

# 2022 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010025  
參展科別 數學  
作品名稱 特殊定向圖的歐拉子圖數量及其應用  
得獎獎項 二等獎  
突尼西亞國際工程與科技節正選代表

就讀學校 臺北市立第一女子高級中學

指導教師 楊宗穎、徐祥峻

作者姓名 王嵐、李昀祐

關鍵詞 Wheel、定向圖、費氏數列

## 作者簡介



我們是王嵐（左）與李昀祐（右），目前就讀臺北市立第一女子高級中學二年級。從國中時期對於數學問題的摸索，到升上高中後找到感興趣的研究主題，前人各式各樣的發現不僅豐富了我們的視野，自身也從中獲得了許多靈感與體悟。在研究的過程中，享受追逐未知的新鮮感，並期盼未來可以抱持著研究的精神繼續探索。

## 摘要

將一個  $n$  個點的圈，中間新增一個點  $u$ ，使得點  $u$  與圈上所有的點皆相連，這種特殊的圖類稱為 *Wheel*，若  $n$  為奇數，則稱為奇數 *Wheel*；若  $n$  為偶數，則稱為偶數 *Wheel*。一個圖若賦予每條邊特定的方向性，稱為此圖的一個定向。對於 *Wheel* 這類的圖形設計一個特殊的定向，我們欲分析定向中特殊的有向子圖數量，過程中運用了許多的代數手法，從中發現奇數 *Wheel* 與費氏數列的關連性以及組合性質；同時也將研究問題延伸至 Chebyshev 第二類多項式，運用高等數學中的 Girard-Waring Formula 來論證我們對偶數 *Wheel* 的研究結果。然而圖的定向是研究列表著色的工具之一，我們也將這個特殊定向的組合性質運用在列表著色問題上。對於一般的圖形，若在原圖上新增一條路徑，我們也探討了新圖形為可列表著色的充分條件。

## Abstract

A wheel graph is formed by connecting a vertex to all vertices of a  $n$ -cycle. If  $n$  is odd, we refer to it as an odd wheel; if  $n$  is even, we refer to it as an even wheel. A digraph is a graph with directed edges. We give the wheel graph a special orientation, using algebraic approaches to analyze the number of its subdigraphs. In this thesis, we find the connection between Fibonacci sequence and odd wheel, proving odd wheel are not Eulerian orientation but even wheel are. Additionally, a Eulerian orientation can be the method for studying list coloring, and we also apply this special combination of orientation to list coloring. Furthermore, if a new path is added to a general graph, we also discuss the sufficient condition for list coloring of the new graph.

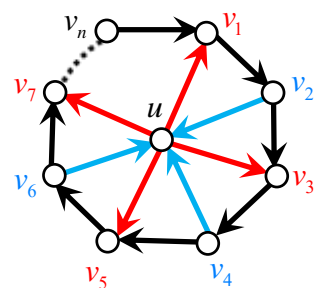
# 壹、前言

## 一、研究動機

在閱讀了《平面圖的四元列表著色》與《列表著色可約構形之建構法》〔參考文獻 3, 4〕的文章之後，我們知道圖的定向關係經常被應用在列表著色的研究上，而應用的關鍵是建立在特殊有向子圖的數量關係上，但對於任意一個定向圖，欲將特殊的有向子圖計算清楚是一件困難的事情，即使有計算機的幫助，也很可能因為沒有具體的演算法導致計算機使不上力。因此我們在本次的研究，鎖定一種特殊的圖類 *Wheel* 進行討論。在設計 *Wheel* 的定向關係時，基於我們希望每個點指出去的邊與指進來的邊數量要接近，所以我們對 *Wheel* 設計了一種特殊的定向方法，再進一步去分析其特殊有向子圖的數量，試圖從中發現一些有趣的數學現象與規律，具體的提出猜想。除了運用高中所學的排列組合的知識以外，也希望後續能學習進階的組合學技巧，在不使用計算機的環境下，以純粹的數學論述來驗證我們所提出的猜想，並完成一份完整的研究歷程與報告。

## 二、研究目的

考慮  $n$  個點  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  在外圍依序相連成一個圈，點  $u$  在中央的位置，且  $u$  與  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  的所有點都相連一條邊，所成的圖形稱為『*Wheel*』，以符號記為『 $W_n$ 』。將  $W_n$  的每條邊賦予方向性，每條有方向的邊皆以序對表示，即可得  $W_n$  的一個定向。對於  $W_n$  我們設計一個特殊的定向， $n$  個點  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  的定向為  $\{(v_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$ ，而點  $u$  對  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  的定向為  $\{(u, v_i) : i \text{ 為奇數}\} \cup \{(v_i, u) : i \text{ 為偶數}\}$ ，我們將這樣設計所得的定向圖記為『 $D_n$ 』。若  $D_H$  為  $D_n$  的子圖，其中  $V(D_H) = V(D_n)$ ， $E(D_H) \subseteq E(D_n)$  且滿足任意點  $v \in V(D_n)$  皆滿足  $d_{D_H}^+(v) = d_{D_n}^-(v)$ ，則稱  $D_H$  為  $D_n$  的『歐拉有向子圖』。若  $|E(D_H)|$  為偶數，則稱  $D_H$  為『歐拉偶子圖』；若  $|E(D_H)|$  為奇數，則稱  $D_H$  為『歐拉奇子圖』。將所有歐拉偶子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}_{\text{even}}(D_n)$ 』；將所有歐拉奇子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_n)$ 』。對於  $W_n$  的特殊定向圖  $D_n$ ，以下為我們的研究目的：



- (1) 當  $n = 2k + 1$  為奇數時，探討  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k+1})|$  與  $|\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k+1})|$  的組合性質與費氏數列的關係；
- (2) 當  $n = 2k$  為偶數時，探討  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})|$  與  $|\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})|$  的組合性質與歐拉定向的關係；
- (3) 對於  $W_n$ ，利用定向關係，探討列表著色在  $W_n$  上的應用與結論。

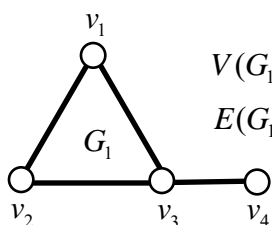
## 貳、研究方法或過程

### 一、基本概念、名詞解釋與先備知識

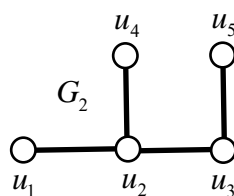
為了研究有關定向圖的組合性質，我們閱讀了許多圖論的相關書籍，有關符號的表示方法，大致上都採用 Gary Chartrand 等人著作的《Graphs and Digraphs》與 Douglas B. West 著作的《Introduction to Graph Theory》這兩本圖論書籍〔參考文獻 8，12〕。但在研究過程中，我們仍設計了許多數學符號與名詞來表達論述的過程，以下我們先介紹圖論的基礎概念與所需要的先備知識。

#### 圖的概念

給定若干點，若點與點之間有關係則用一條邊相連，由點與邊所組合而成的結構稱為一個『圖』，令集合  $V(G)$  為圖  $G$  所有的頂點，集合  $E(G)$  為圖  $G$  所有的邊，此外我們將點與邊的數量分別記為  $|V(G)|$  與  $|E(G)|$ 。對於兩個不同的頂點  $u, v \in V(G)$ ，若頂點  $u, v$  之間有邊連結，則將此邊記為  $uv$ ，意即  $uv \in E(G)$ 。以左下圖  $G_1$  為例， $G_1$  的頂點集合為  $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，邊集合為  $E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_3v_4\}$ ，其中  $|V(G_1)| = 4$  與  $|E(G_1)| = 4$ 。以右下圖  $G_2$  為例， $G_2$  的頂點集合為  $V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ，邊集合為  $E(G_2) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_5\}$ ，其中  $|V(G_2)| = 5$  與  $|E(G_2)| = 4$ 。

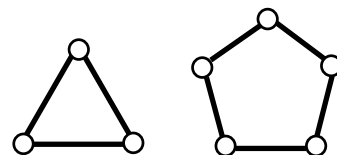


$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_3v_4\}$$



$$V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$
$$E(G_2) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_5\}$$

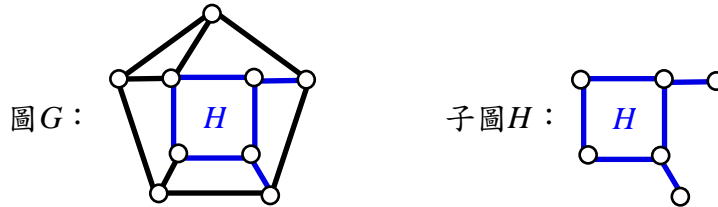
若一個圖  $G$  的頂點與邊恰好形成一個環狀圖形，我們特別將此類型的圖稱為『圈 (cycle)』。



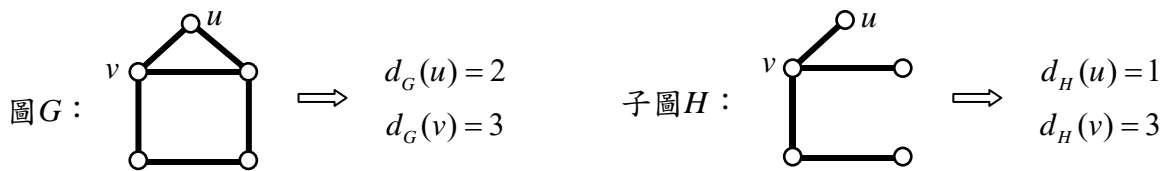
給定圖  $G$ ，若  $v \in V(G)$  且  $v$  與自己有邊相連，則稱此邊為『迴圈 (loop)』，記為  $vv \in E(G)$ ；若兩點  $u, v$  之間的邊稱為『重邊 (multiple edges)』，則表示  $u, v$  兩點之間有兩條以上的邊。若圖  $G$  的結構中沒有迴圈與重邊，則稱  $G$  為『簡單圖 (simple graph)』。以下我們研究中討論的圖皆為簡單圖。

**子圖 *subgraph* 與點的度數 *degree***

給定圖  $G$ ，若將圖  $G$  中某些點或某些邊刪除後可得另一個結構較小的圖  $H$ ，則稱  $H$  為  $G$  的『子圖 (*subgraph*)』，意即  $H$  為  $G$  的內部子結構所形成的圖形。例如：參考左下圖  $G$ ，其中右下圖  $H$  即為  $G$  的一個子圖。

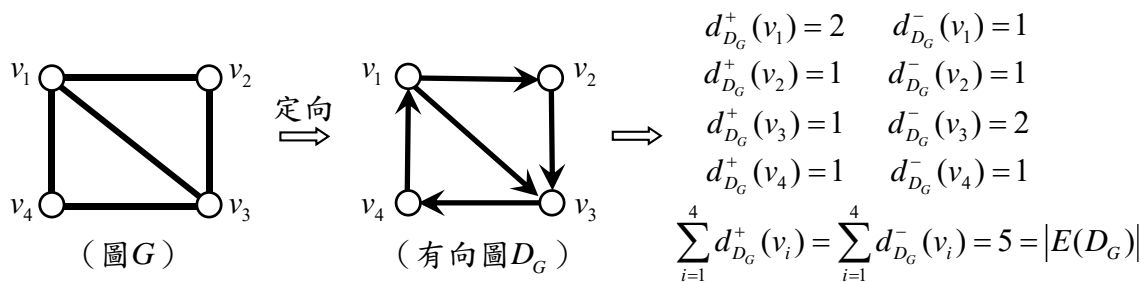


對於一般簡單圖  $G$ ，考慮頂點  $v \in V(G)$ ，若  $v$  恰與  $k$  個點有邊相連，則稱頂點  $v$  的『度數 (*degree*)』為  $k$ ，亦稱  $v$  為『 $k$ -vertex』，並記為『 $d_G(v) = k$ 』。例如：考慮下圖  $G$ ， $d_G(u) = 2$ ， $d_G(v) = 3$ ；考慮下圖  $H$ ， $d_H(u) = 1$ ， $d_H(v) = 3$ 。



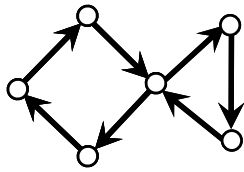
**圖的定向 *orientation***

給定圖  $G$ ，若將  $G$  所有的邊賦予方向性，則所得的圖形稱為『有向圖』。將此有向圖記為  $D_G$ ，或簡稱  $D_G$  為圖  $G$  的一個『定向 (*orientation*)』，其中有向圖  $D_G$  的頂點  $V(D_G) = V(G)$ 。若  $u, v \in V(D_G)$ ，且在  $D_G$  中有向邊為  $u$  指向  $v$ ，則將此有向邊記為序對『 $(u, v) \in E(D_G)$ 』，而  $E(D_G)$  即為  $D_G$  中有向邊所形成的集合。若點  $u$  指向外的有向邊共有  $k$  條，則稱  $k$  為  $u$  的『外度數 (*out-degree*)』，記為『 $d_{D_G}^+(u) = k$ 』；若指向點  $u$  的有向邊共有  $k$  條，則稱  $k$  為  $u$  的『內度數 (*in-degree*)』，記為『 $d_{D_G}^-(u) = k$ 』。不難得知， $\sum_{u \in V(D_G)} d_{D_G}^+(u) = \sum_{u \in V(D_G)} d_{D_G}^-(u) = |E(D_G)|$ ，也就是說所有點的外度數總和與內度數總和兩者皆為有向邊的數量。

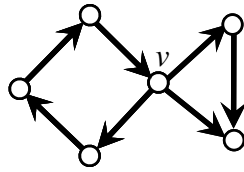


**歐拉有向子圖 Eulerian directed graph**

若有向圖  $D_G$  的任意點  $v$  皆滿足  $d_{D_G}^+(v) = d_{D_G}^-(v)$ ，則稱  $D_G$  為『歐拉有向圖』。



(歐拉有向圖)



$$\Rightarrow d_{D_G}^+(v) = 3 \neq 1 = d_{D_G}^-(v)$$

(非歐拉有向圖)

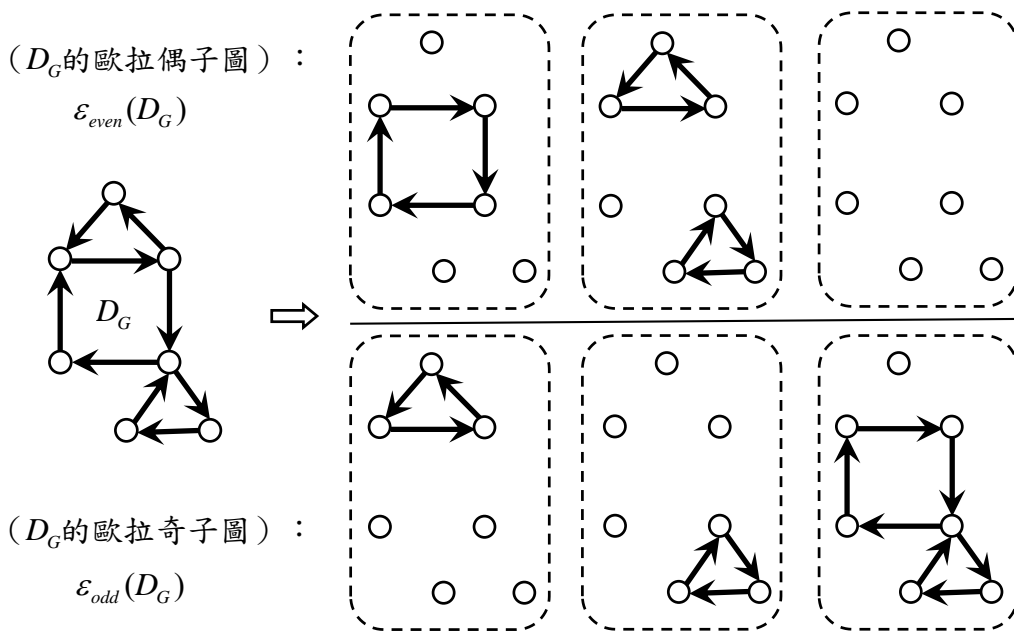
**歐拉有向子圖**

考慮定向圖  $D_G$ ，若  $D_H$  為歐拉有向圖，其中  $V(D_H) = V(D_G)$ ， $E(D_H) \subseteq E(D_G)$ ，則稱  $D_H$  為  $D_G$  的『歐拉有向子圖』，並將  $D_G$  所有歐拉有向子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}(D_G)$ 』。

特別的，若  $D_H$  的有向邊數量  $|E(D_H)|$  為偶數，則稱  $D_H$  為『歐拉偶子圖』；若  $D_H$  的有向邊數量  $|E(D_H)|$  為奇數，則稱  $D_H$  為『歐拉奇子圖』。我們將所有歐拉偶子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}_{even}(D_G)$ 』；將所有歐拉奇子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}_{odd}(D_G)$ 』。

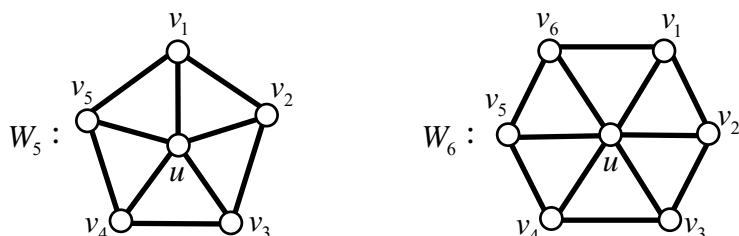
對於定向圖  $D_G$ ，若  $|\mathcal{E}_{even}(D_G)| \neq |\mathcal{E}_{odd}(D_G)|$ ，則特別稱此定向  $D_G$  為『歐拉定向』。

下圖範例的  $D_G$  所有的子圖中，共有 6 個歐拉有向子圖，依照歐拉有向子圖邊數量的奇偶性， $D_G$  共有 3 個歐拉偶子圖與 3 個歐拉奇子圖，意即  $|\mathcal{E}_{even}(D_G)| = 3$ ， $|\mathcal{E}_{odd}(D_G)| = 3$ 。

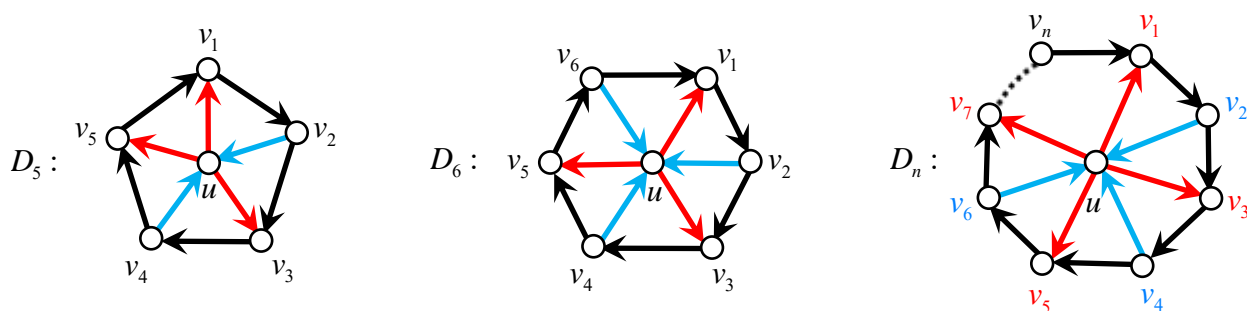


### Wheel 圖形與特殊定向

一個長度為  $n$  的圈  $C_n$ ，其點集合為  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，令  $u$  為新增加的點，且將  $u$  與  $C_n$  的所有點都相連一條邊，所得的新圖形稱為『**Wheel**』，以符號記為『 $W_n$ 』。可知  $W_n$  的點集合為  $V(W_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ ，邊集合為  $E(W_n) = E(C_n) \cup \{uv_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 。若  $n$  為奇數，則我們稱  $W_n$  為『**奇數 Wheel**』；若  $n$  為偶數，則稱  $W_n$  為『**偶數 Wheel**』。下列為  $W_5$  與  $W_6$  的圖形。



對於  $W_n$ ，我們規定邊的方向性，將  $C_n$  的邊設計為順時針的有向邊。此外，若  $i$  為奇數，則  $u$  指向  $v_i$ ；若  $i$  為偶數，則  $v_i$  指向  $u$ 。由此我們可得  $W_n$  的一個定向  $D_n$ ，意即有向圖  $D_n$  的邊集合為  $E(D_n) = \{(v_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\} \cup \{(u, v_i) : i \text{ 為奇數}\} \cup \{(v_i, u) : i \text{ 為偶數}\}$ 。下列為有向圖  $D_5$ 、 $D_6$  與  $D_n$  的圖形。



### 費氏數列

費氏數列  $\langle F_n \rangle$  是一個有名的遞迴數列，在許多科普書籍上皆有相關的介紹〔參考文獻 5，7〕，費氏數列的第一項  $F_1$  與第二項  $F_2$  皆定義為 1，從第三項開始，每一項皆為前兩項之總和，意即對於  $n \geq 3$ ，第  $n$  項即為第  $n-1$  項與第  $n-2$  項的總和。費氏數列的遞迴關係式為  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ，其起始值為  $F_1 = F_2 = 1$ 。可知費氏數列的前 10 項為 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55。

### 向量的延展與加法

在我們的研究過程中，為了清楚的表達圖形中的子圖結構，我們將圖形的結構代數化，並利用向量的符號來對應所要探討的圖形結構。因此我們設計了向量延展與加法的概念，其



定義分別如下：

### 向量的延展

令  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  為  $n$  度空間的向量， $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  為  $m$  度空間的向量，若將  $\vec{b}$  的分量接續在  $\vec{a}$  分量的後方，可得一個  $(n+m)$  度空間的向量  $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ ，則我們稱此向量為『 $\vec{a}$  以  $\vec{b}$  的延展』，以符號記為『 $\vec{a} \oplus \vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ 』。

特別的，我們將空集合  $\emptyset$  以向量  $\vec{b}$  的延展定義為  $\vec{b}$  本身，意即  $\emptyset \oplus \vec{b} = \vec{b}$ 。

例如，考慮  $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$ 、 $\vec{b} = (7, 8)$ ，則  $\vec{a}$  以  $\vec{b}$  延展後的向量為  $\vec{a} \oplus \vec{b} = (1, 2, 3, 4, 7, 8)$ 。

考慮空集合  $\emptyset$  以  $\vec{b}$  延展後的向量即為  $\emptyset \oplus \vec{b} = (7, 8)$ 。

### 向量的加法

考慮  $n$  度空間向量  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，令  $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)$  為每個分量皆為1的向量。

若將  $\vec{a}$  每個分量都增加1個單位，則可得新的向量  $\vec{a} + \vec{1} = (a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_n + 1)$ ；

若將  $\vec{a}$  每個分量都減少1個單位，則可得新的向量  $\vec{a} - \vec{1} = (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1)$ 。

例如，考慮  $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$ 、 $\vec{b} = (2, 3, 6, 7)$ ，則  $\vec{a} + \vec{1} = (2, 3, 4, 5)$  且  $\vec{b} - \vec{1} = (1, 2, 5, 6)$ 。

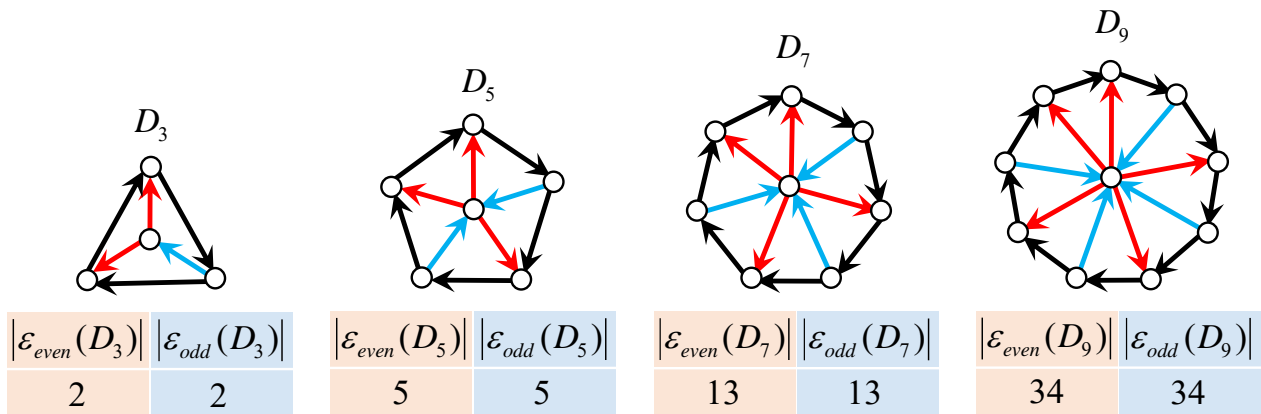
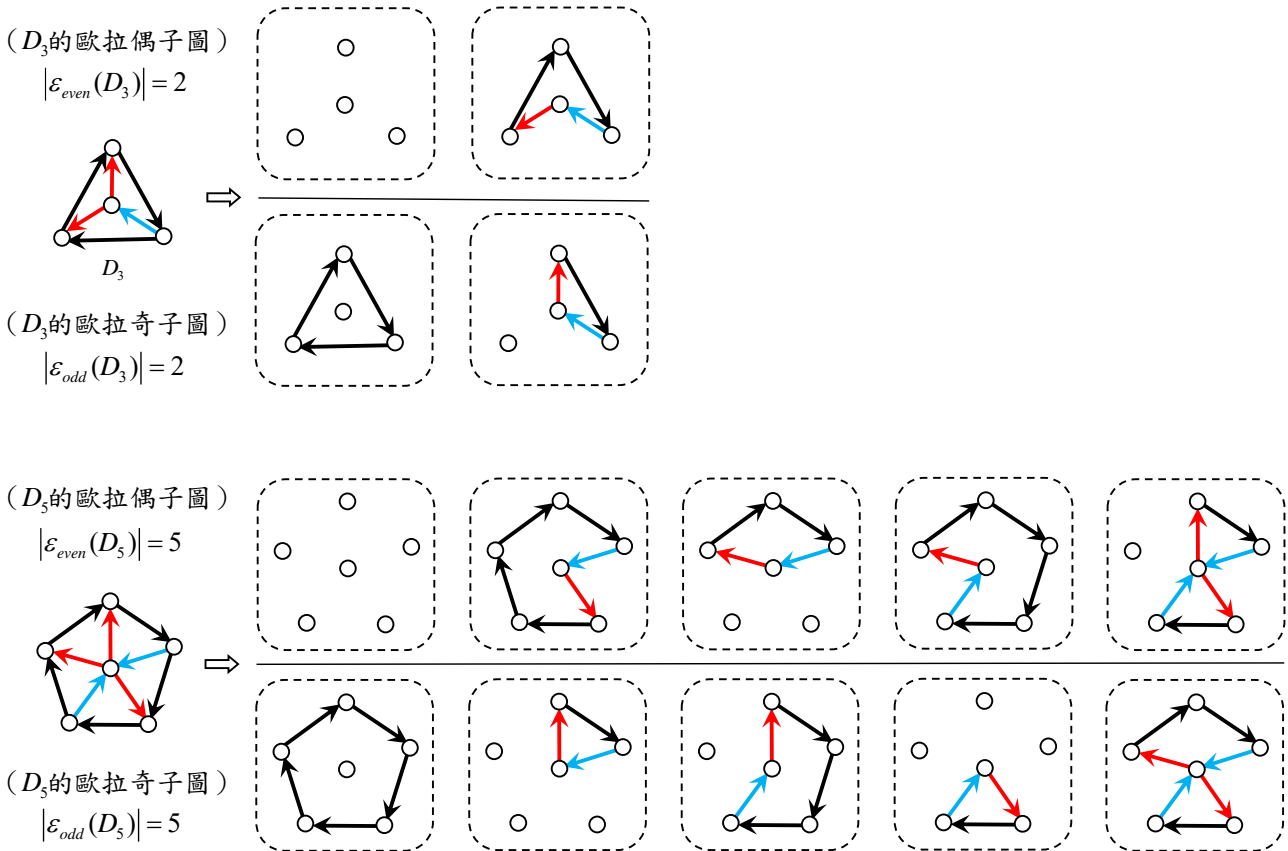
## 二、奇數 *Wheel* 定向圖的組合性質

當  $n$  為奇數時，考慮先前定義奇數 *Wheel* 的特殊定向圖  $D_n$ ，我們欲分析定向圖  $D_n$  的結構中，歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量關係。試圖從中探討是否具有特殊的組合性質。

### 舉例觀察與歸納

首先對於  $D_3$ 、 $D_5$ 、 $D_7$  與  $D_9$  這四個定向圖，我們透過窮舉法分別計算出歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量（數值如下圖所示），意外發現兩者的數量皆為相等，也就是說這四個定向圖皆非歐拉定向。更特別的是，有關這四個定向圖，不論是歐拉偶子圖或歐拉奇子圖，其數量竟然都是費氏數列中的元素，因此我們自然的猜想  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{11})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{11})|$  是否皆為費氏數列中第11個元素89呢？

我們將  $D_3$  與  $D_5$  的歐拉有向子圖完整的呈現如下：



(費氏數列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)

因此我們更進一步的提出以下的猜測：

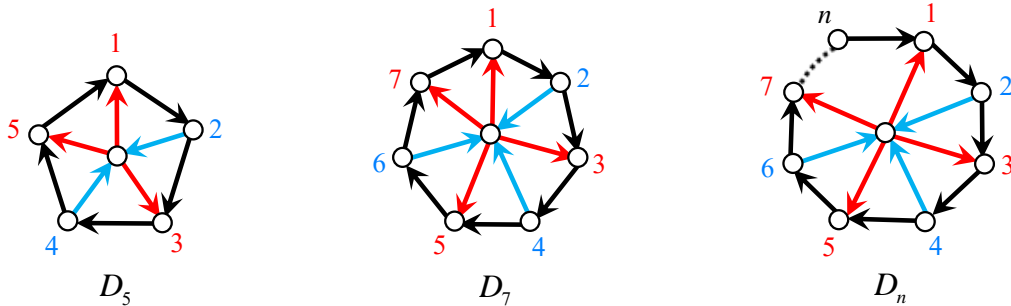
### 奇數 *Wheel* 的猜想

定向圖  $D_{2k+1}$  的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖數量皆為費氏數列中第  $(2k+1)$  個元素。

