2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010033

參展科別　數學

作品名稱　推廣圓冪定理及圓錐曲線內接四邊形判定定理之探討

得獎獎項

就讀學校　臺北市立內湖高級中學

指導教師　林鳳美

作者姓名　林士哲、彭士鳴

關鍵詞　推廣圓冪定理、圓錐曲線內接四邊形判定定理、圓錐曲線作圖

作者簡介

我是林士哲，數學是我最感興趣的科目，從國七就開始探索及研究數學，至今已經發展好幾篇數學作品，過程中學習到各種的數學觀點及獨特見解，這是最開心的事。這次難得的盛會中，除了希望我們作品的結果能廣泛被應用外，抱持學習的心態以擴展我的知識與國際視野，十分感謝指導老師以及支持我的師長和家人一路上陪伴與指導。

我是彭士鳴，由於喜歡思考數學和挑戰各種問題，所以從國七就開始探索及研究數學，積極參加各項數學競賽。當中雖然遇到無數次的困難，但我們都逐一克服了，知識上的見解也跟隨逐日增強，因而數學成為我最酷愛的科目，更能體會數學理論之美。這次難得的盛會非常榮幸，特別感謝指導老師以及支持我的師長和家人。

摘要

在歐氏幾何和射影幾何中，相異五點可決定一圓錐曲線。若給定任意四邊形，是由四邊形的四個頂點及異於此四頂點的第五點來決定圓錐曲線，則稱此四邊形為圓錐曲線內接四邊形。

圓冪定理是一個圓內接四邊形的幾何定理，包含相交弦定理、割線定理、切割線定理等三個定理，我們將圓冪定理推廣至圓錐曲線內接四邊形。首先由圓錐截痕推廣圓內兩交弦定理，是考慮兩垂直交弦，進而推導出圓冪定理推廣一式及區分圓錐曲線種類。接著利用圓錐曲線的方向直徑、邊或對角線斜率及平行邊的切線長推導出圓冪定理推廣二式、三式及四式，推廣式是採統一與歸納方式呈現。

其次，由解析幾何推導另一種圓冪定理推廣式(推廣五式)，加上圓錐曲線直徑性質，論證出二種圓錐曲線及其內接四邊形的作圖及其判定條件。最後也證明圓錐曲線內接四邊形判定定理及有趣的錐線中心軌跡圖形。

Abstract

In Euclidean and projective geometry, five points determine a conic section. Given any quadrilateral, the conic section is composed of the four vertices of the quadrilateral and the fifth point different from the four vertices. The quadrilateral is called conic inscribed quadrilateral.

Circle power theorem is a geometric theorem for a cyclic quadrilateral, including the intersecting chord theorem, secant theorem, and tangent-secant theorem. In this study, we attempt to generalize this theorem to a quadrilateral conic section. First, we use the intersection of a cone and a plane to generalize circle power theorem and distinguish the types of the conic section. We consider two perpendicular intersection chords and deduce the first generalized formulas. Next, we use the direction diameter、the slope of the side or diagonal line and the length of the tangent line to present of the conic section generalize circle power theorems (is called the second、third、fourth generalized formulas). The generalized formulas are presented in a unified and inductive way.

Next, we use analytic geometry to generalize another type of the generalized formula of circle

power theorem (is called the fifth generalized formulas), and add the diameter properties of a conic section, so as to obtain two kinds plotting of conic inscribed quadrilateral and obtain the construction conditions. Finally we also prove inscribed quadrilateral theorem on the conic section and the interesting center trajectory graph of a conic section.

壹、前言

參賽中華民國第 61 屆中小學科學展覽會完成一篇作品：「錐心覓跡-圓錐曲線及其內接四邊形的作圖與幾何性質之探討」，是藉由推廣圓內兩交弦定理論證出二種圓錐曲線及其內接四邊形的作圖，事實上可將推廣圓內兩交弦定理推廣至圓冪定理。圓冪定理是指設一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 且給定平面上一點 P ，則

$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}=\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$ (圖 1 中左圖) 或 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}$ (圖 1 中中圖及右圖)。 (1)

這定理包含圓內兩交弦定理、切割線定理及割線定理等三個定理，分別參見圖 1。

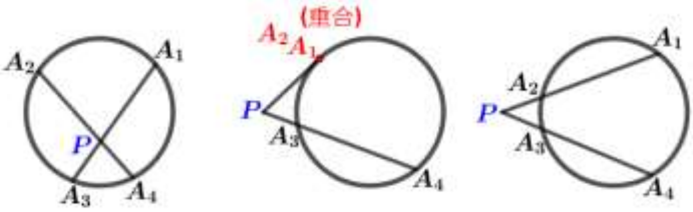


圖 1：圓內兩交弦定理、切割線定理及割線定理

將(1)式推廣至圓錐曲線內接四邊形的推廣式有二種，記作推廣式(I)及推廣式(II)：

首先利用圓錐截痕來推導圓內兩交弦定理的推廣式，考慮 $\overline{A_1A_3}\perp\overline{A_2A_4}$ ，推導推廣式(I)為

$\overline{PA_1}^2=k\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$ (有心錐線) 或 $\overline{PA_1}^2=k\overline{PA_2}$ (無心錐線)，其中 k 為比例常數。 (I.1)

特別探討(I.1)中 k 值來區分圓錐曲線的種類，進一步再推廣至切割線定理及割線定理為

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=k\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}\text{ ，其中 }k\text{ 為比例常數。} \quad (I.2)$$

接著利用四種不同研究方法推導推廣式(II)：

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}=k\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}\text{ 或 }\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=k\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}\text{ ，其中 }k\text{ 為比例常數。} \quad (II)$$

(I.1)式、(I.2)式及(II)式稱為**圓冪定理推廣式**。本作品利用圓錐截痕中截兩圓幾何性質、圓錐曲線的方向直徑、邊或對角線斜率及平行邊的切線長、及解析幾何來推導推廣式(I.2)與(II)，為了方便區分，分別稱為推廣一式、推廣二式及三式、推廣四式、推廣五式。另外

也深入探討k值來區分圓錐曲線的種類。接著探討圓錐曲線內接四邊形的作圖及其判定定理。其研究目的有：

一、利用圓錐截痕推廣圓冪定理(推導推廣一式)，且探討k值來區分圓錐曲線的種類。

二、利用方向直徑、邊或對角線的斜率及平行邊的切線長推廣圓冪定理(推導推廣二式及推廣三式、推廣四式)，特別探討雙曲線單(雙)接四邊形的限制條件。

三、利用解析幾何推廣圓冪定理(推導推廣五式)，且進一步探討更一般圓錐曲線情形。

四、給定平面上三點與拋物線的平行軸之直線，探討拋物線及其內接四邊形的作圖。

五、利用推廣五式探討圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形中拋物線內接四邊形的作圖。

六、透過拋物線及其內接四邊形的作圖延伸推導出二種圓錐曲線內接四邊形的作圖，進而探討判定條件及區分圓錐曲線內接四邊形中的圓錐曲線之種類。

七、探討圓錐曲線內接四邊形中對角線及邊的斜率性質，進而推導圓錐曲線內接四邊形判定定理及有心錐線的中心軌跡圖形。

貳、研究方法或過程

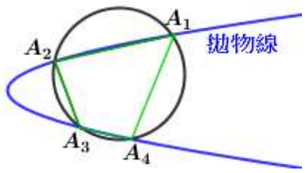
一、名詞定義

本作品利用五種不同研究方法：圓錐截痕、圓錐曲線的二種方向直徑定義、邊或對角線斜率及平行邊的切線長、及解析幾何來推廣圓冪定理，即分別推導出推廣一式、推廣二式及三式、推廣四式、推廣五式，進而利用推廣五式作圓錐曲線內接四邊形的圖形。

【定義 1】(圓錐曲線內接四邊形，左銓如[1]、黃家禮[3]及 Keith Kendig [5])

若給定任意四邊形$A_1A_2A_3A_4$，是由四邊形的四個頂點及異於此四頂點的第五點(記作點Q)來決定圓錐曲線，則稱此四邊形為**圓錐曲線內接四邊形**，參見圖 2-3。注意當點Q取四邊形的邊或對角線的延長線上一點時，五點A_1,A_2,A_3,A_4,Q所決定圖形為**圓錐曲線的退化圖形**。

另外**定義 1** 中的四邊形考慮其為圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形，參見圖 2-3，為了方便推廣幾何性質，將對角線$\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_2A_4}$及四邊$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、$\overline{A_1A_4}$的斜率分別記作m_1、m_2、m_3、m_4、m_5、m_6。為了方便推廣，以中心O區分，將有中心O的圓錐曲線稱為**有心錐線** (centered conic section)，如橢圓及雙曲線；沒有中心則稱**無心錐線**（noncentered conic section)，如拋物線。



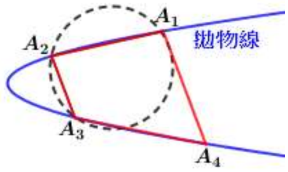


圖 2：拋物線內接四邊形為圓內接四邊形　　圖 3：拋物線內接四邊形為非圓內接四邊形

考慮拋物線及其內接四邊形的作圖上，提供**兩種觀點**：一是給定平面上三點與拋物線的平行軸之直線決定一拋物線，再決定四邊形的第四個頂點，此作圖稱為**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**。二是給定一四邊形，作過其四個頂點的拋物線，此作圖稱為**拋物線及其內接四邊形的作圖(II)**。由**拋物線及其內接四邊形的作圖**推導出**圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)**，再推導出**圓錐曲線內接四邊形的作圖(II)**。參見第五章。

【定義 2】(區分圓錐曲線接四邊形中圓錐曲線的種類，左銓如[1]及 Keith Kendig [5])

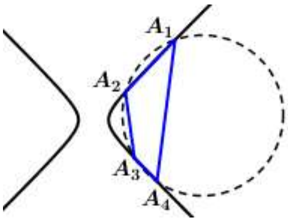
設圓錐曲線(包含退化情形)方程式為二次方程式 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 或 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，其中 A,B,C 不全為 0。則前者圖形稱為**標準形(**$B=0$**)**，後者稱為**非標準形(**$B\neq 0$**)**。**標準形**進一步再配方得到(i)~(iii)的分類情形，定義種類名稱為

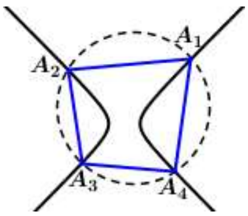
(i)二次方程式滿足 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 或 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 的拋物線分別稱為**水平拋物線** (horizontal parabola)或**垂直拋物線** (vertical parabola)，其頂點 $V(h,k)$ 且 $|c|$ 為焦距。

(ii)二次方程式滿足 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ 分別稱為**水平橢圓** (horizontal ellipse)或**垂直橢圓** (vertical ellipse)，其中心 $O(h,k)$ 且 $a>b>0$。

(iii)二次方程式滿足 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ 分別稱為**水平雙曲線** (horizontal hyperbola)或**垂直雙曲線** (vertical hyperbola)，其中心 $O(h,k)$ 且 $a,b>0$。

當考慮雙曲線內接四邊形時，特別分成二種來定義：若四邊形的四個頂點接在雙曲線同一支上，則稱此四邊形為**雙曲線單接四邊形**，參見圖 4。若四邊形的四個頂點接在雙曲線二支上，則稱此四邊形為**雙曲線雙接四邊形**，參見圖 5。另外雙曲線的退化圖形-兩相交直線也有單接與雙接情形，圖 6 為**兩相交直線雙接四邊形**。





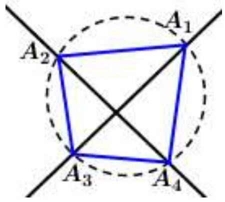


圖 4：雙曲線單接四邊形　　圖 5：雙曲線雙接四邊形　圖 6：兩相交直線雙接四邊形

注意圓錐曲線方程式為二次方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 是可以**透過坐標軸的平移與旋轉方式轉換標準形**，所以同樣可以以前面(i)~(iii)來分類。

作品中利用有心錐線的伸縮變換及方向直徑來推廣圓冪定理，參見**定義 3-4**。

【定義 3】(有心錐線的伸縮變換，左銓如[1]、Keith Kendig [5]及 Ostermann[6])

(i)對水平橢圓作伸縮變換：$x'-h=\dfrac{x-h}{a},\ y'-k=\dfrac{y-k}{b}$，則得到圓：$(x'-h)^2+(y'-k)^2=1$，則稱此變換為**水平橢圓的伸縮變換**，參見圖 7。若對**垂直橢圓作伸縮變換**則為 $x'-h=\dfrac{x-h}{b},\ y'-k=\dfrac{y-k}{a}$。(ii)對水平雙曲線：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 作伸縮變換 $x'-h=\dfrac{x-h}{a},\ y'-k=\dfrac{y-k}{bi}$，則得到圓 $(x'-h)^2+(y'-k)^2=1$，則稱此變換為**水平雙曲線的伸縮變換**，參見圖 8。若對**垂直雙曲線作伸縮變換**為 $x'-h=\dfrac{x-h}{bi},\ y'-k=\dfrac{y-k}{a}$。

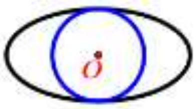


圖 7：橢圓伸縮變換後得到一圓

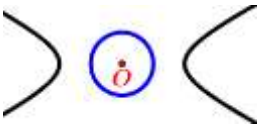


圖 8：雙曲線伸縮變換後得到一圓

【定義 4】(圓錐曲線的平行直徑，項武義[2]、Keith Kendig [5]及 Ostermann[6])

給定一圓錐曲線 Γ 的一弦 $\overline{AB}$，設 $\overline{CD}$ 為 Γ 中過中心 O 的一弦且 $\overline{AB}//\overline{CD}$，則稱 $\overline{CD}$ 的弦長為**方向直徑**，記作 r，參見圖 9。若中心 O 改為焦點 F，則也稱 $\overline{CD}$ 的弦長為**方向直徑**，但記作 R，參見圖 10。

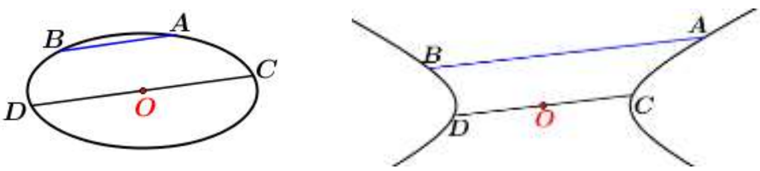


圖 9：有心錐線的方向直徑

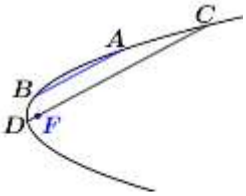


圖 10：無心錐線的方向直徑

二、利用圓錐截痕推導圓冪定理推廣式

(一)有心錐線-圓、橢圓及雙曲線

古希臘數學家**阿波羅尼奧斯** (Apollonius of Perga，前 262 年－前 190 年)將圓錐曲線看作以不同方向平面切割固定圓錐面所得的曲線，參見**性質 1**。

【性質 1】(圓錐截痕中的圓錐曲線(不含退化圖形)，黃家禮[3]及 Keith Kendig [5])

若平面 E 不通過圓錐面 Ω 的頂點，圓錐的半頂角為 α 且圓錐與軸夾角為 β $\left(0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$，參見圖 11，則(i)當 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 時，E 與 Ω 相交的曲線為一圓。(ii)當 $\alpha < \beta \le \frac{\pi}{2}$ 時，E 與 Ω 相交的曲線為一橢圓。(iii)當 $\alpha = \beta$ 時，E 與 Ω 相交的曲線稱為一拋物線。(iv)當 $\beta < \alpha$ 時，E 與 Ω 相交的曲線為一雙曲線。

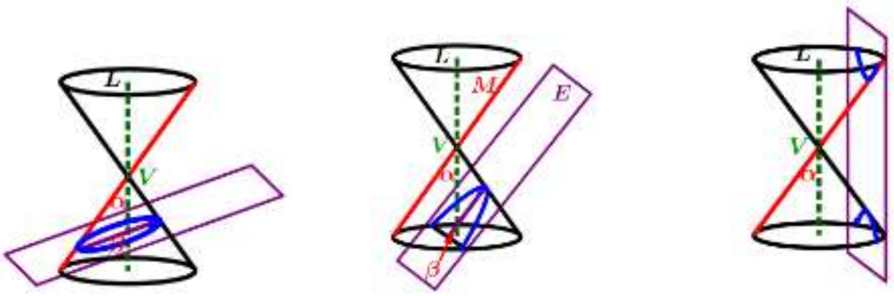


圖 11：不同方向平面切割固定圓錐面所得到曲線：橢圓、拋物線、雙曲線

首先利用圓錐截痕推廣圓內兩交弦定理，若考慮兩垂直弦 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P，則由**圓內兩交弦定理**及**截兩圓幾何性質**知 $\overline{PA_1}^2 = \overline{PA_2} \cdot \overline{PA_4}$，參見圖 12，現在要將 $\overline{PA_1}^2 = \overline{PA_2} \cdot \overline{PA_4}$ 推廣至圓錐曲線內接四邊形，則考慮 $\overline{PA_1}^2 = k\overline{PA_2} \cdot \overline{PA_4}$ (有心錐線) 或 $\overline{PA_1}^2 = k\overline{PA_4}$ (無心錐線)，我們稱 k 為**比例常數**。

