2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號	**010024**
參展科別	數學
作品名稱	糖果傳遞問題之研究與推廣
得獎獎項	四等獎

就讀學校	高雄市立明華國民中學
指導教師	黃任偉、楊佳餘
作者姓名	黃宇綸、黃宇瑄

關鍵詞　傳遞、線性關係、迭代

作者簡介

我是黃宇綸，就讀於高雄市明華國中二年級，是雙胞胎弟弟。

我非常熱愛數學，喜歡閱讀科學書籍，所以加入學校的數理研究社。從小我就很喜歡科學研究，和姊姊與資優班同學一起組隊參加了許多科展競賽與發明展，在每一次解決問題的過程中，都充滿了挑戰與成就感。此外，我也擅長程式語言，已經取得 JAVA 證照，程式對於我們的數學研究有非常大的幫助。

我是黃宇瑄，就讀於高雄市明華國中二年級，是雙胞胎姊姊。

我也是學校數理研究社成員，參與的是物理研究，特別喜歡觀察科學現象，擅長整理龐大數據並分析。我和弟弟是各種競賽的最佳拍檔，時常一起討論數學，研究科學與程式，我的個性較細心，可以負責提醒弟弟疏忽的地方，多次的組隊讓我們培養出絕佳默契，也取得了不少好成績。

摘要

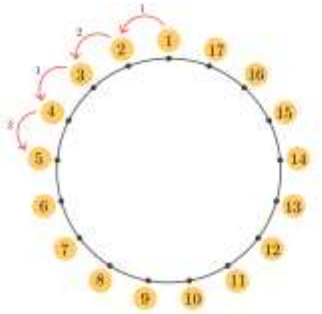
n個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號 $1,2,\cdots\cdots,n$。一開始每人手中有一個糖果，由 1 號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果，手上沒有糖果的人必須退出。我們將此傳遞規則定義為$T_{1,2}$，同理$T_{1,2\cdots,p}$。這個傳遞遊戲，最終會有兩種情形，第一種是**由一人獨得所有糖果(成功狀態)**，第二種是**數人間傳遞糖果且形成循環(循環狀態)**。研究後得知，在傳遞規則$T_{1,2\cdots,p}$($p \geq 2$)下，若 $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_j^{\alpha_j}$（$p_1, p_2, \cdots, p_j$ 為 p 的相異質因數)，任意的n值($n \geq p+1$)均可唯一表示成$n = (p)^t \times (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m) + q$ （$t, m \in N$，$p \nmid p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}$，$(m,p)=1$，$q = 1,2,\cdots,p$），令$S = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1} + R \cdot p^t$，則當$m=1$時，最終為成功狀態，且獨得糖果者的初始編號為$S$；當$m \geq 2$時，最終為循環狀態，且由$m$人循環傳遞糖果，而此$m$人的初始編號是$S, S + p^t p_1^{s1} p_2^{s2} \cdots p_i^{s_i}, \cdots\cdots, S + (m-1) \cdot p^t p_1^{s1} p_2^{s2} \cdots p_i^{s_i}$。上述公式中的$R$值，可透過我們研究出來的「**$R$值迭代法**」求得。更進一步，我們也找出達到成功狀態或循環狀態的最小傳遞數。

Abstract

n persons stand round in a circle. They are numbered counterclockwise as $1,2,\cdots\cdots,n$. In the beginning, each person holds one candy in his hand; then no.1 begins to deliver one candy to no.2, who in turn delivers two candies to no.3. In other words, each person in turn passes one or two candies alternatively to the person next to him. Anyone whose hand is empty must retreat from the group. We define this delivery rule as $T_{1,2}$ and, in the same definition, $T_{1,2\cdots,p}$. As the delivery game goes on, two possible results will come out in the end. One result is that just one single person will own all the candies (success state). The other is that several remaining persons will deliver the candies continuously, circulating in endless cycles (cyclic state). Based on the research, we find that under the delivery rule $T_{1,2}$, if the prime factorization of p is $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_j^{\alpha_j}$, any value n can be uniquely represented as $n = (p)^t \times (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m) + q$ ($t, m \in N$, $p \nmid p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q = 1,2,\cdots,p$). Let $S = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1} + R \cdot p^t$, then when $m=1$, the final state is success state, and the initial number of the person who got all the candies is S. When $m \geq 2$, the final state is cyclic state and m persons will deliver the candies cyclicly, and the initial numbers of these m people are $S, S + p^t p_1^{s1} p_2^{s2} \cdots p_i^{s_i}, \cdots\cdots, S + (m-1) \cdot p^t p_1^{s1} p_2^{s2} \cdots p_i^{s_i}$. R value in the formula above can be obtained by "R Iterative Method" that we have researched. In addition, we also find the minimal delivery numbers for achieving success state or cyclic state.

壹、前言

一、研究動機



在科學研習月刊[1]有一個關於糖果傳遞的數學問題：「17 個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號$1,2,\cdots\cdots,17$。一開始每人手中有一個糖果，由 1 號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果。但是手上沒有糖果的人必須馬上退出。是否有人可以得到所有的糖果？如是，他一開始站在幾號位置？」我們對這個問題感到好奇，便展開一連串的研究。

二、研究目的

(一)探討不同人數、不同傳遞規則下，「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件。

(二)探討不同人數、不同傳遞規則下，最終不被淘汰的人之初始編號。

(三)探討不同人數、不同傳遞規則下，達到「成功狀態」或「循環狀態」的最小傳遞數。

傳遞規則 $T_{1,2}$

傳遞規則 $T_{1,2,3}$

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ p 為質數

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ p 為質數的冪次方

傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ $p\in N, p\geq 2$

三、研究工具

筆、電腦、Excel、eclipse(Java)

貳、研究方法與過程

傳遞規則

n個人圍成一圈，面向圓心，且逆時針編號$1,2,\cdots\cdots,n$。一開始每人手中有一個糖果，由 1 號開始，逆時針分別給右邊的人一個、兩個、一個、兩個……糖果，手上沒有糖果的人必須退出，直至不再有人退出。將此傳遞規則定義為$T_{1,2}$。同理$T_{1,2,\cdots,p}$。

文獻探討

糖果傳遞問題往往會讓人聯想到著名的約瑟夫問題，然而它們的遊戲規則是截然不同的，約瑟夫問題是n個人圍成一圈依序報數，每數到特定數即自殺，而糖果傳遞問題除了傳遞糖果給下一位外，更加入不同的傳遞數量，直至手中糖果數歸 0 才會淘汰，過程更為複雜。此外，雖然我們有查閱到第 40 屆全國科展作品[2]中有提到類似的傳遞問題，但文中只針對成功狀態做初步推論，沒有證明，且其結論只是充分條件但非必要條件，探討相當不完整。