意即  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k+1})| = |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k+1})| = F_{2k+1}$ 。

### 歐拉有向子圖的向量表示法

接下來我們將完整的呈現如何透過代數分析來論證上述對奇數 *Wheel* 猜想，使其成為必然的結論。對於自然數  $n \geq 3$ ，考慮  $D_n$ ，為了將歐拉有向子圖代數化，我們將  $D_n$  的外圍有向圈頂點  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，依序標記為自然數  $\{1, 2, \dots, n\}$ ，如下圖所示。



考慮在  $D_n$  中的歐拉有向子圖  $D_H$ ，根據  $D_n$  的定向規則，在有向邊集合  $E(D_H)$  中與中心點  $u$  相鄰的所有有向邊為  $\{(u, v_i) : (u, v_i) \in E(D_H)\} \cup \{(v_i, u) : (v_i, u) \in E(D_H)\}$ ，我們將  $E(D_H)$  與點  $u$  相鄰的有向邊集合對應到一個自然數子集合  $P_H = \{i : (u, v_i) \in E(D_H) \text{ 或 } (v_i, u) \in E(D_H)\}$ ，並將此自然數子集合  $P_H$  由小到大進行排序，則可視為一個向量  $\vec{p}_H$ ，我們稱『向量  $\vec{p}_H$  為  $D_H$  的代表向量』。特別的，當  $E(D_H) = \emptyset$  時，則將  $D_H$  的代表向量記為『 $\emptyset$ 』；當  $E(D_H) = \{(v_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$  時，則將  $D_H$  的代表向量記為『 $\emptyset'$ 』。透過歐拉有向子圖的代表向量可知， $D_n$  中任意歐拉有向子圖  $D_H$  皆可用唯一的代表向量  $\vec{p}_H$  作為表徵。只要得知代表向量  $\vec{p}_H$ ，即可得知歐拉有向子圖  $D_H$  的結構與屬性。

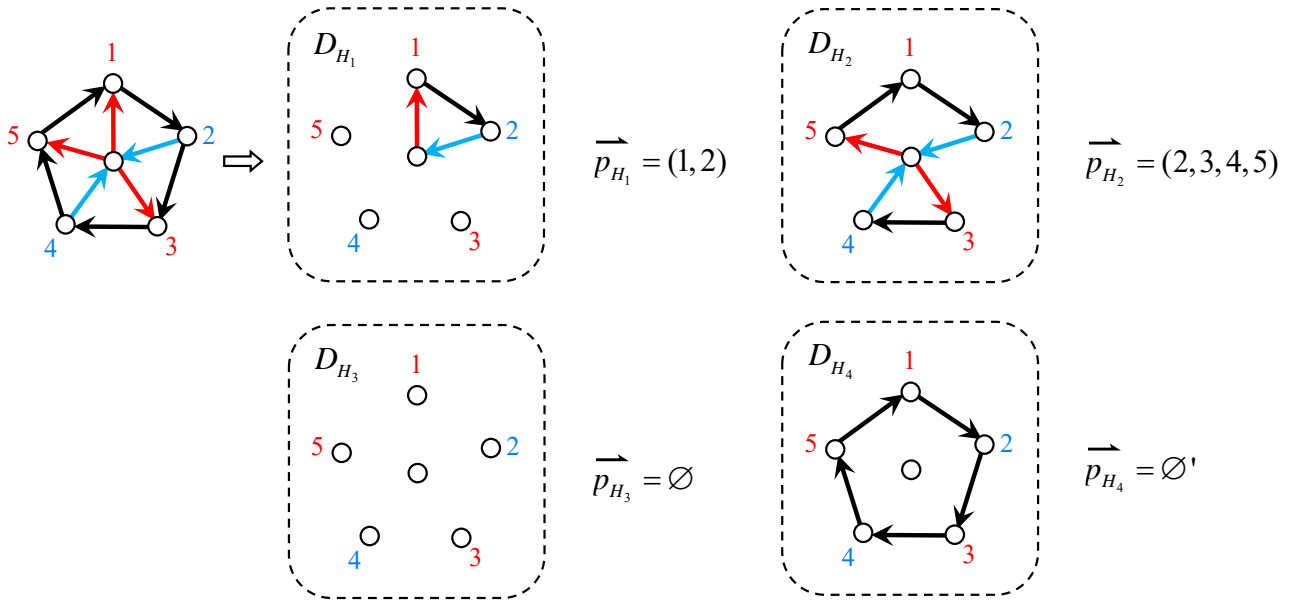
#### 代表向量 $\vec{p}_H$ 的充分必要條件

考慮定向圖  $D_n$ ，向量  $\vec{p}$  為代表向量（非  $\emptyset$  或  $\emptyset'$ ）的充分必要條件為：

1.  $\vec{p}$  共有偶數個分量且皆為  $\{1, 2, \dots, n\}$  中相異的元素；
2.  $\vec{p}$  的分量依序為奇偶數交錯且為遞增。

定向圖  $D_n$  中，『所有的歐拉有向子圖』與『所有的代表向量』可建立一一對應關係。

因此我們以下的研究，會聚焦在代表向量的分析。下圖為  $D_5$  中，歐拉有向子圖對應代表向量的範例。



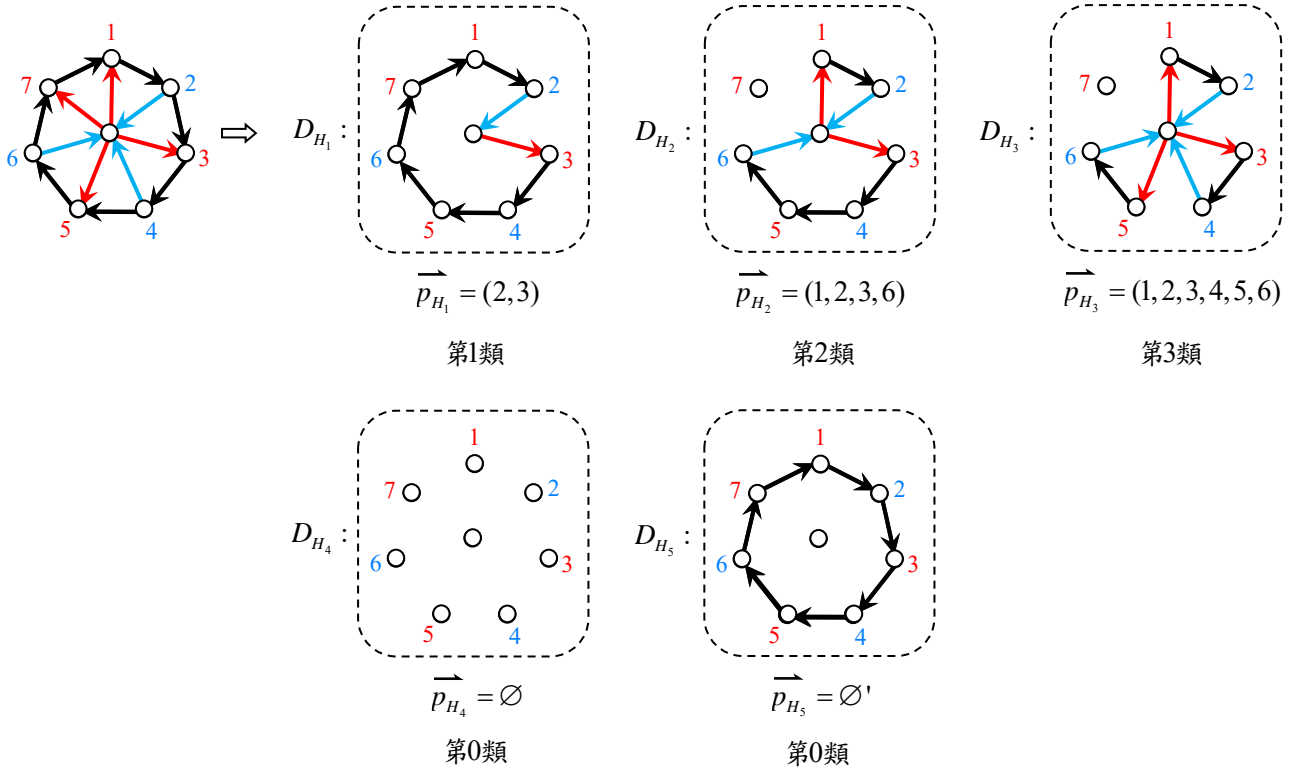
對於一個歐拉有向子圖  $D_H$ ，考慮  $t \geq 0$ ，若  $E(D_H)$  共有  $t$  條由點  $u$  指出去的有向邊，則必然有  $t$  條指向點  $u$  的有向邊，這種點  $u$  具有  $t$  進  $t$  出的情形時，我們稱  $D_H$  為『第  $t$  類』。意即，當  $d_{D_H}^+(u) = t$  時，則  $D_H$  即為第  $t$  類的歐拉有向子圖。因為  $d_{D_H}^+(u) = d_{D_H}^-(u) = t$ ，所以可知  $D_H$  的代表向量  $\vec{p}_H$  必有  $2t$  個分量，其中  $\vec{p}_H$  的各項分量為奇偶數交錯的遞增數列。反之，若向量  $\vec{p}_H$  的各項分量為奇偶數交錯的遞增數列，則  $\vec{p}_H$  必為某一個歐拉有向子圖  $D_H$  的代表向量。特別的，當  $t = 0$  時，第  $0$  類的歐拉有向子圖恰有兩個，其代表向量分別為  $\emptyset$  與  $\emptyset'$ 。此外，我們將  $D_n$  中第  $t$  類的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖所形成的集合分別記為『 $\mathcal{E}_{even}^t(D_n)$ 』與『 $\mathcal{E}_{odd}^t(D_n)$ 』。並將第  $t$  類的歐拉有向子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}^t(D_n)$ 』。

### 第 $t$ 類歐拉有向子圖的定義

考慮定向圖  $D_n$  中的歐拉有向子圖  $D_H$ ，若  $E(D_H)$  共有  $t$  條由點  $u$  指出去的有向邊，則稱  $D_H$  為『第  $t$  類』，此外  $\vec{p}_H$  亦稱為第  $t$  類代表向量。

將  $D_n$  中第  $t$  類的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖所形成的集合分別記為『 $\mathcal{E}_{even}^t(D_n)$ 』與『 $\mathcal{E}_{odd}^t(D_n)$ 』。並將第  $t$  類的歐拉有向子圖所形成的集合記為『 $\mathcal{E}^t(D_n)$ 』。

我們利用定向圖  $D_7$ ，對於第  $t$  類的歐拉有向子圖舉例如下：



對於定向圖  $D_{2k+1}$ ，觀察歐拉有向子圖  $D_H$  的代表向量  $\vec{p}_H$ ，我們將基本性質整理如下：

**$D_{2k+1}$  中代表向量  $\vec{p}_H$  的基本性質**

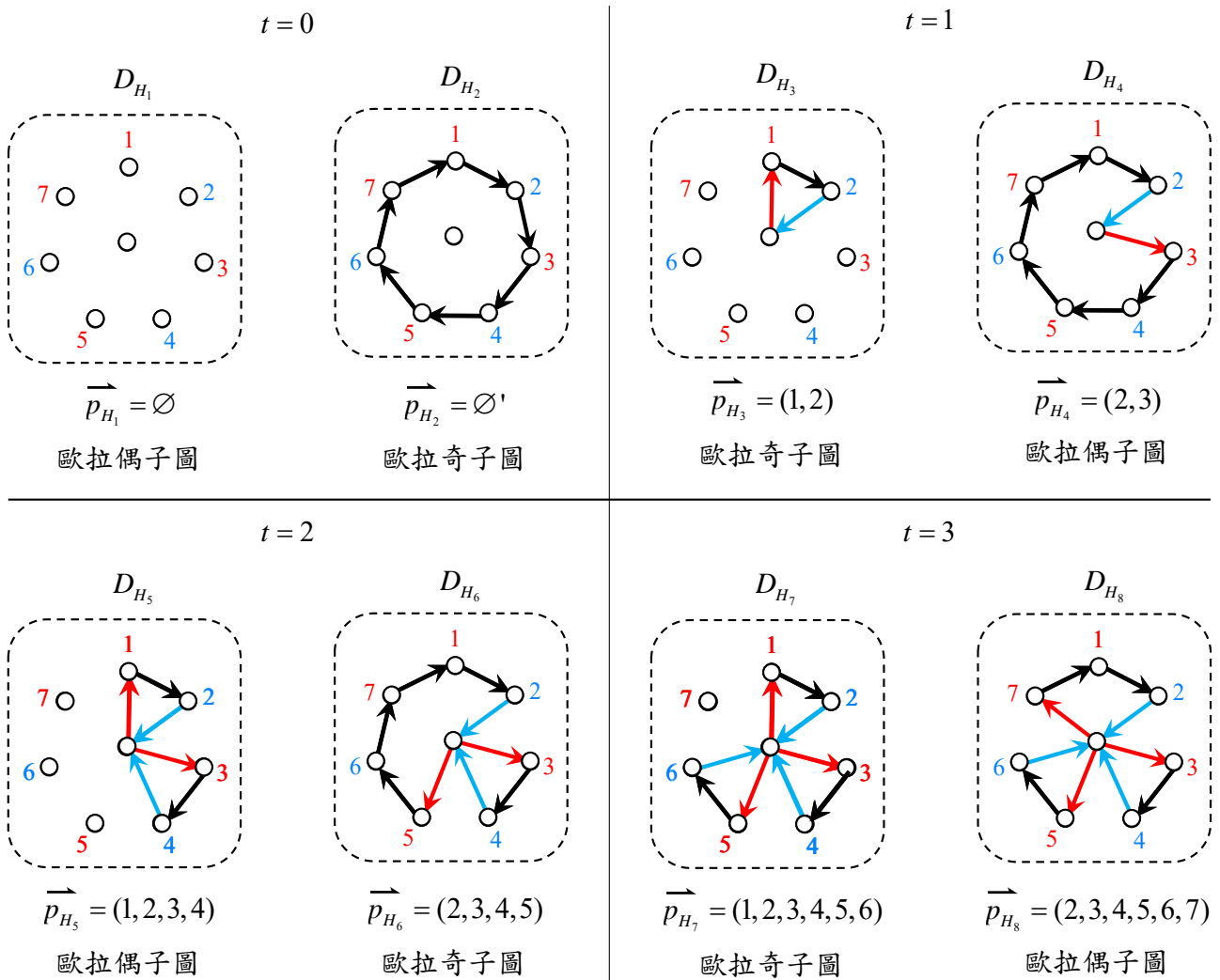
考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ，令  $\vec{p}_H$  為歐拉有向子圖  $D_H$  的代表向量，其中  $D_H$  為第  $t$  類，則：

(性質 1) 當  $t$  為奇數時，  
 $\begin{cases} \vec{p}_H \text{ 的第一個分量為奇數} \Leftrightarrow D_H \text{ 為歐拉奇子圖} ; \\ \vec{p}_H \text{ 的第一個分量為偶數} \Leftrightarrow D_H \text{ 為歐拉偶子圖} \end{cases}$

(性質 2) 當  $t$  為正偶數時，  
 $\begin{cases} \vec{p}_H \text{ 的第一個分量為奇數} \Leftrightarrow D_H \text{ 為歐拉偶子圖} ; \\ \vec{p}_H \text{ 的第一個分量為偶數} \Leftrightarrow D_H \text{ 為歐拉奇子圖} \end{cases}$

(性質 3) 當  $t = 0$  時，  
 $\begin{cases} \vec{p}_H = \emptyset \Leftrightarrow D_H \text{ 為歐拉偶子圖} . \\ \vec{p}_H = \emptyset' \Leftrightarrow D_H \text{ 為歐拉奇子圖} \end{cases}$

下圖為以  $D_7$  為例，對於每一類，我們以部分的歐拉有向子圖與其代表向量呈現上述基本性質，從中可以看出，第  $t$  類中『 $t$  的奇偶性』與『 $\vec{p}_H$  第一個分量的奇偶性』有密切關係。



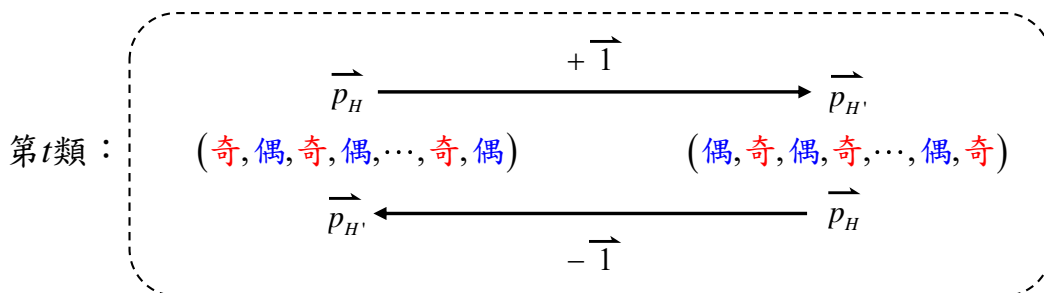
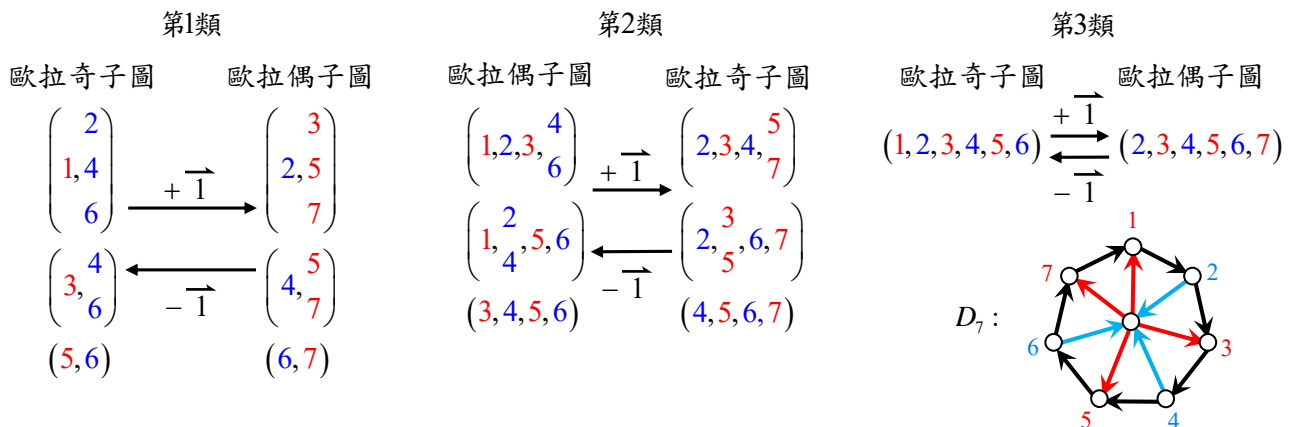
**數量的恆等關係**

在研究過程中，對於  $D_3$ 、 $D_5$  與  $D_7$ ，我們將每一類歐拉有向子圖的代表向量羅列以下表格完整呈現，並將每一類的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量個別記錄在下方：

$D_3$ :	第0類		第1類					
	偶子圖	奇子圖	奇子圖	偶子圖				
	$\emptyset$	$\emptyset'$	$(1,2)$	$(2,3)$				
	1	1	1	1				
$D_5$ :	第0類		第1類		第2類			
	偶子圖	奇子圖	奇子圖	偶子圖	偶子圖	奇子圖		
	$\emptyset$	$\emptyset'$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$	$(1,2,3,4)$	$(2,3,4,5)$		
	1	1	3	3	1	1		
$D_7$ :	第0類		第1類		第2類		第3類	
	偶子圖	奇子圖	奇子圖	偶子圖	偶子圖	奇子圖	奇子圖	偶子圖
	$\emptyset$	$\emptyset'$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1,2,3,6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2,3,4,7 \end{pmatrix}$	$(1,2,3,4,5,6)$	$(2,3,4,5,6,7)$
	1	1	3	3	1	1	1	1

$D_5$ :	$\emptyset$	$\emptyset'$	$\begin{pmatrix} 1,4 \\ 3,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 2,3,4,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 2,3,4,5,6,7 \end{pmatrix}$		
	1	1	3	3	1	1		
	第0類		第1類		第2類		第3類	
	偶子圖	奇子圖	奇子圖	偶子圖	偶子圖	奇子圖	偶子圖	
$D_7$ :	$\emptyset$	$\emptyset'$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1,4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 2,3,4,5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,3,4,5 \\ 2,3,4,6,7 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 2,3,4,5,6,7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,3,4,5,6,7 \end{pmatrix}$
	1	1	6	6	5	5	1	1

從上述的資訊可以察覺到一個現象，考慮  $t > 0$ ，令  $\vec{p}_H$  為第  $t$  類中的代表向量，若  $\vec{p}_H$  的第一個分量為奇數，將  $\vec{p}_H$  的每個分量都增加 1 後可得新的向量  $\vec{p}_{H'} = \vec{p}_H + \vec{1}$ ，則  $\vec{p}_{H'}$  也必為第  $t$  類中的代表向量。此外，若  $\vec{p}_H$  的第一個分量為偶數，將  $\vec{p}_H$  的每個分量都減掉 1 後可得新的向量  $\vec{p}_{H'} = \vec{p}_H - \vec{1}$ ，則  $\vec{p}_{H'}$  也必為第  $t$  類中的代表向量。不論是上述哪一種情形，對於  $\vec{p}_H$  與  $\vec{p}_{H'}$  所對應的歐拉有向子圖  $D_H$  與  $D_{H'}$ ，兩者必具有不同的奇偶性。下圖以  $D_7$  為例。



**Lemma 1:**  $D_{2k+1}$  中第  $t$  類偶子圖與奇子圖的數量恆等

考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ，其中  $0 \leq t \leq k$ ，則第  $t$  類的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量恆相等。

意即  $|\mathcal{E}_{even}^t(D_{2k+1})| = |\mathcal{E}_{odd}^t(D_{2k+1})|$ 。

**【證明】：**

當  $t=0$  時，第 0 類的歐拉有向子圖恰有兩個。若  $E(D_H) = \emptyset$ ，則  $D_H$  為歐拉偶子圖（代表向量為  $\vec{p}_H = \emptyset$ ）；若  $E(D_H) = \{(v_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, 2k\} \cup \{(v_{2k+1}, v_1)\}$ ，則  $D_H$  為歐拉奇子圖（代表向量為  $\vec{p}_H = \emptyset'$ ）。所以第 0 類的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量相等。

當  $t$  為奇數時，令  $D_H$  為歐拉奇子圖，根據代表向量的基本性質 1 可知  $\vec{p}_H$  的第一個分量為奇數。考慮  $\vec{p}_{H'} = \vec{p}_H + \vec{1}$ ，則  $\vec{p}_{H'}$  的第一個分量為偶數，因此  $\vec{p}_{H'}$  必對應一個歐拉偶子圖  $D_{H'}$ 。同理，令  $D_H$  為歐拉偶子圖，根據代表向量的基本性質可知  $\vec{p}_H$  的第一個分量為偶數。考慮  $\vec{p}_{H'} = \vec{p}_H - \vec{1}$ ，則  $\vec{p}_{H'}$  的第一個分量為奇數，因此  $\vec{p}_{H'}$  必對應一個歐拉奇子圖  $D_{H'}$ 。由此可知，第  $t$  類的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量相等。

當  $t$  為正偶數時，令  $D_H$  為歐拉奇子圖，根據代表向量的基本性質 2 可知  $\vec{p}_H$  的第一個分量為偶數。考慮  $\vec{p}_{H'} = \vec{p}_H - \vec{1}$ ，則  $\vec{p}_{H'}$  的第一個分量為奇數，因此  $\vec{p}_{H'}$  必對應一個歐拉偶子圖  $D_{H'}$ 。同理，令  $D_H$  為歐拉偶子圖，根據代表向量的基本性質可知  $\vec{p}_H$  的第一個分量為奇數。考慮  $\vec{p}_{H'} = \vec{p}_H + \vec{1}$ ，則  $\vec{p}_{H'}$  的第一個分量為偶數，因此  $\vec{p}_{H'}$  必對應一個歐拉奇子圖  $D_{H'}$ 。由此可知，第  $t$  類的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量相等。■

**遞迴關係的建立**

為了探討連續兩個奇數 *Wheel* 彼此在歐拉有向子圖的數量關係，我們分析  $D_{2k-1}$  與  $D_{2k+1}$  兩者之間在代表向量上的關連性。首先，在所有的代表向量中，我們觀察兩種特殊的代表向量，說明如下。

考慮自然數  $k$ ，在定向圖  $D_{2k+1}$  中，任意歐拉有向子圖  $D_H$  皆可唯一對應一個代表向量  $\vec{p}_H$ 。考慮第一個分量為奇數的代表向量所成的集合  $\left\{ \vec{p}_H : D_H \in \mathcal{E}(D_{2k+1}) \text{ 且 } \vec{p}_H \text{ 的第一個分量為奇數} \right\}$ ，以符號記為 『  $P_{\text{odd}}(D_{2k+1})$  』。考慮集合  $P_{\text{odd}}(D_{2k+1})$  與特殊的代表向量  $\{\emptyset\}$  的聯集，定義 『  $A_{2k+1} = P_{\text{odd}}(D_{2k+1}) \cup \{\emptyset\}$  』，其中將集合  $A_{2k+1}$



的元素個數記為『 $\alpha_{2k+1}$ 』。此外，考慮最後一個分量為  $2k$  的代表向量所成的集合  $\left\{ \vec{p}_H : D_H \in \varepsilon(D_{2k+1}) \text{ 且 } \vec{p}_H \text{ 的最後一個分量為 } 2k \right\}$ ，以符號記為『 $B_{2k+1}$ 』，將集合  $B_{2k+1}$  的元素個數記為『 $\beta_{2k+1}$ 』。

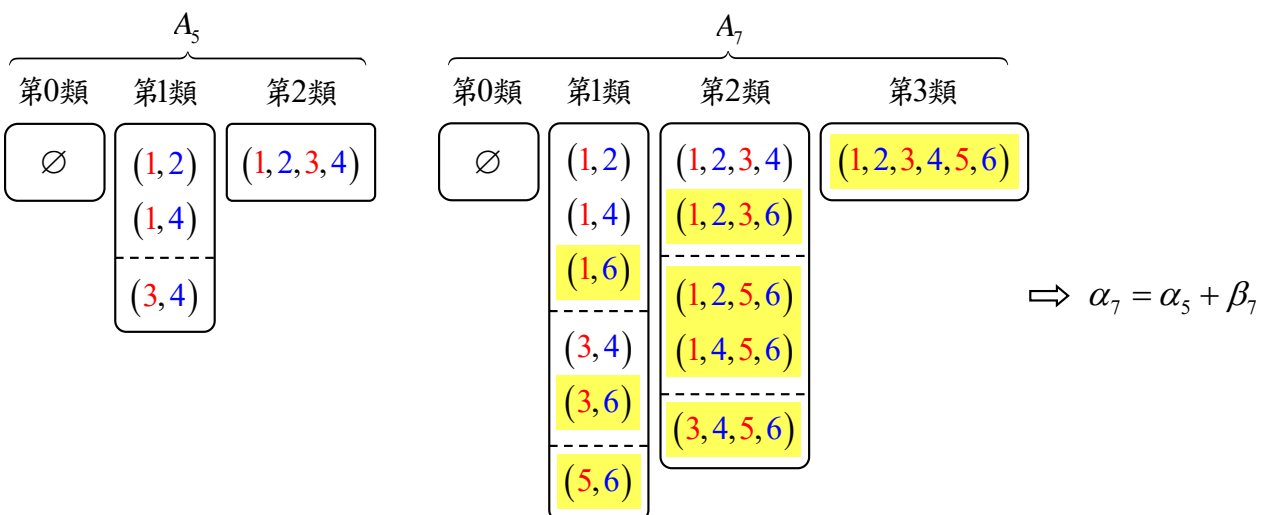
**$D_{2k+1}$  中特殊代表向量集合  $A_{2k+1}$  與  $B_{2k+1}$  的定義**