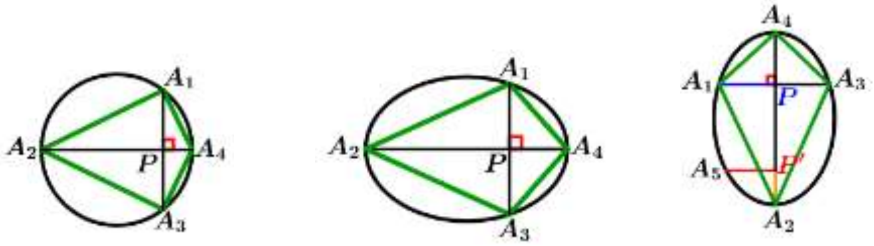


圖 12：利用圓錐截痕推廣圓內兩交弦定理

由**性質 1** 知圓錐截痕可將圓錐曲線分成四種，事實上，僅要分成有心錐線及無心錐線來推廣圓內兩交弦定理。每個有心錐線我們是透過**截兩圓幾何性質**來推廣圓內兩交弦定理。

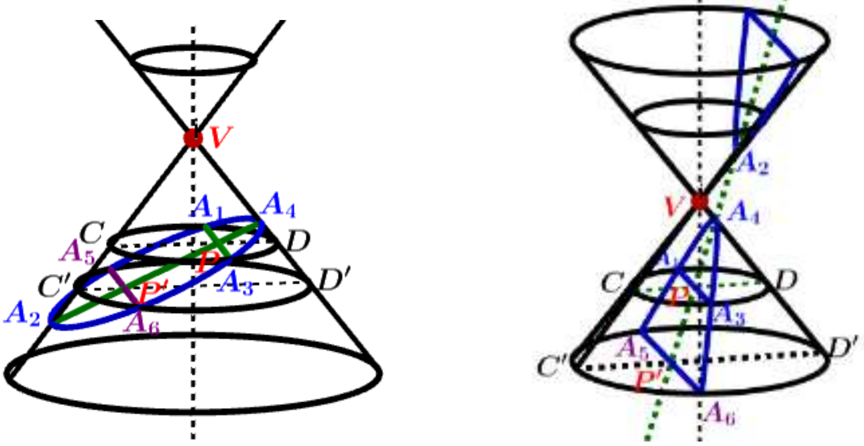


圖 13：由圓的性質來探討圓內兩交弦定理推廣至有心錐線

令平面 A_1CD 與 $A_5C'D'$ 平行於圓錐底面並且跟平面 $A_1A_3A_4$ 相交，參見圖 13，則 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_5A_6}$ 均垂直 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$，其中 A_2, A_4 為有心錐線的頂點。

圖 13 中可看出橢圓與雙曲線的差別僅有頂點 A_2, A_4 位置不同，由**圓內兩交弦定理**知

$$\overline{PA_1}^2 = \overline{PC}\cdot\overline{PD} \quad 且 \quad \overline{P'A_5}^2 = \overline{P'C'}\cdot\overline{P'D'} \tag{3}$$

又因為 $\Delta A_2PC \sim \Delta A_2P'C'$ 且 $\Delta A_4PD \sim \Delta A_4P'D'$，所以 $\dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{P'A_2}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{C'P'}}$ 且 $\dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{P'A_4}} = \dfrac{\overline{DP}}{\overline{D'P'}}$。

兩式相乘得到 $\dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{P'A_2}}\cdot\dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{P'A_4}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{C'P'}}\cdot\dfrac{\overline{DP}}{\overline{D'P'}}$，再將(3)式代入得到 $\dfrac{\overline{PA_2}}{\overline{P'A_2}}\cdot\dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{P'A_4}} = \dfrac{\overline{PA_1}^2}{\overline{P'A_5}^2}$。 (4)

【定理 1】(推廣圓內兩交弦定理至有心錐線)

在圖 13-14 中，設 $A_1(x, y)$ 為有心錐線 Γ 上任意一點，且 $\overline{PA_1} \perp \overline{A_2A_4}$，則

$$\overline{PA_1}^2 = \left(\frac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'A_2}\cdot\overline{P'A_4}}\right)\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}\text{，其中 }\frac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'A_2}\cdot\overline{P'A_4}}\text{ 為正實數。}$$

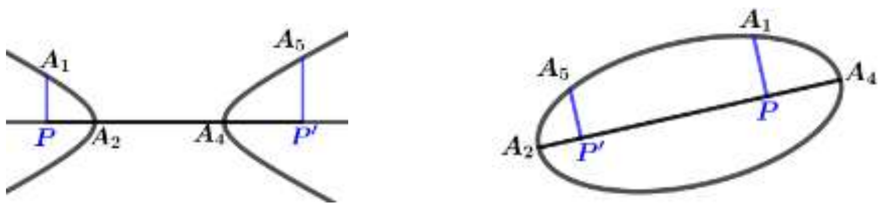


圖 14：推廣圓內兩交弦定理至有心錐線

【證明】(i)由(4)式知 $\overline{PA_1}^2 = \left(\dfrac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'A_2}\cdot\overline{P'A_4}}\right)\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$，注意圖 14 的斜有心錐線情形亦成

立。 ■

【定理 2】(推廣圓內兩交弦定理來區分圓錐曲線種類)

在圖 13-14 中，設 $A_1(x,y)$ 為有心錐線 Γ 上任意一點，且 $\overline{PA_1} \perp \overline{A_2A_4}$，若 $\overline{PA_1}^2 = k\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$，且將 Γ 安置在直角坐標系的標準位置上，則(i)當 Γ 為一圓時，$k=1$。(ii)當 Γ 為一橢圓時，$0<k<1$。(iv)當 Γ 為一雙曲線時，當 $a>b$ 時，$0<k<1$；當 $a=b$ 時，$k=1$；當 $a<b$ 時，$k>1$。

【證明】(i)有心錐線包含圓、橢圓及雙曲線。由**圓內兩交弦定理**知當 Γ 為一圓時，$k=1$。

(iii)根據 $\overline{PA_1}^2 = k\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$ 來推導橢圓方程式，將有心錐線安置在直角坐標系的標準位置上。考慮水平橢圓可令 $A_2(-a,0), A_4(a,0)$，其中中心為 $(0,0)$，則 $y^2 = k(a-x)(a+x)$，經化簡得到 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{ka^2}=1$，取 $b^2 = ka^2$，又 $a>b$，故 $0<k<1$，且其方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。同理可知垂直橢圓情形，與水平橢圓結果相同。

(iv)根據 $\overline{PA_1}^2 = k\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$ 來推導雙曲線方程式，將有心錐線安置在直角坐標系的標準位置上。考慮水平雙曲線可令 $A_2(-a,0), A_4(a,0)$，其中中心為 $(0,0)$，則

$y^2 = k(x-a)(x+a)$，經化簡得到 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{ka^2}=1$，取 $b^2 = ka^2$，所以 $k>0$。

因此，當 $a>b$ 時，$0<k<1$；當 $a=b$ 時，$k=1$；當 $a<b$ 時，$k>1$。

同理可知垂直雙曲線情形，與水平雙曲線結果相同。 ■

(二)無心錐線-拋物線

由**性質 1** 知當母線 M 與平面 E 平行時，圓錐截痕的圖形就是拋物線，所以當為拋物線時，圖 13 中的頂點 A_2 會至無窮遠，因而形成四邊形 $CPP'C'$ 為平行四邊形，這是與前一節證明不一樣地方，參見圖 13 與圖 15。現在由**截兩圓幾何性質**來探討圓內兩交弦定理推廣至無心錐線-拋物線，參見**定理 3**。由**圓內兩交弦定理**知

$$\overline{PA_1}^2 = \overline{PC}\cdot\overline{PD} \text{ 且 } \overline{P'A_5}^2 = \overline{P'C'}\cdot\overline{P'D'}，化簡得到 \overline{PC} = \frac{\overline{PA_1}^2}{\overline{PD}} \text{ 且 } \overline{P'C'} = \frac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'D'}}。$$

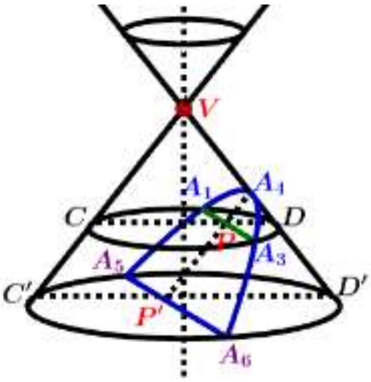


圖 15：由截兩圓幾何性質來探討圓內兩交弦定理推廣至無心錐線-拋物線

又四邊形$CPP'C'$為平行四邊形，所以$\overline{PC}=\overline{P'C'}$，故$\dfrac{\overline{PA_1}^2}{\overline{PD}}=\dfrac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'D'}}$，得$\dfrac{\overline{PA_1}^2}{\overline{P'A_5}^2}=\dfrac{\overline{PD}}{\overline{P'D'}}$。

因為$\Delta A_4PD \sim \Delta A_4P'D'$，所以$\dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{P'A_4}}=\dfrac{\overline{PD}}{\overline{P'D'}}$，故$\dfrac{\overline{PA_4}}{\overline{P'A_4}}=\dfrac{\overline{PA_1}^2}{\overline{P'A_5}^2}$ (5)

【定理 3】(推廣圓內兩交弦定理至無心錐線)

在圖 15-16 中，設$A_1(x,y)$為無心錐線Γ上任意一點，且$\overline{PA_1}\perp\overline{P'A_4}$，若$\overline{PA_1}^2=k\overline{PA_4}$，則

$$\overline{PA_1}^2=\left(\frac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'A_4}}\right)\overline{PA_4}$$，其中$\dfrac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'A_4}}$為固定的一正實數。

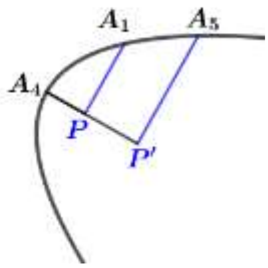


圖 16：推廣圓內兩交弦定理至無心錐線

【證明】由(5)式知$\overline{PA_1}^2=\left(\dfrac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'A_4}}\right)\overline{PA_4}$，斜拋物線的情形亦成立，參見圖 16。

特別是每個拋物線，$\dfrac{\overline{P'A_5}^2}{\overline{P'A_4}}$值是固定的正實數，不隨著$A_1$與$A_5$移動而改變其值。 ■

【定理 4】(推廣圓內兩交弦定理來區分圓錐曲線種類)

在圖 15-16 中，設$A_1(x,y)$為無心錐線Γ上任意一點，且$\overline{PA_1}\perp\overline{P'A_4}$，若$\overline{PA_1}^2=k\overline{PA_4}$，且將

Γ安置在直角坐標系的標準位置上，則$k=4|c|$，其中由c來決定拋物線的開口向左、向右、向上或向下。

【證明】根據$\overline{PA_1}^2=k\overline{PA_4}$來推導拋物線方程式，將拋物線安置在直角坐標系的標準位置上。可令$A_4(0,0)$，則$\overline{PA_1}\perp x$軸，則$y^2=kx$或$y^2=k(-x)=-kx$。

令$\pm k=4c$，則得到拋物線方程式為$y^2=4cx$且$k=4|c|$為非零的固定實數，其中由c的正負決定拋物線的開口向左或向右。

同理，若考慮$\overline{PA_1}\perp y$軸，則用同樣的方式，得到拋物線方程式為$x^2=4cy$且$k=4|c|$，其中由c的正負決定拋物線的開口向上或向下。 ■

【定理 5】(利用推廣圓內兩交弦定理推導圓冪定理推廣一式)

在圖 17 中，設$A_1(x,y)$為圓錐曲線Γ上任意一點且$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{A_4A_3}$垂直且交於一點$P$，若$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=k\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}$且兩弦$\overline{A_1A_2}$與$\overline{A_5A_6}$交於一點$P'$，則$k=\dfrac{\overline{P'A_1}\cdot\overline{P'A_2}}{\overline{P'A_3}\cdot\overline{P'A_4}}$為比例常數。

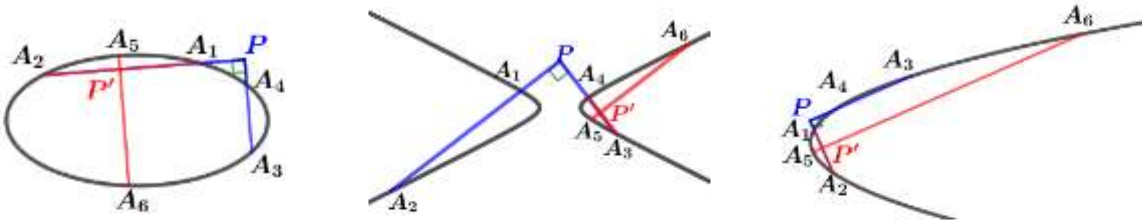


圖 17：利用推廣圓內兩交弦定理推導圓冪定理推廣一式

【證明】仿照**定理 1**與**定理 3**來可證明。 ■

三、利用圓錐曲線的方向直徑或斜率及平行邊的切線推廣圓冪定理

(一)有心錐線-橢圓及雙曲線

底下探討利用圓錐曲線的方向直徑推廣圓冪定理至有心錐線，其方向直徑有二種：過原點O及焦點F，同時也利用邊或對角線的斜率及平行邊的切線推廣圓冪定理。

【性質 2】(直線伸縮變換的平行性質)

在平面上，設兩平行線段$\overline{AB}$與$\overline{CD}$且$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=t\ (t\in R)$，經伸縮變換後$\overline{AB}$與$\overline{CD}$分別為$\overline{A'B'}$與$\overline{C'D'}$，則$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$。

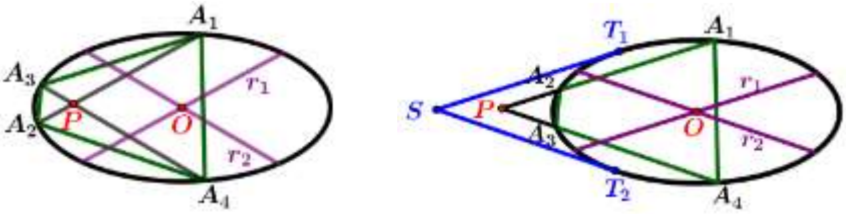


圖 18：圓冪定理推廣至有心錐線-橢圓

【定理 6】(有心錐線的圓冪定理推廣二式)

設過 P 的兩條直線分別與有心錐線 $\Gamma: ax^2+by^2=1$ 相交於 A_1,A_2 與 A_3,A_4，若 r_1,r_2 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$ 的過中心 O 之方向直徑，參見圖 18，則 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ 。

【註】定理 6 中推廣至雙曲線時，僅有<u>**圓內兩交弦定理**</u>且四邊形為<u>**雙曲線雙接四邊形**</u>。

【證明】由**定義 3** 知 Γ ： $a'x^2+b'y^2=1$ 經伸縮變換後，得到一圓： $x^2+y^2=1$ 。

若 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 P 、 r_1 、 r_2 分別變換為 $\overline{A_1'A_2'}$ 、 $\overline{A_3'A_4'}$ 、 P' 、 r_1' 、 r_2'，則

由**圓冪定理**知 $\dfrac{\overline{P'A_1'}\cdot\overline{P'A_2'}}{(r_1')^2}=\dfrac{\overline{P'A_3'}\cdot\overline{P'A_4'}}{(r_2')^2}$ ，其中 $r_1'=r_2'=1$ 。

再由**性質 2** 知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{r_1^2}=\dfrac{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}{r_2^2}$ ，因此， $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ 。 (6)

(6)式是推廣圓冪定理至橢圓的推廣式，參見圖 18。

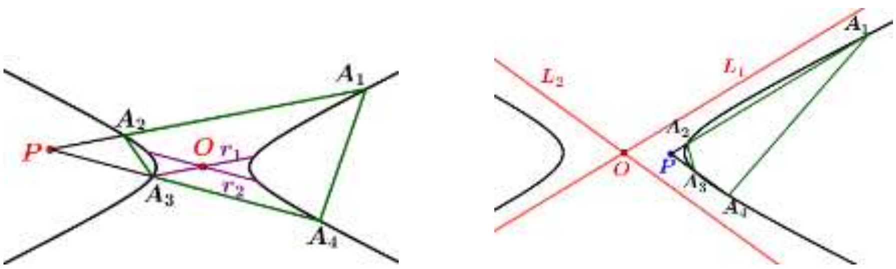


圖 19：圓冪定理推廣至有心錐線-雙曲線

(6)式是推廣圓冪定理(僅包含圓內兩交弦定理) 雙曲線的推廣式，參見圖 19，四邊形為雙曲線雙接四邊形成立，而雙曲線單接四邊形不成立。

因為是方向直徑通過中心，所以對應方向直徑的直線 L_1 與 L_2 並不會與雙曲線相交，無法形成過中心 O 的方向直徑，參見圖 19。 ■

由**定理 6**知將圓冪定理推廣至雙曲線情形，僅能推廣圓內兩交弦定理，是否圓冪定理中三個定理均成立的推廣式呢？於是我們進一步探討得到**定理 7**與**定理 8**。

