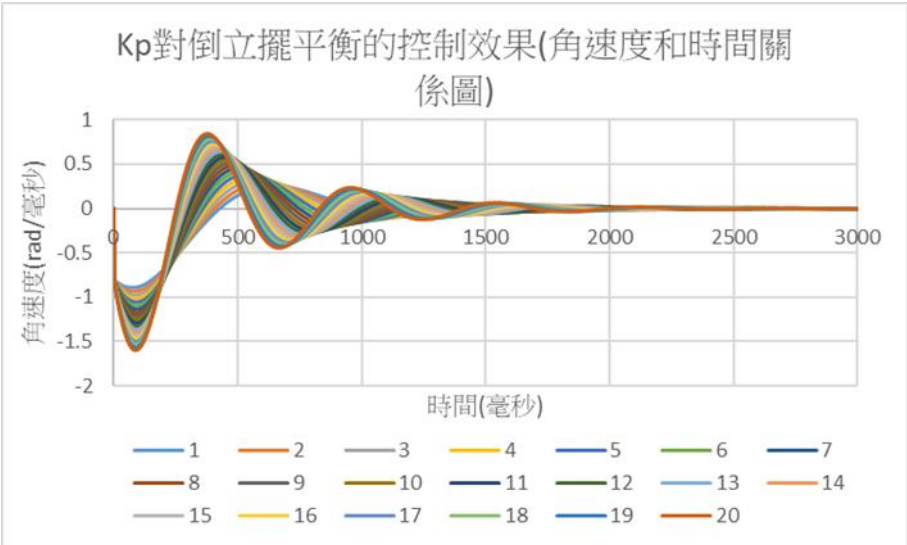
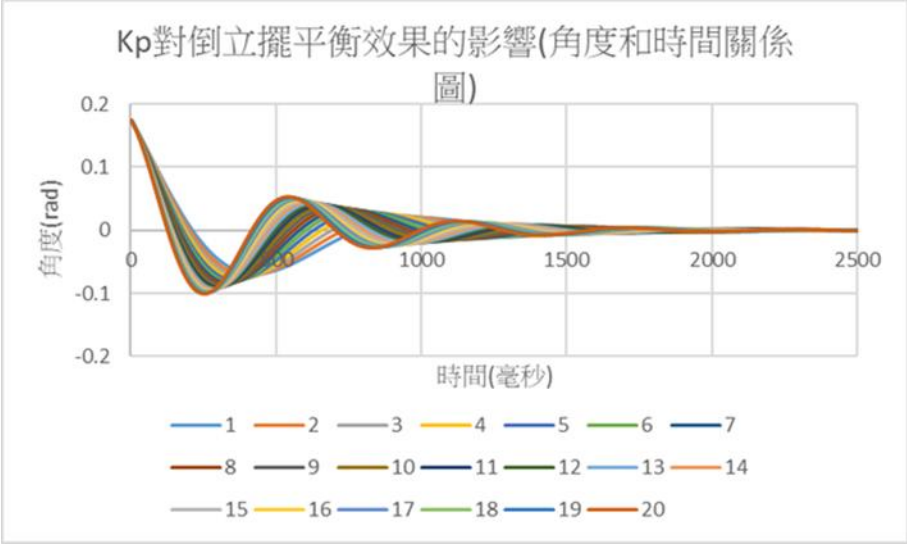


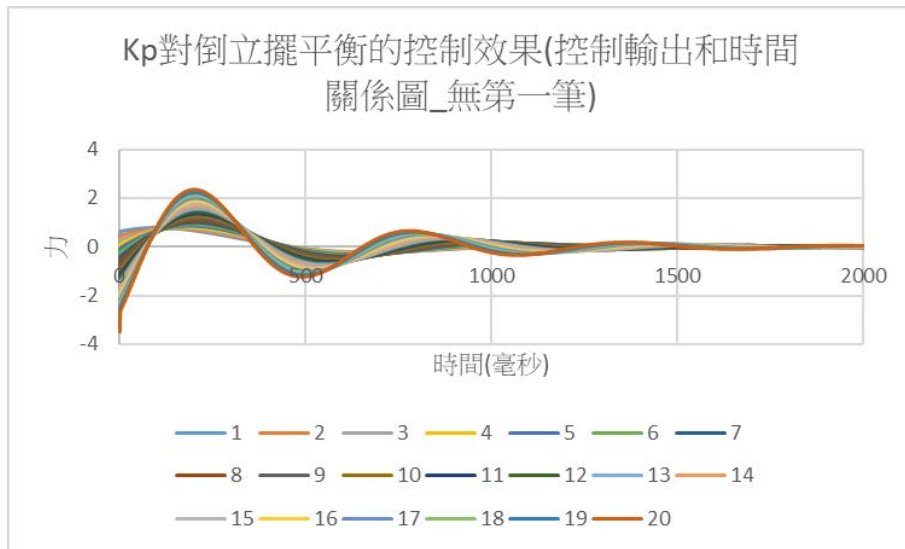
三、 調整不同參數對倒立擺系統的影响

(一) 調整參數 K_p 對系統的影响

$$(K_i, K_d) = (1, 1), \text{ index} = 1$$

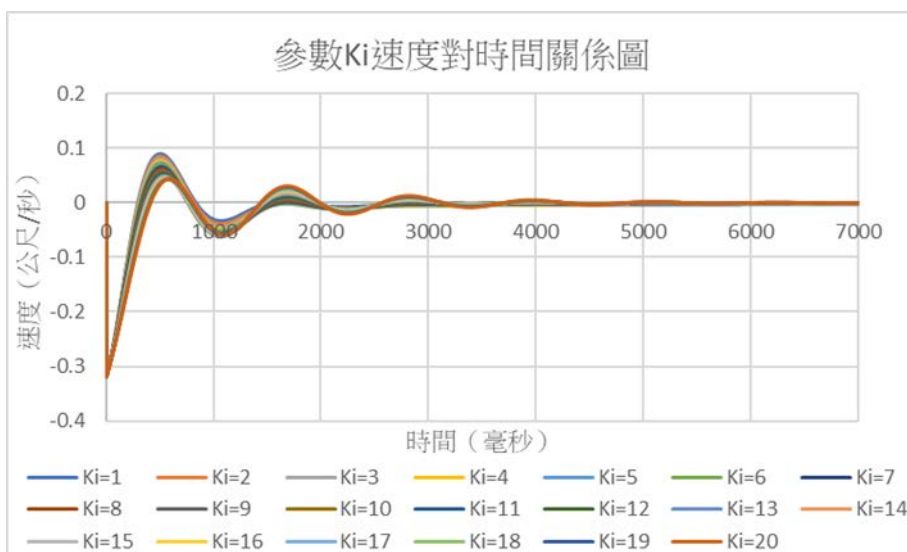
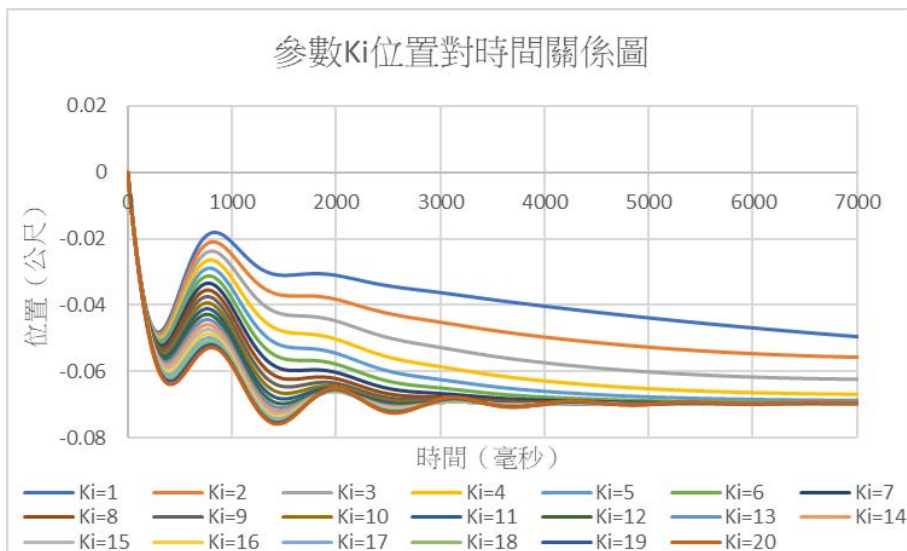