考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ，考慮代表向量所形成的特殊子集合：

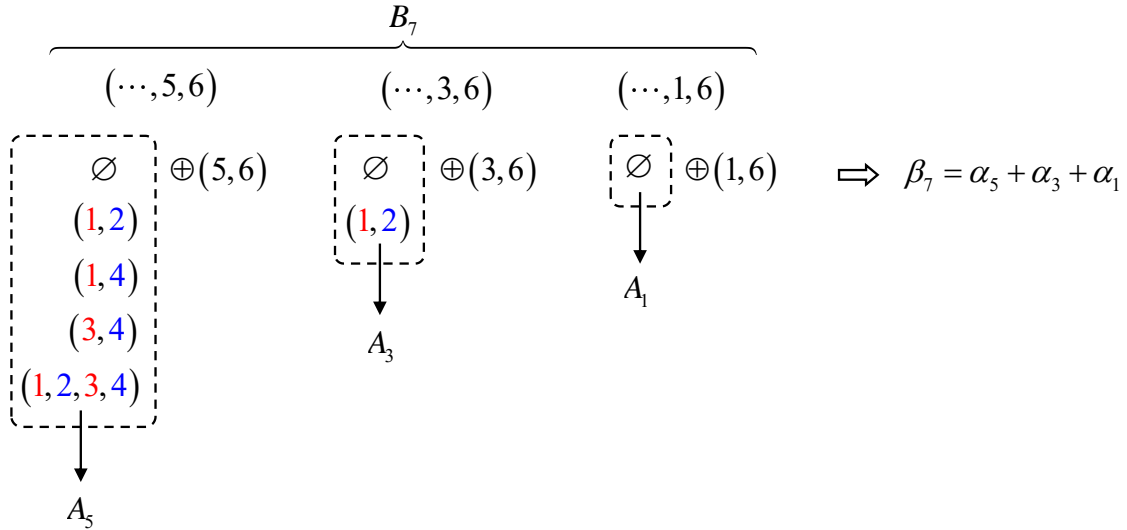
- (1)  $A_{2k+1} = \left\{ \vec{p}_H : D_H \in \varepsilon(D_{2k+1}) \text{ 且 } \vec{p}_H \text{ 的第一個分量為奇數} \right\} \cup \{\emptyset\}$ ，其中  $\alpha_{2k+1} = |A_{2k+1}|$ ，  
特別的定義  $A_1 = \{\emptyset\}$  且  $\alpha_1 = 1$ ；
- (2)  $B_{2k+1} = \left\{ \vec{p}_H : D_H \in \varepsilon(D_{2k+1}) \text{ 且 } \vec{p}_H \text{ 的最後一個分量為 } 2k \right\}$ ，其中  $\beta_{2k+1} = |B_{2k+1}|$ 。

例如：考慮  $D_3$ ，集合  $A_3 = P_{\text{odd}}(D_3) \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, (1,2)\}$ ， $B_3 = \{(1,2)\}$ ，可知  $\alpha_3 = |A_3| = 2$  且  $\beta_3 = |B_3| = 1$ 。考慮  $D_5$ ，集合  $A_5 = P_{\text{odd}}(D_5) \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, (1,2), (1,4), (3,4), (1,2,3,4)\}$ ，集合  $B_5 = \{(1,4), (3,4), (1,2,3,4)\}$ ，故  $\alpha_5 = |A_5| = 5$  且  $\beta_5 = |B_5| = 3$ 。考慮  $D_7$ ，可知  $\alpha_7 = |A_7| = 13$ ，集合  $B_7 = \{(1,6), (3,6), (5,6), (1,2,3,6), (1,2,5,6), (1,4,5,6), (3,4,5,6), (1,2,3,4,5,6)\}$ ，可知  $\beta_7 = |B_7| = 8$ 。

接下來我們試圖建立  $\alpha_{2k+1}$  與  $\beta_{2k+1}$  的遞迴關係，我們先觀察  $D_5$  與  $D_7$  在代表向量的關係。可以發現  $A_5$  中的向量必屬於  $A_7$ ，然而差集  $(A_7 - A_5)$  裡面的向量，其最後一個分量皆為 6。由此可知  $A_7 = A_5 \cup B_7$ ，且  $A_5$  與  $B_7$  沒有交集，故在數量上具有  $\alpha_7 = \alpha_5 + \beta_7$  的關係。



接著觀察  $B_7$  中的向量，因為最後一個分量為 6，所以倒數第二個分量可為 5、3、1 其中之一。根據加法原理可以將  $B_7$  區分為三類，分別形如  $(\dots, 5, 6)$ 、 $(\dots, 3, 6)$  與  $(\dots, 1, 6)$  等形態。我們分別將這三類型前面可能的分量情形條列出來，可發現前面的分量分別為  $A_5$ 、 $A_3$  與  $A_1$  中的代表向量，故在數量上具有  $\beta_7 = \alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_1$  的關係。



我們將上述的觀察一般化，即可得下列引理：

**Lemma 2： $\alpha_{2k+1}$  與  $\beta_{2k+1}$  的遞迴關係**

考慮任意自然數  $k$ ，已知  $\alpha_1 = 1$ ，下列關係式恆成立：

$$(1) \beta_{2k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_{2i-1} \quad (2) \alpha_{2k+1} = \alpha_{2k-1} + \beta_{2k+1}$$

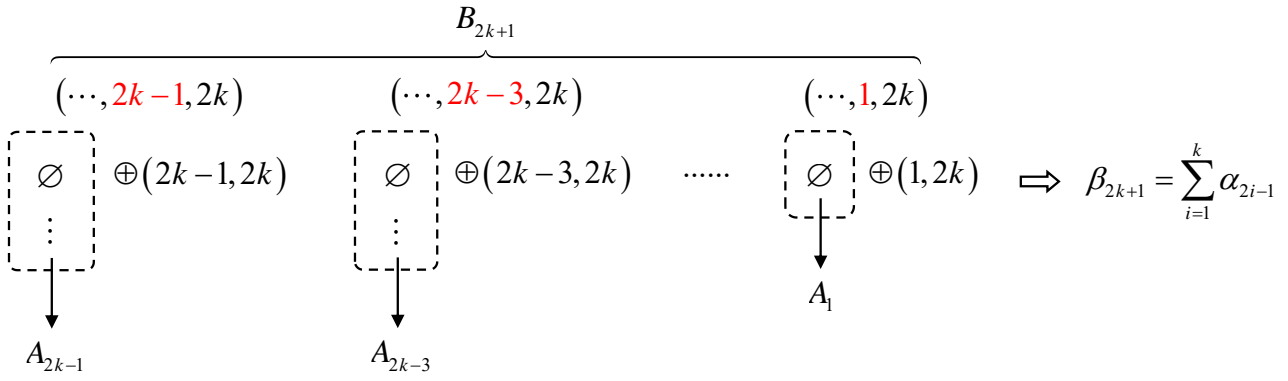
**【證明】：**

(1) 在  $D_{2k+1}$  中，考慮最後一個分量為  $2k$  的代表向量  $\vec{p} \in B_{2k+1}$ ，則  $\vec{p}$  的倒數第二個分量可為  $2k-1$ 、 $2k-3$ 、 $\dots$ 、 $3$ 、 $1$  等奇數其中之一，因此我們可以將  $B_{2k+1}$  中的向量區分為  $k$  種類型，依最後兩個分量的情形可區別為形如  $(\dots, 2k-1, 2k)$ 、 $(\dots, 2k-3, 2k)$ 、 $\dots$ 、 $(\dots, 1, 2k)$  等形態。考慮一般情形，對任意  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ，若倒數第二個分量為  $2i-1$ ，則對任意

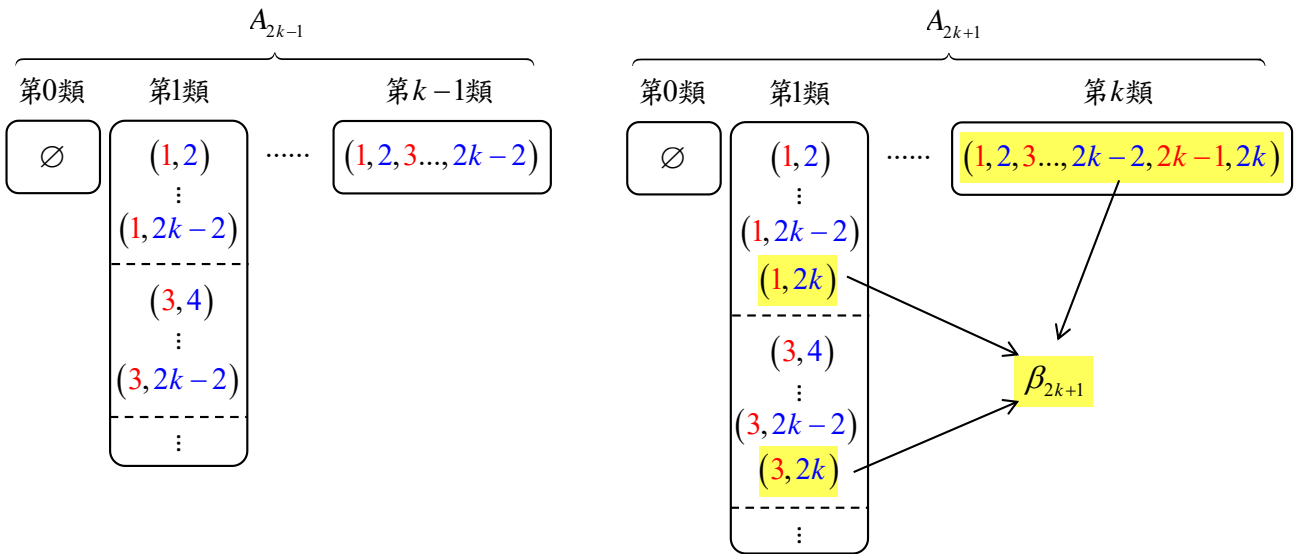
$\vec{q} \in A_{2i-1}$ ，可知  $\vec{q} \oplus (2i-1, 2k) \in B_{2k+1}$ ，故  $|B_{2k+1}| \geq \sum_{i=1}^k |A_{2i-1}|$ 。反之，對任意  $\vec{p} \in B_{2k+1}$ ，則

存在  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  且存在  $\vec{q} \in A_{2i-1}$  能使得  $\vec{p} = \vec{q} \oplus (2i-1, 2k)$ ，故  $|B_{2k+1}| \leq \sum_{i=1}^k |A_{2i-1}|$ 。總和

上述討論可知  $\beta_{2k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_{2i-1}$ 。



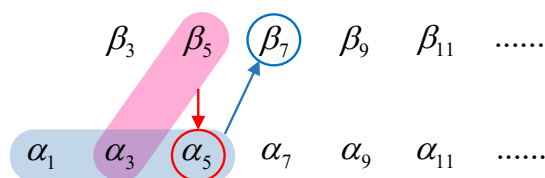
(2) 考慮  $D_{2k+1}$  與  $D_{2k-1}$ ，因為  $D_{2k+1}$  中所決定的代表向量皆必屬於  $D_{2k-1}$  中的代表向量，所以  $A_{2k-1} \subseteq A_{2k+1}$ 。因為  $(v_{2k}, u) \in E(D_{2k+1}) \setminus E(D_{2k-1})$ ，所以差集  $(A_{2k+1} - A_{2k-1})$  中的代表向量其最後一個分量皆必為  $2k$ 。因此可知  $A_{2k+1} = A_{2k-1} \cup B_{2k+1}$ ，因為  $A_{2k-1}$  與  $B_{2k+1}$  為互斥集合，所以在數量上  $\alpha_{2k+1} = \alpha_{2k-1} + \beta_{2k+1}$ 。



**歐拉有向子圖與費氏數列的關係**

根據 Lemma 2 可知，對任意自然數  $k$ ，恆有遞迴關係  $\begin{cases} \beta_{2k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_{2i-1} \\ \alpha_{2k+1} = \alpha_{2k-1} + \beta_{2k+1} \end{cases}$ ，其中初始值

為  $\alpha_1 = 1$ ，所以可得  $\beta_3 = 1$ 。因此  $\alpha_3 = \alpha_1 + \beta_3 = 1+1=2$ ，進而可求得  $\beta_5 = \alpha_1 + \alpha_3 = 1+2=3$ ；重複利用上述的遞迴關係，可得  $\alpha_5 = \alpha_3 + \beta_5 = 2+3=5$ ，進而求得  $\beta_7 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = 1+2+5=8$ 。依此類推，即可依序求得  $\alpha_{2k+1}$  與  $\beta_{2k+1}$  的值。下圖為遞迴關係計算的流程示意圖。



我們試圖用數學歸納法來詮釋上述的分析，因此有以下定理。

**Theorem 1：  $\varepsilon(D_{2k+1})$  與費氏數列的關係**

對於自然數  $k$ ，考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ， $\langle F_n \rangle_{n \geq 1}$  為費氏數列，則下列敘述恆成立：

- (1)  $\alpha_{2k+1} = F_{2k+1}$  且  $\beta_{2k+1} = F_{2k}$ ；
- (2)  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1})| = F_{2k+1}$ 。

**【證明】：**

(1) 我們對參數  $k$  進行數學歸納法。

當  $k=1$  時， $\alpha_3 = F_3 = 2$  與  $\beta_3 = F_2 = 1$  成立。

假設  $i < k$  時， $\alpha_{2i+1} = F_{2i+1}$  與  $\beta_{2i+1} = F_{2i}$  命題皆成立。

考慮  $\beta_{2k+1}$ ，根據 Lemma 2 的結論(1)可知  $\beta_{2k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_{2i-1} = \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k-3} + \cdots + \alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_1$ 。

根據數學歸納法假設可知，對任意  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ， $\alpha_{2i-1} = F_{2i-1}$  皆成立。

$$\begin{aligned}
 \text{因此 } \beta_{2k+1} &= \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k-3} + \cdots + \alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_1 && \text{(根據 Lemma 2 結論 (1))} \\
 &= F_{2k-1} + F_{2k-3} + \cdots + F_5 + F_3 + F_1 && \text{(因為 } \alpha_{2i-1} = F_{2i-1}, i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{)} \\
 &= F_{2k-1} + F_{2k-3} + \cdots + F_5 + F_3 + F_2 && \text{(因為 } F_2 = F_1 = 1 \text{)} \\
 &= F_{2k-1} + F_{2k-3} + \cdots + F_5 + F_4 && \text{(因為 } F_3 + F_2 = F_4 \text{)} \\
 &= F_{2k-1} + F_{2k-3} + \cdots + F_6 && \text{(因為 } F_5 + F_4 = F_6 \text{)} \\
 &\quad \vdots \\
 &= F_{2k-1} + F_{2k-2} \\
 &= F_{2k} && \text{(因為 } F_{2k-1} + F_{2k-2} = F_{2k} \text{)}
 \end{aligned}$$

考慮  $\alpha_{2k+1}$ ，根據 Lemma 2 的結論(2)可知  $\alpha_{2k+1} = \alpha_{2k-1} + \beta_{2k+1}$ 。

根據數學歸納法假設可知  $\alpha_{2k-1} = F_{2k-1}$ ，又因為上述討論已知  $\beta_{2k+1} = F_{2k}$ 。

因此  $\alpha_{2k+1} = \alpha_{2k-1} + \beta_{2k+1} = F_{2k-1} + F_{2k} = F_{2k+1}$ 。

根據數學歸納法得證，對任意自然數  $k$ ， $\begin{cases} \alpha_{2k+1} = F_{2k+1} \\ \beta_{2k+1} = F_{2k} \end{cases}$  恆成立。

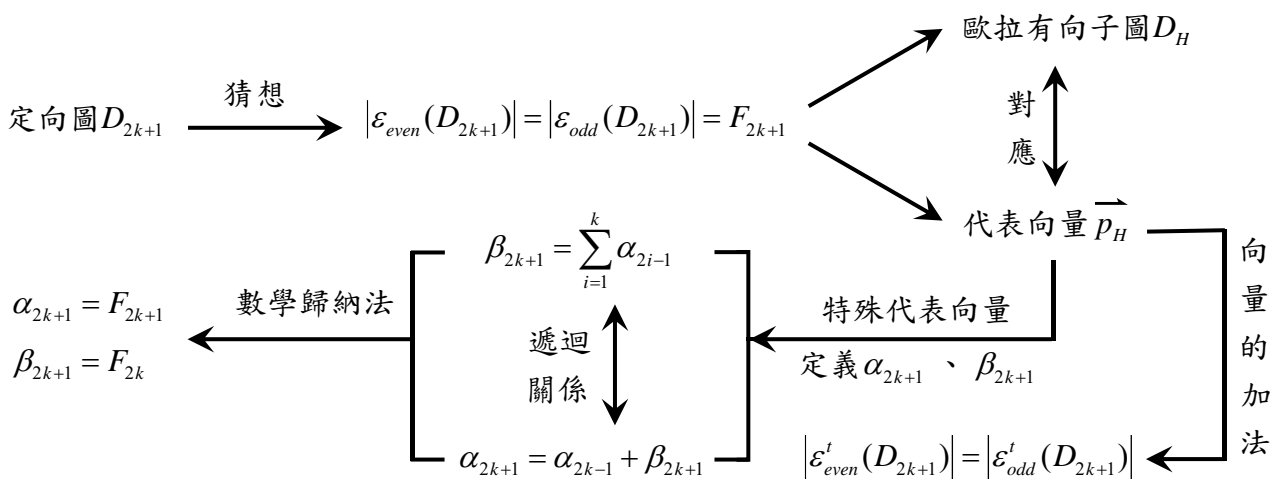
(2) 根據 Lemma 1 的結論可知，對任意  $0 \leq t \leq k$ ， $|\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})|$  皆成立。

可知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1})| = \sum_{t=0}^k |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| = \sum_{t=0}^k |\varepsilon_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1})|$  恆成立。

$$\begin{aligned}
 \text{因為 } |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1})| &= \sum_{t=0}^k |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| \\
 &= |\varepsilon_{\text{even}}^0(D_{2k+1})| + \sum_{t=1}^k |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| && \text{(把 } t=0 \text{ 獨立出來)} \\
 &= 1 + \sum_{t=1}^k |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| && \text{( } \varepsilon_{\text{even}}^0(D_{2k+1}) \text{ 只有一個)} \\
 &= 1 + \sum_{\substack{1 \leq t \leq k \\ t \text{ 是偶數}}} |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| + \sum_{\substack{1 \leq t \leq k \\ t \text{ 是奇數}}} |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| && \text{(針對 } t \text{ 的奇偶性分類計算)} \\
 &= 1 + \sum_{\substack{1 \leq t \leq k \\ t \text{ 是偶數}}} |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| + \sum_{\substack{1 \leq t \leq k \\ t \text{ 是奇數}}} |\varepsilon_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})| && \text{( } |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})| \text{)} \\
 &= 1 + |P_{\text{odd}}(D_{2k+1})| && \text{(利用代表向量的基本性質 1 與性質 2)} \\
 &= \alpha_{2k+1} = F_{2k+1}
 \end{aligned}$$

由此可知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1})|$  恆成立且其值必為費氏數列中的第  $2k+1$  項。■

Theorem 1 的證明即回答了先前我們所提出『奇數 Wheel 的猜想』。可知對任意自然數  $k$ ，定向圖  $D_{2k+1}$  皆非歐拉定向。以下為我們對於解決奇數 Wheel 猜想的思路脈絡。



**$D_{2k+1}$  中歐拉有向子圖與二項式係數的關係**

在觀察  $D_3$ 、 $D_5$ 、 $D_7$  與  $D_9$  每一類的歐拉奇子圖數量時，我們又意外發現對任意  $0 \leq t \leq k$ ，

第  $t$  類歐拉奇子圖數量皆可對應一個二項式係數。例如： $\left\langle \left| \varepsilon'_{\text{odd}}(D_3) \right| \right\rangle_{t=0}^1 = \langle 1, 1 \rangle = \langle C_1^1, C_0^2 \rangle$ 、 $\left\langle \left| \varepsilon'_{\text{odd}}(D_5) \right| \right\rangle_{t=0}^2 = \langle 1, 3, 1 \rangle = \langle C_2^2, C_1^3, C_0^4 \rangle$ 、 $\left\langle \left| \varepsilon'_{\text{odd}}(D_7) \right| \right\rangle_{t=0}^3 = \langle 1, 6, 5, 1 \rangle = \langle C_3^3, C_2^4, C_1^5, C_0^6 \rangle$ ，進一步可得序列  $\left\langle \left| \varepsilon'_{\text{odd}}(D_9) \right| \right\rangle_{t=0}^4 = \langle 1, 10, 15, 7, 1 \rangle = \langle C_4^4, C_3^5, C_2^6, C_1^7, C_0^8 \rangle$ 。這樣的規律性我們推測是具有一般性的。因此對於定向圖  $D_{2k+1}$ ，我們將第  $t$  類的代表向量進行更細緻的分類，將特殊代表向量集合  $A_{2k+1}$  與  $B_{2k+1}$  針對第  $t$  類區分為更小的子集合，試著根據 Lemma 2 的經驗，建立遞迴關係，並使用數學歸納法來證明『第  $t$  類特殊代表向量』與『二項式係數』的對應關係。

以下我們針對  $A_{2k+1}$  與  $B_{2k+1}$  中的第  $t$  類代表向量所成的子集合定義以下符號：

**$D_n$  中第  $t$  類特殊代表向量集合  $A_{2k+1}^t$  與  $B_{2k+1}^t$  的定義**

(1) 考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ，考慮第  $1 \leq t \leq k$  類中第一個分量為奇數的代表向量所成的集合

$\left\{ \overrightarrow{p_H} : D_H \in \varepsilon^t(D_{2k+1}) \text{ 且 } \overrightarrow{p_H} \text{ 的第一個分量為奇數} \right\}$ ，以符號記為『 $A_{2k+1}^t$ 』，將集合  $A_{2k+1}^t$  的

元素個數記為『 $\alpha_{2k+1}^t$ 』。特別的，定義  $\alpha_{2k+1}^0 = 1$ 。可知  $\sum_{t=0}^k \alpha_{2k+1}^t = \alpha_{2k+1}$ 。

(2) 考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ，考慮第  $1 \leq t \leq k$  類中最後一個分量為  $2k$  的代表向量所成的集合

$\left\{ \overrightarrow{p_H} : D_H \in \varepsilon^t(D_{2k+1}) \text{ 且 } \overrightarrow{p_H} \text{ 的最後一個分量為 } 2k \right\}$ ，以符號記為『 $B_{2k+1}^t$ 』，將集合  $B_{2k+1}^t$  的

元素個數記為『 $\beta_{2k+1}^t$ 』。可知  $\sum_{t=1}^k \beta_{2k+1}^t = \beta_{2k+1}$ 。

如同 Lemma 2 的分析方法，觀察  $D_{2k+1}$  的第  $t$  類代表向量，我們亦可以分析  $\alpha_{2k+1}^t$  與  $\beta_{2k+1}^t$  兩者之間的遞迴關係。我們有以下引理：

**Lemma 3：  $\alpha_{2k+1}^t$  與  $\beta_{2k+1}^t$  的遞迴關係**

考慮任意自然數  $k \geq 2$ ，已知  $\alpha_3^0 = \alpha_3^1 = \beta_3^1 = 1$ ，下列關係式恆成立：

$$(1) \beta_{2k+1}^t = \sum_{i=t}^k \alpha_{2i-1}^{t-1} = \alpha_{2k-1}^{t-1} + \beta_{2k-1}^t \quad (2) \alpha_{2k+1}^t = \alpha_{2k-1}^t + \beta_{2k+1}^t$$

**【證明】：**

(1) 在  $D_{2k+1}$  中，考慮第  $t$  類最後一個分量為  $2k$  的代表向量  $\overrightarrow{p} \in B_{2k+1}^t$ ，則  $\overrightarrow{p}$  的倒數第二個分量可為  $2k-1$ 、 $2k-3$ 、 $\dots$ 、 $2t-1$  等奇數其中之一，因此我們可以將  $B_{2k+1}^t$  中的向量區分

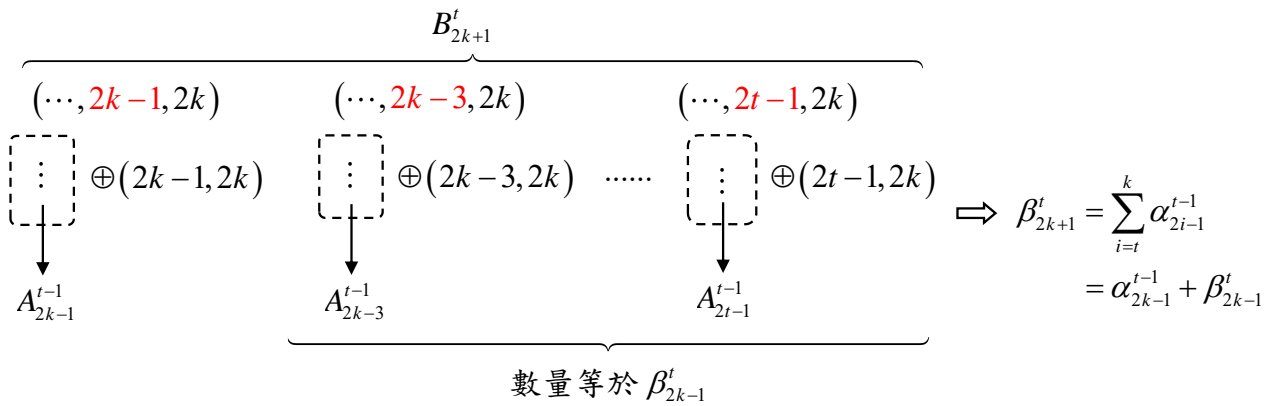
為  $k-t+1$  種類型，依最後兩個分量的情形可區別為形如  $(\dots, 2k-1, 2k)$ 、 $(\dots, 2k-3, 2k)$ 、 $\dots$ 、 $(\dots, 2t-1, 2k)$  等形態。考慮一般情形，對任意  $i \in \{t, t+1, \dots, k\}$ ，若倒數第二個分量

為  $2i-1$ ，則對任意  $\vec{q} \in A_{2i-1}^{t-1}$ ，可知  $\vec{q} \oplus (2i-1, 2k) \in B_{2k+1}^t$ ，故  $|B_{2k+1}^t| \geq \sum_{i=t}^k |A_{2i-1}^{t-1}|$ 。反之，

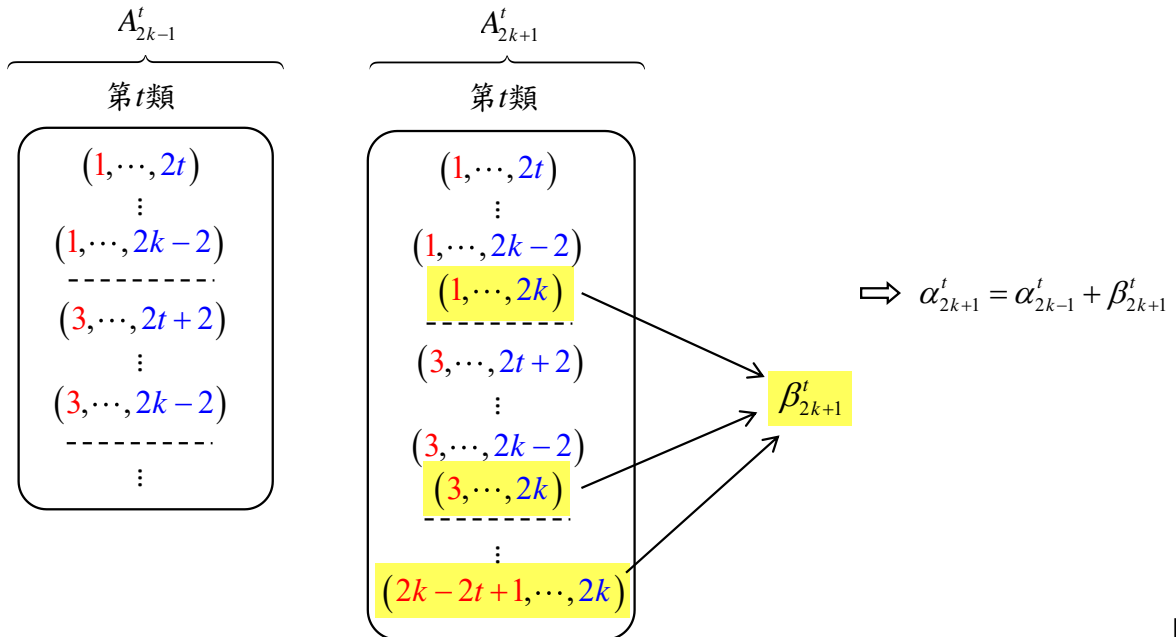
對任意  $\vec{p} \in B_{2k+1}^t$ ，則存在  $i \in \{t, t+1, \dots, k\}$  且存在  $\vec{q} \in A_{2i-1}^{t-1}$  能使得  $\vec{p} = \vec{q} \oplus (2i-1, 2k)$ ，

故  $|B_{2k+1}^t| \leq \sum_{i=t}^k |A_{2i-1}^{t-1}|$ 。由此可知  $\beta_{2k+1}^t = \sum_{i=t}^k \alpha_{2i-1}^{t-1}$ ，同理可得  $\beta_{2k-1}^t = \sum_{i=t}^{k-1} \alpha_{2i-1}^{t-1}$ 。總和上述討論

可知，對任意  $1 \leq t \leq k$ ， $\beta_{2k+1}^t = \sum_{i=t}^k \alpha_{2i-1}^{t-1} = \alpha_{2k-1}^{t-1} + \sum_{i=t}^{k-1} \alpha_{2i-1}^{t-1} = \alpha_{2k-1}^{t-1} + \beta_{2k-1}^t$ 。



(2) 考慮  $D_{2k+1}$  與  $D_{2k-1}$ ，因為  $D_{2k-1}$  中所決定的第  $t$  類代表向量皆必為  $D_{2k+1}$  中的第  $t$  類代表向量，所以  $A_{2k-1}^t \subseteq A_{2k+1}^t$ 。因為  $(v_{2k}, u) \in E(D_{2k+1}) \setminus E(D_{2k-1})$ ，所以差集  $(A_{2k+1}^t - A_{2k-1}^t)$  中的代表向量其最後一個分量皆必為  $2k$ 。因此可知  $A_{2k+1}^t = A_{2k-1}^t \cup B_{2k+1}^t$ ，因為  $A_{2k-1}^t$  與  $B_{2k+1}^t$  為互斥集合，所以在數量上，對任意  $1 \leq t \leq k$ ， $\alpha_{2k+1}^t = \alpha_{2k-1}^t + \beta_{2k+1}^t$  恆成立。



根據 Lemma 3 可知，對任意自然數  $k \geq 2$ ，恆有遞迴關係  $\begin{cases} \beta_{2k+1}^t = \alpha_{2k-1}^{t-1} + \beta_{2k-1}^t \\ \alpha_{2k+1}^t = \alpha_{2k-1}^t + \beta_{2k+1}^t \end{cases}$ ，其中初始