輔助工具

一開始我們以人工方式在 Execl 中將傳遞過程記錄，然而當 n 值增加時，數據越來越龐大，狀態越來越複雜，缺乏效率。此時，我們學寫了三年的程式設計能力正可以派上用場。我們以 Java 撰寫了程式，它可以輸入 $T_{1,2,\cdots,p}$ 中不同的 p 值與 n 值，可呈現傳遞過程中每一輪末狀態列與其初始編號，進而得到最終傳遞結果與最小傳遞數。有了這個程式，可幫助我們觀察傳遞規則、推導公式並證明。(程式碼於研究日誌)

名詞與符號定義

(一) 狀態列 $P=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$：$n$ 個人圍成一圈，逆時針編號 $1,2,\cdots\cdots,n$，每人手中分別有 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 顆糖果。

(二) $\underline{\underline{\overset{\ell}{a_i}}}$：第 i 人準備傳遞 ℓ 顆糖果給下一人。

(三) $P\to Q$：狀態列 P 經過數次傳遞後變成狀態列 Q。

(四) 第 i 輪(R_i)：糖果由 1 號依傳遞規則傳至 n 號的過程稱為「第 1 輪」；將第 $(i-1)$ 輪淘汰後剩餘者再依序從頭傳至尾的過程稱為「第 i 輪」。

(五) S_r^n：n 人傳遞的第 r 階狀態列。在 $T_{1,2,\cdots,p}$ 下，

當 $r=0$ 時，S_0^n 為 n 人傳遞的初始狀態列，即 $S_0^n=\underbrace{(1,1,\cdots\cdots,1)}_{n\text{個}}$。

當 $r\geq 1$ 時，若 $n\equiv 1(\text{mod } p)$，$S_r^n=(p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r,\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})$；

若 $n\equiv q(\text{mod } p)\,,\,q=2,3,\cdots,p$，則 $S_r^n=(p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r,\underline{\underline{\overset{q}{q}}})$。

(六) E_n：若 n 人傳遞中，最後僅剩 1 人獨得所有糖果，則稱為「**成功狀態**」，記作 E_n。

(七) C_n：若 n 人傳遞中，最後無法僅剩 1 人獨得所有糖果，而是數人間傳遞糖果且形成循環，則稱為「**循環狀態**」，記作 C_n。

(八) $S_r^n(k)$：n 人傳遞中的第 r 階狀態列，未淘汰者重新編號後，第 k 個人的初始編號。

(九) $E_n=[e]$：n 人傳遞中，為成功狀態時，獨得所有糖果的人之初始編號為 e。

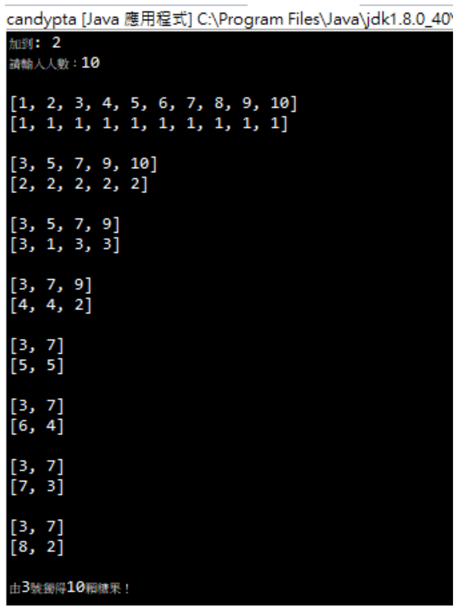
(十) $C_n=[c_1,c_2,\cdots\cdots,c_i]$：$n$ 人傳遞中，為循環狀態時，循環的 i 人之初始編號為 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_i$。

以下舉兩個傳遞的例子：

【例 1】$n=7$ 、傳遞規則$T_{1,2}$

編號	1	2	3	4	5	6	7	傳遞動作	傳遞數	輪次	說明
S_0^7	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	1		R_1	(一)傳遞過程為 $\underset{(1,1,1,1,1,1,1)}{S_0^7} \rightarrow \underset{(2,2,\overset{1}{\underline{\underline{3}}})}{S_1^7} \rightarrow C_7$ 。 故最終為**循環狀態**。 (二)$C_7=[3,5,7]$ 。 即最終糖果在初始編號為 3、5、7 的三人間循環傳遞。 (三)$S_1^7(1)=3$ 、 $S_1^7(2)=5$ 、 $S_1^7(3)=7$ 。 即S_1^7 中所剩 3 人的初始編號依序為 3、5、7。 (四)達到循環狀態的最小傳遞數為 6。
	0	2	1	1	1	1	1	2	1		
	0	0	3	1	1	1	1	1	2		
	0	0	2	2	1	1	1	2	3		
	0	0	2	0	3	1	1	1	4		
	0	0	2	0	2	2	1	2	5		
S_1^7	**0**	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**	**3**	1	6		
	0	0	3	0	2	0	2	2		R_2	
	0	0	1	0	4	0	2	1			
	0	0	1	0	3	0	3	2			
	0	0	3	0	3	0	1	1		R_3	
	0	0	2	0	4	0	1	2			
C_7	**0**	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**	**3**	1			

【例 2】$n=10$ 、傳遞規則$T_{1,2}$

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	傳遞動作	傳遞數	輪次	說明
S_0^{10}	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	1		R_1	(一) 傳遞過程為 $\underset{(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)}{S_0^{10}} \rightarrow \underset{(2,2,2,2,\overset{2}{\underline{\underline{2}}})}{S_1^{10}} \rightarrow \underset{(4,4,\overset{2}{\underline{\underline{2}}})}{S_2^{10}}$ $\rightarrow \underset{(8,\overset{2}{\underline{\underline{2}}})}{S_3^{10}} \rightarrow \underset{(10)}{E_{10}}$ 。 故最終為**成功狀態**。 (二)$E_{10}=[3]$ 。 即最終由初始編號為 3 的人獨得所有糖果。 (三)程式執行畫面：  (四)達到成功狀態的最小傳遞數為26。
	0	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1		
	0	0	3	1	1	1	1	1	1	1	1	2		
	0	0	2	2	1	1	1	1	1	1	2	3		
	0	0	2	0	3	1	1	1	1	1	1	4		
	0	0	2	0	2	2	1	1	1	1	2	5		
	0	0	2	0	2	0	3	1	1	1	1	6		
	0	0	2	0	2	0	2	2	1	1	2	7		
	0	0	2	0	2	0	2	0	3	1	1	8		
S_1^{10}	**0**	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**	**2**	**2**	2	9		
	0	0	4	0	2	0	2	0	2	0	1	10	R_2	
	0	0	3	0	3	0	2	0	2	0	2	11		
	0	0	3	0	1	0	4	0	2	0	1	12		
	0	0	3	0	1	0	3	0	3	0	2	13		
	0	0	5	0	1	0	3	0	1	0	1	14	R_3	
	0	0	4	0	2	0	3	0	1	0	2	15		
	0	0	4	0	0	0	5	0	1	0	1	16		
S_2^{10}	**0**	**0**	**4**	**0**	**0**	**0**	**4**	**0**	**2**	**0**	2	17		
	0	0	6	0	0	0	4	0	0	0	1	18	R_4	
	0	0	5	0	0	0	5	0	0	0	2	19		
	0	0	7	0	0	0	3	0	0	0	1	20	R_5	
	0	0	6	0	0	0	4	0	0	0	2	21		
	0	0	8	0	0	0	2	0	0	0	1	22	R_6	
	0	0	7	0	0	0	3	0	0	0	2	23		
	0	0	9	0	0	0	1	0	0	0	1	24	R_7	
S_3^{10}	**0**	**0**	**8**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**	2	25		
E_{10}	**0**	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	1	26		

```
加到: 2
請輸人人數:10

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

[3, 5, 7, 9, 10]
[2, 2, 2, 2, 2]

[3, 5, 7, 9]
[3, 1, 3, 3]

[3, 7, 9]
[4, 4, 2]

[3, 7]
[5, 5]

[3, 7]
[6, 4]

[3, 7]
[7, 3]

[3, 7]
[8, 2]

由3號獨得10顆糖果！
```