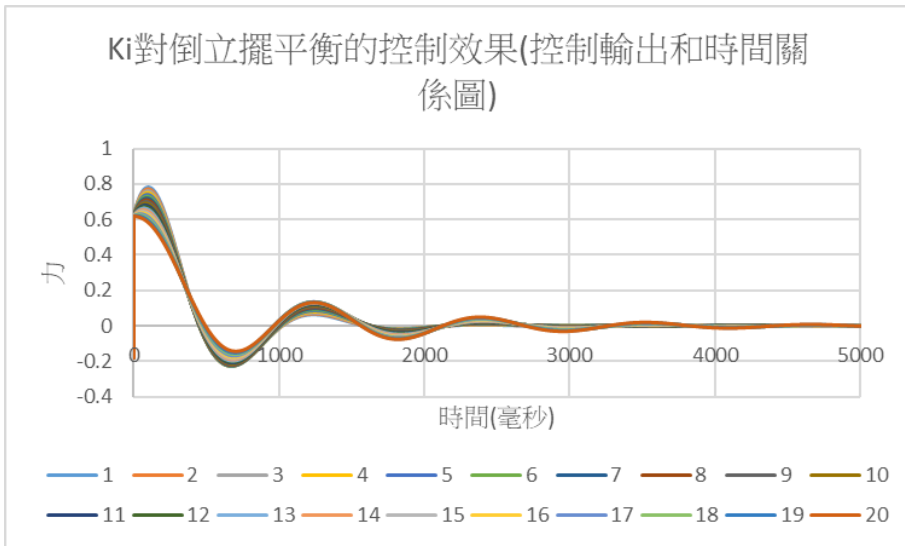
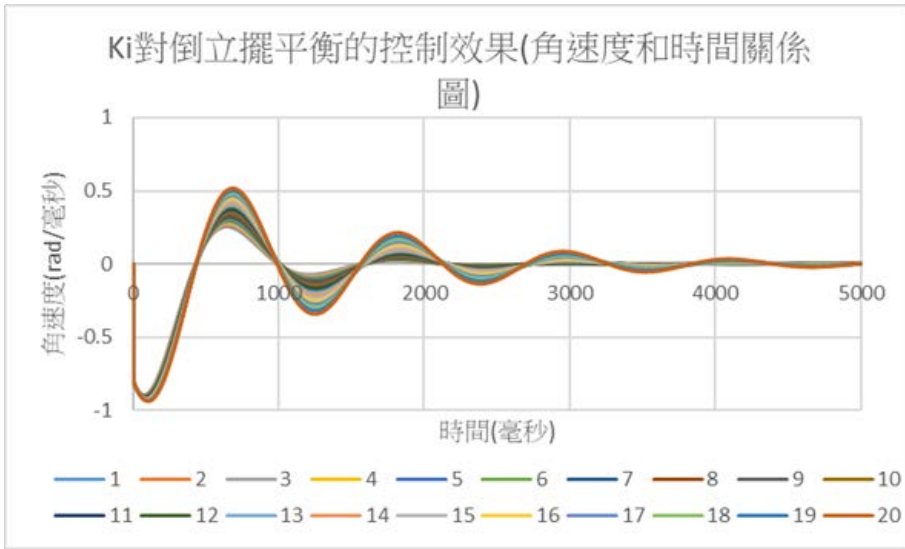
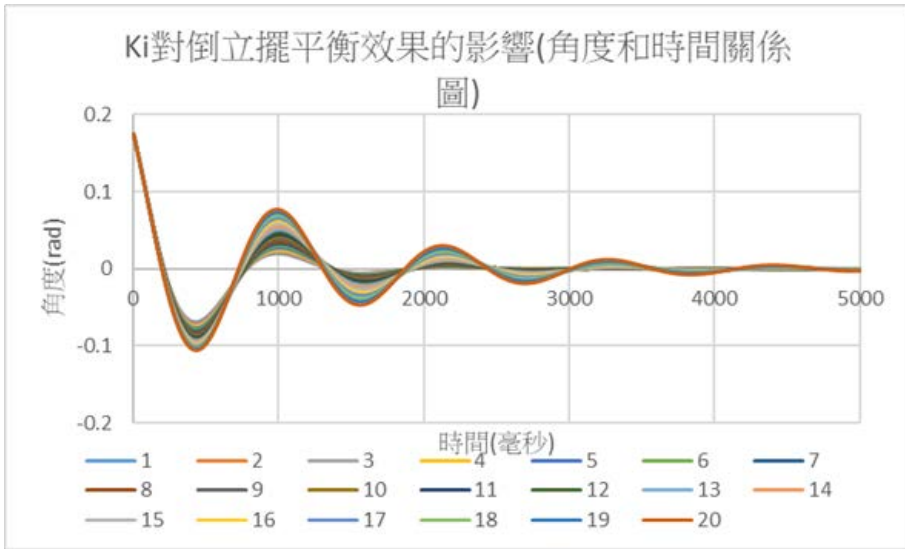