值為  $\alpha_3^0 = \alpha_3^1 = \beta_3^1 = 1$ 。觀察前幾項的數字，我們猜想  $\alpha_{2k+1}^t$  與  $\beta_{2k+1}^t$  似乎都可以表示成某個二項式係數，接著透過數學歸納法來論證上述的觀察，因此有以下定理：

**Theorem 2：  $D_{2k+1}$  中  $\alpha_{2k+1}^t$ 、 $\beta_{2k+1}^t$  與二項式係數的關係**

考慮定向圖  $D_{2k+1}$  中第  $t$  類的代表向量的特殊子集合  $A_{2k+1}^t$  與  $B_{2k+1}^t$ ，則：

- (1)  $\alpha_{2k+1}^t = C_{k-t}^{k+t}$  且  $\beta_{2k+1}^t = C_{k-t}^{k+t-1}$ ；
- (2) 第  $t$  類歐拉有向子圖的數量  $|\mathcal{E}_{odd}^t(D_{2k+1})| = |\mathcal{E}_{even}^t(D_{2k+1})| = C_{k-t}^{k+t}$ 。

**【證明】：**

(1) 我們對參數  $k$  進行數學歸納法。

當  $k=1$  時， $\alpha_3^0 = C_1^1 = 1$ 、 $\alpha_3^1 = C_0^2 = 1$  與  $\beta_3^1 = C_0^1 = 1$  成立。

假設  $i < k$  時，對任意  $0 \leq t \leq i$ ， $\alpha_{2i+1}^t = C_{i-t}^{i+t}$  與  $\beta_{2i+1}^t = C_{i-t}^{i+t-1}$  命題皆成立。

考慮  $\beta_{2k+1}^t$ ，根據 Lemma 3 的結論 (1) 可知  $\beta_{2k+1}^t = \alpha_{2k-1}^{t-1} + \beta_{2k-1}^t$ 。

根據數學歸納法假設可知， $\alpha_{2k-1}^{t-1} = C_{k-t}^{k+t-2}$  與  $\beta_{2k-1}^t = C_{k-t-1}^{k+t-2}$  皆成立。

$$\begin{aligned} \text{因此 } \beta_{2k+1}^t &= \alpha_{2k-1}^{t-1} + \beta_{2k-1}^t && \text{(根據 Lemma 3 結論 (1))} \\ &= C_{k-t}^{k+t-2} + C_{k-t-1}^{k+t-2} && \text{(因為 } \alpha_{2k-1}^{t-1} = C_{k-t}^{k+t-2} \text{ 與 } \beta_{2k-1}^t = C_{k-t-1}^{k+t-2} \text{)} \\ &= C_{k-t}^{k+t-1} && \text{(利用巴斯卡定理)} \end{aligned}$$

考慮  $\alpha_{2k+1}^t$ ，根據 Lemma 3 的結論 (2) 可知  $\alpha_{2k+1}^t = \alpha_{2k-1}^t + \beta_{2k+1}^t$ 。

根據數學歸納法假設可知  $\alpha_{2k-1}^t = C_{k-t-1}^{k+t-1}$ ，又因為上述討論已知  $\beta_{2k+1}^t = C_{k-t}^{k+t-1}$ 。

因此  $\alpha_{2k+1}^t = \alpha_{2k-1}^t + \beta_{2k+1}^t = C_{k-t-1}^{k+t-1} + C_{k-t}^{k+t-1} = C_{k-t}^{k+t}$ 。

根據數學歸納法得證，對任意自然數  $k$ ， $\begin{cases} \alpha_{2k+1}^t = C_{k-t}^{k+t} \\ \beta_{2k+1}^t = C_{k-t}^{k+t-1} \end{cases}$  恆成立。

(2) 根據  $D_{2k+1}$  中代表向量的基本性質可知，當  $t$  為奇數時， $|\mathcal{E}_{odd}^t(D_{2k+1})| = \alpha_{2k+1}^t$ ；當  $t$  為偶數

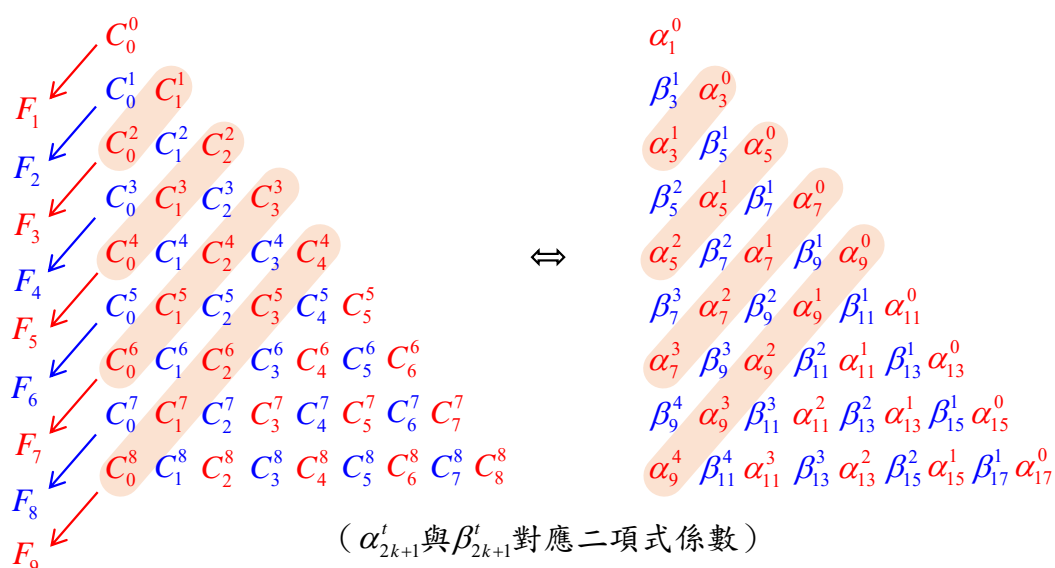
時， $|\mathcal{E}_{even}^t(D_{2k+1})| = \alpha_{2k+1}^t$ 。根據 Lemma 1 的結論可知，對任意  $0 \leq t \leq k$ ，

$|\mathcal{E}_{odd}^t(D_{2k+1})| = |\mathcal{E}_{even}^t(D_{2k+1})|$  恆成立。因為結論 (1) 可知  $\alpha_{2k+1}^t = C_{k-t}^{k+t}$ ，所以對任意  $0 \leq t \leq k$ ，

$|\mathcal{E}_{odd}^t(D_{2k+1})| = |\mathcal{E}_{even}^t(D_{2k+1})| = \alpha_{2k+1}^t = C_{k-t}^{k+t}$ 。■



Theorem 2 說明著，在  $D_{2k+1}$  中的第  $t$  類特殊代表向量皆可與二項式係數巧妙對應。由於在靠左對齊的巴斯卡三角形中，已知每一個左下到右上的斜排總和皆為費氏數列的元素〔參考文獻 7〕，意即對任意自然數  $k \geq 1$ ， $\sum_{t=0}^k C_{k-t}^{k+t} = F_{2k+1}$  且  $\sum_{t=1}^k C_{k-t}^{k+t-1} = F_{2k}$ ，由此可知  $\sum_{t=0}^k C_{k-t}^{k+t} = \sum_{t=0}^k \alpha_{2k+1}^t = \alpha_{2k+1} = F_{2k+1}$  與  $\sum_{t=1}^k C_{k-t}^{k+t-1} = \sum_{t=1}^k \beta_{2k+1}^t = \beta_{2k+1} = F_{2k}$ ，因此這也呼應了 Theorem 1 的結果。



### 三、偶數 *Wheel* 定向圖的組合性質

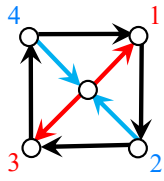
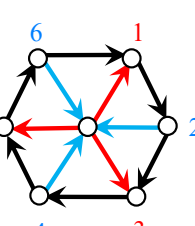
當  $n$  為偶數時，考慮偶數 *Wheel* 的特殊定向圖  $D_n$ ，我們欲分析定向圖  $D_n$  的結構中，歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量關係。試圖從中探討是否具有特殊的組合性質。首先對於  $D_{2k}$ ，我們將第  $t$  類歐拉有向子圖的基本性質呈現如下。

#### $D_{2k}$ 中第 $t$ 類歐拉有向子圖的基本性質

考慮定向圖  $D_{2k}$ ，若  $D_H$  為第  $t$  類歐拉有向子圖，則：

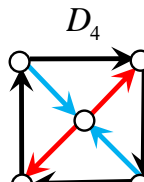
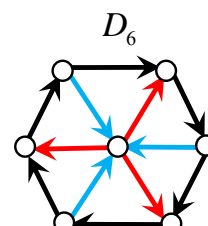
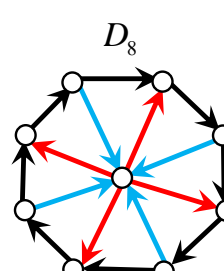
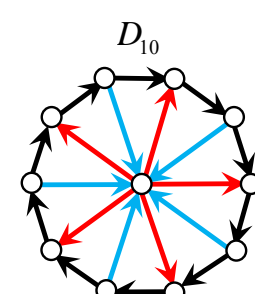
- (性質 1) 當  $t$  為奇數時，則  $D_H$  為歐拉奇子圖；
- (性質 2) 當  $t$  為偶數時，則  $D_H$  為歐拉偶子圖。

以下我們透過  $D_4$  與  $D_6$  的情形，呈現第  $t$  類歐拉有向子圖，其中  $t$  的奇偶性決定  $D_H$  的奇偶性，兩者具有相同的奇偶性：

 <p style="text-align: center;"><math>D_4</math></p>	<p style="text-align: center;">第0類 歐拉偶子圖</p> <p style="text-align: center;"><math>\emptyset \quad \emptyset'</math></p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p style="text-align: center;">2</p>	<p style="text-align: center;">第1類 歐拉奇子圖</p> <p style="text-align: center;"> <math>\begin{pmatrix} 2 \\ 1, 4 \end{pmatrix} \quad (2, 3)</math>  <math>(3, 4)</math> </p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p style="text-align: center;">4</p>	<p style="text-align: center;">第2類 歐拉偶子圖</p> <p style="text-align: center;"><math>(1, 2, 3, 4)</math></p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p style="text-align: center;">1</p>	
 <p style="text-align: center;"><math>D_6</math></p>	<p style="text-align: center;">第0類 歐拉偶子圖</p> <p style="text-align: center;"><math>\emptyset \quad \emptyset'</math></p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p style="text-align: center;">2</p>	<p style="text-align: center;">第1類 歐拉奇子圖</p> <p style="text-align: center;"> <math>\begin{pmatrix} 2 \\ 1, 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2, 3 \\ 2, 5 \end{pmatrix}</math>  <math>(4, 5)</math>  <math>\begin{pmatrix} 3, 4 \\ 3, 6 \end{pmatrix} \quad (5, 6)</math> </p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p style="text-align: center;">9</p>	<p style="text-align: center;">第2類 歐拉偶子圖</p> <p style="text-align: center;"> <math>\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 3, 4, 5 \end{pmatrix} \quad (2, 3, 4, 5)</math>  <math>\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 4, 5, 6 \end{pmatrix} \quad (3, 4, 5, 6)</math> </p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p style="text-align: center;">6</p>	<p style="text-align: center;">第3類 歐拉奇子圖</p> <p style="text-align: center;"><math>(1, 2, 3, 4, 5, 6)</math></p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p style="text-align: center;">1</p>

### 舉例觀察

首先對於  $D_4$ 、 $D_6$ 、 $D_8$  與  $D_{10}$  這四個定向圖，我們透過窮舉法分別計算出歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量（數值如下圖所示），可以發現兩者的數量並不相等，也就是說這四個定向圖皆為歐拉定向。因此我們自然的猜想對於自然數  $k \geq 2$ ， $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})|$  與  $|\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})|$  是否皆相異？

 <p><math>D_4</math></p>	 <p><math>D_6</math></p>	 <p><math>D_8</math></p>	 <p><math>D_{10}</math></p>
$ \mathcal{E}_{\text{even}}(D_4) $   $ \mathcal{E}_{\text{odd}}(D_4) $ <span style="background-color: #f4a460; padding: 2px;">3</span>   <span style="background-color: #a4c6e0; padding: 2px;">4</span>	$ \mathcal{E}_{\text{even}}(D_6) $   $ \mathcal{E}_{\text{odd}}(D_6) $ <span style="background-color: #f4a460; padding: 2px;">8</span>   <span style="background-color: #a4c6e0; padding: 2px;">10</span>	$ \mathcal{E}_{\text{even}}(D_8) $   $ \mathcal{E}_{\text{odd}}(D_8) $ <span style="background-color: #f4a460; padding: 2px;">23</span>   <span style="background-color: #a4c6e0; padding: 2px;">24</span>	$ \mathcal{E}_{\text{even}}(D_{10}) $   $ \mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{10}) $ <span style="background-color: #f4a460; padding: 2px;">62</span>   <span style="background-color: #a4c6e0; padding: 2px;">61</span>

後續我們更將  $D_4$ 、 $D_6$ 、 $D_8$ 、 $D_{10}$ 、 $D_{12}$  與  $D_{14}$  的每一類歐拉有向子圖計算出來，記錄於下表，並考慮歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量差  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})|$ ，其數值依序為  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$ ，我們發現其值皆不等於 0。

	$ \varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})  -  \varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k}) $								
$D_4$	2	4	1	-1					
$D_6$	2	9	6	1	-2				
$D_8$	2	16	20	8	1	-1			
$D_{10}$	2	25	50	35	10	1	+1		
$D_{12}$	2	36	105	112	54	12	1	+2	
$D_{14}$	2	49	196	294	210	77	14	1	+1
	第0類	第1類	第2類	第3類	第4類	第5類	第6類	第7類	

為歐拉偶子圖的數量  
 為歐拉奇子圖的數量

因此我們更進一步的提出以下的猜測：

### 偶數 *Wheel* 的猜想

考慮自然數  $k \geq 2$ ，令  $D_{2k}$  的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量差  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})| = m_k$ ，則數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  的元素皆不為 0。意即  $D_{2k}$  必為歐拉定向。

以下我們將利用 Theorem 2 中奇數 *Wheel* 在歐拉有向子圖的結論，搭配對應二項式係數的性質以及生成函數的技巧來說明上述猜想的正確性。

### 偶數 *Wheel* 歐拉有向子圖的組合表達式

當我們觀察  $D_6$  與  $D_5$ ，在第  $t$  類的代表向量中，兩者之間的差異性。可以發現  $D_5$  的第  $t$  類代表向量必為  $D_6$  的第  $t$  類代表向量；然而考慮  $D_6$  的第  $t$  類最後一個分量為 6 的代表向量，則必不屬於  $D_5$  的代表向量。進一步觀察  $D_6$  與  $D_7$ ，可以發現  $D_6$  的第  $t$  類代表向量必為  $D_7$  的第  $t$  類代表向量；然而  $D_7$  的第  $t$  類最後一個分量為 7 的代表向量，則必不屬於  $D_6$  的代表向量。因為  $D_7$  中第  $t$  類最後一個分量為 7 的代表向量與最後一個分量為 6 的代表向量具有一一對應關係，所以兩者數量相等。由此推得『 $D_5$  的第  $t$  類代表向量總數』與『 $D_7$  的第  $t$  類代表向量總數』的和為『 $D_6$  的第  $t$  類代表向量總數』的兩倍。換句話說， $|\varepsilon^t(D_6)| = \frac{1}{2}(|\varepsilon^t(D_5)| + |\varepsilon^t(D_7)|)$ 。下圖為  $D_5$ 、 $D_6$  與  $D_7$  的代表向量分類圖，方便觀察代表向量之間的關連性。

	第0類		第1類		第2類		
	偶子圖	奇子圖	奇子圖	偶子圖	偶子圖	奇子圖	
$D_5$ :	$\emptyset$	$\emptyset'$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1, 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2, 5 \end{pmatrix}$	$(1, 2, 3, 4)$	$(2, 3, 4, 5)$	
	1	1	3	3	1	1	
$D_6$ :	第0類 偶子圖	第0類 奇子圖	第1類 奇子圖	第1類 偶子圖	第2類 偶子圖	第2類 奇子圖	第3類 奇子圖
	$\emptyset$	$\emptyset'$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1, 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2, 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25 \\ 1, 2, 3, 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$(2, 3, 4, 5)$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$D_5$ :	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 4 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4 \\ 3, 3, 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, 3, 4, 5 \\ 2, 3, 5 \\ 3, 4, 5 \\ 4, 5 \\ 4, 4, 5 \end{pmatrix}$	$(1, 2, 3, 4)$	$(2, 3, 4, 5)$
	1	1	3	3	1	1
$D_6$ :	第0類 偶子圖 $\emptyset$	第0類 奇子圖 $\emptyset'$	第1類 奇子圖 $\begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 1, 4, 6 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 3, 6 \\ 5, 6 \\ 5, 5, 6 \end{pmatrix}$	第1類 偶子圖 $\begin{pmatrix} 2, 3, 3 \\ 2, 5, 5 \\ 4, 5 \\ 4, 4, 5 \end{pmatrix}$	第2類 偶子圖 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 3, 6 \\ 2, 6 \\ 1, 2, 5, 6 \\ 1, 4, 5, 6 \\ 3, 4, 5, 6 \\ 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix}$	第3類 奇子圖 $\begin{pmatrix} 2, 3, 4, 5 \\ 2, 3, 4, 5 \\ (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ (1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{pmatrix}$
	2	2	9	9	6	1
$D_7$ :	第0類 偶子圖 $\emptyset$	第0類 奇子圖 $\emptyset'$	第1類 奇子圖 $\begin{pmatrix} 2, 2, 3 \\ 1, 4, 6 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 3, 6 \\ 5, 6 \\ 5, 5, 6 \end{pmatrix}$	第1類 偶子圖 $\begin{pmatrix} 3, 3, 3 \\ 2, 5, 7 \\ 2, 7 \\ 4, 5 \\ 4, 7 \\ 6, 7 \\ 6, 6, 7 \end{pmatrix}$	第2類 偶子圖 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 3, 6 \\ 2, 6 \\ 1, 2, 5, 6 \\ 1, 4, 5, 6 \\ 3, 4, 5, 6 \\ 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix}$	第3類 奇子圖 $\begin{pmatrix} 5 \\ 2, 3, 4, 5 \\ 2, 3, 4, 7 \\ 3, 7 \\ 2, 3, 6, 7 \\ 2, 5, 6, 7 \\ 4, 5, 6, 7 \\ 4, 5, 6, 7 \end{pmatrix}$
	1	1	6	6	5	5
	1	1	6	6	5	5
	1	1	6	6	5	5
	1	1	6	6	5	5

為了說明上述關係的一般性，對於代表向量最後一個分量的值進行區別，對於第  $t$  類的代表向量，我們定義以下符號，用以說明偶數 *Wheel* 定向圖  $D_{2k}$ ，與相鄰的兩個定向圖  $D_{2k-1}$ 、 $D_{2k+1}$  之間的關係。

**$D_n$  中第  $t$  類特殊代表向量集合  $\Gamma'_n$  的定義**

考慮一般定向圖  $D_n$  中，考慮第  $t \geq 1$  類中最後一個分量為  $n$  的代表向量所成的集合  $\left\{ \vec{p}_H : D_H \in \mathcal{E}^t(D_n) \text{ 且 } \vec{p}_H \text{ 的最後一個分量為 } n \right\}$ ，以符號記為『 $\Gamma'_n$ 』，將集合  $\Gamma'_n$  的元素個數記為『 $\gamma'_n$ 』。

對於一般偶數 *Wheel* 定向圖  $D_{2k}$ ，分別與  $D_{2k-1}$ 、 $D_{2k+1}$  比較第  $t$  類的代表向量數量，利用上述定義的符號，即可得下列引理：

**Lemma 4： $\mathcal{E}^t(D_{2k})$  與二項式係數的關係**

- (1) 對任意自然數  $k$ ， $1 \leq t \leq k$ ，考慮  $D_{2k+1}$ ，則  $\beta'_{2k+1} = \gamma'_{2k+1}$  恆成立；
- (2) 對任意自然數  $k \geq 2$ ， $1 \leq t \leq k$ ，考慮  $D_{2k}$  與  $D_{2k+1}$ ，則  $\gamma'_{2k} = \beta'_{2k+1}$ ；
- (3) 對任意自然數  $k \geq 2$ ， $0 \leq t \leq k$ ，則  $|\mathcal{E}^t(D_{2k})| = C_{k-t-1}^{k+t-1} + C_{k-t}^{k+t}$  恆成立。

**【證明】：**

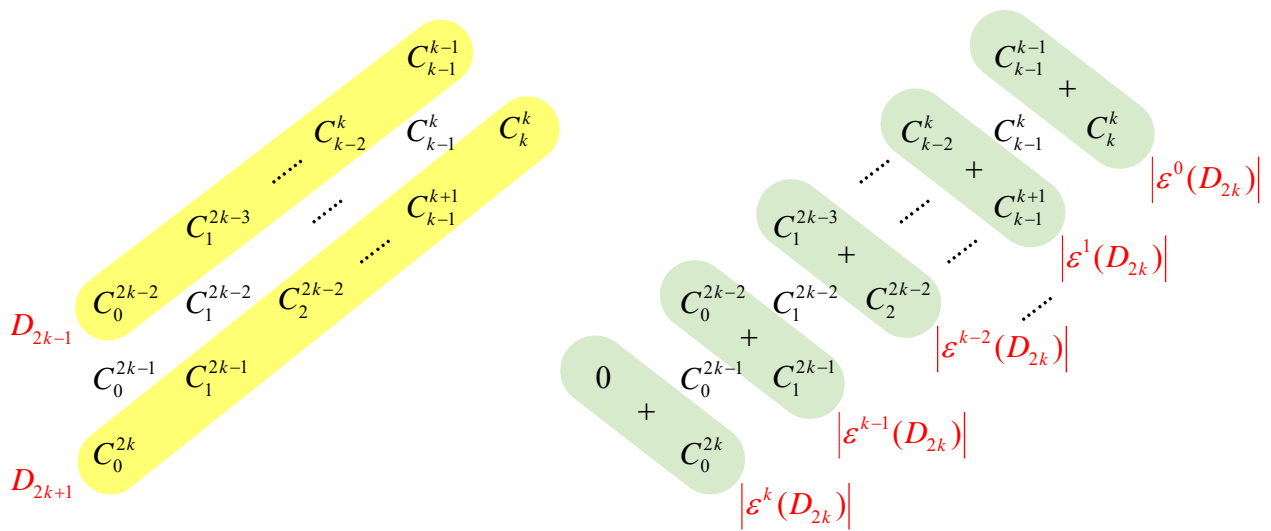
(1) 考慮定向圖  $D_{2k+1}$ 。令  $\vec{p}_H \in B'_{2k+1}$ ，因為  $\vec{p}_H$  的最後一個分量為  $2k$ ，則  $\vec{p}_H + \vec{1} = \vec{p}_{H'}$  的最後一個分量為  $2k+1$ ，故  $\vec{p}_{H'} \in \Gamma'_{2k+1}$ ，所以  $|B'_{2k+1}| \leq |\Gamma'_{2k+1}|$ 。反之，令  $\vec{p}_{H'} \in \Gamma'_{2k+1}$ ，因為  $\vec{p}_{H'}$  的最後一個分量為  $2k+1$ ，則  $\vec{p}_{H'} - \vec{1} = \vec{p}_H$  的最後一個分量為  $2k$ ，故  $\vec{p}_H \in B'_{2k+1}$ ，所以  $|\Gamma'_{2k+1}| \leq |B'_{2k+1}|$ 。由上述討論可知  $|B'_{2k+1}| = |\Gamma'_{2k+1}|$ ，意即  $\beta'_{2k+1} = \gamma'_{2k+1}$ 。

(2) 考慮  $D_{2k}$  與  $D_{2k+1}$ ，令  $\vec{p}_H \in \Gamma'_{2k}$ ，則  $\vec{p}_H$  亦為  $D_{2k+1}$  的代表向量且最後一個分量為  $2k$ ，故  $\vec{p}_H \in B'_{2k+1}$ ，所以  $|\Gamma'_{2k}| \leq |B'_{2k+1}|$ 。反之，令  $\vec{p}_H \in B'_{2k+1}$ ，則  $\vec{p}_H$  亦為  $D_{2k}$  的代表向量且最後一個分量為  $2k$ ，故  $\vec{p}_H \in \Gamma'_{2k}$ ，所以  $|B'_{2k+1}| \leq |\Gamma'_{2k}|$ 。由上述討論可知  $|\Gamma'_{2k}| = |B'_{2k+1}|$ ，意即  $\gamma'_{2k} = \beta'_{2k+1}$ 。

(3) 當  $t=0$  時，因為  $\varepsilon^0(D_{2k})$  共有兩個歐拉偶子圖，其代表向量分別為  $\emptyset$  與  $\emptyset'$ ，故  $|\varepsilon^0(D_{2k})| = C_{k-1}^{k-1} + C_k^k = 2$  成立。

當  $1 \leq t \leq k$  時，因為  $D_{2k-1}$  的第  $t$  類代表向量必為  $D_{2k}$  的第  $t$  類代表向量，而  $D_{2k}$  的第  $t$  類最後一個分量為  $2k$  的代表向量，則必不屬於  $D_{2k-1}$  的代表向量，所以可知  $|\varepsilon^t(D_{2k})| = |\varepsilon^t(D_{2k-1})| + \gamma'_{2k}$ 。因為  $D_{2k}$  的第  $t$  類代表向量必為  $D_{2k+1}$  的第  $t$  類代表向量，而  $D_{2k+1}$  的第  $t$  類最後一個分量為  $2k+1$  的代表向量，則必不屬於  $D_{2k}$  的代表向量，所以可知  $|\varepsilon^t(D_{2k})| = |\varepsilon^t(D_{2k+1})| - \gamma'_{2k+1}$ 。根據結論 (1) 與結論 (2) 可知  $\gamma'_{2k+1} = \beta'_{2k+1} = \gamma'_{2k}$ ，由此可推得  $|\varepsilon^t(D_{2k})| = \frac{1}{2}(|\varepsilon^t(D_{2k-1})| + |\varepsilon^t(D_{2k+1})|)$ 。根據 Lemma 1 與 Theorem 2 的結論，可知  $|\varepsilon^t(D_{2k-1})| = 2C_{k-t-1}^{k+t-1}$  與  $|\varepsilon^t(D_{2k+1})| = 2C_{k-t}^{k+t}$ ，將二項式係數代入後即可推得  $|\varepsilon^t(D_{2k})| = \frac{1}{2}(|\varepsilon^t(D_{2k-1})| + |\varepsilon^t(D_{2k+1})|) = \frac{1}{2}(2C_{k-t-1}^{k+t-1} + 2C_{k-t}^{k+t}) = C_{k-t-1}^{k+t-1} + C_{k-t}^{k+t}$ 。■

我們用下圖表示在巴斯卡三角形中，Lemma 4 說明了  $D_{2k}$  的第  $t$  類歐拉有向子圖數量，皆可以利用相鄰的兩個定向圖  $D_{2k-1}$  與  $D_{2k+1}$  中第  $t$  類歐拉有向子圖的數量來表示。

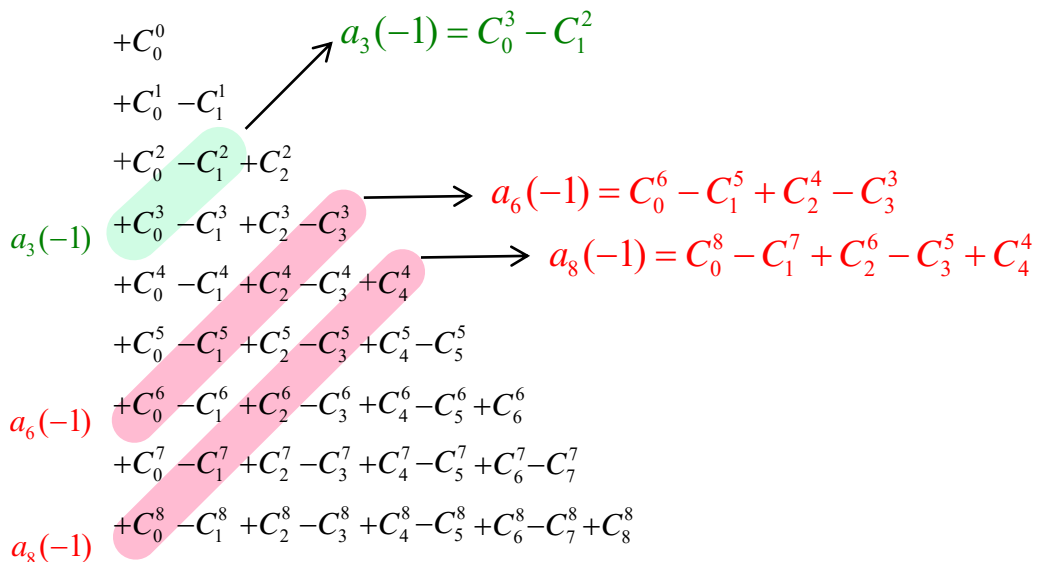


為了進一步探討  $m_k = |\epsilon_{\text{even}}(D_{2k})| - |\epsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|$  的性質，針對帕斯卡三角形，把各項元素靠左對齊排成直角三角形的狀態，將斜排元素搭配交錯的正負號所形成的總和，我們稱為『交錯和』。同時我們引進生成函數的概念，定義以下名詞及符號。