【定理 7】(有心錐線的圓冪定理推廣三式)

設過 P 的兩條直線分別與有心錐線 $\Gamma: a'x^2+b'y^2=1$ 相交於 A_1,A_2 與 A_3,A_4，若 R_1,R_2 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$ 的過焦點 F 之方向直徑 $\overline{C_1D_1}$ 與 $\overline{C_2D_2}$，參見圖 20，則 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{R_1}{R_2}$，其中當水平橢圓及水平雙曲線時，$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\dfrac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{2\sqrt{a'}}$；當垂直橢圓及垂直雙曲線時，$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\dfrac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{2\sqrt{b'}}$。

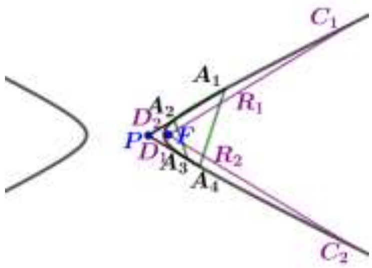


圖 20：圓冪定理推廣至有心錐線-雙曲線

【證明】設直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 過 $P(x_0,y_0)$ 且其傾斜角為 α，則直線參數式為

$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\sin\alpha$，其中 $t\in R$。代入 $a'x^2+b'y^2=1$ 得到

$$(a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha)t^2+(2a'x_0\cos\alpha+2b'y_0\sin\alpha)t+a'x_0^2+b'y_0^2-1=0 \text{。} \tag{7}$$

若 $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2)$ 在 $a'x^2+b'y^2=1$ 上且滿足 $x_1=x_0+t_1\cos\alpha,\ y_1=y_0+t_1\sin\alpha$ 且 $x_2=x_0+t_2\cos\alpha,\ y_2=y_0+t_2\sin\alpha$，其中 $t_1,t_2\in R$，所以 t_1,t_2 為(7)式的二根且

$t_1t_2=\dfrac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}$，故 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}$

$$=\sqrt{(t_1\cos\alpha)^2+(t_1\sin\alpha)^2}\cdot\sqrt{(t_2\cos\alpha)^2+(t_2\sin\alpha)^2}=|t_1||t_1|=|t_1t_1|=\left|\frac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}\right| \tag{8}$$

考慮水平橢圓及水平雙曲線可令焦點 F 為 $(\lambda,0)$，其中 $\lambda=\sqrt{\dfrac{b'-a'}{a'b'}}$ 且 $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ 的直線

參數式為 $x=\lambda+s\cos\alpha, y=s\sin\alpha$，則仿照上述方式推得

$(a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha)t^2+(2a'\lambda\cos\alpha)t+a'\lambda^2-1=0$，其中令其二根為 s_1,s_2。

所以 $s_1+s_2=-\dfrac{2a'\lambda\cos\beta}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}, s_1s_2=\dfrac{a'\lambda^2-1}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}$，並且

$$R_1=\overline{C_1D_1}=|s_1-s_1| \\ =\left|\sqrt{\left(-\frac{2a'\lambda\cos\beta}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}\right)^2-\frac{4(a'\lambda^2-1)}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}}\right|=\left|\frac{2\sqrt{a'}}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}\right| \text{。} \quad (9)$$

故由(6)式與(7)式知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\dfrac{\left|\dfrac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}\right|}{\left|\dfrac{2\sqrt{a'}}{a'\cos^2\beta+b'\sin^2\beta}\right|}=\dfrac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{2\sqrt{a'}}$ 為定值。

同理可知當垂直橢圓及垂直雙曲線時，$R_1=\overline{C_1D_1}=|s_1-s_1|=\left|\dfrac{2\sqrt{b'}}{a'\cos^2\beta+b'\sin^2\beta}\right|$。(10)

故由(8)式與(9)式知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\dfrac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{2\sqrt{b'}}$ 為定值。

同理可得當垂直橢圓及垂直雙曲線時，由(8)式與(10)式知

$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\dfrac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{2\sqrt{a'}}=\dfrac{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}{R_2}$。因此，$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{R_1}{R_2}$。 ■

【定理 8】(有心錐線的圓冪定理推廣四式)

設過 P 的兩條直線分別與有心錐線 $\Gamma: ax^2+by^2=1$ 相交於 A_1,A_2 與 A_3,A_4，若 $\overline{ST_1}$ 與 $\overline{ST_2}$ 分別為平行 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$ 的切線，其中切點分別為 T_1,T_2，參見圖 21，則

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(a'+b'm_5^2)(1+m_5^2)m_3^2}{(a'+b'm_3^2)(1+m_3^2)m_5^2}=\frac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2} \text{。}$$

【註】定理 8 中推廣圓冪定理至雙曲線時，僅有切割線定理及割線定理推廣至雙曲線單接四邊形情形。

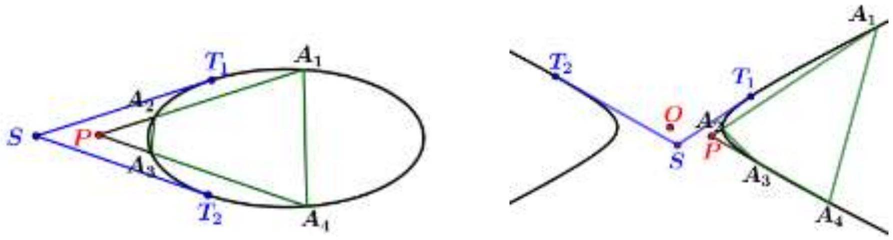


圖 21：圓冪定理推廣至有心錐線-雙曲線

【**證明**】仿照**定理 7** 來證明，(8)式可進一步推得

$$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=\left|\frac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{a'\cos^2\alpha+b'\sin^2\alpha}\right|=\left|\frac{m_3^2}{1+m_3^2}\cdot\frac{a'x_0^2+b'y_0^2-1}{a'+b'm_3^2}\right|=\frac{\left|a'x_0^2+b'y_0^2-1\right|m_3^2}{(a'+b'm_3^2)(1+m_3^2)}$$

故 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=\dfrac{\left|a'x_0^2+b'y_0^2-1\right|m_3^2}{(a'+b'm_3^2)(1+m_3^2)}$。同理可得 $\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}=\dfrac{\left|a'x_0^2+b'y_0^2-1\right|m_5^2}{(a'+b'm_5^2)(1+m_5^2)}$，故

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(a'+b'm_5^2)(1+m_5^2)m_3^2}{(a'+b'm_3^2)(1+m_3^2)m_5^2}\text{。}$$

設 $S(x',y')$，則 $\overleftrightarrow{ST_1}$ 的直線參數式為 $x=x'+t\cos\alpha, y=y'+t\sin\alpha$，仿照上面證法可得

$\overline{ST_1}^2=\dfrac{\left|a'(x')^2+b'(y')^2-1\right|m_3^2}{(a'+b'm_3^2)(1+m_3^2)}$ 且 $\overline{ST_2}^2=\dfrac{\left|a'(x')^2+b'(y')^2-1\right|m_5^2}{(a'+b'm_5^2)(1+m_5^2)}$，故

$$\frac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2}=\frac{(a'+b'm_5^2)(1+m_5^2)m_3^2}{(a'+b'm_3^2)(1+m_3^2)m_5^2}\text{。因此，}\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(a'+b'm_5^2)(1+m_5^2)m_3^2}{(a'+b'm_3^2)(1+m_3^2)m_5^2}=\frac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2}\text{。} \tag{11}$$

(11)式是推廣圓冪定理至橢圓的推廣式，參見圖 21。

(11)式是推廣圓冪定理(僅包含切割線定理及割線定理)至雙曲線的推廣式，參見圖 21，四邊形為雙曲線雙接四邊形成立，而雙曲線單接四邊形不成立。

以上不成立的原因是切線不存在。 ■

(二)無心錐線-拋物線及一般情形

由於拋物線是無心錐線，所以不存在過中心 O 的方向直徑，所以考慮焦點 F 的方向直徑，同時也利用平行邊的切線推廣圓冪定理至無心錐線，參見**定理 9** 與**定理 10**。

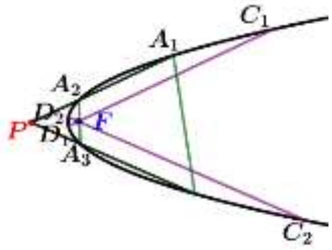


圖 22：圓冪定理推廣至無心錐線-拋物線

【定理 9】(無心錐線的圓冪定理推廣三式)

設過 P 的兩條直線分別與無心錐線 $\Gamma: y^2=4cx$ (或 $x^2=4cy$)相交於 A_1, A_2 與 A_3, A_4，若 R_1, R_2 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$ 的過焦點 F 之方向直徑 $\overline{C_1D_1}$ 與 $\overline{C_2D_2}$，參見圖 22，則 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{R_1}{R_2}$，其中當水平拋物線時，$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\left|\dfrac{y_0^2-4cx_0}{4c}\right|$；當垂直拋物線時，$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\left|\dfrac{x_0^2-4cy_0}{4c}\right|$。

【證明】(i)設直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 過 $P(x_0, y_0)$ 且其傾斜角為 β，則直線參數式為

$x=x_0+t\cos\beta, y=y_0+t\sin\beta$，其中 $t\in R$。代入 $y^2=4cx$ 得到

$$(\sin^2\beta)t^2+(2y_0\sin\beta-4c\cos\beta)t+y_0^2-4cx_0=0 \text{。} \tag{12}$$

若 $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2)$ 在 $y^2=4cx$ 上且滿足 $x_1=x_0+t_1\cos\beta, y_1=y_0+t_1\sin\beta$ 且 $x_2=x_0+t_2\cos\beta, y_2=y_0+t_2\sin\beta$，其中 $t_1,t_2\in R$，所以 t_1,t_2 為(12)式的二根且

$$t_1t_1=\frac{y_0^2-4cx_0}{\sin^2\beta} \text{ 且 } \overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=|t_1||t_1|=|t_1t_1|=\left|\frac{y_0^2-4cx_0}{\sin^2\beta}\right|=\frac{\left|y_0^2-4cx_0\right|}{\sin^2\beta} \text{。} \tag{13}$$

令焦點 F 為 $(c,0)$，且 $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ 的直線參數式為 $x=c+s\cos\beta, y=s\sin\beta$，則仿照上述方式推得 $(\sin^2\beta)t^2-4c\cos\beta t-4c^2=0$，其中令其二根為 s_1,s_2，推得 $s_1+s_2=\dfrac{4c\cos\beta}{\sin^2\beta}$ 及 $s_1s_2=\dfrac{-4c^2}{\sin^2\beta}$，且 $R_1=\overline{C_1D_1}=|s_1-s_1|=\left|\sqrt{\left(\dfrac{4c\cos\beta}{\sin^2\beta}\right)^2+\dfrac{16c^2}{\sin^2\beta}}\right|=\left|\dfrac{4c}{\sin^2\beta}\right|=\dfrac{4|c|}{\sin^2\beta}$。(14)

故由(12)式與(13)式知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\dfrac{\dfrac{\left|y_0^2-4cx_0\right|}{\sin^2\beta}}{\dfrac{4|c|}{\sin^2\beta}}=\left|\dfrac{y_0^2-4cx_0}{4c}\right|$ 為定值。同理可知當 $\Gamma: x^2=4cy$ 時，由(12)式與(14)式知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\left|\dfrac{x_0^2-4cy_0}{4c}\right|$ 為定值。仿照上述方式推得 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{R_1}=\dfrac{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}{R_2}$。因此，$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{R_1}{R_2}$。 ■

【定理 10】(無心錐線的圓冪定理推廣四式)

設過 P 的兩條直線分別與拋物線 $\Gamma: y^2=4cx$ (或 $x^2=4cy$)相交於 A_1, A_2 與 A_3, A_4，若 $\overline{ST_1}$ 與 $\overline{ST_2}$ 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$ 的切線，其中切點分別為 T_1, T_2，參見圖 23，則

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(1+m_3^2)m_5}{(1+m_5^2)m_3}=\frac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2}。$$

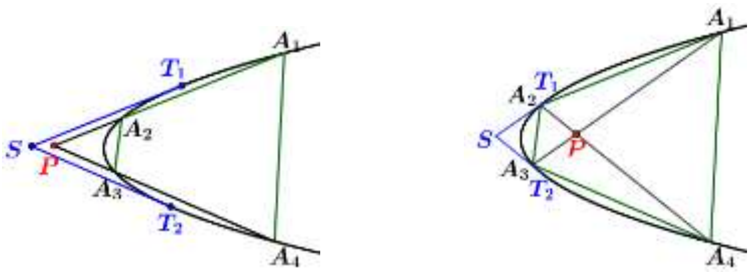


圖 23：圓冪定理推廣至無心錐線-拋物線

【證明】(i)仿照**定理 9** 來證明，(12)式可進一步推得

$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=|t_1||t_1|=|t_1t_1|=\left|\dfrac{y_0^2-4cx_0}{\sin^2\beta}\right|=\dfrac{\left|y_0^2-4cx_0\right|}{\sin^2\beta}$。同理可得 $\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}=\dfrac{\left|y_0^2-4cx_0\right|}{\sin^2\beta'}$，其中直線 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 的傾斜角為 β'，故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\sin^2\beta'}{\sin^2\beta}=\dfrac{(1+m_3^2)m_5}{(1+m_5^2)m_3}$。

(ii)設 $S(x',y')$，則 $\overleftrightarrow{ST_1}$ 的直線參數式為 $x=x'+t\cos\beta, y=y'+t\sin\beta$，仿照(i)式可得

$\overline{ST_1}^2=|t_1t_1|=\dfrac{\left|y_0^2-4cx_0\right|}{\sin^2\beta}$ 且 $\overline{ST_2}^2=\dfrac{\left|y_0^2-4cx_0\right|}{\sin^2\beta'}$，因此，$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(1+m_3^2)m_5}{(1+m_5^2)m_3}=\dfrac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2}$。 ■

【定理 11】(推廣圓冪定理至一般圓錐曲線的圓冪定理推廣四式)

設過 P 的兩條直線分別與圓錐曲線 $\Gamma: Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (A,B,C 至少有一個不為零)相交於 A_1,A_2 與 A_3,A_4 ，若 $\overline{ST_1}$ 與 $\overline{ST_2}$ 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$ 的切線，其中切點分別為 T_1,T_2 ，則 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(1+m_5^2)}{(1+m_3^2)}\left|\dfrac{A+Bm_5+Cm_5^2}{A+Bm_3+Cm_3^2}\right|=\dfrac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2}$ 。

【證明】(i)仿照**定理 8** 與**定理 10** 證明，但 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 的直線參數式代入

$\Gamma: Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ，其中二根為 t_1,t_2 ，所以

$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=|t_1||t_1|=|t_1t_1|=\left|\dfrac{Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F}{A\cos^2\theta_1+B\sin\theta_1\cos\theta_1+C\sin^2\theta_1}\right|$ ， $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 的傾斜角為 θ_1 。

同理可得 $\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}=\left|\dfrac{Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F}{A\cos^2\theta_2+B\sin\theta_2\cos\theta_2+C\sin^2\theta_2}\right|$ ，

故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\left|\dfrac{A\cos^2\theta_2+B\sin\theta_2\cos\theta_2+C\sin^2\theta_2}{A\cos^2\theta_1+B\sin\theta_1\cos\theta_1+C\sin^2\theta_1}\right|=\dfrac{(1+m_5^2)}{(1+m_3^2)}\left|\dfrac{a+bm_5+cm_5^2}{a+bm_3+cm_3^2}\right|$ 。

(ii)設 $S(x',y')$ ，則 $\overleftrightarrow{ST_1}$ 的直線參數式為 $x=x'+t\cos\theta_1, y=y'+t\sin\theta_1$ ，仿照(i)式可得

$\overline{ST_1}^2=|t_1t_1|=\left|\dfrac{A(x')^2+B(x')(y')+C(y')^2+D(x')+E(y')+F}{A\cos^2\theta_1+B\sin\theta_1\cos\theta_1+C\sin^2\theta_1}\right|$ 且

$\overline{ST_2}^2=\left|\dfrac{A(x')^2+B(x')(y')+C(y')^2+D(x')+E(y')+F}{A\cos^2\theta_2+B\sin\theta_2\cos\theta_2+C\sin^2\theta_2}\right|$ ， $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 的傾斜角為 θ_2 ，故