(二) 調整參數 K_i 對系統的影響

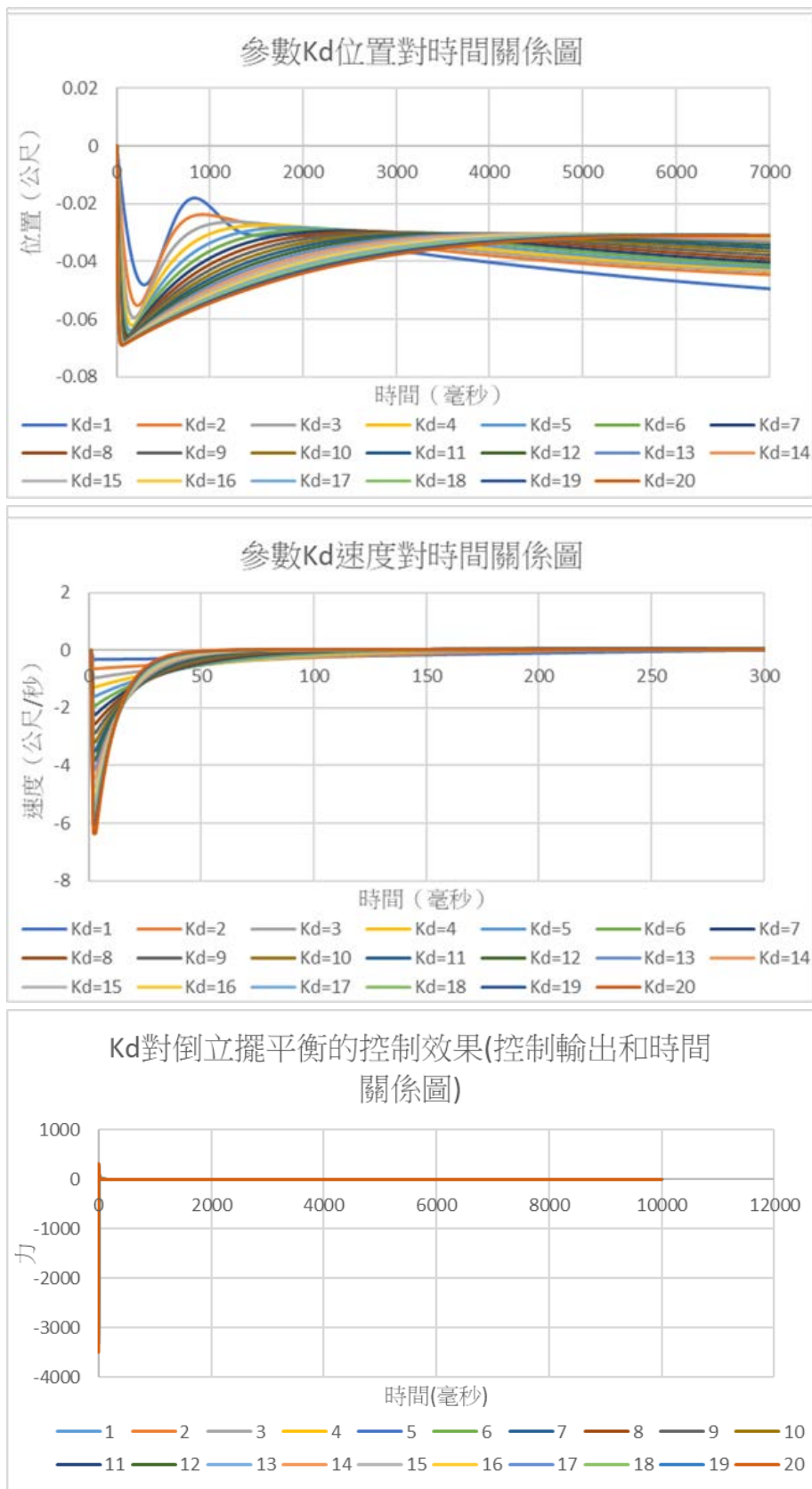
$(K_p, K_d)=(1, 1)$, index=1





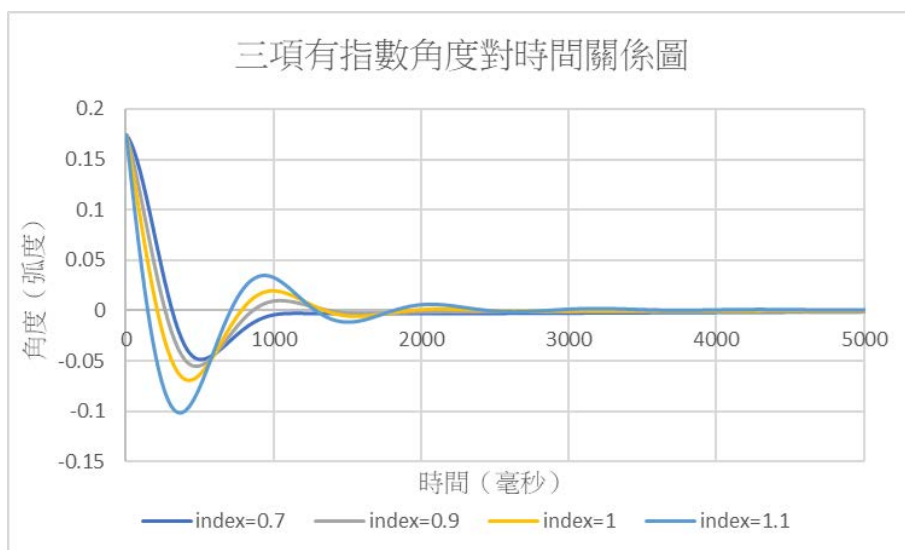
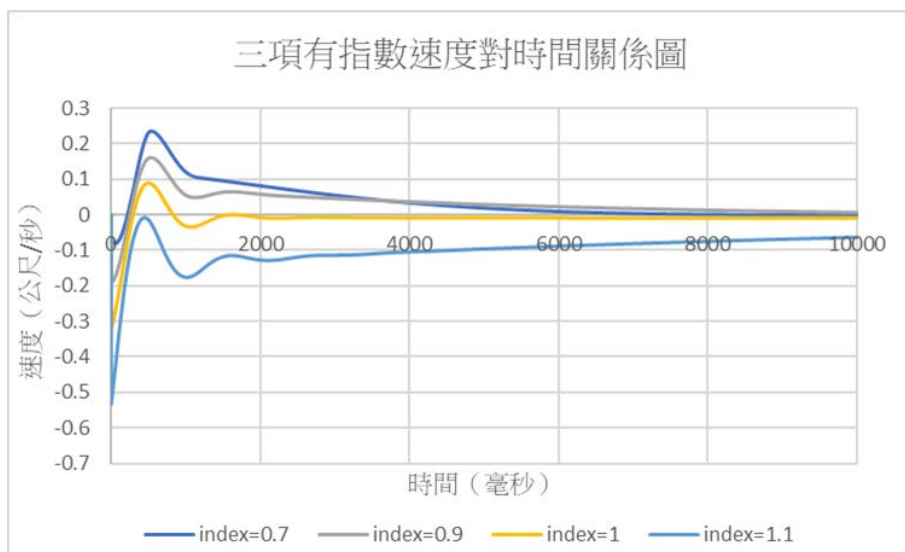
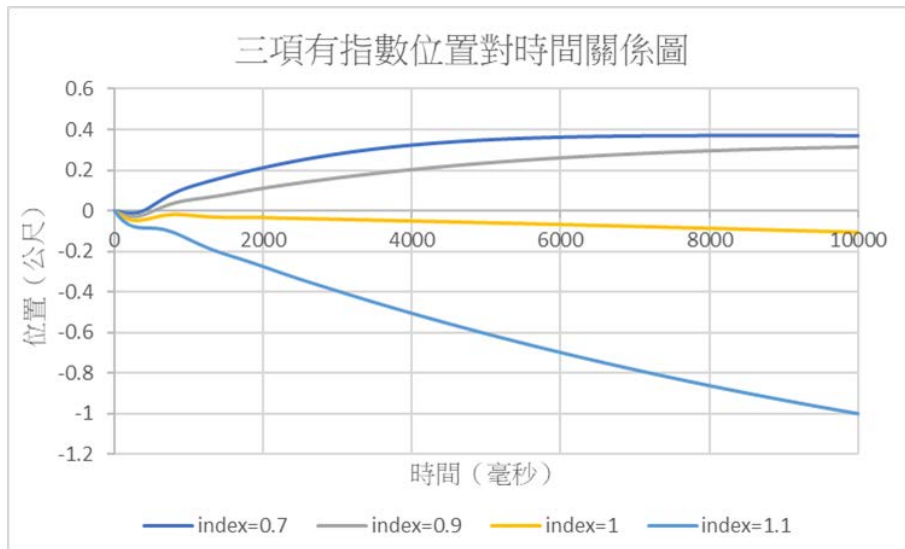
(三) 調整參數 K_d 對系統的影響

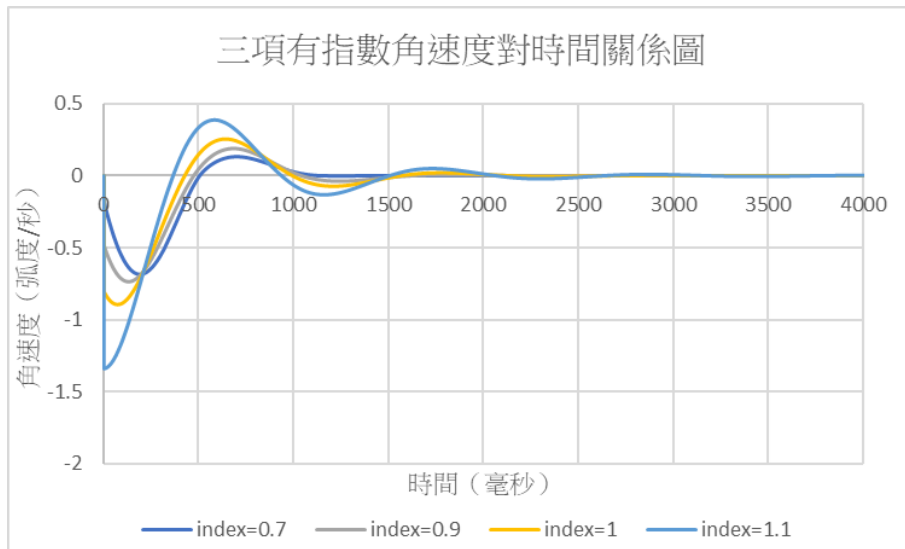
$$(K_p, K_i) = (1, 1), \text{ index} = 1$$