研究一：傳遞規則$T_{1,2}$

首先，為了縮減傳遞流程記錄，我們把$T_{1,2}$中，「一輪傳遞」的規則統整如下：

$T_{1,2}$的「一輪傳遞」規則

	偶數($n=2s$)	奇數($n=2s+1$)
初始狀態	甲$_0$	甲$_1$
	$\underbrace{(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad \cdots\cdots\quad 1\quad 1\quad 1)}_{2s個}$ $\begin{array}{ccccccccc} \text{傳} & -1 & -2 & -1 & -2 & \cdots\cdots & -2 & -1 & \\ \text{收} & & +1 & +2 & +1 & \cdots\cdots & +1 & +2 & +1 \\ \text{總} & -1 & -1 & +1 & -1 & & -1 & +1 & +1 \\ \text{預} & & & & & & & & \boxed{-2} \end{array}$	$\underbrace{(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad \cdots\cdots\quad 1\quad 1\quad 1)}_{2s+1個}$ $\begin{array}{ccccccccc} \text{傳} & -1 & -2 & -1 & -2 & \cdots\cdots & -1 & -2 & \\ \text{收} & & +1 & +2 & +1 & \cdots\cdots & +2 & +1 & +2 \\ \text{總} & -1 & -1 & +1 & -1 & \cdots\cdots & +1 & -1 & +2 \\ \text{預} & & & & & & & & \boxed{-1} \end{array}$
尾 2 傳 2	乙$_0$	乙$_1$
	$\begin{array}{ccccccccc} & (a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\cdots & a_{2s-2} & a_{2s-1} & \underline{\underline{\overset{2}{a_{2s}}}}) \\ \text{傳} & -1 & -2 & -1 & -2 & \cdots\cdots & -2 & & -2 \\ \text{收} & +2 & +1 & +2 & +1 & \cdots\cdots & +1 & +2 & \\ \text{總} & +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots\cdots & -1 & +2 & \\ \text{預} & & & & & & & \boxed{-1} & \end{array}$	$\begin{array}{ccccccccc} & (a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\cdots & a_{2s-1} & a_{2s} & \underline{\underline{\overset{2}{a_{2s+1}}}}) \\ \text{傳} & -1 & -2 & -1 & -2 & \cdots\cdots & -1 & & -2 \\ \text{收} & +2 & +1 & +2 & +1 & \cdots\cdots & +2 & +1 & \\ \text{總} & +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots\cdots & +1 & +1 & \\ \text{預} & & & & & & & \boxed{-2} & \end{array}$
尾非 1 傳 1	丙$_0$	丙$_1$
	$\begin{array}{ccccccccc} & (a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\cdots & a_{2s-2} & a_{2s-1} & \underline{\underline{\overset{1}{a_{2s}}}}) \\ \text{傳} & -2 & -1 & -2 & -1 & \cdots\cdots & -1 & -2 & -1 \\ \text{收} & +1 & +2 & +1 & +2 & \cdots\cdots & +2 & +1 & +2 \\ \text{總} & -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots\cdots & +1 & -1 & +1 \\ \text{預} & & & & & & & & \boxed{-1} \end{array}$	$\begin{array}{ccccccccc} & (a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\cdots & a_{2s-1} & a_{2s} & \underline{\underline{\overset{1}{a_{2s+1}}}}) \\ \text{傳} & -2 & -1 & -2 & -1 & \cdots\cdots & -2 & -1 & -1 \\ \text{收} & +1 & +2 & +1 & +2 & \cdots\cdots & +1 & +2 & +1 \\ \text{總} & -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots\cdots & -1 & +1 & 0 \\ \text{預} & & & & & & & & \boxed{-2} \end{array}$
尾非 2 傳 2	丁$_0$	丁$_1$
	$\begin{array}{ccccccccc} & (a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\cdots & a_{2s-2} & a_{2s-1} & \underline{\underline{\overset{2}{a_{2s}}}}) \\ \text{傳} & -1 & -2 & -1 & -2 & \cdots\cdots & -2 & -1 & -2 \\ \text{收} & +2 & +1 & +2 & +1 & \cdots\cdots & +1 & +2 & +1 \\ \text{總} & +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots\cdots & -1 & +1 & -1 \\ \text{預} & & & & & & & & \boxed{-2} \end{array}$	$\begin{array}{ccccccccc} & (a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots\cdots & a_{2s-1} & a_{2s} & \underline{\underline{\overset{2}{a_{2s+1}}}}) \\ \text{傳} & -1 & -2 & -1 & -2 & \cdots\cdots & -1 & -2 & -2 \\ \text{收} & +2 & +1 & +2 & +1 & \cdots\cdots & +2 & +1 & +2 \\ \text{總} & +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots\cdots & +1 & -1 & 0 \\ \text{預} & & & & & & & & \boxed{-1} \end{array}$

接著，我們打算**將所有n值分成奇數和偶數來討論**。研究結果如下：

(一)n為奇數

引理 1.1.1：傳遞規則$T_{1,2}$，當n為奇數，$r\geq 1$， $s\in N$，則

(1)若存在狀態列$(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1個},\underline{\underline{\overset{1}{2^r+1}}})$，則必存在

$$(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1個},\underline{\underline{\overset{1}{2^r+1}}})\rightarrow(\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\cdots\cdots,2^{r+1}}_{s個},\underline{\underline{\overset{1}{2^{r+1}+1}}})$$ 。

(2)若存在狀態列$(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s個},\underline{\underline{\overset{1}{2^r+1}}})$，則必存在$(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s個},\underline{\underline{\overset{1}{2^r+1}}})\rightarrow C_n$ 。