**特殊二項式係數的生成函數  $a_n(x)$**

將帕斯卡三角形排成直角三角形的狀態，從  $C_0^n$  一路往右上方的斜排元素  $\langle C_i^{n-i} \rangle_{i \geq 0}$  依序作為  $x^i$  的係數，定義多項式  $a_n(x) = \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot x^i = C_0^n + C_1^{n-1}x + C_2^{n-2}x^2 + \dots + C_i^{n-i}x^i + \dots$ ，為數列  $\langle C_i^{n-i} \rangle_{i \geq 0}$  所決定的生成函數。

特別的，當  $x = -1$  時， $a_n(-1) = \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot (-1)^i = C_0^n - C_1^{n-1} + C_2^{n-2} - \dots + (-1)^i C_i^{n-i} + \dots$  稱為數列  $\langle C_i^{n-i} \rangle_{i \geq 0}$  的『交錯和』。



根據  $D_{2k}$  中第  $t$  類歐拉有向子圖的性質，可知  $t$  的奇偶性決定了歐拉有向子圖  $D_H$  的奇偶性。利用 Lemma 4 的結論 (3)，再運用上述交錯和的定義，我們有以下引理：

**Lemma 5：**  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})|$  的組合表達式

對任意自然數  $k \geq 2$ ，考慮  $D_{2k}$ ，令歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量差為  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})| = m_k$ ，則：

(1)  $m_k = \sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t-1}^{k+t-1} \right) + \sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t}^{k+t} \right)$ ；

(2)  $m_k = (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1) + (-1)^k \cdot a_{2k}(-1)$ 。

**【證明】：**

(1) 對於定向圖  $D_{2k}$ ，根據  $D_{2k}$  中第  $t$  類歐拉有向子圖的性質，可推得當  $t$  為偶數時，則

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\text{even}}^t(D_{2k}) = \mathcal{E}^t(D_{2k}) \\ \mathcal{E}_{\text{odd}}^t(D_{2k}) = \emptyset \end{cases} ; \text{當 } t \text{ 為奇數時，則 } \begin{cases} \mathcal{E}_{\text{even}}^t(D_{2k}) = \emptyset \\ \mathcal{E}_{\text{odd}}^t(D_{2k}) = \mathcal{E}^t(D_{2k}) \end{cases} \text{。所以可得關係式}$$

$$\begin{cases} |\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} |\mathcal{E}^t(D_{2k})| \\ |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} |\mathcal{E}^t(D_{2k})| \end{cases} \text{。根據 Lemma 4 的結論 (3) 可知歐拉偶奇子圖的數量差，}$$

$$\begin{aligned} m_k &= |\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} |\mathcal{E}^t(D_{2k})| - \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} |\mathcal{E}^t(D_{2k})| \\ &= \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} (C_{k-t-1}^{k+t-1} + C_{k-t}^{k+t}) - \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} (C_{k-t-1}^{k+t-1} + C_{k-t}^{k+t}) = \sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t-1}^{k+t-1} \right) + \sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t}^{k+t} \right) \text{。} \end{aligned}$$

(2) 上述結論說明了定向圖  $D_{2k}$  的歐拉偶奇子圖的數量差， $m_k$  可以表示為一系列的二項式係

數之總和。利用上述的交錯和的定義，可知  $\sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t-1}^{k+t-1} \right) = (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1)$  且

$\sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t}^{k+t} \right) = (-1)^k \cdot a_{2k}(-1)$ 。所以定向圖  $D_{2k}$  的歐拉偶奇子圖的數量差可以表示為

$$m_k = \sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t-1}^{k+t-1} \right) + \sum_{0 \leq t \leq k} \left( (-1)^t C_{k-t}^{k+t} \right) = (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1) + (-1)^k \cdot a_{2k}(-1) \text{。} \blacksquare$$

**生成函數的技巧**

由 Lemma 5 的結論 (2) 可知，對任意自然數  $n$ ，若能確實掌握  $a_n(-1)$  的數值特性，則可進而瞭解偶數 *Wheel* 的歐拉偶奇子圖的數量差是否亦存在特殊性質。以下我們將運用生成函

數的技巧進行後續分析。

**Lemma 6：重複組合數  $H_r^p$  的生成函數**

對任意自然數  $p$ ，序列  $\langle H_r^p \rangle_{r \geq 0}$  決定的生成函數為  $\sum_{r \geq 0} H_r^p \cdot z^r = \frac{1}{(1-z)^p}$ 。

**【證明】：**

因為  $\frac{1}{1-z} = \sum_{i \geq 0} z^i = 1 + z + z^2 + \dots$ ，所以  $\frac{1}{(1-z)^p} = \left(\sum_{i \geq 0} z^i\right)^p = (1 + z + z^2 + \dots)^p$ 。

考慮  $(1 + z + z^2 + \dots)^p$  展開式中  $z^r$  的係數，等價於方程式  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = r$  的非負整數解的個

數，利用重複組合的概念可知  $z^r$  的係數即為  $H_r^p$ ，所以  $\sum_{r \geq 0} H_r^p \cdot z^r = \frac{1}{(1-z)^p}$ 。■

對於數列  $\langle C_i^{n-i} \rangle_{i \geq 0}$  所決定的生成函數  $a_n(x) = \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot x^i$ ，我們試圖再一次利用生成函數的

技巧，將  $a_n(x)$  轉換為一個封閉的表達式。我們有以下引理：

**Lemma 7：  $a_n(x)$  的封閉表達式**

對任意自然數  $n$ ， $\langle C_i^{n-i} \rangle_{i \geq 0}$  決定的生成函數  $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} \right)$ 。

**【證明】：**

令  $\langle a_n(x) \rangle_{n \geq 0}$  所決定的生成函數為  $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \cdot z^n = a_0(x) + a_1(x)z + a_2(x)z^2 + \dots$ 。

因為  $a_n(x) = \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot x^i$ ，所以可得  $\sum_{n \geq 0} a_n(x) \cdot z^n = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot x^i \right) \cdot z^n$ 。

考慮  $\sum_{n \geq 0} a_n(x) \cdot z^n = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot x^i \right) \cdot z^n$  (將  $g(z)$  中的  $a_n(x)$  以  $\sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot x^i$  置換)

$= \sum_{i \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} C_i^{n-i} \cdot z^n \right) \cdot x^i$  (交換  $\sigma$  的順序)

$= \sum_{i \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} C_{n-2i}^{n-i} \cdot z^n \right) \cdot x^i$  (利用餘組合關係  $C_i^{n-i} = C_{n-2i}^{n-i}$ )

$= \sum_{i \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} H_{n-2i}^{i+1} \cdot z^n \right) \cdot x^i$  (將組合數  $C_{n-2i}^{n-i}$  表示為重複組合數  $H_{n-2i}^{i+1}$ )

$= \sum_{i \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} H_{n-2i}^{i+1} \cdot z^{n-2i} \right) \cdot x^i z^{2i}$  (調整變數  $z$  的係數使其與  $H_{n-2i}^{i+1}$  的下標相同)



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \geq 0} \left( \frac{1}{(1-z)^{i+1}} \right) \cdot (xz^2)^i && \left( \text{根據 Lemma 6 可知 } \sum_{n \geq 0} H_{n-2i}^{i+1} \cdot z^{n-2i} = \frac{1}{(1-z)^{i+1}} \right) \\
&= \sum_{i \geq 0} \left( \frac{xz^2}{1-z} \right)^i \cdot \left( \frac{1}{1-z} \right) && \left( \text{調整為公比為 } \frac{xz^2}{1-z} \text{ 的無窮等比級數} \right) \\
&= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-\frac{xz^2}{1-z}} = \frac{1}{1-z-xz^2} && \left( \text{表示為無窮等比級數的和} \right)
\end{aligned}$$

由上述多次將  $g(z)$  的式子轉換後可得  $\sum_{n \geq 0} a_n(x) \cdot z^n = \frac{1}{1-z-xz^2}$ 。考慮因式分解  $1-z-xz^2 = (1-\alpha z)(1-\beta z)$ ，比較係數後，利用根與係數關係可知  $\alpha, \beta$  為  $t^2 - t - x = 0$  中變數  $t$  的

兩根，故  $\begin{cases} \alpha = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \\ \beta = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \end{cases}$ 。我們欲將  $\frac{1}{1-z-xz^2}$  表達為兩個分式  $\frac{1}{1-\alpha z}$  與  $\frac{1}{1-\beta z}$  的線性組合。

令  $\frac{1}{1-z-xz^2} = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}$ ，比較係數後可知  $\begin{cases} A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \\ B = \frac{-\beta}{\alpha-\beta} \end{cases}$ 。

考慮  $\sum_{n \geq 0} a_n(x) \cdot z^n = \frac{1}{1-z-xz^2} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{1-\alpha z} + \frac{-\beta}{\alpha-\beta} \frac{1}{1-\beta z}$  (以  $\alpha, \beta$  表示為兩個分式)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha-\beta} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha z} - \frac{\beta}{1-\beta z} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta} \left( \alpha \sum_{n \geq 0} (\alpha z)^n - \beta \sum_{n \geq 0} (\beta z)^n \right) && \left( \text{將分式轉換為無窮等比級數} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \left( \sum_{n \geq 0} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \cdot z^n \right) \quad \left( \text{合併 } \sigma \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \right) \cdot z^n \quad \left( \text{表示為 } z \text{ 的冪級數} \right)$$

將  $\alpha, \beta$  代入，由此可知， $a_n(x) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} \right)$ 。■

有了  $a_n(x)$  的封閉表達式之後，對任意自然數  $k$ ，我們考慮  $a_{2k}(-1)$  與  $a_{2k+1}(-1)$  的特徵，從中可以證明數列  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  與  $\langle a_{2k+1}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  皆具備循環性，故我們有以下引理：

**Lemma 8 :**  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  與  $\langle a_{2k+1}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  的數列循環性

數列  $\langle a_n(-1) \rangle_{n \geq 1}$  為  $1, 0, -1, -1, 0, 1$  不斷重複的循環數列。

數列  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  為  $0, -1, 1$  不斷重複的循環數列。

數列  $\langle a_{2k+1}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  為  $-1, 0, 1$  不斷重複的循環數列

**【證明】:**

根據 Lemma 7 可知  $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2} \right)^{n+1} \right)$ 。

$$\begin{aligned} \text{所以 } a_n(-1) &= \frac{1}{\sqrt{-3}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \right)^{n+1} \right) && (x = -1 \text{ 代入}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i} \left( \left( \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right)^{n+1} \right) && (\text{將 } \sqrt{-1} \text{ 用虛數單位 } i \text{ 表示}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i} \left( \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)^{n+1} - \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)^{n+1} \right) && (\text{複數的極式}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i} \left( 2i \cdot \sin \frac{(n+1)\pi}{3} \right) && (\text{運用棣美弗定理化簡}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{(n+1)\pi}{3} && (\text{將虛數單位 } i \text{ 約分}) \end{aligned}$$

依序將自然數  $n$  代入後可知數列  $\langle a_n(-1) \rangle_{n \geq 1}$  為  $1, 0, -1, -1, 0, 1$  不斷重複的循環數列。根據  $n$  的奇偶性，以下我們特別考慮數列  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  與  $\langle a_{2k+1}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  的循環性。

因為  $a_{2k}(-1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{3}$ ，所以對於自然數  $k$ ，可知  $\sin \frac{(2k+1)\pi}{3}$  的值依序為  $0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$  不斷重複的循環數列。因此數列  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  為  $0, -1, 1$  不斷重複的循環數列。

因為  $a_{2k+1}(-1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{(2k+2)\pi}{3}$ ，所以對於自然數  $k$ ，可知  $\sin \frac{(2k+2)\pi}{3}$  的值依序為  $\frac{-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$  不斷重複的循環數列。因此數列  $\langle a_{2k+1}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  為  $-1, 0, 1$  不斷重複的循環數列。

$$\begin{aligned}
\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1} &= \langle 0, -1, 1, 0, -1, 1, \dots \rangle \\
\langle a_n(-1) \rangle_{n \geq 1} &= \langle 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, \dots \rangle \\
\langle a_{2k+1}(-1) \rangle_{k \geq 1} &= \langle -1, 0, 1, -1, 0, 1, \dots \rangle
\end{aligned}$$

有了 Lemma 8 的結論，我們則可以分析  $D_{2k}$  的歐拉偶奇子圖的數量差  $m_k$ ，刻畫數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  的規律性，進一步有以下定理：

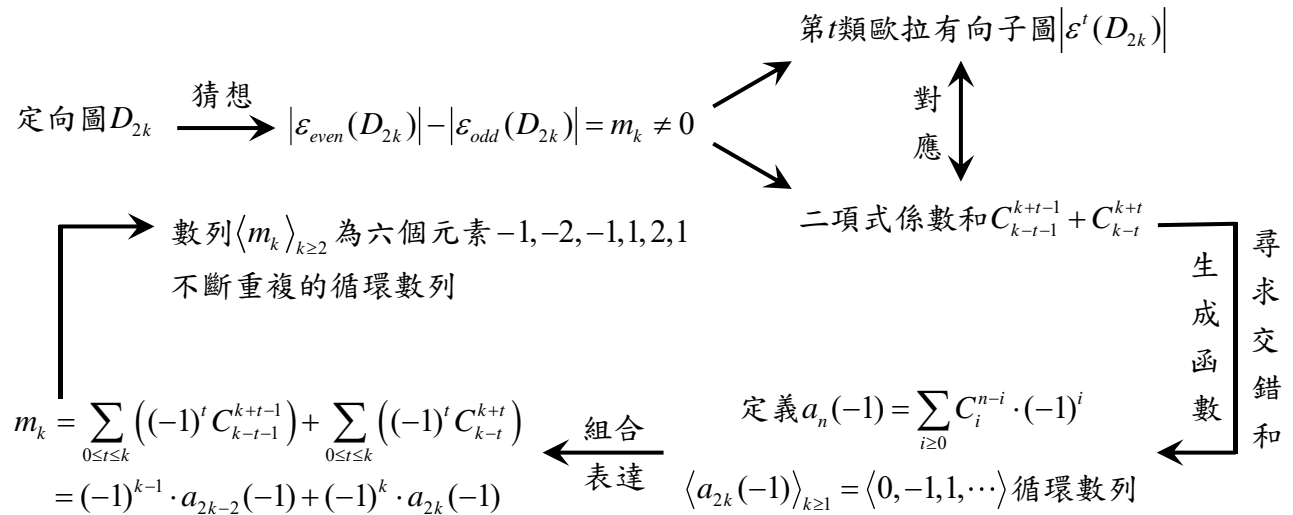
**Theorem 3 :**  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|$  的循環規律  
 對於自然數  $k \geq 2$ ，考慮定向圖  $D_{2k}$ ，令  $m_k = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|$ ，則數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  為六個元素  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$  依序不斷重複的循環數列。

**【證明】：**  
 令  $D_{2k}$  的歐拉偶奇子圖的數量差為  $m_k = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|$ ，數列  $\langle C_i^{n-i} \rangle_{i \geq 0}$  的交錯和為  $a_n(-1) = \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot (-1)^i$ 。根據 Lemma 8 的結論可知，對任意自然數  $k$ ，數列  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  為  $0, -1, 1$  不斷重複的循環數列，故  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 2}$  為  $-1, 1, 0$  不斷重複的循環數列。所以數列  $\langle (-1)^k \cdot a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 2} = \langle -1, -1, 0, 1, 1, 0, \dots \rangle$  為循環數列，其中循環節為  $-1, -1, 0, 1, 1, 0$ ；數列  $\langle (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1) \rangle_{k \geq 2} = \langle 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots \rangle$  亦為循環數列，其中循環節為  $0, -1, -1, 0, 1, 1$ 。根據 Lemma 5 的結論 (2) 可知，任意自然數  $k \geq 2$ ， $m_k = (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1) + (-1)^k \cdot a_{2k}(-1)$ ，所以數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2} = \langle (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1) \rangle_{k \geq 2} + \langle (-1)^k \cdot a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 2} = \langle 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots \rangle + \langle -1, -1, 0, 1, 1, 0, \dots \rangle = \langle -1, -2, -1, 1, 2, 1, \dots \rangle$  也為循環數列，其中循環節的元素為  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$ 。

$$\begin{aligned}
\langle (-1)^k \cdot a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 2} &= \langle -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, \dots \rangle \\
\langle (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1) \rangle_{k \geq 2} &= \langle 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots \rangle \\
\text{數列相加 } \langle m_k \rangle_{k \geq 2} &= \langle -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, \dots \rangle
\end{aligned}$$

Theorem 3 說明著對於偶數 *Wheel* 的定向圖  $D_{2k}$ ，其歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量差  $m_k$ ，隨著  $k$  的增加，會呈現  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$  重複循環的現象。因為數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  中不包含 0 的元

素，所以對任意自然數  $k \geq 2$ ， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|$  恆成立，這意味著定向圖  $D_{2k}$  必為歐拉定向。Theorem 3 的證明即回答了我們所提出『偶數 Wheel 的猜想』。以下為我們對於解決偶數 Wheel 猜想的思路脈絡。



### Chebyshev 第二類多項式的巧遇

高中的數學課程，在三角函數的單元中曾經學過正餘弦的和角公式，然後可以得到兩倍角公式  $\begin{cases} \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$  以及三倍角公式  $\begin{cases} \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{cases}$ 。其中  $\cos 2\theta$  與  $\cos 3\theta$  皆

可以表示成以  $\cos \theta$  為變數的多項式；又因為  $\sin 3\theta = \sin \theta(3 - 4 \sin^2 \theta) = \sin \theta(4 \cos^2 \theta - 1)$ ，所以可以發現  $\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$  與  $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 4 \cos^2 \theta - 1$  兩者也都可以表示成以  $\cos \theta$  為變數的多項

式。事實上，若  $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$  且  $\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = U_{n-1}(\cos \theta)$ ，其中  $T_n(x)$  與  $U_{n-1}(x)$  分別為  $n$  次與

$(n-1)$  次多項式，則考慮和角公式  $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cdot \cos \theta + \cos n\theta \cdot \sin \theta$ ，同除以  $\sin \theta$  後可得  $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta + \cos n\theta = U_{n-1}(\cos \theta) \cdot \cos \theta + T_n(\cos \theta)$  必為以  $\cos \theta$  為變數的  $n$  次多項

式，我們將此多項式記為  $U_n(\cos \theta)$ 。利用和角公式與數學歸納法，可以得知，對任意自然數  $n$ ， $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$  總是能表示成以  $\cos \theta$  為變數的  $n$  次多項式  $U_n(\cos \theta)$ ，意即

$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = U_n(\cos \theta)$ ，我們將此  $n$  次多項式稱為『Chebyshev 第二類多項式』，記為『 $U_n(x)$ 』。

例如：因為  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1$ ，所以  $U_0(x) = 1$ ；因為  $\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$ ，所以  $U_1(x) = 2x$ ；因為  $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 4 \cos^2 \theta - 1$ ，所以  $U_2(x) = 4x^2 - 1$ 。

### Chebyshev 第二類多項式

考慮正弦函數的  $(n+1)$  倍角公式，將  $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$  表示成以  $\cos \theta$  為變數的  $n$  次多項式  $U_n(\cos \theta)$ ，則將此  $n$  次多項式稱為『Chebyshev 第二類多項式』，記為『 $U_n(x)$ 』。

在《Chebyshev 多項式與線性二階遞迴序列之行列表表示法》的文章中〔參考文獻 6〕，介紹了許多有關 Chebyshev 第二類多項式的性質，發現其中與我們先前定義的二項式係數交錯和  $a_n(-1) = \sum_{i \geq 0} C_i^{n-i} \cdot (-1)^i$  有密切的相關性。以下將逐步說明我們如何運用 Chebyshev 第二類多項式來分析二項式係數的交錯和。

首先我們可以利用三角函數的和差化積公式來建立多項式序列  $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  的遞迴關係。

### $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$ 的遞迴關係

多項式序列  $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  有遞迴關係  $U_n(x) = 2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ ， $n \geq 2$ ，其中初始值為  $U_0(x) = 1$  與  $U_1(x) = 2x$ 。

**【證明】：**

三角函數和差化積公式可知  $\sin A + \sin B = 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{A-B}{2} \right)$ 。

故  $\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \sin n\theta \cdot \cos \theta$ ，移項後可得  $\sin(n+1)\theta = 2 \sin n\theta \cdot \cos \theta - \sin(n-1)\theta$ 。

同除  $\sin \theta$  可得關係式  $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = 2 \cdot \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta}$ ，利用 Chebyshev 第二類多項式

來表示可得  $U_n(\cos \theta) = 2 \cdot U_{n-1}(\cos \theta) \cdot \cos \theta - U_{n-2}(\cos \theta)$ ，即可建立多項式序列  $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  的遞

迴關係，當  $n \geq 2$  時， $U_n(x) = 2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$  恆成立，其中  $U_0(x) = 1$  與  $U_1(x) = 2x$ 。■

利用  $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  的遞迴關係，即可列出多項式  $U_0(x)$ ， $U_1(x)$ ， $\dots$ ， $U_7(x)$ ，如下表所示。

$n$	$U_n(x)$	$n$	$U_n(x)$
0	1	4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
1	$2x$	5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
2	$4x^2 - 1$	6	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$	7	$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$

將序列  $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  對應至生成函數  $h(z) = \sum_{n \geq 0} U_n(x) \cdot z^n = U_0(x) + U_1(x)z + U_2(x)z^2 + \dots$ 。利用

$\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  的遞迴關係，則可以求得  $h(z)$  的封閉表達式。

**$\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$  的生成函數表達式  $h(z)$**

$$\text{多項式序列 } \{U_n(x)\}_{n \geq 0} \text{ 決定的生成函數 } h(z) = \sum_{n \geq 0} U_n(x) \cdot z^n = \frac{1}{1 - 2xz + z^2} \text{。}$$

**【證明】：**

$$\begin{aligned} \text{因為 } h(z) &= \sum_{n \geq 0} U_n(x) \cdot z^n = U_0(x) + U_1(x)z + \sum_{n \geq 2} U_n(x) \cdot z^n \\ &= 1 + 2xz + \sum_{n \geq 2} U_n(x) \cdot z^n && \text{(因為 } U_0(x) = 1 \text{ 與 } U_1(x) = 2x \text{)} \\ &= 1 + 2xz + \sum_{n \geq 2} (2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)) \cdot z^n && \text{(因為 } U_n(x) = 2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \text{)} \\ &= 1 + 2xz + 2x \sum_{n \geq 2} U_{n-1}(x) \cdot z^n - \sum_{n \geq 2} U_{n-2}(x) \cdot z^n && \text{(將 } \sigma \text{ 拆開)} \\ &= 1 + 2xz + 2x \left( \sum_{n \geq 1} U_{n-1}(x) \cdot z^n - z \right) - \sum_{n \geq 2} U_{n-2}(x) \cdot z^n && \text{(調整 } n \text{ 的範圍搭配 } U \text{ 的下標)} \\ &= 1 + 2xz + 2x \left( z \cdot \sum_{n \geq 1} U_{n-1}(x) \cdot z^{n-1} - z \right) - z^2 \cdot \sum_{n \geq 2} U_{n-2}(x) \cdot z^{n-2} && \text{(調整 } z \text{ 的次方)} \\ &= 1 + 2xz + 2x(z \cdot h(z) - z) - z^2 \cdot h(z) && \text{(將 } \sigma \text{ 整合為生成函數 } h(z) \text{)} \end{aligned}$$

由此可得  $(1 - 2xz + z^2)h(z) = 1$ ，故  $h(z) = \frac{1}{1 - 2xz + z^2}$ 。■

有了封閉表達式  $h(z) = \frac{1}{1 - 2xz + z^2}$ ，則可進一步由  $z^n$  的係數，求得  $U_n(x)$  的封閉表達式。

### $U_n(x)$ 的封閉表達式

$$\text{Chebyshev 第二類多項式 } U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}。$$

【證明】：

$$\text{令 } h(z) = \sum_{n \geq 0} U_n(x) \cdot z^n = \frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z}。$$

$$\text{針對分母與分子比較係數後可得 } \begin{cases} \alpha = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \beta = x - \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \text{ 與 } \begin{cases} A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \\ B = \frac{-\beta}{\alpha - \beta} \end{cases}。$$

$$\text{故 } h(z) = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z} = A \cdot \sum_{n \geq 0} (\alpha z)^n + B \cdot \sum_{n \geq 0} (\beta z)^n = \sum_{n \geq 0} (A\alpha^n + B\beta^n) z^n。$$

$$\text{觀察 } z^n \text{ 的係數，可知 } U_n(x) = A\alpha^n + B\beta^n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}。 \blacksquare$$

上述 Chebyshev 第二類多項式  $U_n(x)$  的封閉表達式中，涉及到  $\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$  的形式。此時

Girard-Waring Formula 說明了  $\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$  的形式可以使用二項式係數來表達其值 [參考文獻

10]，其公式為一個組合恆等式，敘述如下。

### Girard-Waring Formula

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_k^{n-k} \cdot (a+b)^{n-2k} (ab)^k。$$

有了 Girard-Waring Formula 做為橋樑，我們即可以將 Chebyshev 第二類多項式  $U_n(x)$  與二項式係數建立特殊關係，進一步可以連結至二項式係數的交錯和。

### $U_n(x)$ 與二項式係數交錯和

$$(1) U_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_k^{n-k} \cdot (2x)^{n-2k} ; \quad (2) U_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_k^{n-k} = a_n(-1)。$$

【證明】：

$$(1) \text{ 因為 } U_n(x) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, \text{ 其中 } \begin{cases} \alpha = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \beta = x - \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}, \text{ 可知 } \begin{cases} \alpha + \beta = 2x \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}。$$

$$\text{根據 Girard-Waring Formula 可知 } U_n(x) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_k^{n-k} \cdot (2x)^{n-2k} (1)^k。$$

$$(2) \text{ 利用上述結論，將 } x = \frac{1}{2} \text{ 帶入 } U_n(x) \text{ 可得函數值 } U_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_k^{n-k}, \text{ 即為二項式係}$$

數交錯和  $a_n(-1)$ 。■

$$\text{根據 } U_n(x) \text{ 的封閉表達式 } U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ 所以函數值}$$

$$U_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{-3}{4}}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{n+1}}{\sqrt{3}i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin(n+1)\pi}{3}。 \text{ 綜合以}$$

$$\text{上關係可知 } U_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_k^{n-k} = a_n(-1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin(n+1)\pi}{3}, \text{ 由此也可推得數列 } \langle a_n(-1) \rangle_{n \geq 1}$$

為  $1, 0, -1, -1, 0, 1$  不斷重複的循環數列，此與 Lemma 8 所得的結果相同，而 Lemma 8 是我們證明『偶數 *Wheel* 的猜想』的重要基石。起初我們定義了二項式係數的生成函數  $a_n(x) = \sum_{k \geq 0} C_k^{n-k} \cdot x^k$ ，利用生成函數的技巧求得了  $a_n(x)$  的封閉表達式，從函數值  $a_n(-1)$  分析出數列  $\langle a_n(-1) \rangle_{n \geq 1}$  的循環性，最後證明出定向圖  $D_{2k}$  必為歐拉定向。然而在學習了更多的高等組合知識之後，意外的從『Chebyshev 第二類多項式』連結『Girard-Waring Formula』也可以得到我們 Lemma 8 的結論，更可以從中欣賞到組合數學結構的美妙。

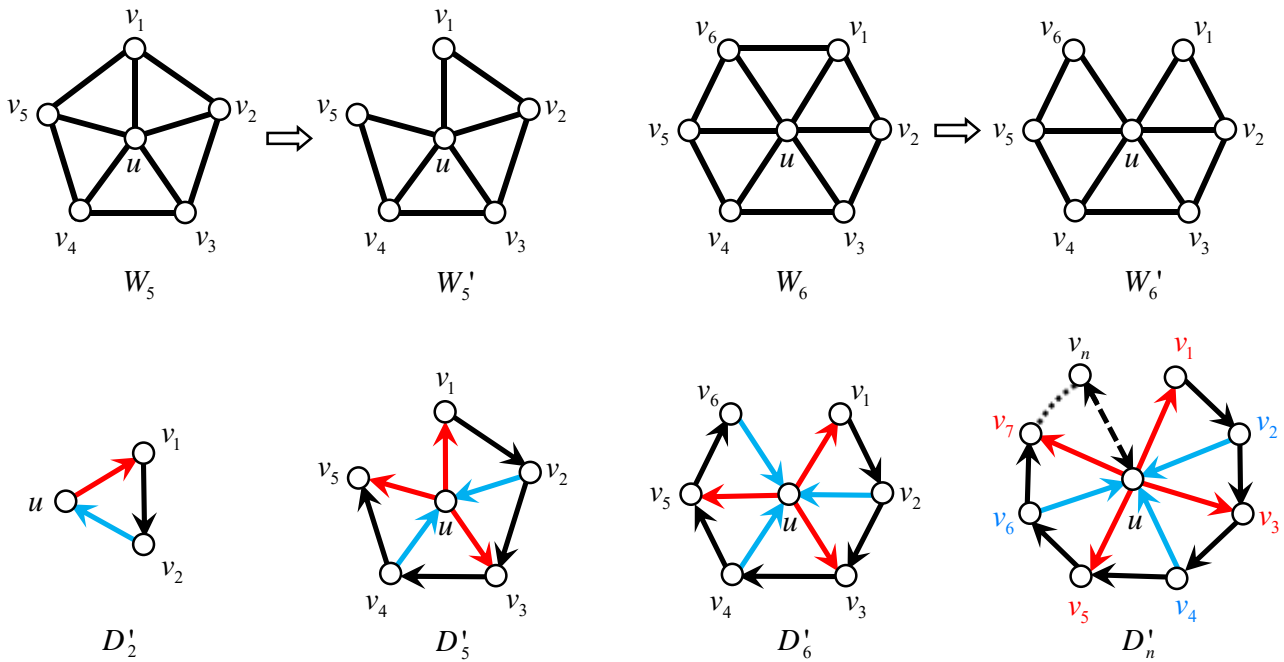
#### 四、Fan 定向圖的探討

在瞭解了 *Wheel* 定向圖的歐拉有向子圖數量之後，我們欲探討跟 *Wheel* 相近的圖形。若將 *Wheel* 外圍圈上的一條邊刪除，我們將對於這類的圖形，賦予特殊定向，探討其歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的個數。