四、 修改倒立擺系統的誤差次方

$$(K_p, K_i, K_d) = (1, 1, 1)$$

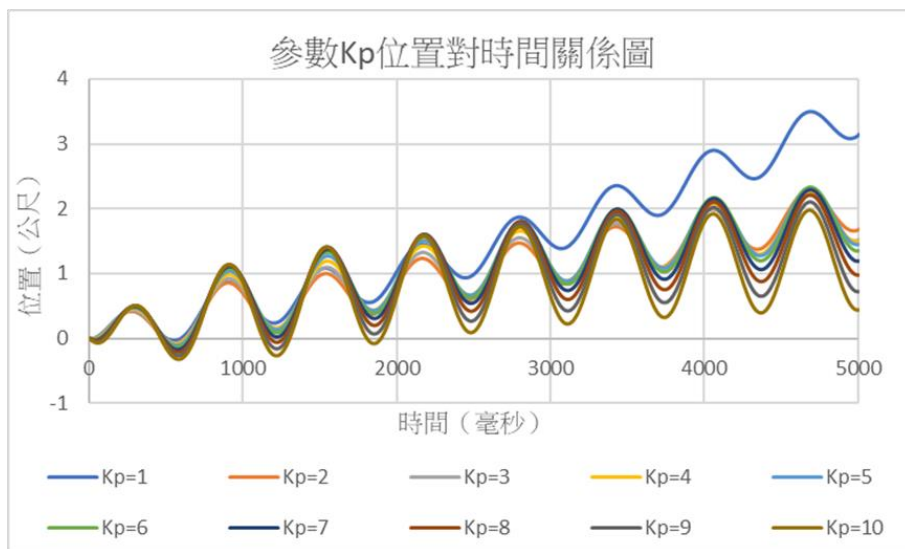


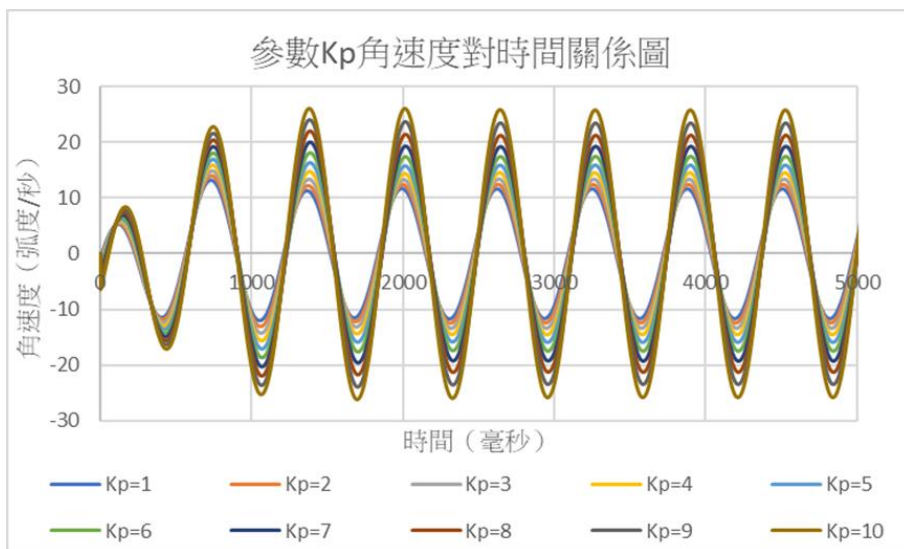
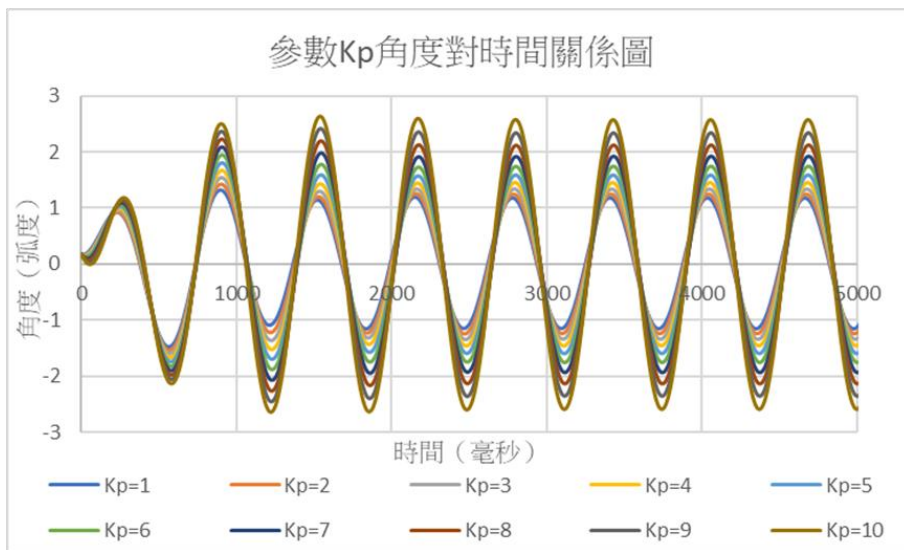
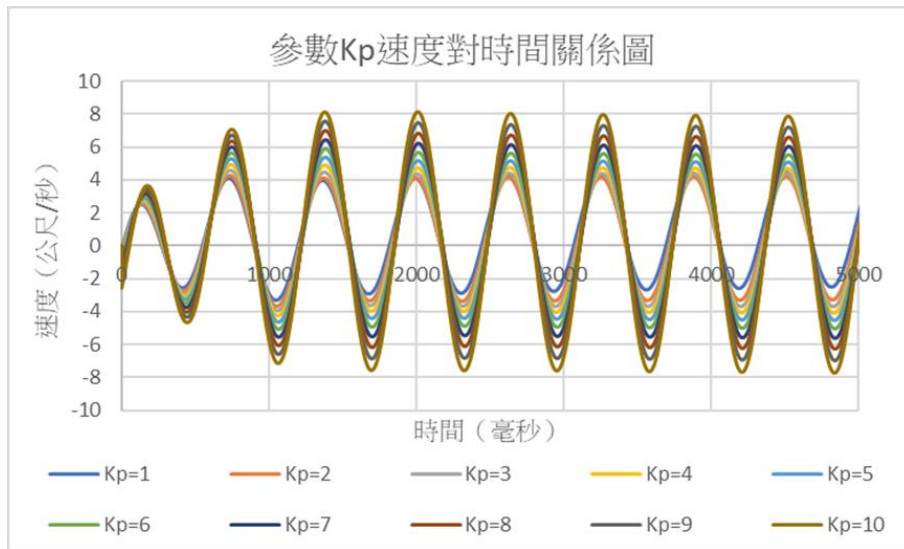