【證明】

$$(1)\ (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})\xrightarrow[\text{丙}_0]{1\text{輪後}}(\underbrace{2^r-1,2^r+1,\cdots\cdots,2^r-1}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{2\text{輪後}}(\underbrace{2^r-2,2^r+2,\cdots\cdots,2^r-2}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+3}}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{3\text{輪後}}(\underbrace{2^r-3,2^r+3,\cdots\cdots,2^r-3}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+4}}})\to\quad\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{2^r\text{輪後}}(\underbrace{\overset{\overset{0}{\|}}{2^r-2^r},2^r+2^r,\cdots\cdots,\overset{\overset{0}{\|}}{2^r-2^r}}_{2s+1\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2^r+1}}})=(\underbrace{2^{r+1},2^{r+1},\cdots\cdots,2^{r+1}}_{s\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^{r+1}+1}}})$$

$$(2)\ (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})\xrightarrow[\text{丙}_1]{1\text{輪後}}(\underbrace{2^r-1,2^r+1,\cdots\cdots,2^r-1,2^r+1}_{2s\text{個}},\overset{2}{\underline{\underline{2^r+1}}})$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_1]{2\text{輪後}}(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})\quad\blacksquare$$

引理 1.1.2：傳遞規則$T_{1,2}$，當n為奇數($n\geq 3$)，且表示成$n=2^t\cdot m+1$($t\in N$,m為奇數)，則

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$，

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+1)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{(2^{t-r}-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})$，$1\leq r\leq t-1$。

(2)若$m\geq 3$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$，

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+1)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{(2^{t-r}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^r+1}}})$，$1\leq r\leq t$。

【證明】

(1) $n=2^t+1$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+1)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_1]{1\text{輪後}}(0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,0,\overset{1}{\underline{\underline{3}}})=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{(2^{t-1}-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{3}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}}(\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{(2^{t-2}-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{5}}})\to\quad\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}}(\underbrace{2^{t-2},2^{t-2},2^{t-2}}_{(2^2-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^{t-2}+1}}})\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}}(2^{t-1},\overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+1}}})\to(2^t+1)=E_n$$

(2) $n=2^t\cdot m+1$　($m\geq 3$ 且 m 為奇數)

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+1)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_1]{1\text{輪後}}(0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,0,\overset{1}{\underline{\underline{3}}})=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{(2^{t-1}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{3}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}}(\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{(2^{t-2}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{5}}})\to\quad\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{引理1.1.1(1)}}(\underbrace{2^t,\cdots\cdots,2^t}_{(m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{2^t+1}}})\xrightarrow{\text{引理1.1.1(2)}}C_n\quad\blacksquare$$

引理 1.1.3：傳遞規則 $T_{1,2}$，當 n 為奇數($n \geq 3$)，且表示成 $n = 2^t \cdot m + 1$ ($t \in N$, m 為奇數)，則

$$S_r^n(k) = 1 + k \cdot 2^r \text{ , } k = 1, 2, \cdots, 2^{t-r} \cdot m \text{ ，其中 } S_r^n = (\underbrace{2^r, 2^r, \cdots\cdots, 2^r}_{(2^{t-r} \cdot m-1)\text{個}}, \overset{1}{\underline{\underline{2^r + 1}}}) \text{ ，} 1 \leq r \leq t \text{ 。}$$

【證明】

(1)當 $r = 1$ 時

$$\text{因為 } S_0^n = (\underbrace{1, 1, \cdots\cdots, 1}_{(2^t \cdot m+1)\text{個}}) \xrightarrow[\text{甲}_1]{\text{1輪後}} (\underbrace{0, 0, \overset{\overset{3}{\downarrow}}{2}, 0, \overset{\overset{5}{\downarrow}}{2}, 0, \cdots\cdots, \overset{\overset{2^t \cdot m-1}{\downarrow}}{2}, 0, \overset{\overset{2^t \cdot m+1}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{3}}}}}_{(2^t \cdot m+1)\text{個}}) = (\underbrace{2, 2, \cdots\cdots, 2}_{(2^{t-1} \cdot m-1)\text{個}}, \overset{1}{\underline{\underline{3}}}) = S_1^n$$

$$\text{故 } S_1^n(1) = 3,\ S_1^n(2) = 5, \cdots\cdots, S_1^n(2^{t-1} \cdot m) = 2^t \cdot m + 1 = 1 + (2^{t-1} \cdot m) \cdot 2^1 \quad \text{原式成立}$$

(2)假設 當 $r = r'$ 時 原式成立

$$\text{即 } S_{r'}^n(k) = 1 + k \cdot 2^{r'} \text{ , } k = 1, 2, \cdots, 2^{t-r'} \cdot m$$

則 當 $r = r' + 1$ 時

$$S_{r'}^n = (\underbrace{\overset{\overset{1+2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}, \overset{\overset{1+2\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}, \cdots\cdots, \overset{\overset{1+(2^{t-r'}m-1)\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}, \overset{\overset{1+2^{t-r'}m\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^{r'}+1}}}}}_{2^{t-r'}m\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{\text{1輪後}} (\underbrace{2^{r'} - 1, 2^{r'} + 1, \cdots\cdots, 2^{r'} - 1, \overset{1}{\underline{\underline{2^{r'} + 2}}}}_{2^{t-r'}m\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{\text{2輪後}} (\underbrace{2^{r'} - 2, 2^{r'} + 2, \cdots\cdots, 2^{r'} - 2, \overset{1}{\underline{\underline{2^{r'} + 3}}}}_{2^{t-r'}m\text{個}}) \rightarrow \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{2^{r'}\text{輪後}} (0, \overset{\overset{1+2\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}}, 0, \overset{\overset{1+4\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}}, \cdots\cdots, 0, \overset{\overset{1+2^{t-r'}m\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^{r'+1} + 1}}}})$$

$$= (\underbrace{2^{r'+1}, 2^{r'+1}, \cdots\cdots, 2^{r'+1}, \overset{1}{\underline{\underline{2^{r'+1} + 1}}}}_{2^{t-r'-1}m\text{個}}) = S_{r'+1}^n$$

$$\text{故 } S_{r'+1}^n(1) = 1 + 2^{r'+1},\ S_{r'+1}^n(2) = 1 + 2^{r'+2} = 1 + 2 \cdot 2^{r'+1}, \cdots\cdots,$$

$$S_{r'+1}^n(2^{t-r'-1} \cdot m) = 1 + 2^{t-r'} m \cdot 2^{r'} = 1 + 2^{t-r'-1} m \cdot 2^{r'+1} \qquad \text{原式成立}$$

由(1)(2)及**數學歸納法** 得證 ■

定理 1.1.4：傳遞規則 $T_{1,2}$，當 n 為奇數($n \geq 3$)，且表示成 $n = 2^t \cdot m + 1$ ($t \in N$, m 為奇數)，則

(1)若 $m = 1$，最終為成功狀態，且 $E_n = [n]$。

(2)若 $m \geq 3$，最終為循環狀態，且 $C_n = [1 + 2^t, 1 + 2 \cdot 2^t, \cdots\cdots, 1 + m \cdot 2^t]$。