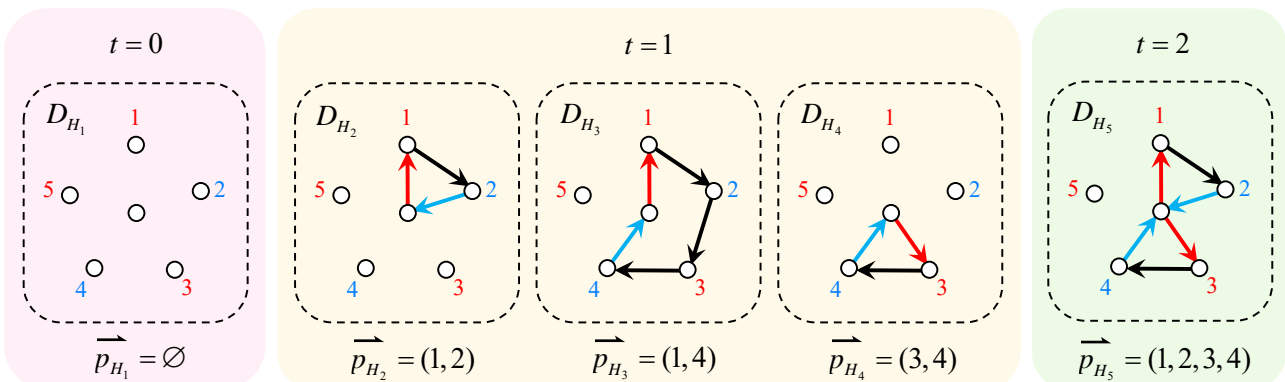
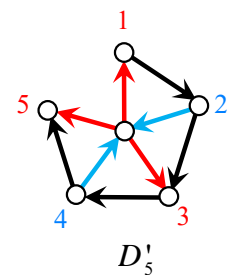
### Fan 的特殊定向

當  $n \geq 3$ ，考慮 *Wheel* 圖形  $W_n$ ，將  $W_n$  外圍的一條邊刪除，所得的圖形稱為『*Fan*』，符號記為『 $W'_n$ 』。不失一般性，令刪除的邊為  $v_n v_1$ ，意即  $E(W'_n) = E(W_n) - \{v_n v_1\}$ 。若  $n$  為奇數，則稱  $W'_n$  為奇數 *Fan*；若  $n$  為偶數，則稱  $W'_n$  為偶數 *Fan*。考慮  $W_n$  的特殊定向  $D_n$ ，將  $D_n$  刪除有向邊  $(v_n, v_1)$  後所得的定向圖定義為『 $D'_n$ 』，意即  $E(D'_n) = E(D_n) - \{(v_n, v_1)\}$ ，可知  $D'_n$  即為  $W'_n$  的一個特殊定向。特別的，我們定義  $V(D'_2) = \{u, v_1, v_2\}$  與  $E(D'_2) = \{(u, v_1), (v_1, v_2), (v_2, u)\}$ 。

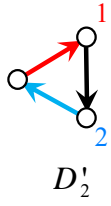


### Fan 的歐拉有向子圖數量刻畫

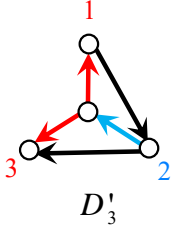
考慮 *Fan* 的特殊定向  $D'_n$ ，我們也可以用代表向量的方式來表示歐拉有向子圖。考慮  $D'_n$  的歐拉有向子圖  $D'_H$ ，若  $E(D'_H)$  共有  $t$  條由點  $u$  指出去的有向邊，則稱  $D'_H$  為『第  $t$  類』，此外  $\vec{p}_H$  亦稱為第  $t$  類代表向量。下圖為  $D'_5$  的所有歐拉有向子圖與其代表向量。



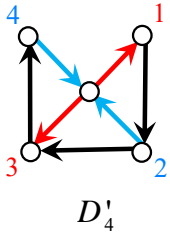
對於  $Fan$  的定向圖  $D'_2$ ,  $D'_3$ ,  $D'_4$  與  $D'_5$ , 我們將每一類的代表向量用表格呈現如下。



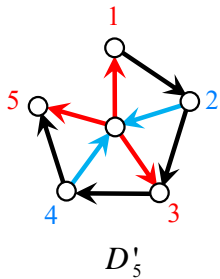
	$t=0$	$t=1$	$total$
$\varepsilon_{even}(D'_2)$	$\emptyset$		1
$\varepsilon_{odd}(D'_2)$		(1,2)	1



	$t=0$	$t=1$	$total$
$\varepsilon_{even}(D'_3)$	$\emptyset$		1
$\varepsilon_{odd}(D'_3)$		(1,2)	1



	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$total$
$\varepsilon_{even}(D'_4)$	$\emptyset$		(1,2,3,4)	2
$\varepsilon_{odd}(D'_4)$		(1,2) (1,4) (3,4)		3



	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$total$
$\varepsilon_{even}(D'_5)$	$\emptyset$		(1,2,3,4)	2
$\varepsilon_{odd}(D'_5)$		(1,2) (1,4) (3,4)		3

從上述表格可以發現,  $D'_2$  與  $D'_3$  的各類代表向量具有一致性, 而  $D'_4$  與  $D'_5$  亦為如此。利用 Theorem 2 與 Lemma 5, 對於  $Fan$  的特殊定向圖  $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$  我們有以下定理:

**Theorem 4:  $Fan$  的歐拉有向子圖的刻畫**

對於自然數  $k$ , 考慮  $Fan$  的特殊定向圖  $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$ , 令  $m'_k = |\varepsilon_{even}(D'_{2k})| - |\varepsilon_{odd}(D'_{2k})|$ , 則:

(1)  $|\varepsilon_{even}(D'_{2k})| = |\varepsilon_{even}(D'_{2k+1})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} C_{k-t}^{k+t}$  與  $|\varepsilon_{odd}(D'_{2k})| = |\varepsilon_{odd}(D'_{2k+1})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} C_{k-t}^{k+t}$ ;

(2)  $m'_k = (-1)^k \cdot a_{2k}(-1)$  且數列  $\langle m'_k \rangle_{k \geq 1}$  為六個元素 0, -1, -1, 0, 1, 1 依序重複的循環數列;

(3)  $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$  為歐拉定向的充分必要條件為  $k \equiv 0$  或  $2 \pmod{3}$ 。

**【證明】：**

(1) 對任意自然數  $n \geq 2$ ，考慮  $D'_n$  的歐拉有向子圖  $D'_H$ ，因為  $(v_n, v_1) \notin E(D'_n)$ ，所以  $D'_H$  的代表向量  $\vec{p}$  的第一個分量必為奇數；特別的，當  $E(D'_H) = \emptyset$  時，則  $D'_H$  的代表向量  $\vec{p} = \emptyset$ 。由此可知，對任意  $0 \leq t \leq k$ ， $|\mathcal{E}^t(D'_{2k+1})| = \alpha'_{2k+1}$  恆成立。

因為  $D'_n$  中的有向圈的邊數皆為奇數，若  $D'_H \in \mathcal{E}^t(D'_n)$ ，則  $D'_H$  的邊集合可視為若干個有向圈的聯集。由此可知，若  $t$  為偶數，則  $D'_H$  必為第  $t$  類歐拉偶子圖，意即  $D'_H \in \mathcal{E}'_{even}(D'_n) = \mathcal{E}^t(D'_n)$ ；若  $t$  為奇數，則  $D'_H$  必為第  $t$  類歐拉奇子圖，意即  $D'_H \in \mathcal{E}'_{odd}(D'_n) = \mathcal{E}^t(D'_n)$ 。

對於自然數  $k$ ，考慮  $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$ ，因為  $D'_{2k+1}$  的歐拉有向子圖必不包含有向邊  $(u, v_{2k+1})$ ，所以  $D'_H \in \mathcal{E}^t(D'_{2k+1})$  的充分必要條件為  $D'_H \in \mathcal{E}^t(D'_{2k})$ ，其中  $0 \leq t \leq k$ 。由此可知  $\mathcal{E}'_{even}(D'_{2k}) = \mathcal{E}'_{even}(D'_{2k+1})$  且  $\mathcal{E}'_{odd}(D'_{2k}) = \mathcal{E}'_{odd}(D'_{2k+1})$ 。故可得  $|\mathcal{E}'_{even}(D'_{2k})| = |\mathcal{E}'_{even}(D'_{2k+1})|$  且  $|\mathcal{E}'_{odd}(D'_{2k})| = |\mathcal{E}'_{odd}(D'_{2k+1})|$ 。

由 Theorem 2 的結論 (1) 可知  $\alpha'_{2k+1} = C_{k-t}^{k+t}$ 。綜合上述討論的性質可得

$$\begin{cases} |\mathcal{E}'_{even}(D'_{2k})| = |\mathcal{E}'_{even}(D'_{2k+1})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} |\mathcal{E}^t(D'_{2k+1})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} \alpha'_{2k+1} = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} C_{k-t}^{k+t} \\ |\mathcal{E}'_{odd}(D'_{2k})| = |\mathcal{E}'_{odd}(D'_{2k+1})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} |\mathcal{E}^t(D'_{2k+1})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} \alpha'_{2k+1} = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} C_{k-t}^{k+t} \end{cases}。$$

(2) 根據結論 (1) 可知  $m'_k = |\mathcal{E}'_{even}(D'_{2k})| - |\mathcal{E}'_{odd}(D'_{2k})| = \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為偶數}}} C_{k-t}^{k+t} - \sum_{\substack{0 \leq t \leq k \\ t \text{ 為奇數}}} C_{k-t}^{k+t} = \sum_{0 \leq t \leq k} (-1)^t C_{k-t}^{k+t}$ 。

根據我們先前定義的二項式係數交錯和，可知  $\sum_{0 \leq t \leq k} (-1)^t C_{k-t}^{k+t} = (-1)^k \cdot a_{2k}(-1)$ ，其推導過程

可參考 Lemma 5 的結論 (2)。所以  $m'_k = (-1)^k \cdot a_{2k}(-1)$ 。再根據 Lemma 5 的結論 (2)

可知  $\langle a_{2k}(-1) \rangle_{k \geq 1}$  為  $0, -1, 1$  不斷重複的循環數列，因此  $\langle m'_k \rangle_{k \geq 1}$  為六個元素  $0, -1, -1, 0, 1, 1$  依序重複的循環數列。

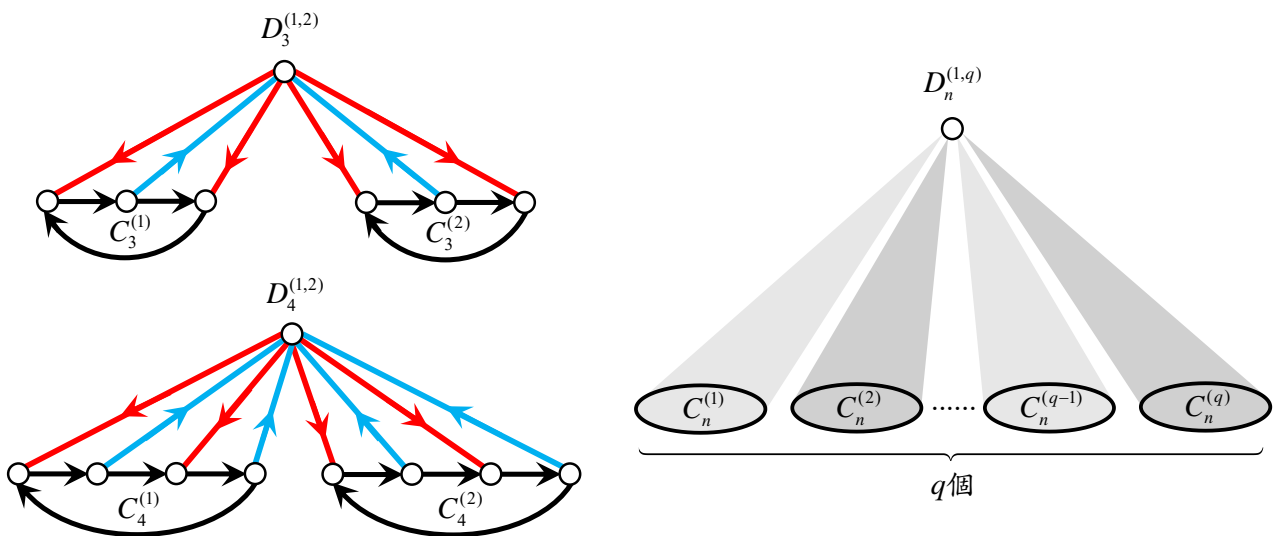
(3) 考慮  $k \equiv 0$  或  $2 \pmod{3}$ 。根據結論 (2) 可知  $m'_k \neq 0$ ，意即  $|\varepsilon_{\text{even}}(D'_{2k})| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D'_{2k})|$ 。再根據結論 (1) 可知， $|\varepsilon_{\text{even}}(D'_{2k+1})| \neq |\varepsilon_{\text{odd}}(D'_{2k+1})|$ 。故  $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$  皆為歐拉定向。此外，當  $k \equiv 1 \pmod{3}$  時， $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$  皆非歐拉定向。■

### 五、Wheel 定向圖的推廣

*Wheel* 的結構包含『外圍的圈  $C_n$ 』以及『內部  $u$  點』，遵循 *Wheel* 定向圖  $D_n$  的架構，我們開始研究推廣後的定向圖，推廣的面向包含『複製外圍的圈』以及『複製內部  $u$  點』。接下來針對推廣後的定向圖，探討其歐拉有向子圖的數量以及成為歐拉定向的可能性。

#### 定向圖 $D_n^{(1,q)}$ 的定義

考慮定向圖  $D_n$ ，將外圍有向圈複製為  $q$  個，每一個有向圈皆保留與點  $u$  的定向關係，將推廣後的圖形記為『 $D_n^{(1,q)}$ 』。令  $q$  個長度為  $n$  的有向圈為  $\{C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \dots, C_n^{(q)}\}$ ，其中  $V(C_n^{(i)}) = \{v_{i,j} : j=1, 2, \dots, n\}$ ， $E(C_n^{(i)}) = \{(v_{i,j}, v_{i,j+1}) : j=1, 2, \dots, n-1\} \cup \{(v_{i,n}, v_{i,1})\}$ ， $i=1, 2, \dots, q$ ，則將點  $u$  與圈  $C_n^{(i)}$  所決定的 *Wheel* 定向圖記定義為『 $D_n^{(i)}$ 』，意即  $V(D_n^{(i)}) = \{u\} \cup V(C_n^{(i)})$  且  $E(D_n^{(i)}) = E(C_n^{(i)}) \cup \{(u, v_{i,j}) : j \text{ 為奇數}\} \cup \{(v_{i,j}, u) : j \text{ 為偶數}\}$ 。因此對於推廣後的定向圖  $D_n^{(1,q)}$ ，其點集合為  $V(D_n^{(1,q)}) = \{u\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q} V(C_n^{(i)})$ ，邊集合為  $E(D_n^{(1,q)}) = \bigcup_{1 \leq i \leq q} E(D_n^{(i)})$ ，亦可記為  $D_n^{(1,q)} = \bigcup_{1 \leq i \leq q} D_n^{(i)}$ 。特別的， $D_n^{(1,1)} = D_n$ 。



### 定向圖 $D_n^{(1,q)}$ 的歐拉有向子圖

在 Theorem 1 中，我們已經得知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1})| = F_{2k+1}$ ，利用這個結果，則可以刻畫  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1}^{(1,q)})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1}^{(1,q)})|$  的數量，進而判斷是否為歐拉定向。在 Theorem 3 中，令  $m_k = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|$ ，我們已經得知數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  為六個元素  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$  依序不斷重複的循環數列，進一步則可以刻畫  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k}^{(1,q)})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k}^{(1,q)})|$  的數量差異。我們有以下定理：

#### Theorem 5： $D_n^{(1,q)}$ 的歐拉有向子圖的刻畫

考慮特殊定向圖  $D_{2k+1}^{(1,q)}$  與  $D_{2k}^{(1,q)}$ ，令  $F_{2k+1}$  為費氏數列的第  $2k+1$  項，則

- (1) 對自然數  $k \geq 1$ ， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = 2^{q-1} \cdot (F_{2k+1})^q$ ，意即  $D_{2k+1}^{(1,q)}$  皆非歐拉定向；
- (2) 對自然數  $k \geq 2$ ，令  $m_k^{(1,q)} = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k}^{(1,q)})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k}^{(1,q)})|$ ，數列  $\langle m_k^{(1,q)} \rangle_{k \geq 2} = \langle (m_k)^q \rangle_{k \geq 2}$ ，意即  $D_{2k}^{(1,q)}$  皆為歐拉定向。

#### 【證明】：

- (1) 因為  $D_{2k+1}^{(1,q)}$  可視為  $\{D_{2k+1}^{(i)} : i = 1, 2, \dots, q\}$  的聯集，所以  $D_{2k+1}^{(1,q)}$  的歐拉有向子圖  $D_H^{(1,q)}$  亦可視為  $\{D_{H_i}^{(i)} \in \varepsilon(D_{2k+1}^{(i)}) : i = 1, 2, \dots, q\}$  的聯集。因此對於  $i = 1, 2, \dots, q$ ， $|E(D_{H_i}^{(i)})|$  的奇偶性即決定  $|E(D_H^{(1,q)})|$  的奇偶性。令  $D_H^{(1,q)} = \bigcup_{1 \leq i \leq q} D_{H_i}^{(i)}$ ，若  $\{D_{H_i}^{(i)} \in \varepsilon(D_{2k+1}^{(i)}) : i = 1, 2, \dots, q\}$  中恰有偶數個為歐拉奇子圖，則  $D_H^{(1,q)}$  即為  $D_{2k+1}^{(1,q)}$  的歐拉偶子圖，反之亦然。因此考慮  $\{D_{H_i}^{(i)} \in \varepsilon(D_{2k+1}^{(i)}) : i = 1, 2, \dots, q\}$  這  $q$  個歐拉有向子圖中，歐拉偶子圖與歐拉奇子圖各別的數量，即可利用組合數以及重複排列的觀念來分析  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1}^{(1,q)})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1}^{(1,q)})|$ 。

根據 Theorem 1 的結論 (2) 可知， $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1}^{(i)})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1}^{(i)})| = F_{2k+1}$ ，所以

$$\begin{cases} |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為偶數}}} C_s^q \cdot (F_{2k+1})^{q-s} \cdot (F_{2k+1})^s = (F_{2k+1})^q \cdot \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為偶數}}} C_s^q \\ |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為奇數}}} C_s^q \cdot (F_{2k+1})^{q-s} \cdot (F_{2k+1})^s = (F_{2k+1})^q \cdot \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為奇數}}} C_s^q \end{cases} .$$

利用二項式定理可知  $\sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為偶數}}} C_s^q = \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為奇數}}} C_s^q = 2^{q-1}$ ，由此可得

$$|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = 2^{q-1} \cdot (F_{2k+1})^q，這即表示對任意自然數  $k$ ， $D_{2k+1}^{(1,q)}$  皆非歐拉定向。$$

(2) 因為對於  $i=1,2,\dots,q$  ,  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k}^{(i)})| = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})|$  且  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k}^{(i)})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|$  恆成立, 所以利用

$$\text{與結論 (1) 相同的概念, 可知 } \begin{cases} |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k}^{(1,q)})| = \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為偶數}}} C_s^q \cdot |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})|^{q-s} \cdot |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|^s \\ |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k}^{(1,q)})| = \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \text{ 為奇數}}} C_s^q \cdot |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})|^{q-s} \cdot |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|^s \end{cases} .$$

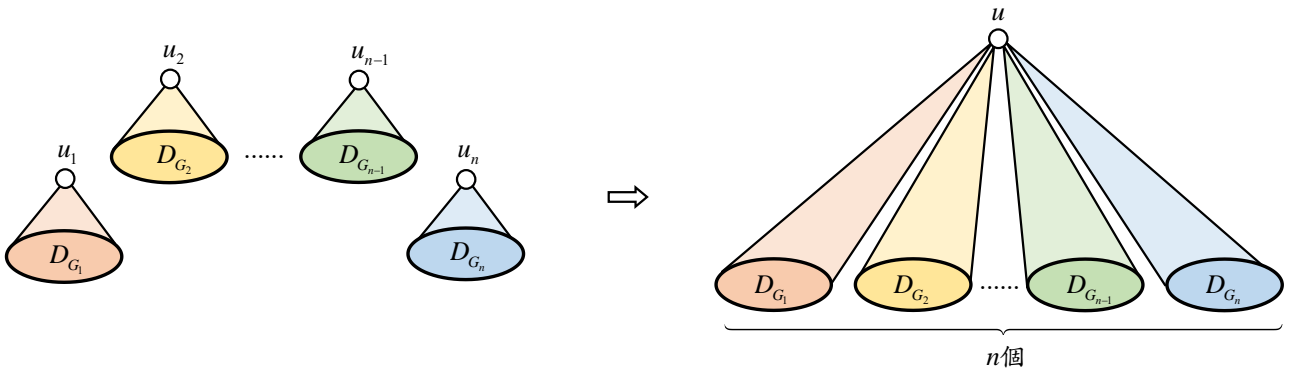
將兩式相減, 利用二項式定理可知  $m_k^{(1,q)} = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k}^{(1,q)})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k}^{(1,q)})|$   
 $= \sum_{0 \leq s \leq q} C_s^q \cdot |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})|^{q-s} \cdot (-1)^s |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})|^s = \left( |\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k})| \right)^q = (m_k)^q$  . 因此數列

$\langle m_k^{(1,q)} \rangle_{k \geq 2} = \langle (m_k)^q \rangle_{k \geq 2}$  . 根據 Theorem 3 可知數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  為六個元素  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$  依序

不斷重複的循環數列, 所以數列  $\langle m_k^{(1,q)} \rangle_{k \geq 2}$  亦為元素皆不為零的循環數列, 意即

$|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k}^{(1,q)})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k}^{(1,q)})| \neq 0$  , 故  $D_{2k}^{(1,q)}$  皆為歐拉定向。■

對於 Theorem 5 中所討論定向圖  $D_n^{(1,q)}$  的結構, 進一步我們將這樣的圖形結構一般化。給定  $n$  個有向圖  $D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  , 其中  $u_i \in V(D_{G_i})$  ,  $i=1,2,\dots,n$  . 將  $u_1, u_2, \dots, u_n$  合併為一個點  $u$  , 則  $D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  可合併為一個新的有向圖, 將新的有向圖記為  $\lceil D_{(G_1+G_2+\dots+G_n)} = D_{G^*} \rceil$  .



利用  $D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  的歐拉有向子圖數量, 我們亦可以刻畫  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*})|$  的值, 並得知  $D_{G^*}$  為歐拉定向的充分必要條件, 故有以下定理:

**Theorem 6 :**  $D_{(G_1+G_2+\dots+G_n)}$  的歐拉有向子圖的刻畫

考慮  $n$  個有向圖  $D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  , 令  $D_{G^*} = D_{(G_1+G_2+\dots+G_n)}$  , 則

$$(1) \quad \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*}) \right| = \prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right) ,$$

意即  $D_{G^*}$  為歐拉定向  $\Leftrightarrow D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  皆為歐拉定向 ;

$$(2) \quad \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*}) \right| = \frac{1}{2} \left( \prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| + \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right) + \prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right) \right) ,$$

$$\left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*}) \right| = \frac{1}{2} \left( \prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| + \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right) - \prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right) \right) .$$

**【證明】:**

(1) 因為  $D_{G^*}$  可視為  $\{D_{G_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$  的聯集, 所以  $D_{G^*}$  的歐拉有向子圖  $D_{H^*}$  亦可視為

$\{D_{H_i} \in \varepsilon(D_{G_i}) : i = 1, 2, \dots, n\}$  的聯集。因此對於  $i = 1, 2, \dots, n$  ,  $|E(D_{H_i})|$  的奇偶性即決定

$|E(D_{H^*})|$  的奇偶性。令  $D_{H^*} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} D_{H_i}$  , 若  $\{D_{H_i} \in \varepsilon(D_{G_i}) : i = 1, 2, \dots, n\}$  中恰有偶數個為歐拉

奇子圖, 則  $D_{H^*}$  即為  $D_{G^*}$  的歐拉偶子圖, 反之亦然。因此考慮  $\{D_{H_i} \in \varepsilon(D_{G_i}) : i = 1, 2, \dots, n\}$

這  $n$  個歐拉有向子圖中, 歐拉偶子圖與歐拉奇子圖各別的數量, 即可利用組合數以及重複排列的觀念來分析  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*})|$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*})|$  。

考慮  $\prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right)$  的展開式, 在分配律的過程中, 若所得該項乘積的值为

正數, 則表示  $n$  個刮號中共有偶數個刮號是使用  $-\left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right|$  作為分配律該項的乘積, 也

就是  $\{D_{H_i} \in \varepsilon(D_{G_i}) : i = 1, 2, \dots, n\}$  中有特定偶數個為奇子圖且其餘皆為偶子圖的所有可能性。

因此展開式在分配律中的過程中, 考慮乘積的值为正數的所有總和, 即為  $D_{G^*}$  的歐

拉偶子圖數  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*})|$  ; 考慮乘積的值为負數的所有總和之絕對值, 即為  $D_{G^*}$  的歐拉奇子

圖數  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*})|$  。由此可知  $\prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right) = \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*}) \right|$  。

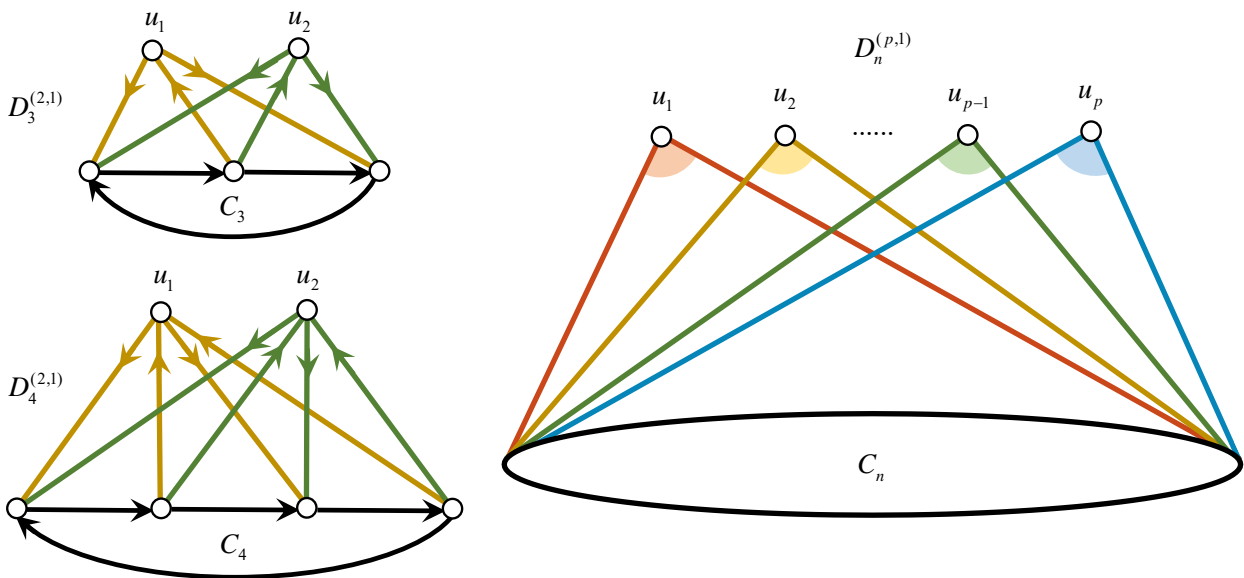
利用上述等式, 可知當  $D_{G^*}$  為歐拉定向, 則  $\prod_{i=1}^n \left( \left| \varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i}) \right| - \left| \varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i}) \right| \right) \neq 0$  , 故對任意

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $(|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i})|) \neq 0$  恆成立, 這表示  $D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  皆為歐拉定向。  
 反之, 當  $D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  皆為歐拉定向, 則對任意  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $(|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i})|) \neq 0$  恆成立, 故  $\prod_{i=1}^n (|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i})|) \neq 0$ , 這表示  $D_{G^*}$  為歐拉定向。

(2) 根據結論 (1) 可知  $\begin{cases} \prod_{i=1}^n (|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i})|) = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*})| - |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*})| \\ \prod_{i=1}^n (|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G_i})| + |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G_i})|) = |\varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*})| + |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*})| \end{cases}$ 。考慮兩式相加  
 的一半, 即為  $D_{G^*}$  的歐拉偶子圖數  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{G^*})|$ ; 考慮兩式相減的一半, 即為  $D_{G^*}$  的歐拉奇子圖數  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{G^*})|$ 。■