五、 調整不同參數對模擬倒立擺系統，並期之做簡諧運動的影響

(一) 調整參數 K_p 對系統的影響

$$(K_i, K_d) = (1, 1), \text{ index} = 1$$

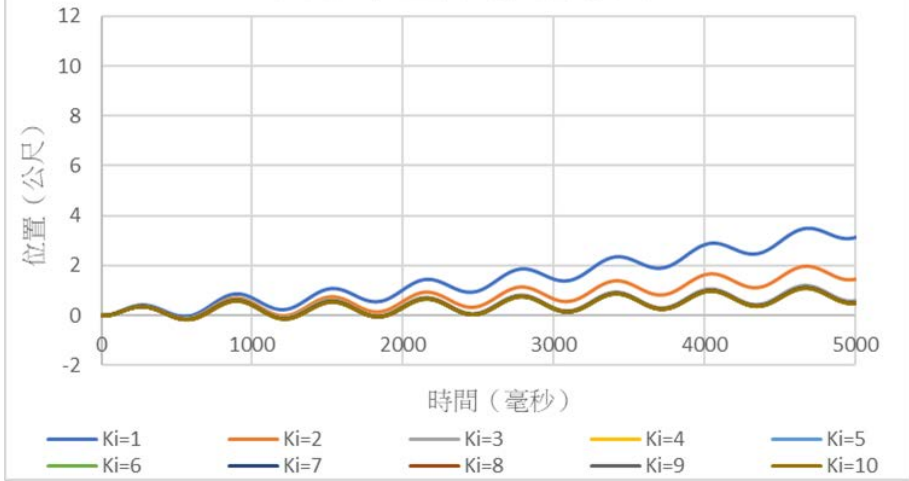




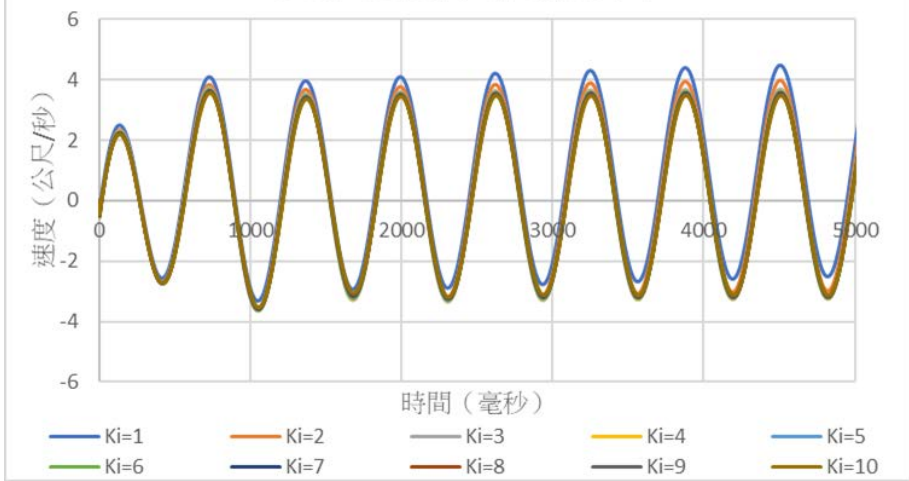
(二) 調整參數 K_i 對系統的影響

$$(K_p, K_d) = (1, 1), \text{ index} = 1$$

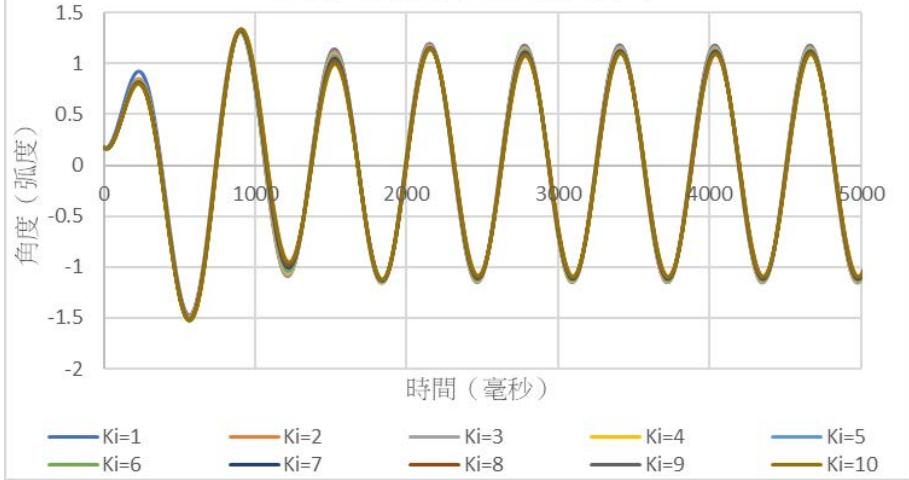
參數Ki位置對時間關係圖

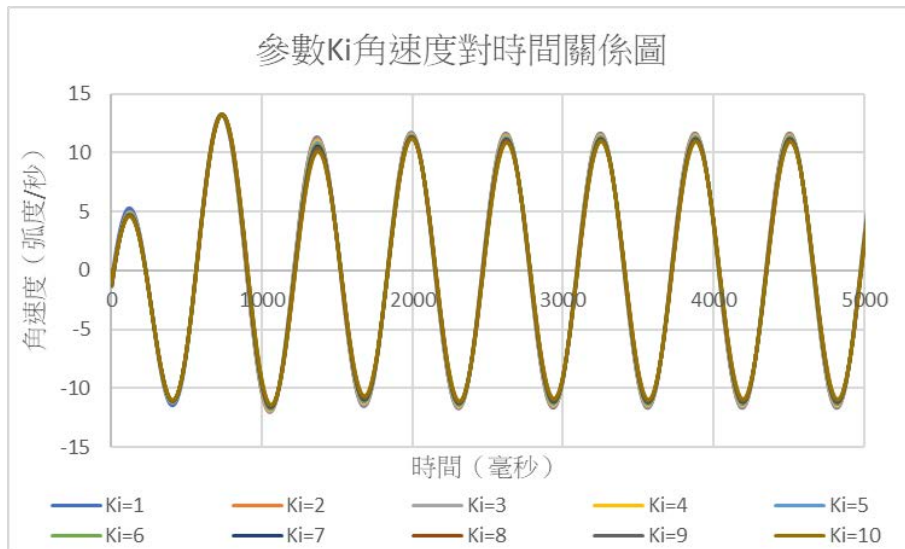


參數Ki速度對時間關係圖



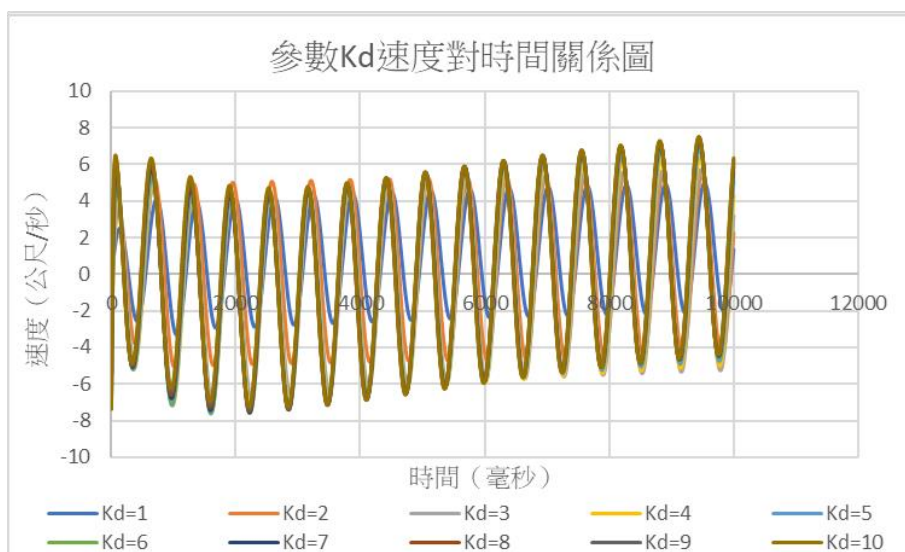
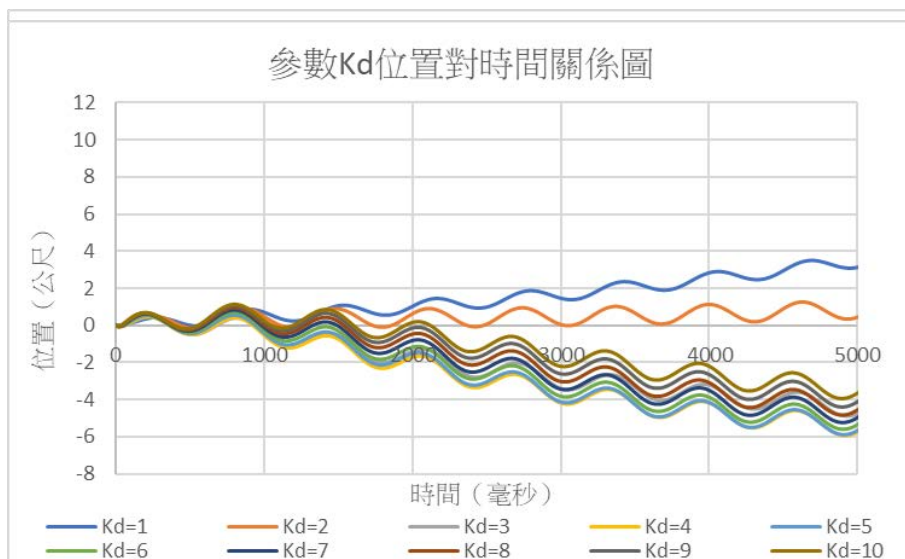
參數Ki角度對時間關係圖