【證明】

(1)由引理 1.1.2(1)知

若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_{t-1}^n \to E_n$ 。

由引理 1.1.3 知

$$S_{t-1}^n = (\overset{\overset{1+2^{t-1}}{\downarrow}}{2^{t-1}}, \overset{\overset{1+2\cdot 2^{t-1}}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+1}}}}) \xrightarrow[\text{丙}_0]{1\text{輪後}} (2^{t-1}-1, \overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+2}}}) \xrightarrow[\text{丙}_0]{2\text{輪後}} (2^{t-1}-2, \overset{1}{\underline{\underline{2^{t-1}+3}}}) \to \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丙}_0]{2^{t-1}\text{輪後}} (0, \overset{\overset{1+2^t}{\downarrow}}{2^t}+1) = (2^t+1) = E_n \qquad \text{故} \quad E_n = \left[1+2^t\right] = [n]$$

(2)由引理 1.1.2(2)知

若 $m \geq 3$ ，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n \to S_1^n \to S_2^n \to \cdots\cdots \to S_t^n \to C_n$ 。

由引理 1.1.3 及引理 1.1.1(2)的證明過程知

$$S_t^n = (\underbrace{\overset{\overset{1+2^t}{\downarrow}}{2^t}, \overset{\overset{1+2\cdot 2^t}{\downarrow}}{2^t}, \cdots\cdots, 2^t}_{(m-1)\text{個}}, \overset{\overset{1+m\cdot 2^t}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^t+1}}}}) \to \cdots\cdots \to (\underbrace{2^t, 2^t, \cdots\cdots, 2^t}_{(m-1)\text{個}}, \overset{1}{\underline{\underline{2^t+1}}})$$

故 $C_n = \left[1+2^t, 1+2\cdot 2^t, \cdots\cdots, 1+m\cdot 2^t\right]$ ■

(二) n 為偶數

引理 1.2.1：傳遞規則 $T_{1,2}$ ，當 n 為偶數， $r \geq 1$ ， $s \in N$ ，則

(1)若存在狀態列 $(\underbrace{2^r, 2^r, \cdots\cdots, 2^r}_{2s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}})$ ，則必存在

$$(\underbrace{2^r, 2^r, \cdots\cdots, 2^r}_{2s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \to (\underbrace{2^{r+1}, 2^{r+1}, \cdots\cdots, 2^{r+1}}_{s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \text{ 。}$$

(2)若存在狀態列 $(\underbrace{2^r, 2^r, \cdots\cdots, 2^r}_{2s+1\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}})$ ，則必存在 $(\underbrace{2^r, 2^r, \cdots\cdots, 2^r}_{2s+1\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \to C_n$ 。

【證明】

(1) $$(\underbrace{2^r, 2^r, \cdots\cdots, 2^r}_{2s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}}) \xrightarrow[\text{乙}_1]{1\text{輪後}} (\underbrace{2^r+1, 2^r-1, \cdots\cdots, 2^r+1, \overset{2}{\underline{\underline{2^r+1}}}}_{2s\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{2\text{輪後}} (\underbrace{2^r+2, 2^r-2, \cdots\cdots, 2^r+2, \overset{2}{\underline{\underline{2^r}}}}_{2s\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{3\text{輪後}} (\underbrace{2^r+3, 2^r-3, \cdots\cdots, 2^r+3, \overset{2}{\underline{\underline{2^r-1}}}}_{2s\text{個}}) \to \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{丁}_0]{2^r\text{輪後}} (\underbrace{2^r+2^r, \overset{\overset{0}{\|}}{2^r-2^r}, \cdots\cdots, 2^r+2^r, \overset{2}{\underline{\underline{2^r-2^r+2}}}}_{2s\text{個}})$$

$$= (\underbrace{2^{r+1}, \cdots\cdots, 2^{r+1}}_{s\text{個}}, \overset{2}{\underline{\underline{2}}})$$

$$(2)\quad(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})^{*}\xrightarrow{1次後}(\underbrace{\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}},2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1個})$$

$$\xrightarrow[乙0]{^{*}1輪後}(\underbrace{2^r+1,2^r-1,\cdots\cdots,2^r+1,2^r-1,\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}}}_{2s+1個})$$

$$\xrightarrow[丙1]{2輪後}(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r,2^r,\overset{2}{\underline{\underline{2^r+2}}}}_{2s+1個})$$

$$\xrightarrow{再1次後}(\underbrace{\overset{1}{\underline{\underline{2^r+2}}},2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2s+1個})\quad ■$$

引理 1.2.2：傳遞規則$T_{1,2}$，當n為偶數($n\geq4$)，且表示成$n=2^t\cdot m+2$($t\in N$,m為奇數)，則

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to E_n$，

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+2)個})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2^{t-r}個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$，$1\leq r\leq t$。

(2)若$m\geq3$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$，

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+2)個})$、$S_r^n=(\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2^{t-r}\cdot m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$，$1\leq r\leq t$。

【證明】

(1)$n=2^t+2$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t+2)個})\xrightarrow[甲0]{1輪後}(0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,\overset{2}{\underline{\underline{2}}})=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$$

$$\xrightarrow{引理1.2.1(1)}(\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\to\quad\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{引理1.2.1(1)}(\underbrace{2^{t-1},2^{t-1}}_{2個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\xrightarrow{引理1.2.1(1)}(2^t,\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\to(2^t+2)=E_n$$

(2)$n=2^t\cdot m+2$　($m\geq3$且m為奇數)

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+2)個})\xrightarrow[甲0]{1輪後}(0,0,2,0,2,0,\cdots\cdots,2,\overset{2}{\underline{\underline{2}}})=(\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$$

$$\xrightarrow{引理1.2.1(1)}(\underbrace{4,4,\cdots\cdots,4}_{2^{t-2}\cdot m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\to\quad\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{引理1.2.1(1)}(\underbrace{2^t,\cdots\cdots,2^t}_{m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\xrightarrow{引理1.2.1(2)}C_n\quad ■$$

引理 1.2.3：傳遞規則$T_{1,2}$，當n為偶數($n \geq 4$)，且表示成$n = 2^t \cdot m + 2$($t \in N$,m為奇數)，則

$$S_r^n(k) = \begin{cases} 3+(k-1)\cdot 2^r & ,k = 1,2,\cdots,2^{t-r}\cdot m \\ 3+(2k-3)\cdot 2^{r-1} & ,k = 2^{t-r}\cdot m+1 \end{cases},$$

其中$S_r^n = (\underbrace{2^r,2^r,\cdots\cdots,2^r}_{2^{t-r}\cdot m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})$，$1 \leq r \leq t$。

【證明】

(1)當$r = 1$時

$$因為\ \ S_0^n = (\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(2^t\cdot m+2)個}) \xrightarrow[甲_0]{1輪後} (\underbrace{0,0,\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2},0,\overset{\overset{5}{\downarrow}}{2},0,\cdots\cdots,\ \overset{\overset{2^t\cdot m+1}{\downarrow}}{2}\ ,\ \overset{\overset{2^t\cdot m+2}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}}\ }_{(2^t\cdot m+2)個}) = (\underbrace{2,2,\cdots\cdots,2}_{2^{t-1}\cdot m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) = S_1^n$$

$$故\quad S_1^n(1) = 3,\ S_1^n(2) = 5,\cdots\cdots,S_1^n(2^{t-1}\cdot m) = 2^t\cdot m+1 = 3+(2^{t-1}\cdot m-1)\cdot 2^1$$

$$S_1^n(2^{t-1}\cdot m+1) = 2^t\cdot m+2 = 3+\left[2(2^{t-1}\cdot m+1)-3\right]\cdot 2^0 \qquad 原式成立$$