$\dfrac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2}=\dfrac{(1+m_5^2)}{(1+m_3^2)}\left|\dfrac{A+Bm_5+Cm_5^2}{A+Bm_3+Cm_3^2}\right|$ ，因此， $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(1+m_5^2)}{(1+m_3^2)}\left|\dfrac{A+Bm_5+Cm_5^2}{A+Bm_3+Cm_3^2}\right|=\dfrac{\overline{ST_1}^2}{\overline{ST_2}^2}$ 。■

四、利用解析幾何推廣圓冪定理

接著利用解析幾何探討推廣圓冪定理至圓錐曲線內接四邊形，進而探討圓錐曲線內接四邊形的作圖，所以其定理稱為**輔助定理 1-2**，另外也推導**輔助定理 3-6**。

【輔助定理 1】(無心錐線的圓冪定理推廣五式)

給定一拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 或兩邊延長交於 P (含切線情

形)，設 I,J 分別為兩對角線或兩邊延長線與對稱軸的交點，參見圖 24，則

$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 或 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。(ii)若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**圓內接四邊形**，則 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 。

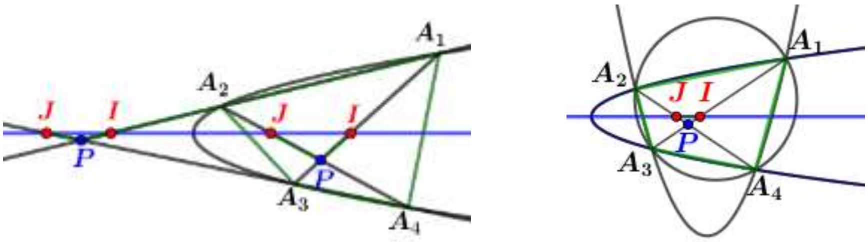


圖 24：圓冪定理推廣至拋物線

【**證明**】(i)不失一般性，可設拋物線方程式為 $(y-y_0)^2=4c(x-x_0)$ ，其中頂點為 (x_0,y_0) 且 $P(0,0)$ ，$\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的斜率分別為 m_1,m_2 ，則 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的方程式為 $y=m_1x,\ y=m_2x$ ，可令 $A_1(x_1,m_1x_1),\ A_2(x_2,m_2x_2),\ A_3(x_3,m_1x_3),\ A_4(x_4,m_2x_4)$ ，則 A_1,A_3 顯然為 $(y-y_0)^2=4c(x-x_0)$ 與 $y=m_1x$ 聯立的解，即

$(m_1x-y_0)^2=4c(x-x_0)$ 化簡得 $m_1^2x^2-2(m_1y_0+2c)x+y_0^2+4cx_0=0$ ，所以

$x_1x_3=\dfrac{y_0^2+4cx_0}{m_1^2}$ 。同理可知 $x_2x_4=\dfrac{y_0^2+4cx_0}{m_2^2}$ ，故 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{m_2^2}{m_1^2}$ 。

因為 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\sqrt{x_1^2+m_1^2x_1^2}\cdot\sqrt{x_3^2+m_1^2x_3^2}}{\sqrt{x_2^2+m_2^2x_2^2}\cdot\sqrt{x_4^2+m_2^2x_4^2}}=\dfrac{\sqrt{x_1^2x_3^2(m_1^2+1)^2}}{\sqrt{x_2^2x_4^2(m_2^2+1)^2}}=\dfrac{-x_1x_3(m_1^2+1)}{-x_2x_4(m_2^2+1)}=\dfrac{x_1x_3(m_1^2+1)}{x_2x_4(m_2^2+1)}$

又 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{m_2^2}{m_1^2}$ ，故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}$ 。

因為 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸 $y=y_0$ 的交點，所以 $I\left(\dfrac{y_0}{m_1},y_0\right)$

$J\left(\dfrac{y_0}{m_2},y_0\right)$ ，推得 $\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{\left(\dfrac{y_0}{m_1}\right)^2+y_0^2}{\left(\dfrac{y_0}{m_2}\right)^2+y_0^2}=\dfrac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}$ 。因此， $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

仿照上述方式可證兩邊延長交於 P 的情形，得到 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

(ii)因為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，所以由**圓內兩交弦定理**知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=1$，所以 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=1$，因此，$\overline{PI}=\overline{PJ}$。

仿照上述方式可證兩邊延長交於 P 的情形，得到 $\overline{PI}=\overline{PJ}$。 ■

【輔助定理 2】(有心錐線的圓冪定理推廣五式)

給定圓錐曲線 $\Gamma: a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 且圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 或兩邊延長交於 P (含切線情形)交於 P，設 I,J 分別為兩對角線或兩邊延長線與對稱軸的交點，參見圖 25，則(i)(**水平橢圓及水平雙曲線**)或(**垂直橢圓及垂直雙曲線**)：$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\dfrac{(a'+b'm_2^2)m_1^2}{(a'+b'm_1^2)m_2^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 或 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$。

$\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\dfrac{(a'+b'm_5^2)m_3^2}{(a'+b'm_3^2)m_5^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 或 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\dfrac{a'+b'm_5^2}{a'+b'm_3^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$。

(ii)若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**圓內接四邊形**，則 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，其中 $m_1+m_2=0$ (或 $m_1'+m_2'=0$)。

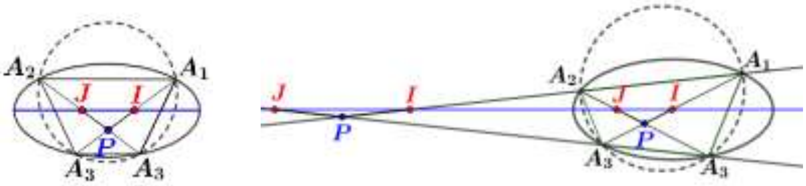


圖 25：圓冪定理推廣至橢圓

【證明】(i)不失一般性，可設 $P(0,0)$，則 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的方程式為 $y=m_1x,\ y=m_2x$，可令 $A_1(x_1,m_1x_1),\ A_2(x_2,m_2x_2),\ A_3(x_3,m_1x_3),\ A_4(x_4,m_2x_4)$，

則 A_1,A_3 顯然為 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 與 $y=m_1x$ 聯立的解，即

$a'(x-h)^2+b'(m_1x-k)^2=1$，化簡得 $(a'+b'm_1^2)x^2-2(a'h+b'm_1k)x+a'h^2+b'k^2-1=0$，

所以 $x_1x_3=\dfrac{a'h^2+b'k^2-1}{a'+b'm_1^2}$。同理可得 $x_2x_4=\dfrac{a'h^2+b'k^2-1}{a'+b'm_2^2}$，故 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}$。

因為

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{\sqrt{x_1^2+m_1^2x_1^2}\cdot\sqrt{x_3^2+m_1^2x_3^2}}{\sqrt{x_2^2+m_2^2x_2^2}\cdot\sqrt{x_4^2+m_2^2x_4^2}}=\frac{\sqrt{x_1^2x_3^2(m_1^2+1)^2}}{\sqrt{x_2^2x_4^2(m_2^2+1)^2}}=\frac{-x_1x_3(m_1^2+1)}{-x_2x_4(m_2^2+1)}=\frac{x_1x_3(m_1^2+1)}{x_2x_4(m_2^2+1)}$$

又 $\frac{x_1x_3}{x_2x_4}=\frac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}$ ，故 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(a'+b'm_2^2)(m_1^2+1)}{(a'+b'm_1^2)(m_2^2+1)}$ 。

水平橢圓及水平雙曲線： I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與長軸(或貫軸)：

$y=k$ 的交點，所以 $I\left(\frac{k}{m_1},k\right),J\left(\frac{k}{m_2},k\right)$ ，推得 $\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\frac{\left(k/m_1\right)^2+k^2}{\left(k/m_2\right)^2+k^2}=\frac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}$ 。

故 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(a'+b'm_2^2)(m_1^2+1)}{(a'+b'm_1^2)(m_2^2+1)}=\left(\frac{(a'+b'm_2^2)m_1^2}{(a'+b'm_1^2)m_2^2}\right)\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

仿照上述方式可證兩邊延長交於 P 的情形，得到 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\frac{(a'+b'm_5^2)m_3^2}{(a'+b'm_3^2)m_5^2}\right)\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

垂直橢圓及垂直雙曲線： I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與長軸(或貫軸)：

$x=h$ 的交點，所以 $I\left(h,m_1h\right),J\left(h,m_2h\right)$ ，推得 $\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\frac{h^2+(m_1h)^2}{h^2+(m_2h)^2}=\frac{m_1^2+1}{m_2^2+1}$ 。

故 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{(a'+b'm_2^2)(m_1^2+1)}{(a'+b'm_1^2)(m_2^2+1)}=\left(\frac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}\right)\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

仿照上述方式可證兩邊延長交於 P 的情形，得到 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\frac{a'+b'm_5^2}{a'+b'm_3^2}\right)\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

(ii)因為 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，所以由**圓內兩交弦定理**知 $\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=1$ ，並且

$\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\frac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}=1$ ，所以 $m_2^2(m_1^2+1)=m_1^2(m_2^2+1)$ ，得 $m_2^2=m_1^2\Rightarrow m_1=\pm m_2$ ，但

$m_1\neq m_2$ ，故 $m_1+m_2=0$ 。所以

水平橢圓及水平雙曲線： $1=\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\frac{(a'+b'm_2^2)m_1^2}{(a'+b'm_1^2)m_2^2}\right)\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\frac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ ，故 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 。

垂直橢圓及垂直雙曲線：$1=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\left(\dfrac{a'+b'm_2^2}{a'+b'm_1^2}\right)\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$，故 $\overline{PI}=\overline{PJ}$。

因此，$\overline{PI}=\overline{PJ}$。仿照上述方式可證兩邊延長交於 P 的情形，得到 $\overline{PI}=\overline{PJ}$。 ■

【定理 12】(更一般的圓錐曲線的圓冪定理推廣五式)

給定圓錐曲線方程式為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (A,B,C 至少有一個不為零)且圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P，設 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸 $:y=mx+\gamma$ 的交點，則(i) $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(A+Bm_2+Cm_2^2)(m_1-m)^2}{(A+Bm_1+Cm_1^2)(m_2-m)^2}\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$。

(ii)若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**圓內接四邊形**，則 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，參見圖 26。

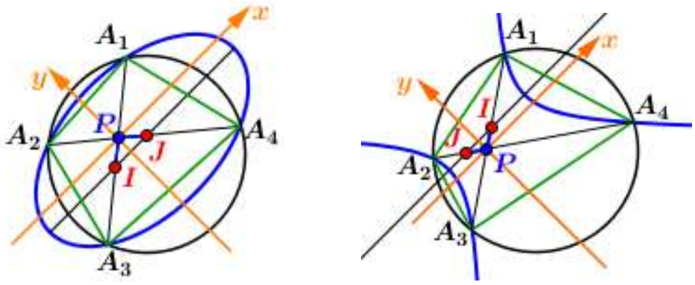


圖 26：一般圓錐曲線內接四邊形的兩對角線與對稱軸性質

【註】定理 12 中推廣圓冪定理均成立。

【證明】仿照來**輔助定理 1-2** 證明。(i) A_1,A_3 顯然為 $\Gamma:Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 與

$y=m_1x$ 聯立的解，即 $Ax^2+Bx(m_1x)+C(m_1x)^2+Dx+E(m_1x)+F=0$，化簡得

$(A+Bm_1+Cm_1^2)x^2+(D+Em_1)x+F=0$，所以 $x_1x_3=\dfrac{F}{A+Bm_1+Cm_1^2}$。

同理可得 $x_2x_4=\dfrac{F}{A+Bm_2+Cm_2^2}$，故 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{A+Bm_2+Cm_2^2}{A+Bm_1+Cm_1^2}$。因為

$$\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\frac{\sqrt{x_1^2+m_1^2x_1^2}\cdot\sqrt{x_3^2+m_1^2x_3^2}}{\sqrt{x_2^2+m_2^2x_2^2}\cdot\sqrt{x_4^2+m_2^2x_4^2}}=\frac{\sqrt{x_1^2x_3^2(m_1^2+1)^2}}{\sqrt{x_2^2x_4^2(m_2^2+1)^2}}=\frac{-x_1x_3(m_1^2+1)}{-x_2x_4(m_2^2+1)}=\frac{x_1x_3(m_1^2+1)}{x_2x_4(m_2^2+1)}$$

又 $\dfrac{x_1x_3}{x_2x_4}=\dfrac{A+Bm_1+Cm_2^2}{A+Bm_1+Cm_1^2}$，故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(A+Bm_2+Cm_2^2)(m_1^2+1)}{(A+Bm_1+Cm_1^2)(m_2^2+1)}$。

設 I,J 分別為兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 與對稱軸 $: y=mx+\gamma$ 的交點，所以

$I\left(\dfrac{\gamma}{m_1-m},\dfrac{\gamma m_1}{m_1-m}\right),J\left(\dfrac{\gamma}{m_2-m},\dfrac{\gamma m_2}{m_2-m}\right)$，推得 $\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{(m_2-m)^2(m_1^2+1)}{(m_1-m)^2(m_2^2+1)}$ 。

故 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{(A+Bm_2+Cm_2^2)(m_1-m)^2}{(A+Bm_1+Cm_1^2)(m_2-m)^2}\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

(ii)因為 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，所以由**圓內兩交弦定理**知 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=1$ ，並且

由(i)知若選定對稱軸 $: y=mx+\gamma$ 平行的直線為 x 軸，則 $m=0$ 且 m_1,m_2 得到

m_1',m_2'(**相對斜率：以對稱軸 $: y=mx+\gamma$ 方向為 x 軸方向來計算斜率**)滿足

$m_1'+m_2'=0$ ，所以 $1=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{[A+Bm_2'+C(m_2')^2](m_1')^2}{[A+Bm_1'+C(m_1')^2](m_2')^2}\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 。

因此， $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 。 ■

五、探討圓錐曲線內接四邊形的作圖及其輔助定理

(一)不存在拋物線內接平行四邊形

我們將四邊形分成平行四邊形、梯形及兩雙對邊皆不平行的四邊形等三種來討論，注意到平行四邊形不存在拋物線內接平行四邊形，參見**性質 3**。為了讓完整得到區分圓錐曲線的種類，底下的拋物線及其內接四邊形的作圖直接探討<u>**兩雙對邊皆不平行的四邊形**</u>的情形。

【性質 3】(圓錐曲線內接平行四邊形不存在拋物線內接平行四邊形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為一平行四邊形，則不存在拋物線內接平行四邊形。

【證明】不失一般性，考慮拋物線方程式為 $y^2=4cx$ ，若 $A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$ 在拋物線上，則 $y_2^2=4cx_2,y_3^2=4cx_3$ ，參見圖 27。

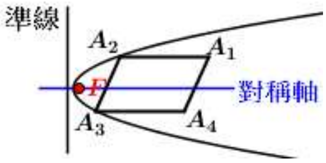


圖 27：不存在拋物線內接平行四邊形

又四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為一平行四邊形，可令 $A_1(x_1,y_2),\ A_4(x_4,y_3)$，代入 $y^2=4cx$，得到

$y_2^2=4cx_1,\ y_3^2=4cx_4$，所以 $x_1=x_2, x_3=x_4$，即 A_1,A_2 代表同一點且 A_3,A_4 代表同一點，與已知矛盾。因此，不存在拋物線內接平行四邊形。 ■

(二)圓錐曲線內接四邊形作圖的輔助定理

【輔助定理 3】(拋物線的直徑性質)

設 M_1 為拋物線中斜率為 m 的弦 $\overline{A_1A_2}$ 之中點，則所有斜率為 m 的弦的中點形成的軌跡必定平行對稱軸，參見圖 28。

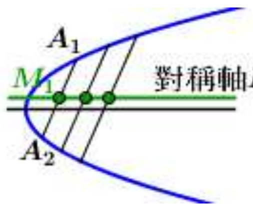


圖 28：拋物線的直徑性質

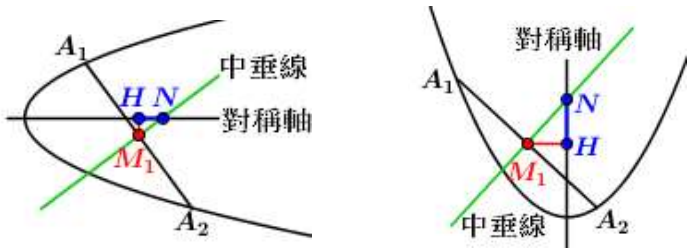


圖 29：$\overline{HN}$ 為定值(拋物線的定值性質)

【證明】(i)不失一般性，以對稱軸為平行 x 軸的拋物線來證明。

設拋物線方程式為 $(y-k')^2=4c(x-h')$，若 $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2)$，則