(三) 調整參數 K_d 對系統的影響

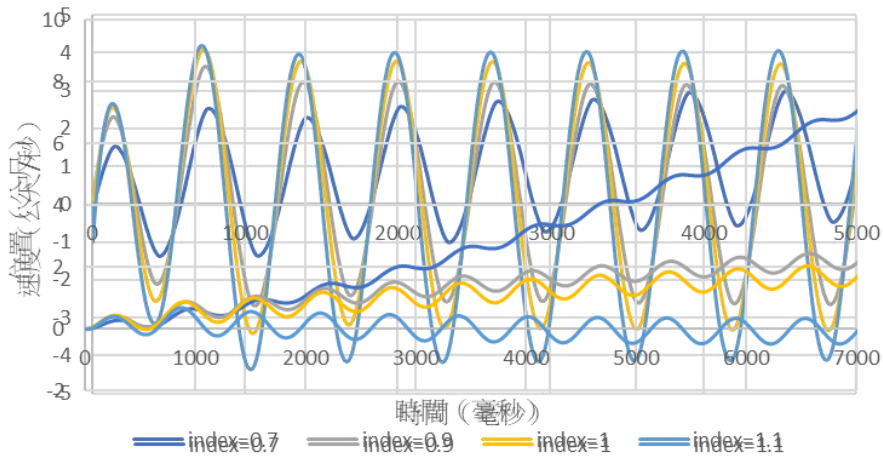
$(K_p, K_i)=(1, 1)$, index=1



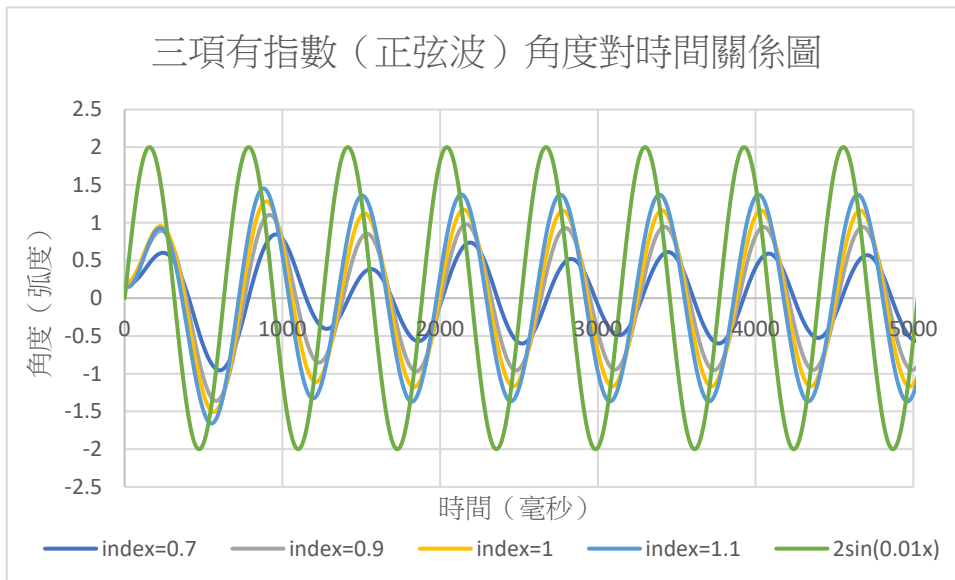
六、 修改做簡諧運動之系統的誤差次方

$$(K_p, K_i, K_d)=(1, 1), \text{ index}=1$$

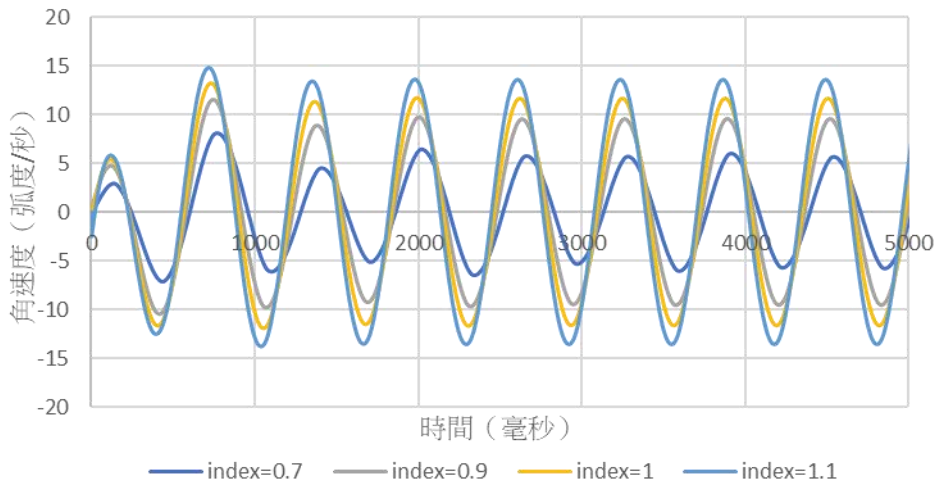
三項有指數（正弦波）速度對時間關係圖



三項有指數（正弦波）角度對時間關係圖

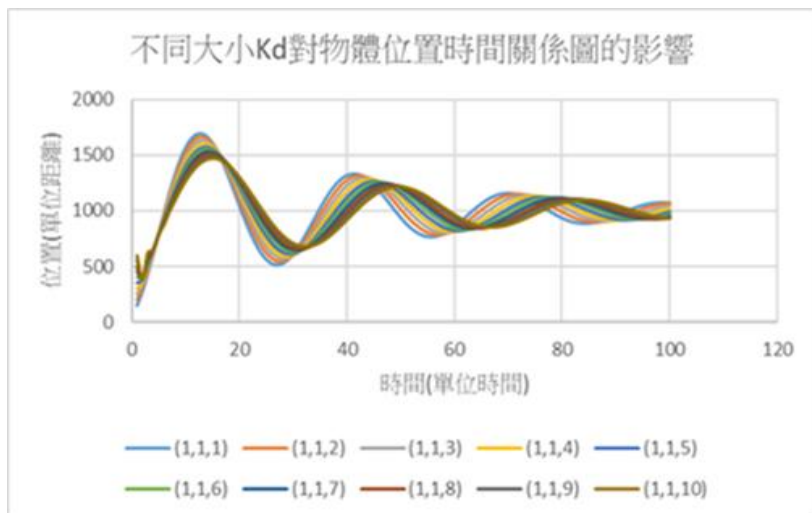
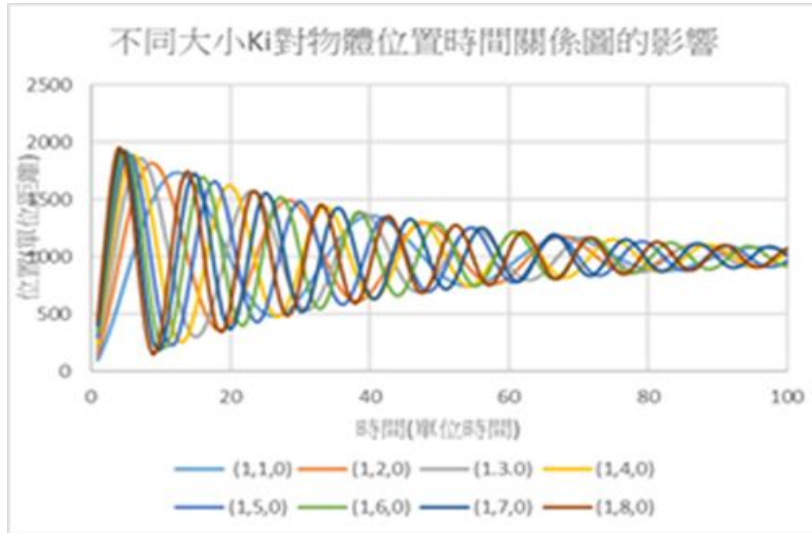
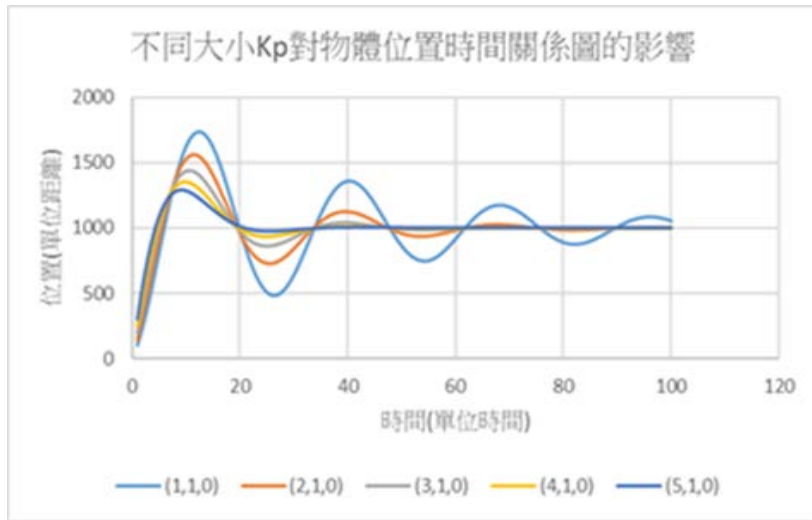