(2)假設 當$r = r'$時 原式成立

$$即\ \ S_{r'}^n(k) = \begin{cases} 3+(k-1)\cdot 2^{r'} & ,k = 1,2,\cdots,2^{t-r'}\cdot m \\ 3+(2k-3)\cdot 2^{r'-1} & ,k = 2^{t-r'}\cdot m+1 \end{cases}$$

則 當$r = r'+1$時

$$S_{r'}^n = (\underbrace{\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^{r'}},\ \overset{\overset{3+2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}\ ,\cdots\cdots,\ \ \overset{\overset{3+(2^{t-r'}\cdot m-1)2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'}}\ \ ,\ \ \overset{\overset{3+(2^{t-r'+1}\cdot m-1)2^{r'-1}}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}}\ \ }_{(2^{t-r'}\cdot m+1)個})$$

$$\xrightarrow[乙_1]{1輪後}(\underbrace{2^{r'}+1,2^{r'}-1,\cdots\cdots,2^{r'}+1,\overset{2}{\underline{\underline{2^{r'}+1}}}}_{2^{t-r'}\cdot m個})$$

$$\xrightarrow[丁_0]{2輪後}(\underbrace{2^{r'}+2,2^{r'}-2,\cdots\cdots,2^{r'}+2,\overset{2}{\underline{\underline{2^{r'}}}}}_{2^{t-r'}\cdot m個}) \to \quad \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[丁_0]{2^{r'}輪後}(\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^{r'+1}},0,\ \overset{\overset{3+2\cdot 2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}}\ ,0,\cdots\cdots,0,\ \ \overset{\overset{3+(2^{t-r'}\cdot m-2)2^{r'}}{\downarrow}}{2^{r'+1}}\ \ ,\ \ \overset{\overset{3+(2^{t-r'}\cdot m-1)2^{r'}}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}}\ \ )$$

$$= (\underbrace{2^{r'+1},2^{r'+1},\cdots\cdots,2^{r'+1}}_{2^{t-r'-1}\cdot m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}}) = S_{r'+1}^n$$

$$故\quad S_{r'+1}^n(1) = 3,\ S_{r'+1}^n(2) = 3+2\cdot 2^{r'} = 3+2^{r'+1},\cdots\cdots,$$

$$S_{r'+1}^n(2^{t-r'-1}\cdot m) = 3+(2^{t-r'}\cdot m-2)\cdot 2^{r'} = 3+(2^{t-r'-1}\cdot m-1)\cdot 2^{r'+1},$$

$$S_{r'+1}^n(2^{t-r'-1}\cdot m+1) = 3+(2^{t-r'}\cdot m-1)\cdot 2^{r'} = 3+\left[2(2^{t-r'-1}\cdot m+1)-3\right]\cdot 2^{r'} \qquad 原式成立$$

由(1)(2)及**數學歸納法** 得證 ■

定理 1.2.4：傳遞規則$T_{1,2}$，當n為偶數($n\geq 4$)，且表示成$n=2^t\cdot m+2\,(t\in N\,,m$ 為奇數)，則

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，且$E_n=[3]$。

(2)若$m\geq 3$，最終為循環狀態，且$C_n=\left[3,3+2^t,\cdots\cdots,3+(m-1)2^t\right]$。

【證明】

(1)由引理 1.2.2(1)知

若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to E_n$。

由引理 1.2.3 知 $S_t^n=(\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^t},\ \overset{\overset{3+2^{t-1}}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{2}}}}\ )\xrightarrow{\text{1次後}}(\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^t}+2,0)=(2^t+2)=E_n$ 故 $E_n=[3]$

(2)由引理 1.2.2(2)知

若$m\geq 3$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

由引理 1.2.3 及引理 1.2.1(2)的證明過程知

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{3}{\downarrow}}{2^t},\overset{\overset{3+2^t}{\downarrow}}{2^t},\cdots\cdots,\overset{\overset{3+(m-1)2^t}{\downarrow}}{2^t}}_{m個},\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\xrightarrow{\text{1次後}}(\underbrace{\overset{\overset{3}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{2^t+2}}}},\overset{\overset{3+2^t}{\downarrow}}{2^t},\cdots\cdots,\overset{\overset{3+(m-1)2^t}{\downarrow}}{2^t}}_{m個})\to\cdots\to(\underbrace{\overset{1}{\underline{\underline{2^t+2}}},2^t,\cdots\cdots,2^t}_{m個})$$

故 $C_n=\left[3,3+2^t,\cdots\cdots,3+(m-1)2^t\right]$ ■

綜合以上結果，我們將n為奇數情形的定理 1.1.4 與n為偶數情形的定理 1.2.4 合併成定理 1，敘述如下：

定理 1：n人($n\geq 3$)依照規則$T_{1,2}$傳遞糖果，且n表示成$n=2^t\cdot m+q\,(t\in N\,,\,m$ 為奇數, $q=1,2)$，

令$S=2^t\cdot(2-q)+(2q-1)$，則

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，且$E_n=[S]$。

(2)若$m\geq 3$，最終為循環狀態，且$C_n=\left[S,S+2^t,\cdots\cdots,S+(m-1)2^t\right]$。

討論

1.任意正整數$n\,(n\geq 3)$，必可唯一表示成$n=2^t\cdot m+q\ \ (t\in N\,,\,m$ 為奇數, $q=1,2)$的型式。

2.當$m\geq 3$時，最終會由m人循環傳遞糖果，而當$m=1$時，即剩 1 人獨得所有糖果。顯然，(1)的公式是(2)的縮化情形。

【舉例】

(1)當$n=65=2^6\cdot 1+1$，則$S=2^6\cdot(2-1)+(2\cdot 1-1)=65$，故$E_n=[65]$。

即 65 人依照規則$T_{1,2}$傳遞糖果，最終會由初始編號 65 的人獨得所有糖果。

(2)當$n=50=2^4\cdot 3+2$，則$S=2^4\cdot(2-2)+(2\cdot 2-1)=3$，故$C_n=\left[3,3+2^4,3+2\cdot 2^4\right]=[3,19,35]$。