中點 M_1 的坐標為 $(x',y')=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ 且 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

又 $(y_1-k')^2=4c(x_1-h'), (y_2-k')^2=4c(x_2-h')$，兩式相減化簡得 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4c}{2y'-2k'}$。

所以 $\overline{A_1A_2}$ 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4c}{2y'-2k'}$ 且 $y'=\dfrac{2c}{m}+k'$。 (15)

由於 m、k' 與 c 均為定值，弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點的 y 坐標等於 $\dfrac{2c}{m}+k'$ 為定值，故所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定平行對稱軸。同理可推導出當對稱軸平行 y 軸的拋物線時，所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定平行對稱軸。 ■

【輔助定理 4】(拋物線中弦的中垂線與軸的交點 N，與弦中點到軸的垂足點 H，$\overline{HN}$ 值)

設 $M_1(x',y')$ 為拋物線 Γ_1 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_1A_2}$ 之中點，且過 M_1 作垂直線交對稱軸於 H

且作 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線與對稱軸交於 N ，參見圖 29，則 $\overline{HN}=2|c|$，其中 $|c|$ 為焦距。

【**證明**】不失一般性，先以對稱軸為平行 x 軸的拋物線來證明。由(15)式知弦 $\overline{A_1A_2}$ 的斜率為 $m=\dfrac{4c}{2y'-2k'}$ ，所以 $\overline{A_1A_2}$ 中垂線方程式為 $y-y'=-\dfrac{2y'-2k'}{4c}(x-x')$ 且軸方程式為 $y=k'$。求 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線與對稱軸的交點 N ，即令 $y=k'$，解得 $x=x_0+2c$ ，

故 $\overline{HN}=|x-x_0|=2|c|$，因此，$\overline{HN}=2|c|$，其中焦距為 $|c|$。

同理可推導出當對稱軸為平行 y 軸的拋物線時，$\overline{HN}=2|c|$，其中焦距為 $|c|$。 ■

(二)圓、橢圓及雙曲線的直徑及定值性質

接著要將**輔助定理 3-4** 類推至有心錐線，令其方程式為 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 。

【**輔助定理 5**】**(圓、橢圓與雙曲線的直徑性質)**

設 M_2 為圓錐曲線 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中點，則所有斜率為 m 的弦的中點形成的軌跡必定通過 Γ 的中心，參見圖 30。

【**證明**】若 $A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$，則中點 M_2 的坐標為 (x_0,y_0) ，其中 $x_0=\dfrac{x_2+x_3}{2},y_0=\dfrac{y_2+y_3}{2}$

且 $m=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ 。又 $a'(x_2-h)^2+b'(y_2-k)^2=1, a'(x_3-h)^2+b'(y_3-k)^2=1$ ，兩式相減化簡得

$\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-\dfrac{a'}{b'}\left(\dfrac{x_0-h}{y_0-k}\right)$。所以斜率 $m=-\dfrac{a'}{b'}\left(\dfrac{x_0-h}{y_0-k}\right)$ 且 $-\dfrac{a'}{mb'}=\dfrac{y_0-k}{x_0-h}$ 。 (16)

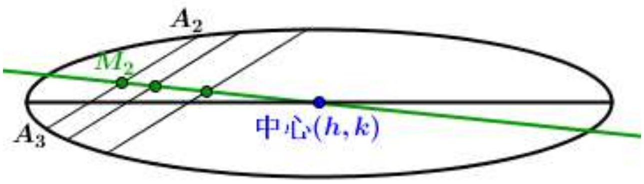


圖 30：橢圓的直徑性質

由於 m、 a' 與 b' 均為定值，所以弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點與中心 (h,k) 的斜率等於 $-\dfrac{a'}{mb'}$ 為定值，故所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定通過 Γ 的中心 (h,k) 。 ■

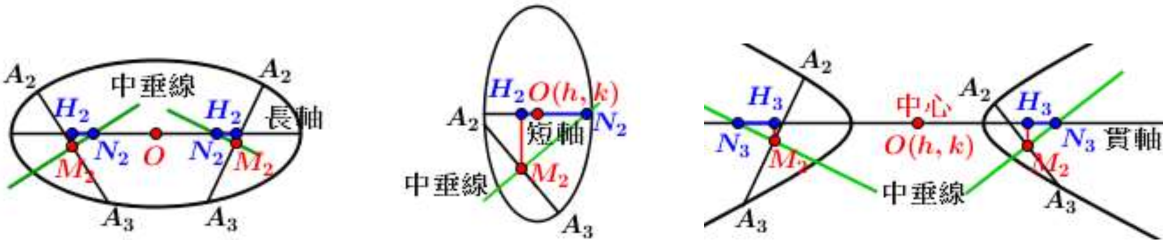


圖 31： $\overline{H_2N_2}$ 及 $\overline{H_3N_3}$

將**輔助定理 4** 中 $\overline{HN}=2|c|$ 推至圓錐曲線 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 的情形。為了區分，將橢圓中弦 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與軸的交點 N_2 ，與弦 $\overline{A_2A_3}$ 的中點到軸的垂足點 H_2 ，推導出 $\overline{H_2N_2}$ **值**；圓、雙曲線分別推導出 $\overline{H_1N_1}$ **及** $\overline{H_3N_3}$ **值**，參見**輔助定理 6**，在證明時，統一記作 $\overline{H'N'}$ 。

【輔助定理 6】(圓中 $\overline{H_1N_1}$ 、橢圓中 $\overline{H_2N_2}$ 值及雙曲線中 $\overline{H_3N_3}$ 值)

設 $M_2(x_0,y_0)$ 為圓錐曲線 $\Gamma: a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中點，且過 M_2 作垂直線交對稱軸： $y=k$ 於 H' 且作 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與對稱軸： $y=k$ 交於 N'，則 $\overline{H'N'}=\left|\dfrac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$ ，參見圖 31。

【註】(i)當 Γ 為水平橢圓 $(a'<b')$ 或水平雙曲線時， $\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$ 。(i)當 Γ 為垂直橢圓 $(a'>b')$ 或垂直雙曲線時， $\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\dfrac{a^2}{b^2}|x_0-h|$ 。另外圓是橢圓特例，由於 $a'=b'$ ，所以 $\overline{H_1N_1}=|x_0-h|$ 。

【證明】由(16)式知弦 $\overline{A_2A_3}$ 的斜率 $m=-\dfrac{a'}{b'}\left(\dfrac{x_0-h}{y_0-k}\right)$ ，其中 $x_0=\dfrac{x_2+x_3}{2}, y_0=\dfrac{y_2+y_3}{2}$ 。

所以 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線方程式為 $y-y_0=\dfrac{b'}{a'}\left(\dfrac{y_0-k}{x_0-h}\right)(x-x_0)$ 且對稱軸方程式為 $y=k'$ 。

求 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與對稱軸的交點 N' ，即令 $y=k'$ ，解得 $x-x_0=\dfrac{a'}{b'}(h-x_0)$ ，

故 $\overline{H'N'}=|x-x_0|=\left|\dfrac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$ ，因此， $\overline{H'N'}=\left|\dfrac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$ 。 ■

(三)拋物線及其內接四邊形的作圖

由 GeoGebra 繪圖發現拋物線內接四邊形中拋物線作圖最為困難，所以先探討拋物線及其內接四邊形的作圖，推導出二種作圖方式，記作**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**及**(II)**。

利用**拋物線的直徑性質**(參見**輔助定理 3-4**)來探討**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**：已知三點 A_1, A_2, A_3 與平行對稱軸 L 的直線 L' 條件下確定一拋物線，再取 A_3 點在拋物線上一點 A_4。注意其四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 可能為非圓內接四邊形，參見圖 32。

現在要建構拋物線及其內接四邊形的作圖(I)，注意對 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 作中垂線 L_1 與 L_2 且 L_1 與 L_2 的交點落在對稱軸 L 上，但交點在 L 上不在同一點，參見圖 33。作法上我們必須考慮使 L_1、L_2 交 L 於同一點，方法是底下其作圖(I)中 $Step\,1$ 及 $Step\,2$，參見圖 34 及證明參見**定理 13**，再由**輔助定理 3-4** 知 $\overline{HN} = 2|c|$ 且 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸，此拋物線因而被決定。

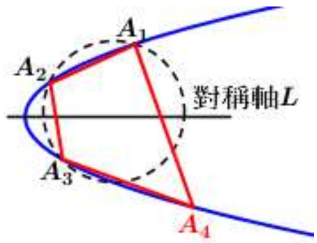


圖 32：非圓內接四邊形

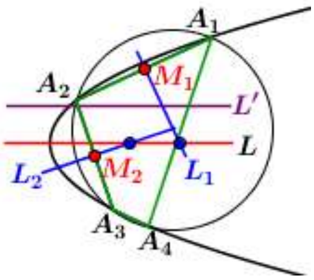


圖 33：$Step\,1$

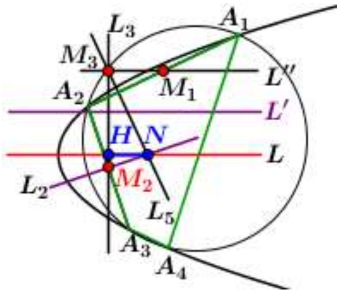


圖 34：拋物線及其內接四邊形的作圖(I)

拋物線及其內接四邊形的作圖(I)：圖 34 中

$Step\,1$：過 $\overline{A_1A_2}$ 的中點 M_1 作 $L''//L'$ 且過 $\overline{A_2A_3}$ 的中點 M_2 作 L'' 的垂直線 L_3 交 L'' 於 M_3。

$Step\,2$：過 M_2 作 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線 L_2 且過 M_3 作 $\overline{A_1A_2}$ 的垂直線 L_5，L_2 與 L_5 相交於 N。

$Step\,3$：過 N 作 L_3 的垂直線交 L_3 於 H，即 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸 L。

$Step\,4$：$Step\,3$ 中得到 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸且由**輔助定理 4** 知 $\overline{HN} = 2|c|$，此拋物線因而被決定。

$Step\,5$：**四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形**－過 A_1, A_2, A_3 三點作一圓 Ω 交拋物線於 A_4；

四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不為圓內接四邊形－取 A_3 點右邊在拋物線上一點 A_4 (異於圓 Ω 上一點)，即四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為拋物線內接四邊形。 ■

【定理 13】(拋物線及其內接四邊形的作圖(I))

設三點 A_1, A_2, A_3 滿足拋物線及其內接四邊形的作圖(I)，參見圖 34，則(i) $Step\ 1-3$ 使得直線 L_2 與 L_5 相交對稱軸 L 上同一點 N。(ii) $Step\ 1-5$ 得到拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$。

【證明】(i)不失一般性，考慮拋物線方程式為 $y^2 = 4cx$，設 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$

且 m_1, m_2 為 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}$ 的斜率，則由**輔助定理 3**知 $m_1 = \dfrac{4c}{y_1+y_2}, m_2 = \dfrac{4c}{y_2+y_3}$ 且由作圖知

$M_2\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ 且 $M_3\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。由**直線方程式中的點斜式**知

$$L_2\colon y-\frac{y_2+y_3}{2} = m_2\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right), L_5\colon y-\frac{y_1+y_2}{2} = m_1\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right)$$

得 $m_1\left(y-\dfrac{y_2+y_3}{2}\right) = m_2\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以 $\dfrac{4c}{y_1+y_2}\left(y-\dfrac{y_2+y_3}{2}\right) = \dfrac{4c}{y_2+y_3}\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，化簡得到 $y=0$，故直線 L_2 與 L_5 的交點在對稱軸 $y=0$ 上。

(ii)由(i)與**輔助定理 4**知 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸，得 $\overline{HN} = 2|c|$，因此，以 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸且

$\overline{HN} = 2|c|$ 的拋物線。 ■

事實上，給定平行對稱軸的直線 L' 是不容易的，主因相異三點決定拋物線有可能是斜拋物線，參見圖 35，那麼直線 L' 如何找呢？克服的方式即**拋物線及其內接四邊形的作圖(II)**：給定一四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 作拋物線，這作圖藉由**輔助定理 1** 得直線 L'，再由**拋物線內接四邊形的作圖(I)**建構拋物線內接四邊形。

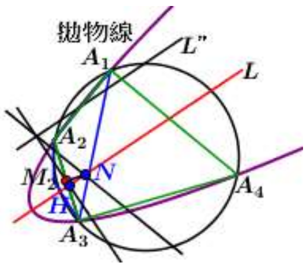


圖 35：斜拋物線

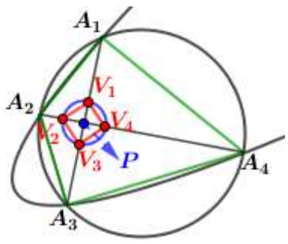


圖 36：斜拋物線的平行對稱軸的直線 L' 為 $\overleftrightarrow{V_1V_2}$

由**輔助定理 1** 知若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，則 $\overline{PI} = \overline{PJ}$。而若四邊形

$A_1A_2A_3A_4$ 不為圓內接四邊形，則 $\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}} = \dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$，這作圖要利用幾何平均數作圖，參見圖 39。

拋物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為圓內接四邊形

$Step\,1$：由於 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，所以作以 P 為圓心且適當長為半徑與兩對角線交於 V_1,V_2,V_3,V_4，

參見圖 36，則 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 為平行對稱軸的直線，證明參見**定理 14**。

$Step\,2$：由**拋物線內接四邊形作圖(I)**建構拋物線內接四邊形。 ■

【定理 14】(拋物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為圓內接四邊形)

設圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的對角線交於 P，若以 P 為圓心且適當長為半徑的圓交 $\overline{A_1A_3},\overline{A_2A_4}$ 於 V_1,V_2,V_3,V_4 兩點，參見圖 36，則以 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 為平行對稱軸的直線可作出**相互垂直的對稱軸的兩拋物線**。

【證明】存在性證明：由**輔助定理 5** 知 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，所以四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的兩對角線交 P 為圓心，以適當長為半徑畫圓交兩對角線於 V_1,V_2,V_3,V_4，參見圖 36，則 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 為平行對稱軸的直線 L'。由於 $\overline{V_1V_3},\overline{V_2V_4}$ 為直徑，所以由**泰利斯定理**知 $\angle V_2V_1V_4=\angle V_1V_2V_3=\angle V_2V_3V_4=\angle V_3V_4V_1=90^\circ$，推得 $\overleftrightarrow{V_1V_2}//\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_2V_3}//\overleftrightarrow{V_1V_4}$ 且 $\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3}$ 為相互垂直的兩平行對稱軸的直線 L'，配合由**拋物線及其內接四邊形的作圖(I)**可建構兩拋物線內接四邊形。

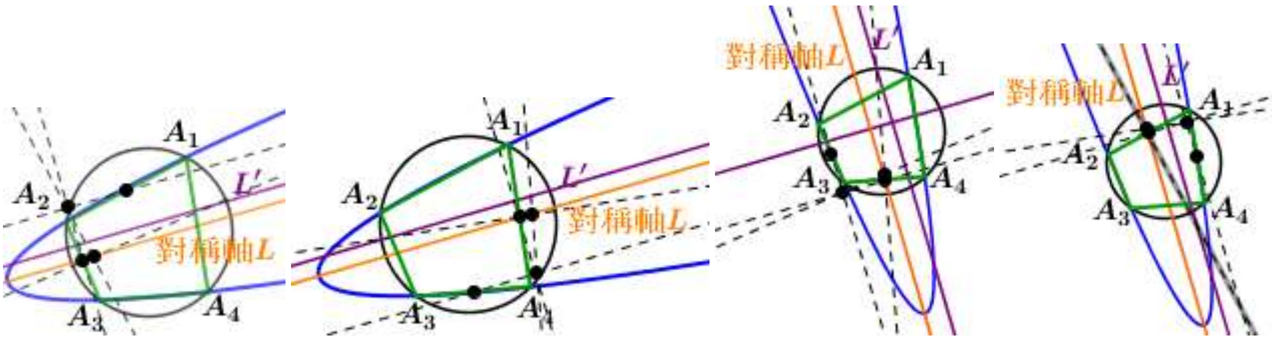


圖 37：唯一性證明作出同一拋物線

唯一性證明：若給定三點 A_1,A_2,A_3 或 A_1,A_3,A_4 且平行對稱軸的直線 L'，按照拋物線及其內接四邊形的作圖(I)可決定同一拋物線，參見圖 36。若給定三點 A_2,A_3,A_4 或 A_1,A_2,A_4 且與 L' 垂直的直線當平行對稱軸的直線 L''(符合存在性質)，按照拋物線及其內接四邊形的作圖(I)可決定同一拋物線，參見圖 37。

綜合以上在圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中**僅能作出兩種對稱軸相互垂直的拋物線**。 ■