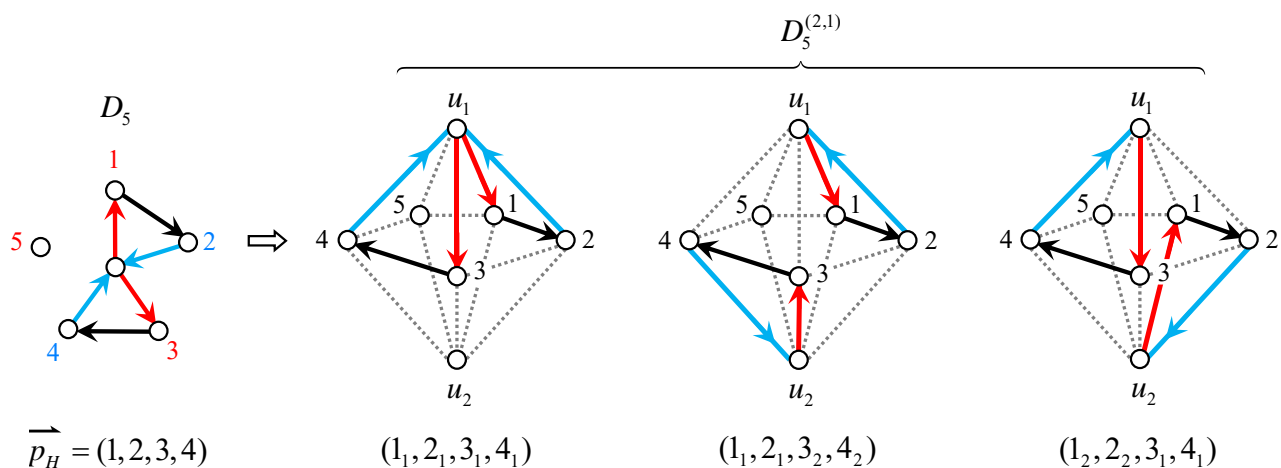
**定向圖  $D_n^{(p,1)}$  的定義**

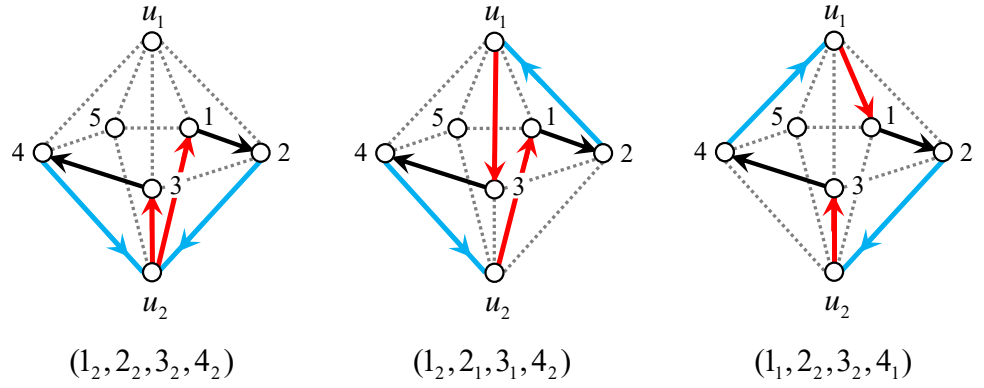
考慮定向圖  $D_n$ , 將點  $u$  複製為  $p$  個, 記為  $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ , 每一個點  $u_i$  皆保留與有向圈  $C_n$  的定向關係, 將推廣後的圖形記為  $\mathbb{F} D_n^{(p,1)}$ 。令  $E(C_n) = \{(v_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$ , 對於推廣後的定向圖  $D_n^{(p,1)}$ , 其點集合為  $V(D_n^{(p,1)}) = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \cup V(C_n)$ , 邊集合為  $E(D_n^{(p,1)}) = E(C_n) \cup \bigcup_{1 \leq i \leq p} (\{(u_i, v_j) : j \text{ 為奇數}\} \cup \{(v_j, u_i) : j \text{ 為偶數}\})$ 。特別的,  $D_n^{(1,1)} = D_n$ 。





我們發現可以由  $D_5$  的歐拉有向子圖來延伸變化，從中對應出  $D_5^{(p,1)}$  所有的歐拉有向子圖。因為在  $D_5^{(p,1)}$  中有  $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  可以進行不同的選擇，所以對於  $D_5$  的歐拉有向子圖  $D_H$ ， $D_H$  中連續一對在點  $u$  進出的有向邊，在  $D_5^{(p,1)}$  中皆可以將原本的點  $u$  變換成  $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  其中之一。變換之後，所得的有向子圖  $D_H^{(p,1)}$  亦為  $D_5^{(p,1)}$  的歐拉有向子圖。我們將上述的概念透過代表向量的方式來詮釋，給定  $D_5$  的代表向量  $\vec{p}_H$ ， $\vec{p}_H$  中相鄰的一對數字就表示在點  $u$  進出的一對有向邊，因此根據相鄰數字的分組狀況， $\vec{p}_H$  可以變換成兩種型態，若相鄰的一對數字皆為『先奇數後偶數(奇,偶)』，則稱為『**第一型**』；若相鄰的一對數字皆為『先偶數後奇數(偶,奇)』，則稱為『**第二型**』。例如  $\vec{p}_H = (1,2,3,4)$  可以分類為第一型  $((1,2),(3,4))$  與第二型  $(1,(2,3),4)$  (這裡我們特別將頭尾的1,4也視為相鄰)。相鄰的一對數字  $(r,s)$  對應的兩條有向邊在  $D_5^{(p,1)}$  中皆可以選擇  $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  其中之一，若將點  $u$  變換為  $u_i$ ，則將序對  $(r,s)$  變換為  $(r_i, s_i)$ 。因此若  $\vec{p}_H = (1,2,3,4)$  中的第一型  $((1,2),(3,4))$ ，序對  $(1,2)$  選擇  $u_i$ ，序對  $(3,4)$  選擇  $u_j$ ，則  $\vec{p}_H = (1,2,3,4)$  即可變換為  $\vec{p}_{H'} = (1_i, 2_i, 3_j, 4_j)$ ；若  $\vec{p}_H = (1,2,3,4)$  中的第二型  $(1,(2,3),4)$ ，序對  $(2,3)$  選擇  $u_i$ ，序對  $(4,1)$  選擇  $u_j$ ，則  $\vec{p}_H = (1,2,3,4)$  即可變換為  $\vec{p}_{H'} = (1_j, 2_i, 3_i, 4_j)$ 。不論是哪一種型態，可知  $\vec{p}_{H'}$  所對應的有向子圖  $D_H^{(p,1)}$  皆必為  $D_5^{(p,1)}$  的歐拉有向子圖，並將  $\vec{p}_{H'}$  稱為  $D_H^{(p,1)}$  的代表向量。不難得知， $D_5^{(p,1)}$  中所有歐拉有向子圖所決定的代表向量必可由  $D_5$  的代表向量變換而來。下圖羅列出  $D_5$  中的代表向量  $\vec{p}_H = (1,2,3,4)$  變換為  $D_5^{(2,1)}$  的代表向量之所有情形。





(將  $D_5$  中  $\vec{p}_H = (1, 2, 3, 4)$  變換為  $D_5^{(2,1)}$  中不同的 6 個歐拉有向子圖)

對於特殊定向圖  $D_5^{(p,1)}$  與  $D_4^{(p,1)}$ ，利用代表向量的變換，我們有以下定理：

**Theorem 7：  $D_5^{(p,1)}$  與  $D_4^{(p,1)}$  的歐拉有向子圖的刻畫**

考慮特殊定向圖  $D_n^{(p,1)}$ ，其中  $n = 4, 5$ ，下列性質恆成立

- (1) 若  $t \geq 1$ ， $D_H \in \mathcal{E}_{even}^t(D_n)$ ，則  $D_H$  可以對應出相異  $(2p^t - p)$  個  $D_n^{(p,1)}$  的歐拉偶子圖；  
若  $t \geq 1$ ， $D_H \in \mathcal{E}_{odd}^t(D_n)$ ，則  $D_H$  可以對應出相異  $(2p^t - p)$  個  $D_n^{(p,1)}$  的歐拉奇子圖；
- (2)  $|\mathcal{E}_{even}(D_5^{(p,1)})| = |\mathcal{E}_{odd}(D_5^{(p,1)})| = 1 + \sum_{t \geq 1} C_{2-t}^{2+t} \times (2p^t - p) = 2p^2 + 2p + 1$ ，意即  $D_5^{(p,1)}$  非歐拉定向。
- (3)  $\begin{cases} |\mathcal{E}_{even}(D_4^{(p,1)})| = 2p^2 - p + 2 \\ |\mathcal{E}_{odd}(D_4^{(p,1)})| = 4p \end{cases}$ ，意即  $D_4^{(p,1)}$  為歐拉定向的充分必要條件為  $p \neq 2$ 。

**【證明】：**

(1) 我們從代表向量的變換過程來分析，給定  $D_H \in \mathcal{E}_{even}^t(D_5)$ ，其中  $1 \leq t \leq 2$ 。當  $t = 1$  時，不失一般性，令  $D_H$  的代表向量為  $\vec{p}_H = (1, 2)$ ，其中在  $D_5^{(p,1)}$  中所對應的兩條有向邊，皆有  $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  其中之一可以選擇，所以則  $\vec{p}_H$  可以變換為  $\vec{p}_{H'} = (1, 2_i)$ ，其中  $1 \leq i \leq p$ ，故  $\vec{p}_{H'}$  亦共有  $p$  種不同的可能性。當  $t = 2$  時，則  $D_H$  的代表向量為  $\vec{p}_H = (1, 2, 3, 4)$ ，考慮將  $\vec{p}_H$  變換為第一型，則  $\vec{p}_H$  的分量可以分為  $t$  個(奇, 偶)序對，意即  $\vec{p}_H = ((1, 2), (3, 4))$ ，其中每一個(奇, 偶)序對在  $D_n^{(p,1)}$  中所對應的兩條有向邊，皆有  $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  其中之一可以選擇，所以  $\vec{p}_H$  可以變換為  $\vec{p}_{H'} = (1_{i_1}, 2_{i_1}, 3_{i_2}, 4_{i_2})$ ，其中下標  $1 \leq i_1, i_2 \leq p$ ，因此  $\vec{p}_{H'}$  共有  $p^2$  種不同的可能性。同理，若將  $\vec{p}_H$  變換為第二型，即  $\vec{p}_H = (1, (2, 3), 4)$ ，則代表向量  $\vec{p}_H$  可以

變換為  $\vec{p}_H = (1_{i_1}, 2_{i_1}, 3_{i_1}, 4_{i_1})$ ， $\vec{p}_H$  亦共有  $p^2$  種不同的可能性。綜合考慮  $\vec{p}_H$  變換的  $p^2$  種第一型以及  $p^2$  種第二型，當代表向量的下標皆相同時，意即  $1 \leq i_1 = i_2 \leq p$ ，則變換後會得到相同的代表向量。這表示當  $\vec{p}_H$  變換為第一型與第二型之後共有  $p$  個重複的代表向量，根據取捨原理，可知  $D_5$  中的一個第  $t$  類代表向量  $\vec{p}_H$  即可變換為  $(2p^t - p)$  個  $D_5^{(p,1)}$  的不同代表向量  $\vec{p}_H$ 。又因為  $\vec{p}_H$  在  $D_5^{(p,1)}$  中所對應的歐拉子圖與  $D_H$  有相同的邊數量，因此  $\vec{p}_H$  所對應的皆為  $D_5^{(p,1)}$  的歐拉偶子圖。當  $D_H \in \mathcal{E}_{odd}^t(D_5)$  時，同理可得證。

(2) 因為  $D_5^{(p,1)}$  的歐拉有向子圖皆可由  $D_5$  的歐拉有向子圖變換而來。當  $t=0$  時，代表向量  $\emptyset$ ，在  $D_5^{(p,1)}$  中對應一個不包含任何有向邊的歐拉偶子圖；代表向量  $\emptyset'$ ，在  $D_5^{(p,1)}$  中對應僅包含有向圈的歐拉奇子圖。當  $t \geq 1$  時，根據結論 (1) 可知， $\mathcal{E}_{even}^t(D_5)$  共可對應  $D_5^{(p,1)}$  中  $(2p^t - p) \cdot |\mathcal{E}_{even}^t(D_5)|$  個歐拉偶子圖。根據 Theorem 2 可知  $|\mathcal{E}_{even}^t(D_5)| = C_{2-t}^{2+t}$ ，故  $|\mathcal{E}_{even}(D_5^{(p,1)})| = 1 + \sum_{t \geq 1} |\mathcal{E}_{even}^t(D_5)| \times (2p^t - p) = 1 + \sum_{t \geq 1} C_{2-t}^{2+t} \times (2p^t - p) = 2p^2 + 2p + 1$ 。同理可得  $|\mathcal{E}_{odd}(D_5^{(p,1)})| = 1 + \sum_{t \geq 1} |\mathcal{E}_{odd}^t(D_5)| \times (2p^t - p) = 1 + \sum_{t \geq 1} C_{2-t}^{2+t} \times (2p^t - p) = 2p^2 + 2p + 1$ 。由此可知  $D_5^{(p,1)}$  非歐拉定向。

(3) 因為  $D_4^{(p,1)}$  的歐拉有向子圖皆可由  $D_4$  的歐拉有向子圖變換而來。當  $t=0$  時，代表向量  $\emptyset$  與  $\emptyset'$  在  $D_4^{(p,1)}$  中皆對應一個歐拉偶子圖。當  $t \geq 1$  時，根據結論 (1) 可知， $\mathcal{E}_{even}^t(D_4)$  共可對應  $D_4^{(p,1)}$  中  $(2p^t - p) \cdot |\mathcal{E}_{even}^t(D_4)|$  個歐拉偶子圖。根據 Lemma 4 可知  $|\mathcal{E}_{even}^t(D_4)| = C_{1-t}^{1+t} + C_{2-t}^{2+t}$ ，故  $|\mathcal{E}_{even}(D_4^{(p,1)})| = 2 + C_0^4(2p^2 - p) = 2p^2 - p + 2$ 。同理可證  $|\mathcal{E}_{odd}(D_4^{(p,1)})| = 4(2p - p) = 4p$ 。因為  $|\mathcal{E}_{even}(D_4^{(p,1)})| = |\mathcal{E}_{odd}(D_4^{(p,1)})| \Leftrightarrow 2p^2 - p + 2 = 4p \Leftrightarrow p = 2$ ，所以可知  $D_4^{(p,1)}$  為歐拉定向的充分必要條件為  $p \neq 2$ 。■

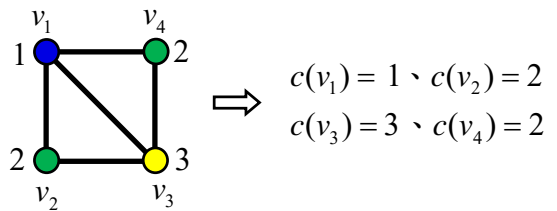
透過 Theorem 7 的討論可知，對於一般定向圖  $D_n^{(p,1)}$ ，隨著  $n$  越大，歐拉有向子圖的代表向量元素個數也會增加，若  $\vec{p}_H$  為  $D_n$  的第  $t$  類代表向量，則  $\vec{p}_H$  在元素下標的變化將趨於複雜，如何刻畫  $D_n^{(p,1)}$  的歐拉有向子圖數量成為我們待解的研究問題之一。

## 六、歐拉定向在列表著色的應用

以上的研究都聚焦在歐拉有向子圖的數量計算，然而歐拉有向子圖的研究可以應用到『列表著色』的領域上。以下我們將介紹基本著色問題的概念、列表著色問題，以及歐拉定向在列表著色議題上的應用。

### 圖的著色數 *chromatic number*

給定圖  $G$ ，函數  $c:V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，對任意的邊  $uv \in E(G)$ ，若函數  $c$  皆滿足  $c(u) \neq c(v)$ ，則稱函數  $c$  為圖  $G$  的一個『著色函數 (*proper coloring*)』。若圖  $G$  存在著色函數  $c:V(G) \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ ，則稱  $G$  為『可  $k$  著色 ( $k$ -colorable)』，我們亦稱函數  $c$  為『 $k$ -著色函數 ( $k$ -coloring)』。不難得知，若圖  $G$  是  $k$ -colorable，則  $G$  必然也為  $(k+1)$ -colorable。對任意的圖  $G$ ，可知  $G$  必然為  $|V(G)|$ -colorable。因此對於圖形的著色問題，研究的重點為：能使得  $G$  是  $k$ -colorable 的最小自然數  $k$  為何？若  $k$  為最小自然數能使得圖  $G$  是  $k$ -colorable，則稱  $k$  為  $G$  的『著色數 (*chromatic number*)』，以符號記為『 $\chi(G)$ 』。



這表示  $\chi(G) = \min \{k \in \mathbb{N} : G \text{ 是 } k\text{-colorable}\}$ 。

### 列表著色 *l-choosable*

有關列表著色的相關知識，我們參考了《平面圖的四元列表著色》與《列表著色可約構形之建構法》〔參考文獻 3, 4〕。令  $2^{\mathbb{N}}$  為所有自然數  $\mathbb{N}$  的子集所形成的集合，對於圖  $G$ ，考慮函數  $L:V(G) \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ ，我們稱函數  $L$  為圖  $G$  的『顏色列表函數 (*list assignment*)』。對於  $v \in V(G)$ ， $L(v)$  稱為頂點  $v$  的『顏色列表 (*color list*)』。給定顏色列表函數  $L$ ，若圖  $G$  存在著色函數  $c:V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，其中對任意頂點  $v \in V(G)$ ，皆滿足  $c(v) \in L(v)$ ，則稱此著色函數  $c$  為圖  $G$  的一個『 $L$ -列表著色 ( $L$ -coloring)』。

令  $l:V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ， $l(v)$  表示點  $v$  可使用的顏色數量，稱函數  $l$  為圖  $G$  的『列表數量函數』。若顏色列表函數  $L$ ，對任意頂點  $v \in V(G)$ ，皆滿足  $|L(v)| = l(v)$ ，則稱此顏色列表函數  $L$  為『 $l$ -列表 ( $l$ -list)』。若對於任意  $l$ -列表  $L$ ，圖  $G$  皆可存在  $L$ -coloring，則稱圖  $G$  為『可  $l$ -列表著色 ( $l$ -choosable)』。俄羅斯數學家 Vizing 首度提出列表著色的概念，同時 Erdős, Rubin

與 Taylor 等學者亦獨立發表列表著色的概念於期刊論文中〔參考文獻 9，11〕。

圖的定向關係經常應用在列表著色的問題上，文獻中表示有一個重要的定理我們稱為『有向圖列表著色定理』。有向圖列表著色定理指出，透過圖  $G$  的一個歐拉定向  $D_G$ ，則可以利用每一個點的外度數來設計列表數量函數  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ，使得  $G$  為可  $\ell$ -列表著色〔參考文獻 2，4〕。有向圖列表著色定理的敘述如下：

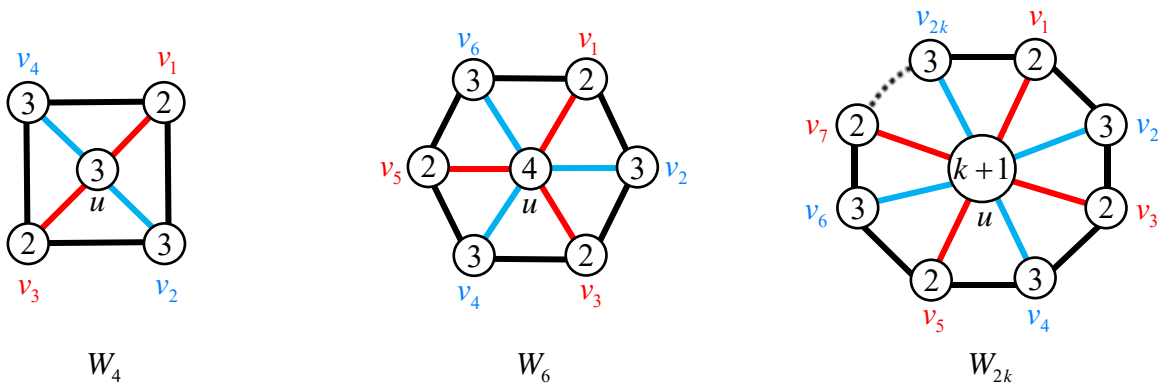
**有向圖列表著色定理**

給定有向圖  $D_G$ ，點集合  $V(D_G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，其中點  $v_i$  的外度數  $d_{D_G}^+(v_i) = d_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。令列表數量函數  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ， $\ell(v_i) \geq d_i + 1, i = 1, 2, \dots, n$ 。若  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_G)| \neq |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_G)|$ ，則圖  $G$  為可  $\ell$ -列表著色。

結合 Theorem 3 與有向圖列表著色定理，對於偶數 *Wheel* 的定向圖  $D_{2k}$ ，因為  $D_{2k}$  為歐拉定向，因此我們可以藉由  $D_{2k}$  在各點上的外度數來設計列表數量函數  $\ell$ ，因此有以下推論：

**Corollary**

給定偶數 *Wheel* 圖  $W_{2k}$ ，其頂點集合  $V(W_{2k}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}, u\}$ 。若列表數量函數  $\ell: V(W_{2k}) \rightarrow \mathbb{N}$  設計為  $\ell(v) \geq \begin{cases} 2 & , \text{當 } v \in \{v_i : i \text{ 為奇數} \} \\ 3 & , \text{當 } v \in \{v_i : i \text{ 為偶數} \} \\ k+1 & , \text{當 } v = u \end{cases}$ ，則圖  $W_{2k}$  為可  $\ell$ -列表著色。



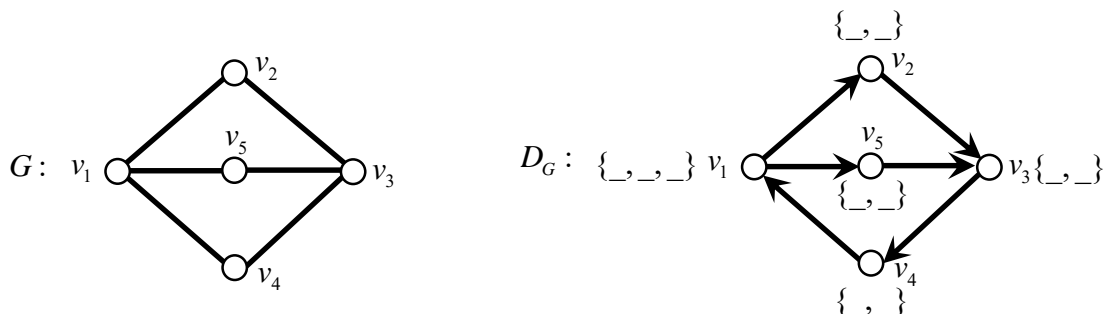
上述圖形中圓圈內的數字視為點  $v$  的列表數量函數值  $\ell(v)$ ，則該圖形必為可  $\ell$ -列表著色。

**七、非定向圖所建構的列表數量函數**

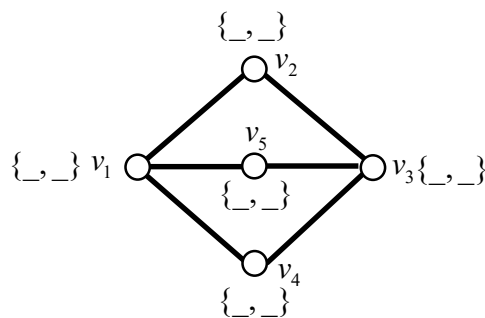
有向圖列表著色定理說明了，透過圖  $G$  的歐拉定向  $D_G$ ，我們可以利用此定向來建構列表數量函數  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ， $\ell(v_i) \geq d_{D_G}^+(v_i) + 1$ ，則可保證  $G$  必為可  $\ell$ -列表著色。

### 充分條件的再優化

給定圖  $G$ ，我們設計圖  $G$  的一個歐拉定向  $D_G$ ，如下圖所示，其中  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_G)|=3$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_G)|=0$ 。可以發現透過有向圖列表著色定理所設計的列表數量函數  $\ell:V(G)\rightarrow\mathbb{N}$ ，其中  $\ell(v_1)=3$  且  $\ell(v_i)=2$ ， $i=2,3,4,5$ ，則  $G$  必為可  $\ell$ -列表著色。



利用有向圖列表著色定理所設計的列表數量函數，可以保證  $G$  必為可  $\ell$ -列表著色，但這樣的充分條件是否能再優化呢？對於上圖  $G$ ，我們設計另一個列表數量函數  $\ell':V(G)\rightarrow\mathbb{N}$ ，其中  $\ell'(v_i)=2$ ， $i=1,2,\dots,5$ 。以下說明  $G$  為可  $\ell'$ -列表著色。



考慮上圖  $G$ ，列表數量函數為  $\ell':V(G)\rightarrow\mathbb{N}$ ，其中  $\ell'(v_i)=2$ ， $i=1,2,\dots,5$ ，則  $G$  為可  $\ell'$ -列表著色。

**【證明】：**

令顏色列表函數  $L:V(G)\rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  為  $\ell'$ -列表， $|L(v_i)|=\ell'(v_i)=2$ ， $i=1,2,\dots,5$ 。

若  $L(v_1)\cap L(v_3)\neq\emptyset$ ，且  $\alpha\in L(v_1)\cap L(v_3)$ ，則令  $c(v_1)=c(v_3)=\alpha$ 。

因為  $L(v_i)\setminus\{\alpha\}\neq\emptyset$ ， $i=2,4,5$ ，故函數  $c$  可延伸為  $G$  的  $L$ -coloring。

以下假設  $L(v_1)\cap L(v_3)=\emptyset$ 。

若  $L(v_2)\cap L(v_4)\neq\emptyset$ ，且  $\alpha\in L(v_2)\cap L(v_4)$ ，則令  $c(v_2)=c(v_4)=\alpha$ 。

因為  $L(v_1)\cap L(v_3)=\emptyset$ ，不失一般性，令  $\alpha\notin L(v_3)$ 。

令  $\beta\in L(v_1)\setminus\{\alpha\}$ ， $\gamma\in L(v_5)\setminus\{\beta\}$ ， $\omega\in L(v_3)\setminus\{\gamma\}$ ，則函數  $c$  可延伸為  $G$  的  $L$ -coloring。

根據圖形的對稱性，不失一般性可假設  $L(v_2), L(v_4), L(v_5)$  為兩兩互斥的集合。

考慮  $\alpha\in L(v_1)$ ，不失一般性，令  $\alpha\notin L(v_4)\cup L(v_5)$ ，且  $\beta\in L(v_2)\setminus\{\alpha\}$ ， $\gamma\in L(v_3)\setminus\{\beta\}$ 。

令  $c(v_1)=\alpha$ ， $c(v_2)=\beta$ ， $c(v_3)=\gamma$ 。

因為  $L(v_4) \setminus \{\gamma\} \neq \emptyset$  且  $L(v_5) \setminus \{\gamma\} \neq \emptyset$ ，故函數  $c$  可延伸為  $G$  的  $L$ -coloring。

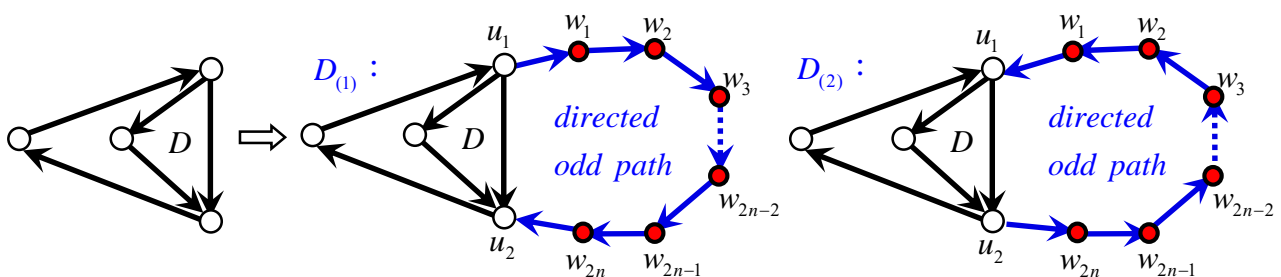
由上述討論可知，圖  $G$  為可  $\ell'$ -列表著色。■

上述的推論使我們得知，有向圖列表著色定理所設計的列表數量函數，僅僅只是圖形可列表著色的充分條件，其中列表數量函數可能可以降低函數值，保留圖形仍為可列表著色的結論。因此對於列表著色問題，我們也可以考慮利用非定向圖的方式來設計列表數量函數，獲得一個更優化的充分條件。

### 新增有向路徑的發現

由上面的例子可知，有向圖列表著色定理所設計的列表數量函數  $\ell: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  僅為可列表著色的充分條件，並非必要條件。這表示列表數量函數  $\ell$ ，其數量有機會可以再次降低。然而我們好奇的是，類似這樣的圖，該怎麼透過非定向的方式，可以程序性的設計如此特別的圖形與列表數量函數呢？以下介紹我們初步的想法，以及設計出來的一種建構方法。

考慮圖  $G$ ，令  $D$  為  $G$  的一個歐拉定向（如下圖所示），若在  $D$  的一條有向邊上，新增一條長度為奇數的路徑，所得圖形為  $G'$ 。若路徑每個邊的定向皆為順時針，則新的定向為  $D_{(1)}$ ；若路徑每個邊的定向皆為逆時針，則新的定向為  $D_{(2)}$ 。不難得知  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(1)})| = 2$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(1)})| = 2$ 、 $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(2)})| = 4$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(2)})| = 2$ ，可知  $D_{(2)}$  仍為歐拉定向，但  $D_{(1)}$  就不是歐拉定向了。