即 50 人依照規則$T_{1,2}$傳遞糖果，最終會由初始編號 3,19,35 的人循環傳遞糖果。

研究二：傳遞規則 $T_{1,2,3}$

同研究一，為了縮減傳遞流程記錄，我們把 $T_{1,2,3}$ 中，「一輪傳遞」的規則統整如下：

$T_{1,2,3}$ 的「一輪傳遞」規則

	$n=3s$	$n=3s+1$	$n=3s+2$
初始狀態	甲$_0$	甲$_1$	甲$_2$
	$(\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \cdots 1\ \ 1\ \ 1}_{3s個})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 收 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 總 -1 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 +2 預 $\boxed{-3}$	$(\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \cdots 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1}_{(3s+1)個})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 -3 收 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 +3 總 -1 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 -1 +3 預 $\boxed{-1}$	$(\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \cdots 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1}_{(3s+2)個})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 -3 -1 收 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 +3 +1 總 -1 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 -1 +2 +1 預 $\boxed{-2}$
尾2傳2	乙$_0$	乙$_1$	乙$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 -3 -1 -2 -3 -1 -2 ⋯ -3 -2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1 ⋯ +2 +3 總 -1 +2 -1 -1 +2 -1 ⋯ -1 +3 預 $\boxed{-1}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 -3 -1 -2 -3 -1 -2 ⋯ -3 -1 -2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1 ⋯ +2 +3 +1 總 -1 +2 -1 -1 +2 -1 ⋯ -1 +2 +1 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 -3 -1 -2 -3 -1 -2 ⋯ -3 -1 -2 -2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1 ⋯ +2 +3 +1 +2 總 -1 +2 -1 -1 +2 -1 ⋯ -1 +2 -1 +2 預 $\boxed{-3}$
尾3傳3	丙$_0$	丙$_1$	丙$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 總 +2 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 +1 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 -3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 總 +2 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 +2 預 $\boxed{-3}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 -3 -3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 +3 總 +2 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 -1 +3 預 $\boxed{-1}$
尾非1傳1	丁$_0$	丁$_1$	丁$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 -2 -3 -1 -2 -3 -1 ⋯ -2 -3 -1 收 +1 +2 +3 +1 +2 +3 ⋯ +1 +2 +3 總 -1 -1 +2 -1 -1 +2 ⋯ -1 -1 +2 預 $\boxed{-1}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 -2 -3 -1 -2 -3 -1 ⋯ -2 -3 -1 -1 收 +1 +2 +3 +1 +2 +3 ⋯ +1 +2 +3 +1 總 -1 -1 +2 -1 -1 +2 ⋯ -1 -1 +2 0 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 -2 -3 -1 -2 -3 -1 ⋯ -2 -3 -1 -2 -1 收 +1 +2 +3 +1 +2 +3 ⋯ +1 +2 +3 +1 +2 總 -1 -1 +2 -1 -1 +2 ⋯ -1 -1 +2 -1 +1 預 $\boxed{-3}$
尾非2傳2	戊$_0$	戊$_1$	戊$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 -3 -1 -2 -3 -1 -2 ⋯ -3 -1 -2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1 ⋯ +2 +3 +1 總 -1 +2 -1 -1 +2 -1 ⋯ -1 +2 -1 預 $\boxed{-2}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 -3 -1 -2 -3 -1 -2 ⋯ -3 -1 -2 -2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1 ⋯ +2 +3 +1 +2 總 -1 +2 -1 -1 +2 -1 ⋯ -1 +2 -1 0 預 $\boxed{-3}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 -3 -1 -2 -3 -1 -2 ⋯ -3 -1 -2 -3 -2 收 +2 +3 +1 +2 +3 +1 ⋯ +2 +3 +1 +2 +3 總 -1 +2 -1 -1 +2 -1 ⋯ -1 +2 -1 -1 +1 預 $\boxed{-1}$
尾非3傳3	己$_0$	己$_1$	己$_2$
	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 -3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 總 +2 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 -1 預 $\boxed{-3}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 -3 -3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 +3 總 +2 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 -1 0 預 $\boxed{-1}$	$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \cdots a_{3s-2}\ a_{3s-1}\ a_{3s}\ a_{3s+1}\ a_{3s+2})$ 傳 -1 -2 -3 -1 -2 -3 ⋯ -1 -2 -3 -1 -3 收 +3 +1 +2 +3 +1 +2 ⋯ +3 +1 +2 +3 +1 總 +2 -1 -1 +2 -1 -1 ⋯ +2 -1 -1 +2 -2 預 $\boxed{-2}$

而我們將所有 n 值分成 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 、 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ 和 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ 三種情形來討論，並將引理和定理合併呈現與證明。研究結果如下：

因版面空間不足，以下部分證明置於研究日誌。

引理 2.1：傳遞規則$T_{1,2,3}$，將n表示成以下型式：$n=3^t\cdot m+q\,(t,m\in N,\ 3\nmid m,\ q=1,2,3)$，則

(1)當$q=1$，$r\geq 1$，$s\in N$，已知存在狀態列$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})$

①若$i=3s+2$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{(3s+2)個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})\to(\underbrace{3^{r+1},3^{r+1},\cdots\cdots,3^{r+1}}_{s個},\overset{1}{\underline{\underline{3^{r+1}+1}}})$。

②若$i\neq 3s+2$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})\to C_n$。

(2)當$q\geq 2$，$r\geq 1$，$s\in N$，已知存在狀態列$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$

①若$i=3s$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{3s個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(\underbrace{3^{r+1},3^{r+1},\cdots\cdots,3^{r+1}}_{s個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$。

②若$i\neq 3s$，則必存在$(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{i個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to C_n$。

【證明】略(研究日誌)

引理 2.2：傳遞規則$T_{1,2,3}$，將n表示成以下型式：$n=3^t\cdot m+q\,(t,m\in N,\ 3\nmid m,\ q=1,2,3)$，則

(1) $q=1$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$。

②若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(3^t m+1)個})$、$S_r^n=(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{(3^{t-r}\cdot m-1)個},\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})$，$1\leq r\leq t$，

且 $S_r^n(k)=1+k\cdot 3^r,\ k=1,2,\cdots,3^{t-r}\cdot m$。

(2) $q\geq 2$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to E_n$。

②若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(3^t m+q)個})$、$S_r^n=(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{3^{t-r}\cdot m個},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$，$1\leq r\leq t$，

$$且\ S_r^n(k)=\begin{cases}\dfrac{3^r(3-q)+(3q-1)}{2}+(k-1)\cdot 3^r & ,k=1,2,\cdots,3^{t-r}\cdot m\\ \dfrac{3^r(3-q)+(3q-1)}{2}+(3k+q-7)\cdot 3^{r-1} & ,k=3^{t-r}\cdot m+1\end{cases}。$$

【證明】略(研究日誌)

定理 2：n 人 $(n\geq 4)$ 依照規則 $T_{1,2,3}$ 傳遞糖果，且 n 表示成 $n=3^t\cdot m+q$ $(t,m\in N\,,3\nmid m\,,$

$q=1,2,3)$，令 $S=\dfrac{3^t\cdot(3-q)+(3q-1)}{2}$，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=\left[S\right]$。