抛物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為非圓內接四邊形

$Step\,1$：利用幾何平均數作圖 $\overline{PF}^2=\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}$ 且 $\overline{PG}^2=\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}$ ，再以 P 為圓心且半徑為 $\overline{PF}$ 的圓交 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 於 B 且以 P 為圓心且半徑為 $\overline{PG}$ 的圓交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 C ，參見圖 39。

$Step\,2$ ：連接 $\overline{BC}$ ，在 $\overline{A_2A_4}$ 取上點 D 使得 $\angle PDE=\angle PCB$ ，則 $\overleftrightarrow{DE}$ 為平行對稱軸直線。■

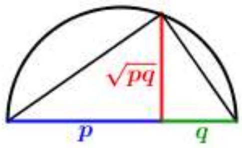


圖 38：幾何平均數

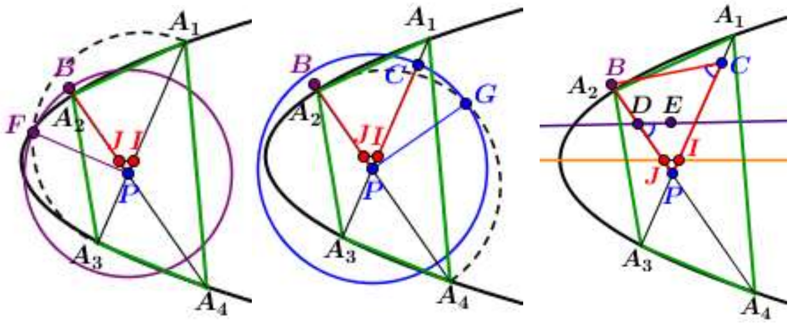


圖 39： $\overleftrightarrow{DE}$ 為抛物線的平行對稱軸的直線

【定理 15】(抛物線及其內接四邊形的作圖(II)-四邊形為非圓內接四邊形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的對角線交於 P ，滿足抛物線內接四邊形作圖(II)中 $Step\,1-2$ ，參見圖 35，則 $\overleftrightarrow{DE}$ **為平行對稱軸的直線可作出相互垂直的對稱軸的兩種抛物線**。

【證明】設 $\overline{PF}=R,\overline{PG}=r$ ，則由**輔助定理 5**知 $\dfrac{R^2}{r^2}=\dfrac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_3}}{\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_4}}=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ ，故 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{\overline{PI}}{\overline{PJ}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ 。

在 ΔPIJ 與 ΔPBC 中，由於 $\angle IPJ=\angle CPB$ 且 $\dfrac{\overline{PI}}{\overline{PJ}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ ，所以

$\Delta PIJ\sim\Delta PBC$ (SAS 相似性質)。故作**等角作圖**使 $\angle PDE=\angle PCB$ ，即 $\angle PDE=\angle PJI$ ，

因此， $\overleftrightarrow{DE}$ 為平行對稱軸的直線 L' 。

同理可得與 $\overleftrightarrow{DE}$ 垂直的平行對稱軸之直線 L' ，配合由**抛物線及其內接四邊形的作圖(II)**可建構**相互垂直的對稱軸的兩種抛物線**。 ■

(四)由抛物線及其內接四邊形的作圖來建構圓錐曲線內接四邊形

前面已探討抛物線及其內接四邊形，接著要探討更一般圓錐曲線內接四邊形的作圖之判定條件，作圖方法共有二種：一是在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，由**抛物線及其內接四邊形的作圖中中垂線建構平行對稱軸之直線來決定圓錐曲線**，稱此作圖為**圓錐曲線內接四邊形**

的作圖(I)。二是已知四邊形中四個頂點，**再取平面上一點**Q**來決定圓錐曲線**，稱此作圖為**圓錐曲線內接四邊形的作圖(II)**。首先先證明**圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)**，由**輔助定理 1-2** 與**定理 12** 知當四邊形為圓內接四邊形時，不論圓錐曲線方程式為標準形或非標準形均有 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 性質。為了清楚描述，**論證及構圖上採** $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ **來呈現**。

【定理 16】(圓錐曲線內接四邊形的作圖(I) -四邊形為圓內接四邊形)

給定圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設由**拋物線及其內接四邊形的作圖**得 $\overline{HN}$，若 Q 為 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線 L_2 上一點，參見圖 40，則以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。

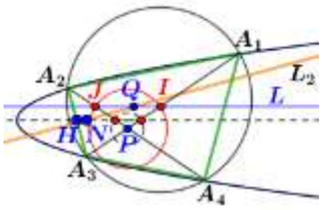


圖 40：以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形

【證明】由**輔助定理 1-2** 與**定理 12** 知對於圓錐方程式均有 $\overline{PI}=\overline{PJ}$，其中 $\overleftrightarrow{IJ}$ 為對稱軸。

若以 P 為圓心且適當長為半徑畫圓交兩對角線於 I,J 二點，參見圖 40，取 Q 在 $\overleftrightarrow{IJ}$ 上，又 $\overleftrightarrow{IJ}//\overline{HN}$，則以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線 L 為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。 ■

由**定理 16** 知**中垂線** L_2 **建構平行對稱軸之直線** L' 來決定圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線，注意影響 L' 的七個特殊點，稱為**關鍵點**，即 N,R_1,Q_1,P,Q_2,R_2,Q_3，參見圖 41。

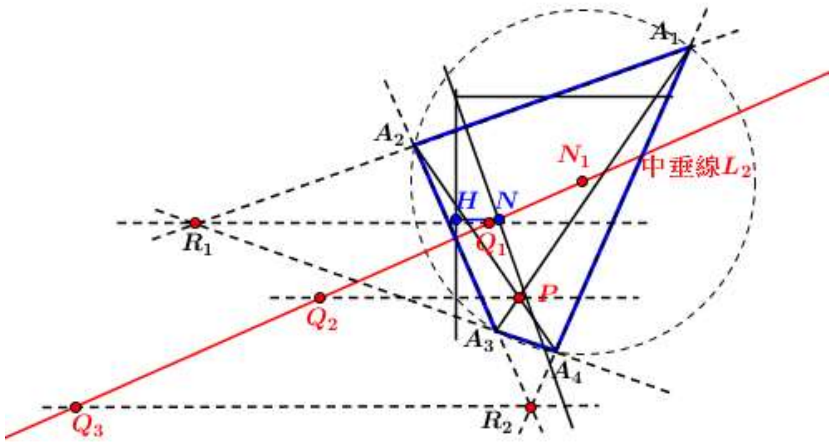


圖 41：影響 L'的七個特殊點 N,R_1,Q_1,P,Q_2,R_2,Q_3

(i)四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圓之圓心 N_1(在 L'上)：由**外心性質**知作 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線之交點即圓心 N_1，所以外接圓就是以 N_1 為圓心且對稱軸為 $\overleftrightarrow{H_1N_1}$ 的圓，參見圖 41。

(ii) $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 為與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 的交點 R_1 、 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 的的交點 P 、 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 的交點 R_2 及過 R_1,P,R_2 作 $\overline{HN}$ 的平行直線與 L_2 的交點分別為 Q_1,Q_2,Q_3 ，參見圖 41。

【定理 17】(兩相交直線內接四邊形的判定條件)

給定四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的兩對角線交於 P ，設 Q_1,Q_2,Q_3 分別為過 R_1,P,R_2 作 $\overline{HN}$ 的平行直線與 L_2 的交點，參見圖 41，則分別建構出**以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 、 $\overleftrightarrow{Q_2P}$ 及 $\overleftrightarrow{Q_3R_2}$ 為對稱軸的兩相交直線單接四邊形、兩相交直線雙接四邊形、兩相交直線單接四邊形**。

【證明】先證明以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 為對稱軸的圖形。

設 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 的方程式分別為 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 、 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 、 $a_3x+b_3y+c_3=0$ 、 $a_4x+b_4y+c_4=0$ 、 $a_5x+b_5y+c_5=0$ 、 $a_6x+b_6y+c_6=0$ 。可令 A_1,A_2,A_3,A_4 四點的圓錐曲線方程式為

$$\ell_1(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)+\ell_2(a_3x+b_3y+c_3)(a_4x+b_4y+c_4)=0 \quad (17)$$

由於是以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 為對稱軸的圖形，所以(17)式必經過 R_1 ， R_1 代入(11)式，化簡得到 $\ell_2=0$ ，即圓錐曲線方程式為 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$ ，因此，其圖形為兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 。同理可證是以 $\overleftrightarrow{Q_2P}$ 為對稱軸的圖形，所以(11)式必經過 P ，

P 代入(17)式，化簡得到 $\ell_1=0$，即圓錐曲線方程式為

$(a_3x+b_3y+c_3)(a_4x+b_4y+c_4)=0$，因此，其圖形為兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 。

其次，證明以 $\overleftrightarrow{Q_3R_2}$ 為對稱軸的圖形時，(17)式改為

$$\ell_1(a_3x+b_3y+c_3)(a_4x+b_4y+c_4)+\ell_2(a_5x+b_5y+c_5)(a_6x+b_6y+c_6)=0$$

同理可證，所以其圖形是兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 。 ■

接著探討**圓錐曲線內接四邊形的作圖(I)**中各種非退化圓錐曲線(不含拋物線)的判定條件，不失一般性，以 $a'(x-h)^2+b'(y-k)^2=1$ 來探討，是由**輔助定理 6**：$\overline{H'N'}=\left|\frac{a'}{b'}(h-x_0)\right|$，其中**圓中** $\overline{H_1N_1}$ **、橢圓中** $\overline{H_2N_2}$ **及雙曲線中** $\overline{H_3N_3}$ **值**來協助論證，參見表 1。

表 1：圓錐曲線中的定值性質

圓	**水平橢圓或水平雙曲線**	**垂直橢圓或垂直雙曲線**
$\lvert x_0-h\rvert$	$\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\frac{b^2}{a^2}\lvert x_0-h\rvert$	$\overline{H_2N_2}=\overline{H_3N_3}=\frac{a^2}{b^2}\lvert x_0-h\rvert$

【定理 18】(由拋物線及其內接四邊形的作圖建構橢圓內接四邊形作圖(I)的判定條件)

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設由拋物線及其內接四邊形作圖(I)得到 $\overline{HN}$，且 N,N_1,N_2 為斜率為 $m\,(<0)$ 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中垂線 L_2 上，(i)若 N_2 在 $\overline{NN_1}$ (不含端點)上，則建構出以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為長軸的**水平橢圓內接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(ii)若 N_2 在 $\overrightarrow{N_1S}$ (不含端點 N_1)上，則建構出以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為短軸的**垂直橢圓內接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$，參見圖 42。

【註】定理 18中比例關係(i) $\overline{H_2O}:\overline{H_2N_2}=a^2:b^2$；(ii) $\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}=a^2:b^2$，參見圖 42。

【證明】由**定理 16**知以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。

為了區別 Q，這定理是指 N_2，要探討是 N_2 在 $\overline{NN_1}$ (不含端點 N_1)上或在 $\overrightarrow{N_1S}$ (不含端點 N_1)上為何種圓錐曲線，底下就來證明。

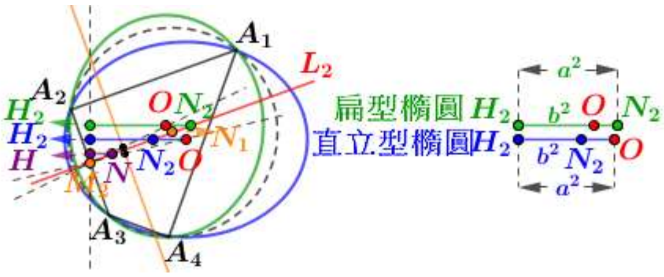


圖 42：利用拋物線內接四邊形作圖建構出橢圓內接四邊形

(i)當考慮 $m<0$ 且 N_2 在 $\overline{NN_1}$ (不含端點)上，且作 $\overline{H_2N_2}//\overline{HN}$，得到以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為長軸建構水平橢圓，因為 $a>b>0$，所以作圖可知 $O(h,k)$ 在 N_2 的右邊，再配合**輔助定理 4** 中比例關係：$\overline{H_2O}:\overline{H_2N_2}=a^2:b^2$，參見圖 42，得離心率為 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{\overline{N_2O}}{\overline{H_2O}}}<1$，為橢圓。

(ii)當考慮 $m<0$ 且 N_2 在 $\overrightarrow{N_1S}$ (不含端點 N_1)上，且作 $\overline{H_2N_2}//\overline{HN}$，得到以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為短軸建構垂直橢圓內接四邊形，因為 $a>b>0$，所以作圖可知 $O(h,k)$ 在 N_2 的左邊，再配合**輔助定理 4**中比例關係：$\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}:=a^2:b^2$，參見圖 42。這比例關係可知離心率為 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{\overline{ON_2}}{\overline{H_2N_2}}}<1$，的確為橢圓。 ■

由**定理 17**知在 L_2 上三點 Q_1,Q_2,Q_3 影響構成兩相交直線的關鍵點，又兩相交直線為雙曲線的退化圖形，可猜測 Q_1,Q_2,Q_3 會影響著雙曲線的形狀之關鍵點，參見**定理 19**。

【定理 19】(由拋物線及其內接四邊形作圖建構雙曲線內接四邊形作圖(I)的判定條件)

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設由拋物線內接四邊形作圖(I)得到 $\overline{HN}$，且 N,N_3 為斜率為 $m\,(<0)$ 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 之中垂線 L_2 上，(i)若 N_3 在 $\overline{NQ_1}$ (不含端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸的**水平雙曲線單接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(ii)若 N_3 在 $\overline{Q_2Q_3}$ (不含端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸可建構**垂直雙曲線雙接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(iii)若 N_3 在 $\overline{Q_1Q_2}$ (不含端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸的**水平雙曲線雙接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。(iv)若 N_3 在 $\overrightarrow{Q_3T}$ (不含 Q_3 端點)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸的**垂直雙曲線單接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$。參見圖 43-44。

【註】**定理 19** 中比例關係為(i) $\overline{OH_3}:\overline{H_3N_3}=a^2:b^2$；(ii) $\overline{H_3O}:\overline{N_3H_3}=a^2:b^2$；

(iii) $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$；(iv) $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$。

【證明】仿照**定理 18**來證明。由**定理 16**知以過 Q 作 $\overline{HN}$ 的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。為了區別 Q，這定理是指 N_3，要探討是 N_3 的範圍有四種，各屬於何種圓錐曲線，底下就來證明。

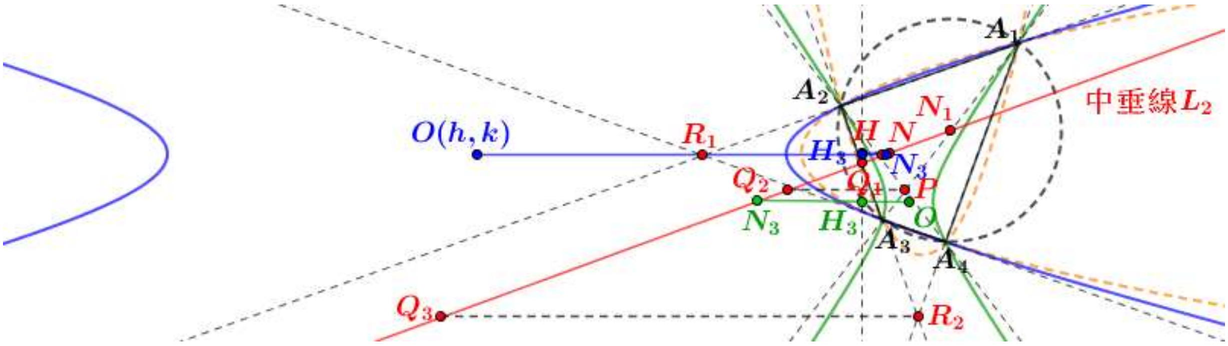


圖 43：建構出水平雙曲線單接或雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

(i)當考慮 $m<0$ 且 N_3 在 $\overline{NQ_1}$ (不含端點)上，且作 $\overline{H_3N_3}//\overline{HN}$，得到以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸建構水平雙曲線，因為 $a,b>0$，所以作圖可知 $O(h,k)$ 在 H_3 的左邊，再配合**輔助定理 4**中比例關係：$\overline{OH_3}:\overline{H_3N_3}=a^2:b^2$，參見圖 43。這比例關係可知離心率為 $\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{\overline{ON_3}}{\overline{OH_3}}}>1$，的確為雙曲線。注意到若中心 O 在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外部，則構成雙曲線單接四邊形。

(ii)~(iv)仿照(i)來證明。推導出比例關係為

(ii) $\overline{H_3O}:\overline{N_3H_3}=a^2:b^2$；(iii) $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$；(iv) $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$，參見圖 44。