三項有指數（正弦波）角速度對時間關係圖



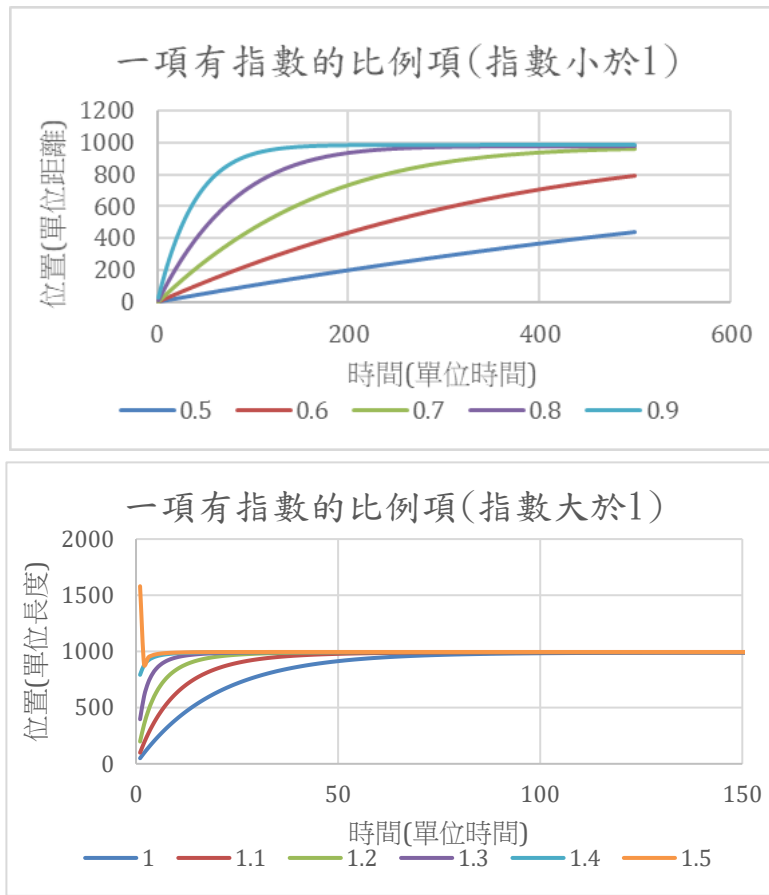
陸、討論

一、調整不同參數對此線性系統的影響

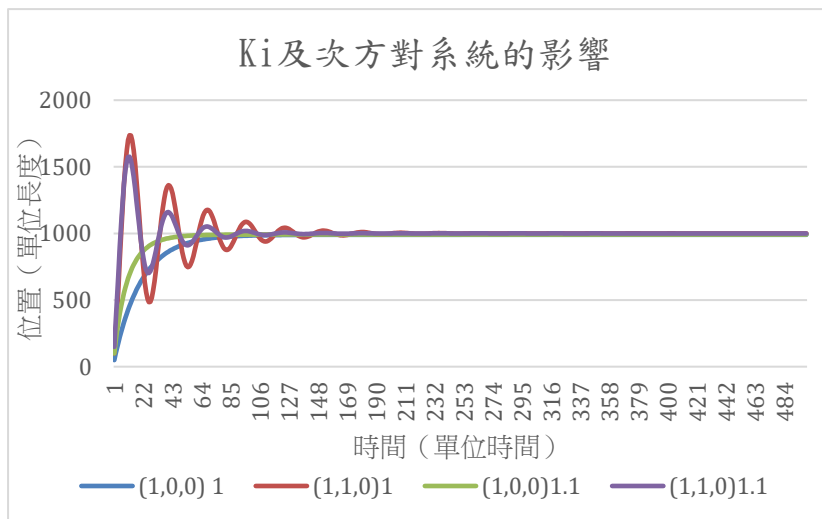


針對模擬的動態方程式(有一受平行於控制器施力方向的固定摩擦力)， K_p 的增加會使到達目標值衰減得指數函數改變，週期不變； K_i 的增加會使週期改變，到達目標值衰減得指數函數不變； K_d 會使兩者皆改變。其數學意義是動態方程式的解畫在複數平面上的變化。

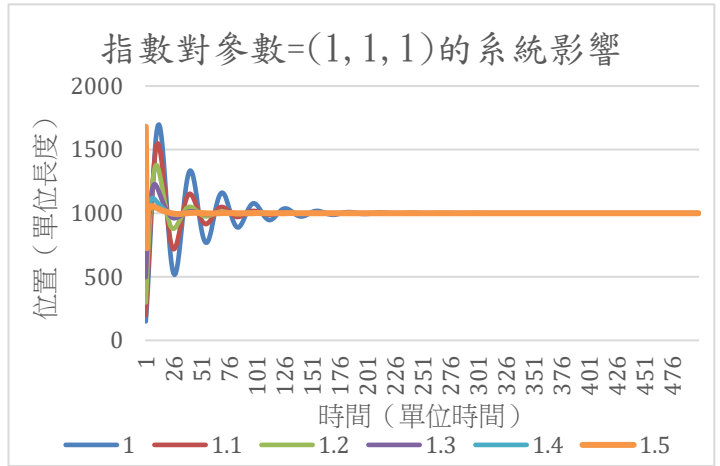
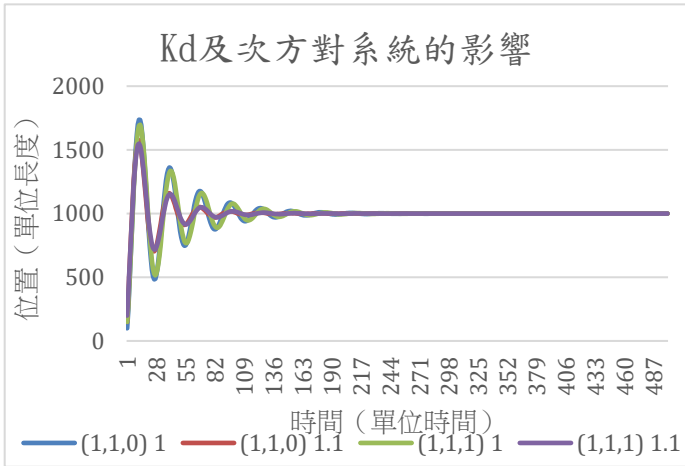
二、 修改線性系統的誤差次方



原本預計指數小於 1 會有一個好的效果，沒想到指數項小於 1 的部分反倒不如指數是 1 的控制效果來得佳，而指數大於 1 反而可以更有效的減緩穩態誤差的問題。



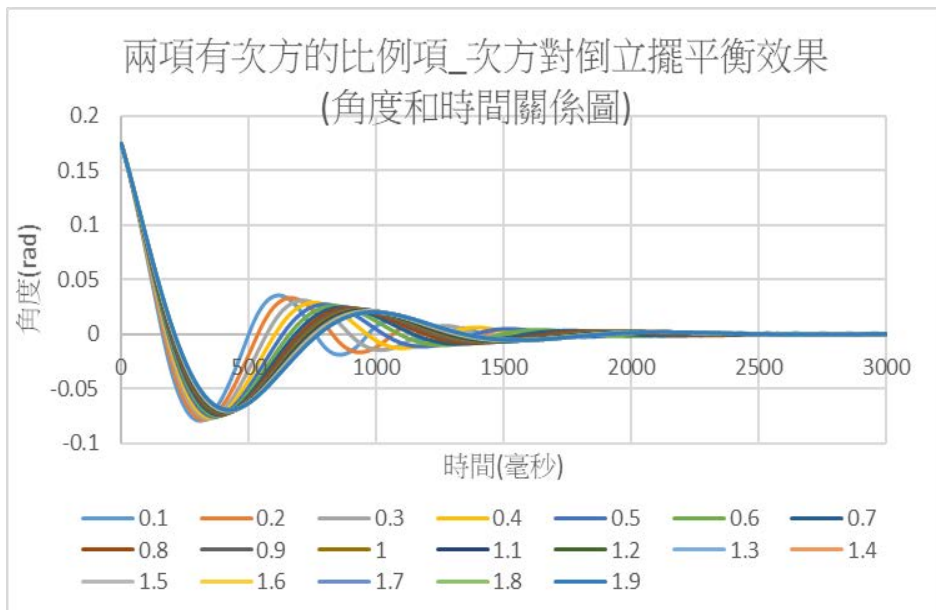
此圖為比較 K_i 和次方對系統的影響。 K_i 可解決穩態誤差的問題，在沒有 K_i 的情況下，就算有次方仍然無法到達目標值。但在有 K_i 的情況下，誤差變數的次方可以使系統振幅較小較穩定。



嘗試加上 K_d 項後，發現對於控制效果影響不大

左圖為比較 K_d 和次方對系統的影響。 K_d 和次方皆可減少系統的振幅，但相較於 K_d ，次方對系統的影響較為明顯。

右圖此圖為三個參數皆為1時，次方對於系統的影響。當次方為1.1~1.4時，可以減少系統的振幅且次方越大越平穩。而當次方=1.5時，系統會先過衝到大約1680，但後面相較於其他的更加穩定。



將比例項改為量項並加上次方後，相較於僅一項比例項並無明顯提升控制效果。我們猜測是因為兩項比例項可以合併為一項，因此控制效果沒有明顯提升。

三、 調整不同參數對倒立擺系統的影響

(一) 調整參數 K_p 對系統的影響

K_p 越大時，台車會離原點越遠，且台車速度變化較大；桿子角度的平衡響應

較快，但同時角度的過衝也較大，角速度變化較快。控制輸出的部分，在第一毫秒有一個很大的回覆力，其餘部分和角速度的圖類似。

(二) 調整參數 K_i 對系統的影響

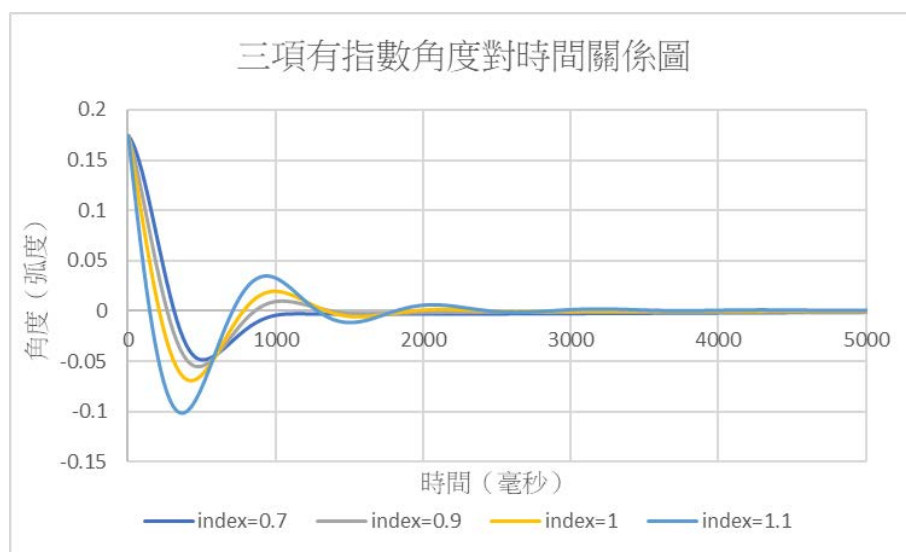
K_i 越大時，台車會離原點越遠，且台車速度變化較大；桿子角度的平衡響應較快，但同時角度的過衝也較大，角速度變化較快。控制輸出的部分，在第一毫秒有一個很大的回覆力。其結果與 K_p 對系統的影響類似，但是影響力較小。