若考慮  $D_{(2)}$  每個點的外度數，可以發現， $V(D)$  中皆恰有一個點  $u_2$  在  $D_{(2)}$  中的外度數增加了 1，意即  $d_{D_{(2)}}^+(u_2) = d_D^+(u_2) + 1$ ，其餘新增的點  $w_i$  皆滿足  $d_{D_{(2)}}^+(w_i) = 1$ ， $i = 1, 2, \dots, 2n$ 。令

$$\ell_2: V(D_{(2)}) \rightarrow \mathbb{N} \text{ 為 } D_{(2)} \text{ 的列表數量函數，其中 } \ell_2(v) \geq \begin{cases} \ell(v) + 1, & \text{當 } v = u_2; \\ \ell(v), & \text{當 } v \in V(G) \setminus \{u_2\}; \\ 2, & \text{當 } v \in \{w_1, w_2, \dots, w_{2n}\}. \end{cases} \text{。因為 } D_{(2)}$$



為歐拉定向，所以根據有向圖列表著色定理可知， $G'$  必為可  $\ell_2$ -列表著色。

同樣考慮  $D_{(1)}$ ， $V(D)$  中皆恰有一個點  $u_1$  在  $D_{(1)}$  中的外度數增加了 1。令  $\ell_1:V(D_{(1)}) \rightarrow \mathbb{N}$  為

$$D_{(1)} \text{ 的列表數量函數，其中 } \ell_1(v) \geq \begin{cases} \ell(v)+1, & \text{當 } v = u_1; \\ \ell(v), & \text{當 } v \in V(G) \setminus \{u_1\}; \\ 2, & \text{當 } v \in \{w_1, w_2, \dots, w_{2n}\}. \end{cases} \quad \circ \text{ 但因為 } D_{(1)} \text{ 並非歐拉定向，}$$

所以無法類似上述對  $D_{(1)}$  進行討論，不能利用有向圖列表著色定理去得到  $G'$  為可  $\ell_1$ -列表著色的結論。但我們進一步研究時發現，即便  $D_{(1)}$  不是歐拉定向，但對於列表數量函數  $\ell_1$ ，我們仍舊可以透過分析顏色列表集合的方式，意外的得知  $G'$  其實仍為可  $\ell_1$ -列表著色。

### 列表數量函數的擴展

綜合上述的觀察與討論，我們獲得一個結論，若圖  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，令圖  $G'$  為  $G$  在一條邊上新增長度為奇數的路徑所得的新圖形，則我們可以設計新的列表數量函數  $\ell':V(G') \rightarrow \mathbb{N}$ ，確保  $G'$  必為可  $\ell'$ -列表著色。故我們有定理如下：

#### Theorem 8 :

給定圖  $G$ ，列表數量函數  $\ell:V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ 。令  $u_1 u_2 \in E(G)$ ，圖  $G'$  的點集合與邊集合分別為  $V(G') = V(G) \cup \{w_1, w_2, \dots, w_{2n}\}$ ， $E(G') = E(G) \cup \{w_i w_{i+1} : i = 1, 2, \dots, 2n-1\} \cup \{u_1 w_1, u_2 w_{2n}\}$ 。

$$\text{令 } \ell':V(G') \rightarrow \mathbb{N} \text{ 為 } G' \text{ 的列表數量函數，其中 } \ell'(v) \geq \begin{cases} \ell(v)+1, & \text{當 } v = u_1; \\ \ell(v), & \text{當 } v \in V(G) \setminus \{u_1\}; \\ 2, & \text{當 } v \in \{w_1, w_2, \dots, w_{2n}\}. \end{cases} \quad \circ$$

若  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，則  $G'$  亦為可  $\ell'$ -列表著色。

#### 【證明】：

令  $L'$  為圖  $G'$  的一個  $\ell'$ -列表，所以對任意  $v \in V(G')$ ，

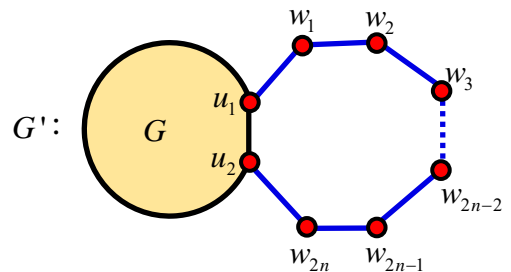
$$|L'(v)| = \ell'(v) \text{。欲說明 } G' \text{ 存在 } L' \text{-coloring。}$$

以下分成兩種類型進行討論。

(1) 假設  $L'(w_1) = L'(w_2) = \dots = L'(w_{2n}) = \{a, b\}$ 。

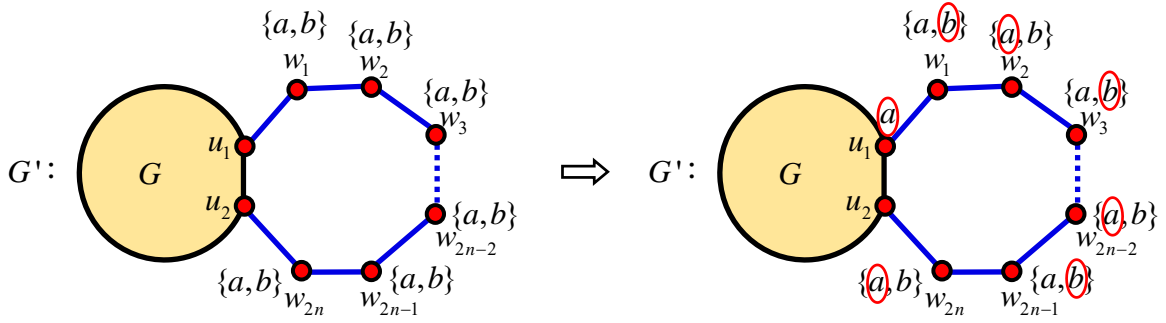
因為對任意  $v \in V(G)$ ， $\ell(v) \leq \ell'(v)$  且  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，所以  $G$  亦為可  $\ell'$ -列表著色，故  $G$  存在一個函數  $c$  為  $L'$ -coloring。我們將說明函數  $c$  可延伸為  $G'$  的  $L'$ -coloring。

$$\text{若 } c(u_1) \in \{a, b\} \text{，不失一般性，假設 } c(u_1) = a \text{，則令 } c(w_i) = \begin{cases} b, & \text{當 } i \text{ 為奇數。} \\ a, & \text{當 } i \text{ 為偶數。} \end{cases}$$





因為  $c(u_2) \neq c(u_1) = a$ ，所以  $c(u_2) \neq c(w_{2n})$ ，可知函數  $c$  可延伸為  $G'$  的  $L'$ -coloring。



若  $c(u_1) \notin \{a, b\}$ ，則令  $c(w_i) \in \begin{cases} L'(w_i) \setminus \{c(u_2)\}, & \text{當 } i = 2n \\ L'(w_i) \setminus \{c(w_{i+1})\}, & \text{當 } i = 1, 2, \dots, 2n-1 \end{cases}$ ，由此可依序完成

$w_{2n}, w_{2n-1}, \dots, w_2, w_1$  的著色，可知函數  $c$  可延伸為  $G'$  的  $L'$ -coloring。

(2) 假設存在一個  $1 \leq j \leq 2n-1$ ，使得  $L'(w_1) = \dots = L'(w_j) = \{a, b\} \neq L'(w_{j+1})$ 。

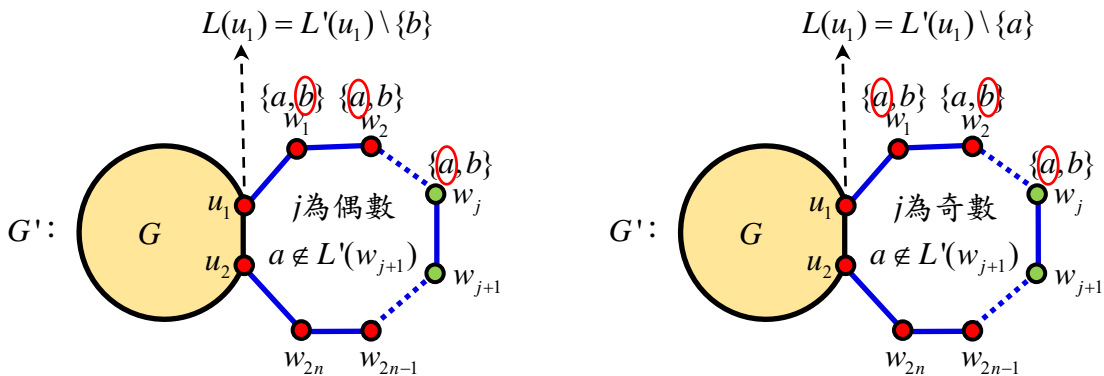
因為  $L'(w_j) = \{a, b\} \neq L'(w_{j+1})$ ，不失一般性，令  $a \in L'(w_j) \setminus L'(w_{j+1})$ 。

若  $j$  為偶數，則對於  $V(G)$ ，令  $L(v) = \begin{cases} L'(v) \setminus \{b\}, & \text{當 } v = u_1 \\ L'(v), & \text{當 } v \in V(G) \setminus \{u_1\} \end{cases}$ ，可知  $L$  為  $G$  的一個

$\ell$ -列表。因為  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，所以  $G$  存在一個函數  $c$  為  $L$ -coloring。我們將說明函數  $c$  可延伸為  $G'$  的  $L'$ -coloring。

對於  $V(G') \setminus V(G)$ ，令  $c(w_i) \in \begin{cases} \{b\}, & \text{當 } 1 \leq i \leq j \text{ 且 } i \text{ 為奇數} \\ \{a\}, & \text{當 } 1 \leq i \leq j \text{ 且 } i \text{ 為偶數} \\ L'(w_i) \setminus \{c(u_2)\}, & \text{當 } i = 2n \\ L'(w_i) \setminus \{c(w_{i+1})\}, & \text{當 } i = j+1, j+2, \dots, 2n-1 \end{cases}$ 。

因為  $c(u_1) \neq b = c(w_1)$  且  $c(w_{j+1}) \neq a = c(w_j)$ ，所以函數  $c$  可延伸為  $G'$  的  $L'$ -coloring。



若  $j$  為奇數，則對於  $V(G)$ ，令  $L(v) = \begin{cases} L'(v) \setminus \{a\}, & \text{當 } v = u_1 \\ L'(v), & \text{當 } v \in V(G) \setminus \{u_1\} \end{cases}$ ，可知  $L$  為  $G$  的一個

$\ell$ -列表。因為  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，所以  $G$  存在一個函數  $c$  為  $L$ -coloring。我們將說明函數  $c$  亦可延伸為  $G'$  的  $L'$ -coloring。

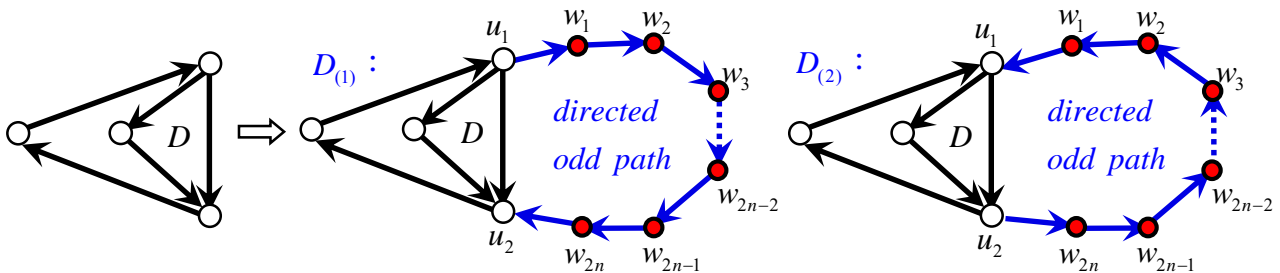
$$\text{對於 } V(G') \setminus V(G), \text{ 令 } c(w_i) \in \begin{cases} \{a\}, & \text{當 } 1 \leq i \leq j \text{ 且 } i \text{ 為奇數} \\ \{b\}, & \text{當 } 1 \leq i \leq j \text{ 且 } i \text{ 為偶數} \\ L'(w_i) \setminus \{c(u_2)\}, & \text{當 } i = 2n \\ L'(w_i) \setminus \{c(w_{i+1})\}, & \text{當 } i = j+1, j+2, \dots, 2n-1 \end{cases} .$$

因為  $c(u_1) \neq a = c(w_1)$  且  $c(w_{j+1}) \neq a = c(w_j)$ ，所以函數  $c$  可延伸為  $G'$  的  $L'$ -coloring。

由以上討論可知，若  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，則  $G'$  亦為可  $\ell'$ -列表著色。■

### 歐拉定向的猜想

考慮圖  $G$ ，令  $D$  為  $G$  的一個歐拉定向（如下圖所示），考慮新的定向為  $D_{(1)}$  與  $D_{(2)}$ 。因為  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(1)})| = 2$ 、 $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(1)})| = 2$ 、 $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{(2)})| = 4$  與  $|\varepsilon_{\text{odd}}(D_{(2)})| = 2$ ，可知  $D_{(2)}$  仍為歐拉定向，但  $D_{(1)}$  不是歐拉定向。



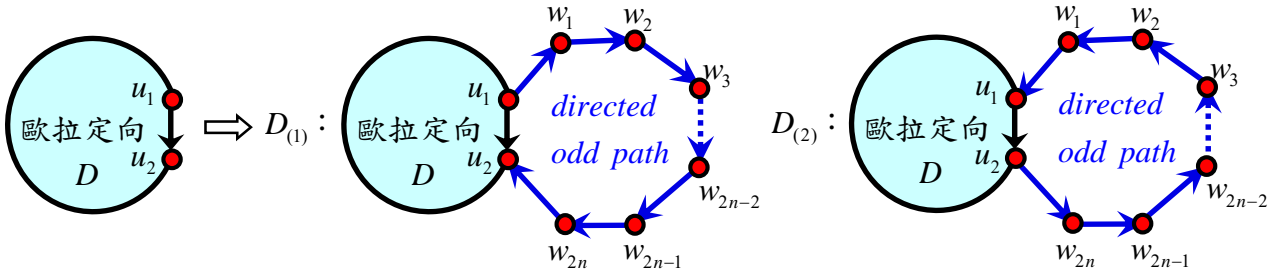
觀察上述例子，我們好奇的是，對於一般的圖  $G$ ，令  $D$  為  $G$  的一個歐拉定向，考慮有向邊  $(u_1, u_2) \in E(D)$ ，在兩端點  $u_1$  與  $u_2$  之間新增一條長度為奇數的路徑，若新增的路徑每條邊的定向皆為順時針，則新的定向為『 $D_{(1)}$ 』；若新增的路徑每條邊的定向皆為逆時針，則新的定向為『 $D_{(2)}$ 』。我們猜測所得的特殊定向  $D_{(1)}$  與  $D_{(2)}$  是否至少一個必為新圖形的歐拉定向呢？因此我們提出下列猜想：

### 歐拉定向的猜想

給定圖  $G$ ，令  $D$  為  $G$  的一個歐拉定向。令  $(u_1, u_2) \in E(D)$ ，圖  $G'$  的點集合與邊集合分別為  $V(G') = V(G) \cup \{w_1, w_2, \dots, w_{2n}\}$ ， $E(G') = E(G) \cup \{w_i w_{i+1} : i = 1, 2, \dots, 2n-1\} \cup \{u_1 w_1, u_2 w_{2n}\}$ 。令  $D_{(1)}$

與  $D_{(2)}$  為  $G'$  的定向，其中  $\begin{cases} E(D_{(1)}) = E(D) \cup \{(w_i, w_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, 2n-1\} \cup \{(u_1, w_1), (w_{2n}, u_2)\} \\ E(D_{(2)}) = E(D) \cup \{(w_{i+1}, w_i) : i = 1, 2, \dots, 2n-1\} \cup \{(w_1, u_1), (u_2, w_{2n})\} \end{cases}$ ，

則  $D_{(1)}$  與  $D_{(2)}$  至少有一個仍為  $G'$  的一個歐拉定向。



### 參、研究結果與討論

#### 一、研究結果

考慮 *Wheel* 的特殊定向，依外圍的點數區分為奇數 *Wheel* 定向圖  $D_{2k+1}$  與偶數 *Wheel* 定向圖  $D_{2k}$ 。對於  $D_{2k+1}$  與  $D_{2k}$ ，各別探討歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量，從中發現許多組合性質。同時我們也考慮 *Fan* 的特殊定向圖  $D'_n$ ，也將 *Wheel* 的特殊定向圖推廣為  $D_n^{(p,1)}$  與  $D_n^{(1,q)}$ 。此外，對於一般圖形，我們也試圖改變原圖的結構，去探討歐拉定向的存在性。以下為我們主要的研究結果：

1. 考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ， $\langle F_n \rangle_{n \geq 1}$  為費氏數列，則  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k+1})| = |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k+1})| = F_{2k+1}$ ，意即  $D_{2k+1}$  不為歐拉定向。
2. 考慮定向圖  $D_{2k+1}$ ，第  $t$  類歐拉有向子圖的數量  $|\mathcal{E}_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})| = |\mathcal{E}_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| = C_{k-t}^{k+t}$ 。
3. 考慮定向圖  $D_{2k}$ ，令  $m_k = |\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k})|$ ，則數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  為六個元素  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$  依序重複的循環數列，意即  $D_{2k}$  為歐拉定向。
4. 考慮定向圖  $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$ ，則  $m'_k = |\mathcal{E}_{\text{even}}(D'_{2k})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D'_{2k})| = |\mathcal{E}_{\text{even}}(D'_{2k+1})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D'_{2k+1})|$ ，且數列  $\langle m'_k \rangle_{k \geq 1}$  為六個元素  $0, -1, -1, 0, 1, 1$  依序重複的循環數列，意即當  $k \equiv 0$  或  $2 \pmod{3}$  時， $D'_{2k}$  與  $D'_{2k+1}$  皆為歐拉定向。
5. 考慮定向圖  $D_{2k+1}^{(1,q)}$ ，則  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k+1}^{(1,q)})| = 2^{q-1} \cdot (F_{2k+1})^q$ ，意即  $D_{2k+1}^{(1,q)}$  皆非歐拉定向。  
考慮定向圖  $D_{2k}^{(1,q)}$ ，令  $m_k^{(1,q)} = |\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{2k}^{(1,q)})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{2k}^{(1,q)})|$ ，數列  $\langle m_k^{(1,q)} \rangle_{k \geq 2} = \langle (m_k)^q \rangle_{k \geq 2}$ ，意即  $D_{2k}^{(1,q)}$  皆為歐拉定向。
6. 考慮  $n$  個有向圖  $D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$ ，則  $|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{G^*})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{G^*})| = \prod_{i=1}^n (|\mathcal{E}_{\text{even}}(D_{G_i})| - |\mathcal{E}_{\text{odd}}(D_{G_i})|)$ ，意即  $D_{G^*}$  為歐拉定向  $\Leftrightarrow D_{G_1}, D_{G_2}, \dots, D_{G_n}$  皆為歐拉定向。

7. 考慮定向圖  $D_5^{(p,1)}$ ，則  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_5^{(p,1)})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_5^{(p,1)})| = 2p^2 + 2p + 1$ ，意即  $D_5^{(p,1)}$  非歐拉定向。

考慮定向圖  $D_4^{(p,1)}$ ，則  $\begin{cases} |\varepsilon_{\text{even}}(D_4^{(p,1)})| = 2p^2 - p + 2 \\ |\varepsilon_{\text{odd}}(D_4^{(p,1)})| = 4p \end{cases}$ ，意即  $D_4^{(p,1)}$  為歐拉定向的充要條件為  $p \neq 2$ 。

8. 令  $G$  為可  $\ell$ -列表著色，在  $G$  一條邊上新增一條長度為奇數的路徑所成的圖形為  $G'$ ，則可將列表數量函數  $\ell$  擴充為  $\ell'$ ，使  $G'$  為可  $\ell'$ -列表著色。

## 二、討論

在研究特殊圖類 *Wheel* 的歐拉奇偶子圖數量時，為了有方法性的計算歐拉有向子圖的個數，我們利用頂點自然數編號所組成的代表向量去表示定向圖中的歐拉有向子圖。針對第  $t$  類的歐拉有向子圖，其代表向量具有以下三點特徵：(1) 有  $2t$  個分量；(2) 分量為奇偶數交錯；(3) 分量依序遞增。代表向量不僅可以對應到唯一的歐拉有向子圖，其內部特徵亦可提供我們歐拉有向子圖的重要資訊。

在研究奇數 *Wheel* 的歐拉奇偶子圖數量關係時，我們跳脫出圖形結構的觀點，對於第  $t$  類中歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的代表向量，發現兩者之間具有  $+\vec{1}$  與  $-\vec{1}$  的一一對應關係，因而獲得關係式  $|\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})|$ 。然而為了證明與費氏數列的對應關係，我們進一步建立相鄰兩奇數 *Wheel* 之間歐拉有向子圖數量的遞迴關係式。由於歐拉有向子圖的奇偶性與第  $t$  類中『 $t$  的奇偶性』及代表向量中『第一個分量的奇偶性』有著密切的關係，若以歐拉偶子圖或歐拉奇子圖的代表向量進行討論，則須同時考慮兩個因子的奇偶性搭配，因此，我們選擇固定代表向量中第一個分量的奇偶性，設立符號  $\alpha_{2k+1}$  表示為歐拉偶子圖或歐拉奇子圖的數量，設立符號  $\beta_{2k+1}$  表示相鄰兩奇數 *Wheel* 之間代表向量的差異，建立了  $\alpha_{2k+1}$  與  $\beta_{2k+1}$  之間的遞迴關係式，最後利用數學歸納法證明關係式  $|\varepsilon_{\text{even}}(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{odd}}(D_{2k+1})| = F_{2k+1}$ 。由於二項式係數的斜排總和皆為費氏數列的元素，我們將  $\alpha_{2k+1}$  與  $\beta_{2k+1}$  進行更細緻的分類，對於第  $t$  類，定義符號  $\alpha_{2k+1}^t$  與  $\beta_{2k+1}^t$ ，利用同樣的思維建立  $\alpha_{2k+1}^t$  與  $\beta_{2k+1}^t$  的遞迴關係式，再次以數學歸納法證明  $|\varepsilon_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})| = |\varepsilon_{\text{even}}^t(D_{2k+1})| = C_{k-t}^{k+t}$ ，從中瞭解了  $|\varepsilon_{\text{odd}}^t(D_{2k+1})|$  與二項式係數的對應關係，作為後續分析偶數 *Wheel* 性質的基礎。

而在研究偶數 *Wheel* 時，我們同樣比對相鄰奇數 *Wheel* 與偶數 *Wheel* 之間代表向量的差異，再利用奇數 *Wheel* 與二項式係數的對應關係，獲得關係式  $|\varepsilon^t(D_{2k})| = C_{k-t-1}^{k+t-1} + C_{k-t}^{k+t}$ 。在觀

察中，我們發現  $D_{2k}$  中的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量差，隨著  $k$  的增加，數量差有循環的特性，循環的元素依序為  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$ ，為六個元素不斷的循環。為了說明這樣的循環特性，我們特別定義了二項式係數交錯和的概念，定義了符號  $a_n(x)$ ，利用生成函數的代數技巧求得  $a_n(x)$  的封閉表達式，從中得知數列  $\langle a_n(-1) \rangle_{n \geq 1}$  的循環性。由於  $D_{2k}$  的歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量差  $m_k$  可以表示為  $D_{2k-1}$  與  $D_{2k+1}$  所對應的二項式係數交錯和，從中可知  $m_k = (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-2}(-1) + (-1)^k \cdot a_{2k}(-1)$ ，因此透過數列  $\langle a_n(-1) \rangle_{n \geq 1}$  的循環性，即可推得數列  $\langle m_k \rangle_{k \geq 2}$  為六個元素  $-1, -2, -1, 1, 2, 1$  依序不斷重複的循環數列，進而證明了所有偶數 *Wheel* 的定向圖  $D_{2k}$  皆為歐拉定向。此外我們亦將討論了 *Fan* 以及推廣後的 *Wheel*，在特殊定向之下，獲得更具一般性的結論。

研究定向圖的歐拉有向子圖數量，問題始源於列表著色問題，而設計一個特殊的歐拉定向則是我們的目標。我們除了運用有向圖列表著色定理，設計列表數量函數以外，也明白這樣設計出來的條件僅僅是充分條件，因此也嘗試透過非定向圖的方式去探討可列表著色的其他充分條件。

## 肆、結論與應用

### 一、結論

對於特殊圖類 *Wheel*，根據外圍 *cycle* 點數的奇偶性，可以分類為奇數 *Wheel* 與偶數 *Wheel*。針對 *Wheel* 圖形設計一種特殊的定向，我們欲分析該定向中歐拉偶子圖與歐拉奇子圖的數量，過程中運用了許多代數手法，從中發現與費氏數列的對應關係。透過數學歸納法，完成了奇數 *Wheel* 的歐拉偶子圖數必等於奇子圖數。引進了生成函數的概念之後，完成了偶數 *Wheel* 的歐拉偶子圖數則不等於奇子圖數的證明。在文獻探討的過程中，我們瞭解了歐拉有向子圖的研究可以應用到『列表著色』的領域上。若定向圖的歐拉偶子圖數不等於歐拉奇子圖數，則稱該定向為歐拉定向。有向圖列表著色定理指出，給定圖  $G$ ，針對歐拉定向的圖形  $D_G$ ，設計列表數量函數下界的充分條件，每個點的列表數量若為  $\ell(v) \geq d_{D_G}^+(v) + 1$ ，則圖  $G$  必為可  $\ell$ -列表著色。因此對於偶數 *Wheel* 的特殊定向  $D_{2k}$ ，則可從中建立列表數量函數  $\ell$ ，使其為可  $\ell$ -列表著色。

從這次的研究歷程可以深刻的感受到，數學浩瀚無垠，以及有無限探索的可能性，從分析  $D_n$  的歐拉有向子圖開始，猶如搭上了數學列車，歷經了將圖形代數化、建立遞迴關係、運用了數學歸納法、偶然遇見了費氏數列與二項式係數、設計交錯和的概念、引進了生成函數的技巧、使用了複數的極式與棣美弗定理、由正弦函數得知數列的循環特性，沿途的風景之美，令我們感到意外驚奇，流連忘返，沉浸在這個數學研究之中。誰知天外飛來一筆 Chebyshev 第二類多項式與 Girard-Waring 公式，更是在這個段落中留下了耐人尋味的驚嘆號！

## 二、應用

圖的著色問題實際上為一種資源分配的問題，而列表著色問題更是貼近一般現實生活中的情境。然而在列表著色問題的研究上，圖的定向關係是常用的一種研究工具，一旦可以設計出歐拉定向，則可以透過組合零點定理，利用此歐拉定向在每個點的外度數來設計列表數量函數，從中建立起圖形可完成列表著色的充分條件。因此如果能設計一個好的歐拉定向，則可直接應用在圖形的列表著色問題上。此外，倘若對於一些特殊的圖類，可以設計一個好的歐拉定向，在研究列表著色的問題時，如果圖中有這樣的一個子結構，則我們即可將這樣的子結構視為可約構形，將其從原圖中刪除，藉以降低原本列表問題的難度。

## 三、未來展望

對於一個圖，如何快速的設計一個歐拉定向其實並不困難，但是要設計一個使每個點的外度數接近度數一半的歐拉定向，就是一件不容易的事情。我們期待可以開發一種特殊歐拉定向的設計策略。將問題返回來看，對於一個確切的定向圖，要如何判斷此定向是否為歐拉定向，欲精確的計算歐拉偶子圖與歐拉奇子圖，這也是一件困難的任務，因此如何透過演算法來判斷圖形是否為歐拉定向，也是未來我們可以努力研究的方向。至於對於其他特殊圖類，在計算其歐拉有向子圖的數量時，是否也蘊藏著一些組合性質，可以與哪些高等數學的知識連結，這也值得我們持續的研究。對於推廣後的圖形  $D_n^{(p,1)}$ ，甚至將圖形推廣至  $D_n^{(p,q)}$ ，如何刻畫其歐拉有向子圖的數量，亦成為這篇研究後續可以努力的方向。

最終，我們希望未來能夠對平面圖在列表著色的分類上，可以有所貢獻，如何設計新的充分條件，使得平面圖可為四元列表著色，都是在我們進行這個研究之後，未來可以發展的方向。

## 伍、參考文獻

1. 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊，南一出版社。
2. 張鎮華，蔡牧村（2020），圖論及其演算法，臺大出版中心。
3. 林芮吟（2017），平面圖的四元列表著色，2017年臺灣國際科學展覽會。
4. 王嵐，李昀祐（2021），列表著色可約構形之建構法，第61屆全國中小學科學展覽會。
5. 許介彥（2011），數學悠哉遊，三民書局。
6. 翁翠微，顏綺美，陳政宏（2014），Chebyshev 多項式與線性二階遞迴序列之行列表表示法，數學傳播，38卷3期。
7. Arthur Benjamin, *The magic of Math: Solving for x an figuring out why*, Basic Books (2016).
8. G. Chartrand, L. Lesniak and P. Zhang, *Graphs and Digraphs*, 6<sup>th</sup> edition, CRC Press (2016).
9. P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer. 26 (1979), 125-157.
10. H. W. Gould, *The Girard-Waring power sum formulas for symmetric functions and Fibonacci sequences*, Fibonacci Quarterly, 37 no. 2 (1999), 135-140.
11. V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors*, Metody Diskret. Anal., 19 (1976), 3-10. (in Russian)
12. Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2<sup>nd</sup> edition, Pearson Education Taiwan (2008).

## 【評語】 010025

本作品主要的研究工作是計算再有向輪圖中歐拉子圖的數量，內容正確、完整，是一個很好的作品；如果能夠考量更一般形式的有向圖，除了加強研究的深度外，也更能有機會藉由歐拉定向的性質去探討平面圖或一般圖的列表著色問題。另一方面，歐拉子圖也可以應用到基因定序判斷，是值得繼續努力的研究工作。