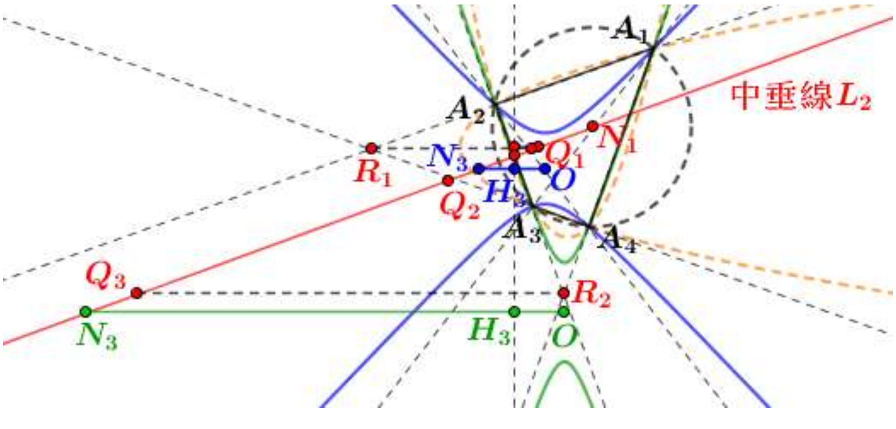


圖 44：建構出垂直雙曲線單接或雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

依照這些比例關係可知離心率為 $\dfrac{c}{a}>1$，的確為雙曲線。注意到若中心 O 在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外部，則構成雙曲線單接四邊形。若內部，則構成雙曲線雙接四邊形。因此，根據以上討論，由拋物線及其內接四邊形的作圖建構雙曲線單(雙)接四邊形的判定條件共有四種。 ■

接著探討**圓錐曲線內接四邊形的作圖(II)**：已知圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中四個頂點，再取在平面上一點 Q 來可決定何種圓錐曲線內接四邊形呢？我們由圓、兩條拋物線、四邊形的四個邊及兩個對角線等六條直線將平面區分 **31** 區域，每一區域標記為 I~IV，參見圖 45，那麼區域上一點 Q 與 A_1,A_2,A_3,A_4 四點可建構何種圓錐曲線呢？參見**定理 20**。

【定理 20】(橢圓與雙曲線內接四邊形的作圖(II))

給定平面上一點 Q，設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形，則 Q,A_1,A_2,A_3,A_4 五點構成圖形為(i)當 Q 在圖 45 中**區域 I** 時，**水平橢圓內接四邊形**。(ii)當 Q 在圖 45 中**區域 II** 時，**垂直橢圓內接四邊形**。(iii)當 Q 在圖 45 中**區域 III(a)**時，**水平雙曲線單接四邊形**。(iv)當 Q 在圖 45 中**區域 III(b)**時，**水平雙曲線雙接四邊形**。(v)當 Q 在圖 45 中**區域 IV(a)**時，**垂直雙曲線雙接四邊形**。(vi)當 Q 在圖 45 中**區域 IV(b)**時，**垂直雙曲線單接四邊形**。

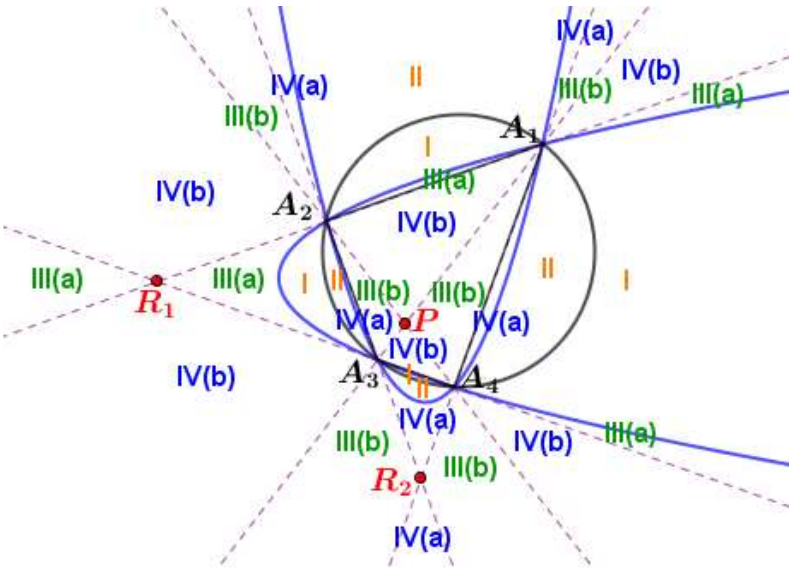


圖 45：圓、兩條拋物線、六條直線區分 **31** 區域

【證明】由**定理 18** 與**定理 19** 中圓錐曲線的軌跡圖形而得證。 ■

六、探討圓錐曲線內接四邊形判定定理及其幾何性質

(一)圓錐曲線內接四邊形判定定理

【定理 21】(圓錐曲線內接四邊形的兩對角線或兩邊斜率性質)

給定圓錐曲線方程式為 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (A,C 至少有一個不為零)且圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 交於 P ，若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且 m_1,m_2 為對角線 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 的斜率，則 $m_1+m_2=0$ ，參見圖 24-25。

【註】**定理 21** 若考慮兩邊(即兩割線)交於 P ，則 $m_3+m_5=0$ ，參見圖 24-25。

【證明】(i)考慮拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的情形。由**輔助定理 1** 中證明知

當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形時，$\overline{PI}=\overline{PJ}$ ，即 $\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}=\dfrac{m_2^2(m_1^2+1)}{m_1^2(m_2^2+1)}=1$ ，所以

$m_2^2(m_1^2+1)=m_1^2(m_2^2+1)$ ，得 $m_2^2=m_1^2 \Rightarrow m_1=\pm m_2$ ，但 $m_1\neq m_2$ ，故 $m_1+m_2=0$ 。

僅要考慮一組對邊不平行的四邊形，必存在拋物線內接四邊形，所以當考慮其餘圓錐曲線內接四邊形也保有 $m_1+m_2=0$ 此性質。 ■

由**定理 21** 知當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形時， $m_1+m_2=0$ 。然而顯然僅有滿足 $m_1+m_2=0$ 的四邊形不一定圓內接四邊形，參見圖 46 中四邊形 $A_1A_2A_3A_4'$ ，可猜測必須要考慮四邊長的斜率性質，就可使四邊形為圓內接四邊形。由於兩雙對邊皆不平行的四邊形均存在兩種拋物線，底下就先證明兩種拋物線內接四邊形中四邊長的斜率性質。

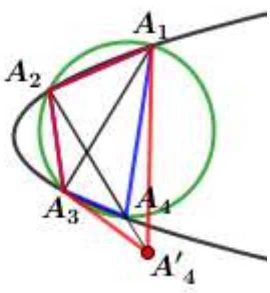


圖 46：僅有滿足 $m_1+m_2=0$ 的四邊形不一定圓內接四邊形

【定理 22】(拋物線內接四邊形中的四邊長之斜率性質)

給定一拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中拋物線方程式為標準形，設 m_3,m_4,m_5,m_6 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 及 $\overline{A_1A_4}$ 的斜率，則(i)當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**垂直拋物線內接四邊形**時， $m_3-m_4+m_5-m_6=0$ 。(ii)當四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為**水平拋物線內接四邊形**時，

$\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_4}+\frac{1}{m_5}-\frac{1}{m_6}=0$ 。

【註】定理 22 中若拋物線方程式為**非標準形**， m_1,m_2 改考慮相對斜率 m_1',m_2' 時，

(i)**垂直拋物線**： $m_3'-m_4'+m_5'-m_6'=0$ 。(ii)**水平拋物線**： $\frac{1}{m_3'}-\frac{1}{m_4'}+\frac{1}{m_5'}-\frac{1}{m_6'}=0$ 。

【證明】四邊形可分平行四邊形、梯形及兩雙對邊皆不平行的四邊形來證明，事實上我們僅要證明兩雙對邊皆不平行的四邊形的情形，另外兩種情形皆成立。由於兩雙對邊皆不平行的四邊形均存在兩種拋物線，所以底下證明是用拋物線方程式來證且四邊形的四個頂點為 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3),A_4(x_4,y_4)$ 。

(i)不失一般性，可設拋物線方程式為 $(x-x_0)^2=4c(y-y_0)$ ，其中頂點 $V(x_0,y_0)$ ，則

$$(x_1-x_0)^2=4c(y_1-y_0),(x_2-x_0)^2=4c(y_2-y_0),(x_3-x_0)^2=4c(y_3-y_0),(x_4-x_0)^2=4c(y_4-y_0)$$

由上式推得 $m_3=m_{\overline{A_1A_2}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{4c}\left((x_2-x_0)^2-(x_1-x_0)^2\right)}{x_2-x_1}=\frac{x_1+x_2-2x_0}{4c}$ ，同理可推得

$m_4=m_{\overline{A_2A_3}}=\frac{x_2+x_3-2x_0}{4c}$ 、 $m_5=m_{\overline{A_3A_4}}=\frac{x_3+x_4-2x_0}{4c}$ 、 $m_6=m_{\overline{A_1A_4}}=\frac{x_1+x_4-2x_0}{4c}$

故 $m_3-m_4+m_5-m_6=\frac{x_1+x_2-2x_0}{4c}-\frac{x_2+x_3-2x_0}{4c}+\frac{x_3+x_4-2x_0}{4c}-\frac{x_1+x_4-2x_0}{4c}=\frac{0}{4c}=0$ 。

(ii)仿照(i)的證明：另一種水平拋物線方程式為 $(y-y_0)^2=4c(x-x_0)$ 的情形，可得

$m_3=\frac{4c}{y_1+y_2-2y_0}$ 、 $m_4=\frac{4c}{y_2+y_3-2y_0}$ 、 $m_5=\frac{4c}{y_3+y_4-2y_0}$ 、 $m_6=\frac{4c}{y_1+y_4-2y_0}$ 。

故 $\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_4}+\frac{1}{m_5}-\frac{1}{m_6}=\frac{y_1+y_2-2y_0}{4c}-\frac{y_2+y_3-2y_0}{4c}+\frac{y_3+y_4-2y_0}{4c}-\frac{y_1+y_4-2y_0}{4c}=0$ 。 ■

【定理 23】(圓錐曲線內接四邊形的判定定理)

給定一圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，其中圓錐曲線方程式為標準形，設 m_3,m_4,m_5,m_6

分別為$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$及$\overline{A_1A_4}$的斜率，參見圖 47，若$m_3+m_5=m_4+m_6=0$時，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$為圓內接四邊形。

【註】**定理 23**中若圓錐曲線方程式為**非標準形**，m_1,m_2改考慮相對斜率$m_1^{'},m_2^{'}$時，即若$m_3^{'}+m_5^{'}=m_4^{'}+m_6^{'}=0$，則四邊形為**圓內接四邊形**。

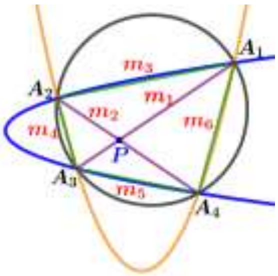


圖 47：圓錐曲線內接四邊形的判定定理

【證明】不失一般性，直接證明兩雙對邊皆不平行的四邊形，必存在兩種拋物線。

由**定理 22**知當**垂直拋物線**時，$m_3-m_4+m_5-m_6=0$。 (18)

當**水平拋物線**時，$\dfrac{1}{m_3}-\dfrac{1}{m_4}+\dfrac{1}{m_5}-\dfrac{1}{m_6}=0$。 (19)

由(18)式知$m_3+m_5=m_4+m_6$，代入(19)式化簡得到$(m_3+m_5)\left(\dfrac{m_4m_6-m_3m_5}{m_3m_4m_5m_6}\right)=0$ (20)

先考慮(20)式中$m_4m_6-m_3m_5$的化簡情形。

由(18)式可令$m_3+m_5=m_4+m_6=t$，則$m_5=t-m_3, m_4=t-m_6$代入$m_4m_6-m_3m_5$得到

$$m_4m_6-m_3m_5=(m_3^2-m_6^2)-t(m_3-m_6)=(m_3-m_6)(m_3+m_6-t)=(m_3-m_6)(m_6-m_5)$$

即$\dfrac{(m_3+m_5)(m_3-m_6)(m_6-m_5)}{m_3m_4m_5m_6}=0$。由於$m_3m_4m_5m_6\neq 0$且$m_3-m_6\neq 0, m_6-m_5\neq 0$，所以$m_3+m_5=0$，故$m_3+m_5=m_4+m_6=0$。

接著要證明四邊形滿足$m_3+m_5=m_4+m_6=0$，四邊形為圓內接四邊形。

設$\angle A_1=\theta_1, \angle A_3=\theta_2$，則$\tan\theta_1=\dfrac{m_3-m_6}{1+m_3m_6}$且$\tan\theta_2=\dfrac{m_4-m_5}{1+m_4m_5}$，所以

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\dfrac{m_3-m_6}{1+m_3m_6}+\dfrac{m_4-m_5}{1+m_4m_5}}{1-\dfrac{m_3-m_6}{1+m_3m_6}}=\frac{\dfrac{m_3-m_6}{1+m_3m_6}+\dfrac{-m_6+m_3}{1+m_6m_3}}{1-\dfrac{m_3-m_6}{1+m_3m_6}}=\frac{0}{1-\dfrac{m_3-m_6}{1+m_3m_6}}=0$$

即$\theta_1+\theta_2=180^{\circ}$。因此，由**圓內接四邊形判定定理**知四邊形$A_1A_2A_3A_4$為圓內接四邊形。

■

(二)區分圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線種類

由**定理 18-20**知當圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$為兩雙對邊皆不平行的四邊形時，得到由Q, A_1, A_2 A_3, A_4五點可決定十一種的圓錐曲線內接四邊形。那麼若考慮**非圓內接四邊形**時，可決定幾種呢？那麼其餘四邊形如平行四邊形、等腰梯形、梯形及矩形可決定幾種呢？

【定理 24】(區分圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線種類)

給定一四邊形$A_1A_2A_3A_4$，設Q為平面上一點，則當四邊形$A_1A_2A_3A_4$分別為兩雙對邊皆不平行的四邊形、梯形及平行四邊形，由Q, A_1, A_2, A_3, A_4五點可決定十一種、九種及七種的圓錐曲線(不含圓)。

【證明】(i)當四邊形$A_1A_2A_3A_4$為兩雙對邊皆不平行的四邊形時，由**定理 13-15**知圓內接與非圓內接之兩種情形的四邊形皆可建構相互垂直的對稱軸的兩種拋物線內接四邊形。再由**定理 18-20**知Q, A_1, A_2, A_3, A_4五點可決定九種的圓錐曲線(不含圓)，因此，由Q, A_1, A_2, A_3, A_4五點可決定十一種的圓錐曲線(不含圓)。

(ii)當四邊形$A_1A_2A_3A_4$為梯形時，與(i)做比較，多了一兩平行直線，就少了一種拋物線且一種相交直線且水平單接雙曲線，因此，由Q, A_1, A_2, A_3, A_4五點可決定九種的圓錐曲線(不含圓)。

(iii)由(ii)知由Q, A_1, A_2, A_3, A_4五點可決定九種的圓錐曲線內接梯形，而四邊形$A_1A_2A_3A_4$為平行四邊形時，再多了一兩平行直線，就再少了一種拋物線且一種相交直線且垂直單接雙曲線，因此，由Q, A_1, A_2, A_3, A_4五點可決定七種的圓錐曲線(不含圓)。 ■

(三)六種圓錐曲線的中心軌跡圖形

接著探討由**定理 16**知若Q為$\overline{A_2A_3}$的中垂線L_2上一點，則以過Q作$\overline{HN}$的平行直線為對稱軸可建構圓錐曲線內接四邊形。那麼**以$\overline{HN}$的平行直線為對稱軸移動時，所形成圓錐曲線的中心所形成的圖形為何呢？為了方便，將圓錐曲線的中心所形成的圖形稱為中心軌跡圖形，其中心記作O。**

【定理 25】(圓錐曲線內接四邊形中有心錐線的中心軌跡圖形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓錐曲線內接四邊形，其對角線交於 P ，M_1,M_2,M_3,M_4 分別 $\overline{A_1A_2}$ 、$\overline{A_2A_3}$ 、$\overline{A_3A_4}$ 、$\overline{A_1A_4}$ 的中點，若 O 為圓錐曲線的中心，則(i)當四邊形為**兩雙對邊皆平行的四邊形(如平行四邊形)**時，中心軌跡圖形為**一點** P 。(ii)當四邊形為**一雙對邊不平行的四邊形(如梯形)**時，中心軌跡圖形為**一直線**。(iii)當四邊形為**兩雙對邊皆不平行的四邊形**時，中心軌跡圖形為**過 P,M_1,M_2,M_3,M_4 五點的一雙曲線**。參見圖 48。