(三) 調整參數 K_d 對系統的影響

K_d 越大時，台車一開始會離原點越遠，但是隨時間拉長， K_d 較大的結果反而讓台車更靠近原點。台車的速度也有此交錯的情形：一開始 K_d 較大參數台車速度較快，但速率又快速下降接近 0。桿子傾斜角度的部分，越大的 K_d 有更好的控制效果，不但比較早回到平衡點，也不會過衝。角速度和控制輸出的部分，皆是在一開始有個很大的角速度(或回復力)，而之後都在 0 附近。

四、 修改倒立擺系統的誤差次方

次方與 1 的差值越大，台車偏離的位置越遠；次方越大，台車的速度越低。次方越大，桿子平衡的響應較快，角速度較大，較容易搖晃。



我們模擬的程式所控制的是倒立擺的角度，在此圖中，index=1 為傳統 PID，而 index=0.7 及 index=0.9 響應皆比傳統 PID 快，其中 index=0.7 比 index=0.9 的控制效果更好，因此可以推測在此情況下，降低誤差變數的次方有助於提升控制效果。

五、 調整不同參數模擬倒立擺系統，並期之做簡諧運動的影響

(一) 調整參數 K_p 對系統的影響

K_p 越大時，台車偏移的量越少；速度、角度、速度變化率較高。

(二) 調整參數 K_i 對系統的影響

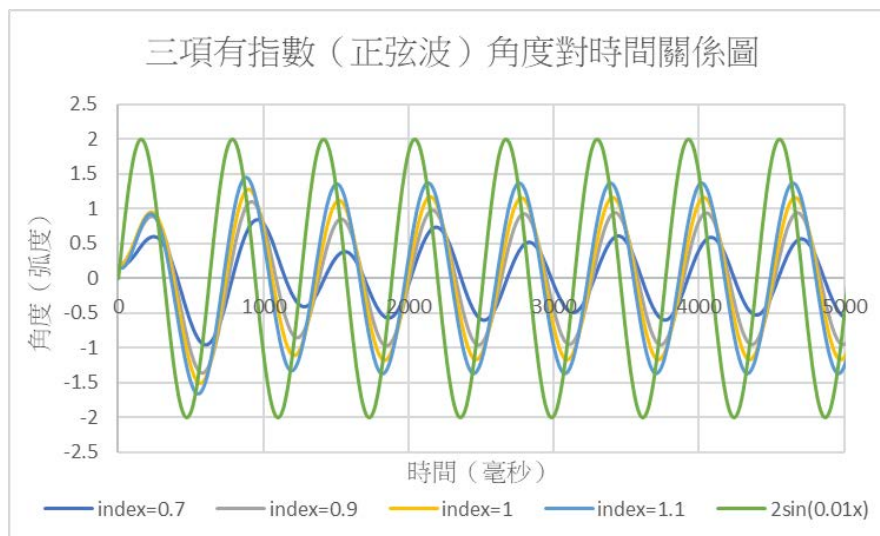
K_i 越大時，台車偏移的量越少；速度、角度、速度變化率較低，且其變化幅度較 K_p 小。

(三) 調整參數 K_d 對系統的影響

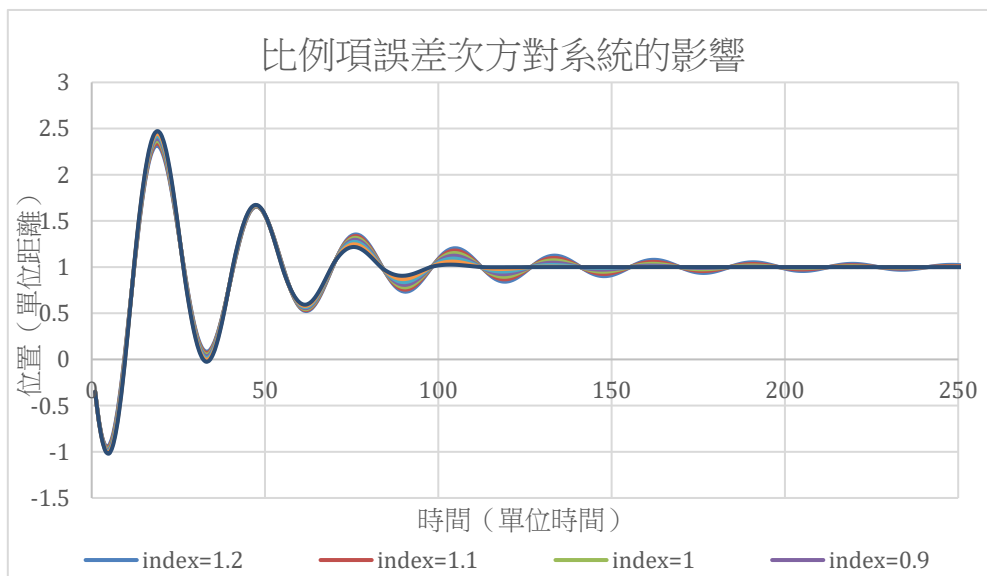
$K_d = 2$ 時，台車偏移原點的量越少，並不是 K_d 越大偏移量越高，在 $6 < K_d < 10$ 的階段， K_d 越大偏移量越少。 K_d 越大，速度變化率越大，而在 K_d 較小時，其差別較大。速度和角速度的部分， K_d 越大，角度和角速度的變化率都較大，而且在 K_d 較小時，其差別較大。

六、 修改做簡諧運動之倒立擺系統的誤差次方

次方越小，倒立擺偏移原本的位置越遠；速度和角速度變化量較小；角速度的部分，次方越大，響應較快，也越接近理想情況。



在追蹤正弦波的模擬中， $\text{index}=1.1$ 較接近我們所設定的正弦波，響應也較快。而在研究目的（二）及研究目的（四）中，指數的大小對兩者的影響有所不同。我們猜測可能是因為目標值較大時，次方需大於1才可使系統響應更快，而當目標值較小時，次方小於1可提升控制效果。而此實驗中我們所設的正弦波較大，因



此次方需大於 1 才可提升控制效果。我們也測試將研究目的 (二) 的系統的目標值改為 1，發現此時次方小於 1 響應才能較快 (如下圖)。

柒、結論與應用

本研究發現，透過修改 PID 控制器中的誤差變數次方，可以提升系統的控制效果。相較於傳統的 PID，在同樣的情況下，適當調整誤差變數的次方可以使系統響應更快，得到更好的控制效果。

目前我們的程式分別是以線性系統，以及線性化的倒立擺還進行模擬，未來我們會利用程式來模擬非線性系統，並同時控制倒立擺的角度以及位置。另外，我們的研究皆為程式模擬，後續我們將利用倒立擺來實測模擬的結果。我們希望透過非線性系統的模擬和倒立擺的實作，來測試誤差變數的次方在非線性系統中，對系統的影響程度，並且使系統的控制效果最佳化。

本研究發現(1)當目標值越大時，誤差的次方要大於 1 才可提升控制效果，而當目標值較小時，誤差的次方要小於 1 以提升控制效果。但兩者的次方皆不宜過大過小，否則可能會導致系統發散；(2)當我們改為兩項有次方的比例項時，我們發現其對控制系統的影響和只有一項得差不多。

未來希望能實際應用我們改良的 PID 控制器。改良型的 PID 控制器比起傳統的 PID 控制器，有較多的調整彈性，可使系統響應更快。若能將其應用在機器手臂、自駕車等，就能帶來效能更高、更好的控制效果。

捌、參考資料及其他

1. Understanding PID Controller (Understanding PID control)<https://www.youtube.com/playlist?list=PLn8PRpmsu08pQBgJxYFXSsODEF3Jqmm-y>
2. PID 控制器參數調諧 https://myweb.ntut.edu.tw/~jcjeng/Chap6_PID%20Tuning.pdf
3. 分數階 PID 控制器應用於倒單擺系統 (林育賢, 2012)<http://library.kvs.kh.edu.tw/KSVS%20Journal/11/6.pdf>
4. 修飾比例項以提升 PID 控制器效能 (張璣勻、陳芊竹, 2021)

【評語】 100037

1. 本研究以加入誤差變數的次方運算，改良型非整數次方 PID 控制器設計，值得鼓勵。
2. 建議可以針對不同變因的影響原理與效益，作進一步探討、並進一步加強創新之說明。
3. 非線性設計具有大誤差的快速校正功能，但也同時讓包含控制器的系統的動態無法簡易的探討和模擬。
4. 控制器中三個項的各自的效果和強度可以進行分析，以判別在各種動態條件下控制器校正的能力，也有助於進行控制器設計。