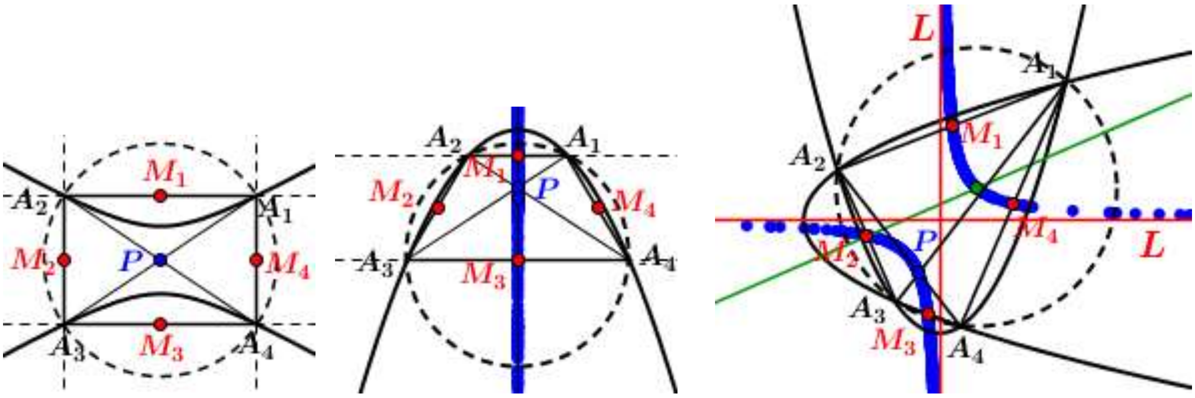


圖 48：圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線中心軌跡圖形

【證明】(i) 設 $A_1(s_1+s_2\cot\theta,s_2),A_2(s_2\cot\theta,s_2),A_3(0,0),\ A_4(s_1,0)$ ，其中 $\angle A_2A_3A_4=\theta$ $,0^\circ<\theta\le 90^\circ$ ，則 $\overleftrightarrow{A_1A_3}:m_1x-y=0,\overleftrightarrow{A_2A_4}:m_2x-y-m_2s_1=0,\ \ \overleftrightarrow{A_2A_3}:x-\cot\theta\cdot y=0,$ $\overleftrightarrow{A_1A_4}:x-\cot\theta\cdot y-s_1=0$ ，其中 $m_1=m_{\overline{A_1A_3}}=\dfrac{s_2}{s_1+s_2\cot\theta},m_2=m_{\overline{A_2A_4}}=\dfrac{s_2}{s_2\cot\theta-s_1}$ 。

則由圓錐曲線族性質知

$$(m_2x-y-m_2s_1)(m_1x-y)+\ell(x-\cot\theta\cdot y)(x-\cot\theta\cdot y-s_1)=0 \text{，其中 } \ell\in R\setminus\{0\} \tag{21}$$

將(21)式化簡二次方程式為

$$\begin{aligned}&(m_1m_2+\ell)x^2-(m_1+m_2+2\ell\cot\theta)xy+(\ell\cot^2\theta+1)y^2\\ &\cdots\cdots\cdots-(m_1m_2s_1+\ell s_1)x+(m_2s_1+\ell s_1\cot\theta)y=0\end{aligned} \text{。} \tag{22}$$

現在要證明所有通過四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 四個頂點的圓錐曲線之中心軌跡圖形，是用**解析幾何**來證明，不失一般性，用<u>矩形</u>來證明，考慮 θ=90^0 且 $m_1+m_2=0$ ，其中 $m_1=\dfrac{s_2}{s_1}$ 。

代入(22)式且配方得 $(\ell-m_1^2)\left(x-\dfrac{s_1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{s_2}{2}\right)^2=\dfrac{s_1^2+s_2^2}{4}$ ，其中 $\ell\in R\setminus\{0\}$

所以中心為 $\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_2}{2}\right)$ ，參見圖 48，因此，**中心軌跡圖形為一點** $P\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_2}{2}\right)$ 。

(ii)仿照(i)來證明，我們也是用**解析幾何**來證明，不失一般性，用<u>**等腰梯形**</u>來證明，注意等腰梯形為圓內接四邊形，所以由**定理 18** 知 $m_1+m_2=0$。沿用平行四邊形四個頂的坐標化方式，但點 A_1 改為 $A_1(s_1-s_2\cot\theta,s_2)$，其中 $m_1=\dfrac{s_2}{s_1-s_2\cot\theta}$ 且 $m_2=\dfrac{s_2}{s_2\cot\theta-s_1}$。

(22)式改為

$$(m_2x-y-m_2s_1)(m_1x-y)+\ell(x-\cot\theta\cdot y)(x+\cot\theta\cdot y-s_1)=0\text{，其中 }\ell\in R\setminus\{0\}\quad(23)$$

代入(23)式且配方得 $(\ell-m_1^2)x^2+(1-\ell\cot^2\theta)y^2-(\ell s_1-m_1^2s_1)x+(m_2s_1+\ell s_1\cot\theta)y=0$

$$(\ell-m_1^2)\left(x-\frac{s_1}{2}\right)^2+(1-\ell\cot^2\theta)\left(y-\frac{s_1(m_2+\ell\cot\theta)}{2(1-\ell\cot^2\theta)}\right)^2=\frac{(\ell-m_1^2)s_1^2}{4}+\frac{s_1^2(m_2+\ell\cot\theta)^2}{4((1-\ell\cot^2\theta))}$$

所以中心為 $\left(\dfrac{s_1}{2},\dfrac{s_1(m_2+\ell\cot\theta)}{2(1-\ell\cot^2\theta)}\right)$，可令 $x=\dfrac{s_1}{2},y=\dfrac{s_1(m_2+\ell\cot\theta)}{2(1-\ell\cot^2\theta)}$，由於 $\ell\in R\setminus\{0\}$，所以 $y\in R$。因此，**中心軌跡圖形為一直線** $x=\dfrac{s_1}{2}$**，為拋物線的對稱軸**，參見圖 48。

(iii)仿照(i)(ii)來證明，同樣用**解析幾何**來證明，由圖 48 知中心軌跡圖形必過 P,M_1,M_2,M_3,M_4 五點的雙曲線且雙曲線的兩漸近線為兩種拋物線之對稱軸，現在採**解析幾何**證明雙曲線方程式。不失一般性，考慮圓內接四邊形且圓錐曲線方程式為**標準形**來證明，由**定理 21** 知 $m_1+m_2=0$ 且 $m_3+m_4=0$。

令四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四個頂點 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3),A_4(x_4,y_4)$，則

$\overleftrightarrow{A_1A_3}:m_1x-y+y_1-m_1x_1=0,\ \overleftrightarrow{A_2A_4}:m_2x-y+y_2-m_2x_2=0$

$\overleftrightarrow{A_2A_3}:m_3x-y+y_2-m_3x_2=0,\ \overleftrightarrow{A_1A_4}:m_4x-y+y_1-m_4x_1=0$，且由**圓錐曲線族性質**知

$$(m_1x-y+y_1-m_1x_1)(m_2x-y+y_2-m_2x_2)+\ell(m_3x-y+y_2-m_3x_2)(m_4x-y+y_1-m_4x_1)=0\quad(24)$$

(24)式展開且配方得到中心，令中心坐標為 (x,y)，則

$$(x,y)=\left(\frac{(m_1-m_3\ell)(y_2-y_1)+(m_1^2+m_3^2\ell)(x_1+x_2)}{-2(m_1^2+m_3^2\ell)},\frac{-(1+\ell)(y_2+y_1)+(m_1-m_3\ell)(x_1-x_2)}{2(1+\ell)}\right)。$$

我們可以考慮中心 (x,y) 的 y 坐標化簡為

$$y=\frac{-(1+\ell)(y_2+y_1)+(m_1-m_3\ell)(x_1-x_2)}{2(1+\ell)}=\frac{-(y_2+y_1+m_3x_1-m_3x_2)}{2}+\frac{(m_1+m_3)(x_1-x_2)}{2(1+\ell)}\quad(25)$$

同樣地中心 (x,y) 的 x 坐標可化簡如(25)式。注意(25)式不一唯一表式法，可寫成

$x=\mu+\mu_\ell, y=\nu+\nu_\ell$，其中 μ,ν 為與 ℓ 無關的常數且 μ_ℓ,ν_ℓ 為與 ℓ 有關的實數，故中心軌跡圖形的方程式型如：$(x-\mu)(y-\nu)=\mu_\ell\nu_\ell$，其中**雙曲線的兩漸近線為** $x=\mu, y=\nu$ **，即為兩種拋物線之對稱軸**，參見圖 48，因此，**中心軌跡圖形為過** P,M_1,M_2,M_3,M_4 **五點的一雙曲線**。 ■

參、研究結果

本作品最初核心是要探討圓錐曲線內接四邊形的作圖，於是利用推廣圓內兩交弦定理的推廣式(稱為輔助定理)協助作圖，研究中發現這些輔助定理，能得到更廣泛的性質，即推廣圓冪定理，經過研究後是考慮二種推廣式形式：推廣式(I)與推廣式(II)。

一、**利用圓錐截痕推廣圓冪定理**：透過截兩圓幾何性質來推廣圓內兩交弦定理，得到推廣式(I.1)及(I.2)，利用推廣式(I.1)及(I.2)推導圓冪定理的推廣一式，參見**定理 1.3.5**。同時若將推廣式(I.1)及(I.2)中的圓錐曲線安置在直角坐標系的標準位置，則推導出區分圓錐曲線種類判定條件，參見**定理 2** 與**定理 4**。

二、**利用圓錐曲線的方向直徑推廣圓冪定理**：圓錐曲線的方向直徑有二種-過中心 O 及焦點 F，分別記作 r 與 R。若用方向直徑 r 來推廣圓冪定理，得到圓冪定理的推廣二式，參見**定理 6**，其中推廣至雙曲線時，僅有圓內兩交弦定理且四邊形為雙曲線雙接四邊形。注意拋物線是無法用方向直徑 r 來推廣圓冪定理。其次，用方向直徑 R 來推廣圓冪定理，所有圓錐曲線內接四邊形均成立，得到圓冪定理的推廣三式，參見**定理 7.9**。

三、**利用圓錐曲線的邊或對角線斜率及平行邊的切線長推廣圓冪定理**：若用邊或對角線斜率及平行邊的切線長來來推廣圓冪定理，其中推廣圓冪定理至雙曲線時，僅有切割線定理及割線定理推廣至雙曲線單接四邊形的情形，得到圓冪定理的推廣四式，參見**定理 8.10.11**。

四、**利用解析幾何推廣圓冪定理**：得到圓冪定理的推廣五式，進而探討圓錐曲線內接四邊形的作圖，所以其定理稱為**輔助定理 1-2**，其中討論一般圓錐曲線情形，參見**定理 12**。這些定理是分圓內接及非圓內接四邊形討論：

若**非圓內接四邊形**，則拋物線、水平橢圓(及水平雙曲線)、垂直橢圓(及垂直雙曲線)

分別推導出推廣式(II)中 $k=\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}$ 、 $k=t_1\left(\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}\right)$ 、 $k=t_2\left(\dfrac{\overline{PI}^2}{\overline{PJ}^2}\right)$，其中 t_1,t_2 值與邊或對角線斜率有關。若**圓內接四邊形**，則 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 。

五、證明圓錐曲線內接四邊形的作圖的輔助定理：參見**輔助定理 3-6**。

六、探討二種拋物線及其內接四邊形作圖(I)與(II)：參見**定理 13-15**。

七、探討二種圓錐曲線內接四邊形作圖(I)與(II)：均是由拋物線及其內接四邊形作圖類推而得，參見**定理 16-20**。

八、**探討圓錐曲線內接四邊形判定定理**：推導出圓錐曲線內接四邊形的邊長或對角線的斜率性質，進而推導出**圓內接四邊形判定定理**： $m_3+m_5=m_4+m_6=0$ ，參見**定理 21-23**。

九、**區分圓錐曲線內接四邊形中圓錐曲線種類**：當四邊形分別為兩雙對邊皆不平行的四邊形、梯形及平行四邊形，由 Q , A_1,A_2,A_3,A_4 五點可決定**十一種、九種及七種的圓錐曲線(不含圓)**，參見**定理 24**。

十、推導圓錐曲線內接四邊形中有心錐線的中心軌跡圖形：**一點(四邊形為平行四邊形)、一直線(四邊形為梯形)及雙曲線(四邊形為兩雙對邊皆不平行的四邊形)**，參見**定理 25**。

肆、結論與未來展望

本作品中我們利用五種不同研究方法：圓錐截痕、方向直徑(過中心 O 及焦點 F)、平行邊的切線及邊或對角線斜率、解析幾何推導圓冪定理的推廣式(I)與推廣式(II)，分別稱圓冪定理推廣一式、二式、三式、四式、五式。每種方法中可見圓冪定理統一及歸納的微妙關係，其中圓冪定理推廣一式很清楚說明圓錐曲線在圓錐截痕上的幾何意義，若圓錐曲線安置在直角坐標系的標準位置時，更可以由推廣式(I.1)及(I.2)推導出圓錐曲線方程式的標準形，由 k 值來區分圓錐曲線的種類。

其次，圓錐曲線的方向直徑推導圓冪定理時，由於圓錐曲線均有焦點 F ，所以考慮過焦點 F 的方向直徑 R 是較完美的， k 值均為 $\dfrac{R_1}{R_2}$ ，特別是每個焦點 F (橢圓及雙曲線有兩個焦點、圓的焦點為圓心)均成立。另外考慮圓錐曲線的平行邊的切線長推廣圓冪定理時，會受限是否平行邊的切線存在，並非所有情形均成立，參見**定理 8.10.11**。

最後利用解析幾何推廣圓冪定理(推廣五式)，本作品採用推廣五式(**預備定理 1-2**)探討圓

錐曲線內接四邊形的作圖，由於拋物線時，k 值最為簡潔，又加上拋物線內接四邊形的作圖是困難的，主因是兩雙對邊皆不平行的四邊形中僅有兩種拋物線，所以就從拋物線及其內接四邊形的作圖推導圓錐曲線內接四邊形的作圖。特別是若推廣五式來由 k 值來區分圓錐曲線的種類，k 值較為複雜，卻是統一推廣式，可見解析幾何獨特之處。令人驚喜的當圓內接四邊形時，推得二種對稱軸為相互垂直的拋物線內接四邊形，關鍵在 $\overline{PI}=\overline{PJ}$ 此性質，參見**輔助定理 1-2** 及**定理 12**。圓冪定理推廣式中 k 值是感興趣，k 值是比例常數，未來會繼續研究及突破。

我們從推導**輔助定理 1-2** 中推導出當圓內接四邊形時，其兩對角線斜率 m_1, m_2 滿足 $m_1+m_2=0$，是充分條件，而四邊形為非圓內接四邊形時，則 $m_1+m_2\neq 0$。這裡由圓錐曲線內接四邊形的作圖性質推導出圓錐曲線內接四邊形判定定理，參見**定理 23**，其條件是 $m_3+m_5=m_4+m_6=0$，這性質是推廣圓內四邊形判定定理。

在作品中發現無心錐線－拋物線的作圖最難，而有心錐線－橢圓及雙曲線卻有無限多條，所以從拋物線及其內接四邊形的作圖著手。簡單來說，是由無心錐線作圖去推導出有心錐線作圖。事實上，若要從圓錐曲線內接四邊形的作圖來區分圓錐曲線的種類，倒不如從圓錐截痕中圓冪定理的推廣一式來區分圓錐曲線的種類(參見**定理 2.4**)，簡言之，利用 k 值來區分圓錐曲線的種類更加完美及漂亮，可見圓錐曲線在圓錐截痕的完美理論。最後觀察到有趣錐線的中心軌跡圖形為雙曲線，特別是其漸近線為拋物線的對稱軸，可見圓錐曲線是一體的。作品中的證明部分，期許未來能更嚴謹完備。

伍、參考文獻

[1] 左銓如 (2003)。**初等解析幾何研究**。台北市：九章數學出版社。

[2] 項武義 (2009)。**基礎幾何學**。台北市：五南圖書出版有限公司。

[3] 黃家禮 (1997)。**幾何明珠**。台北市：九章出版社。

[4] Coxeter, H. S. M. (1967). Greitzer, S. L.*Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer..

[5] Keith Kendig. (2005). *Conics*. Cambridge University Press.

[6] Ostermann, Alexander. (2012). *Geometry by its history*. Springer eBooks. ; Undergraduate texts in mathematics.

【評語】010033

圓冪定理是一個圓內接四邊形相關的幾何定理，作者們嘗試將其推廣到二種圓錐曲線及其內接四邊形的作圖上，特別是雙曲線和拋物線。這個推廣的圓冪性質帶有一個新的比例常數 K，並可以使用 K 值來分類圓錐曲線的種類。然而不管是使用伸縮變換或斜率的作法，整個作品所得到的數學結論都相當有限，而且一再重複相同的推導過程。作品呈現多達 43 頁，作圖過程、證明、推論全數混雜在一起沒有整理出一個脈絡，以致可讀性不佳。建議作者聚焦在圓冪性質推廣到拋物線、雙曲線的最重要數學性質、還有其與 K 值的關係。至於多種不同作法並列，在此似乎沒有太大的必要性。