(2)若 $m\geq 2$，最終為循環狀態，且 $C_n=\left[S,S+3^t,\cdots\cdots,S+(m-1)3^t\right]$。

【證明】

a. $q=1$

(1)由引理 2.2 知，若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$。

$$S_{t-1}^n=(\overset{\overset{1+3^{t-1}}{\downarrow}}{3^{t-1}}\ ,\ \overset{\overset{1+2\cdot3^{t-1}}{\downarrow}}{3^{t-1}}\ ,\overset{\overset{1+3\cdot3^{t-1}}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{3^{t-1}+1}}}})\xrightarrow[\text{丁}0]{1\text{輪後}}(3^{t-1}-1,3^{t-1}-1,\overset{1}{\underline{\underline{3^{t-1}+3}}})\xrightarrow[\text{丁}0]{2\text{輪後}}(3^{t-1}-2,3^{t-1}-2,\overset{1}{\underline{\underline{3^{t-1}+5}}})$$

$$\to\cdots\cdots\xrightarrow[\text{丁}0]{3^{t-1}\text{輪後}}(0,0,\overset{\overset{1+3^t}{\downarrow}}{3^t}+1)=(3^t+1)\qquad \text{故}\quad E_n=\left[1+3^t\right]=\left[S\right]$$

(2)由引理 2.2 及其證明過程知，

若 $m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{1+3^t}{\downarrow}}{3^t}\ ,\ \overset{\overset{1+2\cdot3^t}{\downarrow}}{3^t}\ ,\cdots\cdots,3^t}_{(m-1)\text{個}},\overset{\overset{1+m\cdot3^t}{\downarrow}}{\overset{1}{\underline{\underline{3^t+1}}}})\to\cdots\cdots\to(\underbrace{3^t,3^t,\cdots\cdots,3^t}_{(m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{3^t+1}}})$$

故 $C_n=\left[1+3^t,1+2\cdot3^t,\cdots\cdots,1+m\cdot3^t\right]=\left[S,S+3^t,\cdots\cdots,S+(m-1)3^t\right]$

b. $q\geq 2$

(1)由引理 2.2 知，若 $m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to E_n$。

$$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{3^t},\quad \overset{\overset{S+(q-1)\cdot3^{t-1}}{\downarrow}}{\overset{q}{\underline{\underline{q}}}}\quad)\to(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{3^t}+q)\qquad\qquad \text{故}\quad E_n=\left[S\right]$$

(2)由引理 2.2 及其證明過程知，

若 $m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S}{\downarrow}}{3^t},\ \overset{\overset{S+3^t}{\downarrow}}{3^t}\ ,\cdots\cdots,\quad \overset{\overset{S+(m-1)\cdot3^t}{\downarrow}}{3^t}\quad}_{m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\xrightarrow{1\text{次後}}(\underbrace{\overset{\overset{S}{\downarrow}}{3^t}+q,\ \overset{\overset{S+3^t}{\downarrow}}{3^t}\ ,\cdots,\quad \overset{\overset{S+(m-1)\cdot3^t}{\downarrow}}{3^t}\quad}_{m\text{個}})\to\cdots\cdots\to(\underbrace{3^t+q,3^t,\cdots,3^t}_{m\text{個}})$$

故 $C_n=\left[S,S+3^t,\cdots\cdots,S+(m-1)3^t\right]$ ■

討論

1.任意正整數 $n\,(n\geq 4)$，必可唯一表示成 $n=3^t\cdot m+q$ $(t,m\in N\,,3\nmid m\,,\ q=1,2,3)$的型式。

2.當 $m\geq 2$時，最終會由 m 人循環傳遞糖果，而當 $m=1$時，即剩 1 人獨得所有糖果。顯然，(1)的公式是(2)的縮化情形。

【舉例】

(1)當 $n=83=3^4\cdot1+2$ ，則 $S=\dfrac{3^4\cdot(3-2)+(3\cdot2-1)}{2}=43$ ，故 $E_n=\left[43\right]$ 。

即 83 人依照規則 $T_{1,2,3}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 43 的人獨得所有糖果。

(2)當 $n=111=3^3\cdot4+3$ ，則 $S=\dfrac{3^3\cdot(3-3)+(3\cdot3-1)}{2}=4$ ，故

$C_n=\left[4,4+3^3,4+2\cdot3^3,4+3\cdot3^3\right]=[4,31,58,85]$ 。

即 111 人依照規則 $T_{1,2,3}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 4,31,58,85 的人循環傳遞糖果。

研究三：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 且 p 為質數

研究一中，我們推導出規則 $T_{1,2}$ 下，只有 $n=2^t+1$ 、 2^t+2 時，會發生成功狀態。研究二中，我們推導出規則 $T_{1,2,3}$ 下，只有 $n=3^t+1$ 、 3^t+2 、 3^t+3 時，會發生成功狀態。事實上，規則 $T_{1,2}$ 、 $T_{1,2,3}$ 的結論，可類推至規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ (p 為質數)的情形。同研究一、二的證明流程，我們首先整理出 $T_{1,2,\cdots,p}$ 的「一輪傳遞」規則(研究日誌)，並得出以下引理：

引理 3.1：傳遞規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ ， p 為質數，將 n 表示成以下型式： $n=p^t\cdot m+q$

$(t,m\in N,\ \ p\nmid m,\ \ q=1,2,\cdots,p)$，則

(1)當 $q=1$ ， $r\geq1$ ， $s\in N$ ，已知存在狀態列 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i個},\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})$

①若 $i=ps+(p-1)$，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{(ps+(p-1))個},\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})\rightarrow(\underbrace{p^{r+1},p^{r+1},\cdots\cdots,p^{r+1}}_{s個},\underline{\underline{\overset{1}{p^{r+1}+1}}})$ 。

②若 $i\neq ps+(p-1)$ ，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i個},\underline{\underline{\overset{1}{p^r+1}}})\rightarrow C_n$ 。

(2)當 $q\geq2$ ， $r\geq1$ ， $s\in N$ ，已知存在狀態列 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i個},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})$

①若 $i=ps$ ，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{ps個},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})\rightarrow(\underbrace{p^{r+1},p^{r+1},\cdots\cdots,p^{r+1}}_{s個},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})$ 。

②若 $i\neq ps$ ，則必存在 $(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{i個},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})\rightarrow C_n$ 。

【證明】略(研究日誌)

引理 3.2：傳遞規則$T_{1,2,\cdots,p}$， p 為質數，將n表示成以下型式： $n=p^t\cdot m+q$

$(t,m\in N,\ \ p\nmid m,\ \ q=1,2,\cdots,p)$，則

(1) $q=1$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$。

②若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^tm+1)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{(p^{t-r}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{p^r+1}}})$，$1\leq r\leq t$，

且$S_r^n(k)=\dfrac{p^r(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^r,\ k=1,2,\cdots,p^{t-r}\cdot m$。

(2) $q\geq 2$

①若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to E_n$。

②若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\cdots\to S_t^n\to C_n$。

其中$S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^tm+q)\text{個}})$、$S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{p^{t-r}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$，$1\leq r\leq t$，

$$且\ S_r^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^r(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^r & ,k=1,2,\cdots,p^{t-r}\cdot m\\ \dfrac{p^r(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r-1} & ,k=p^{t-r}\cdot m+1\end{cases}。$$

【證明】(僅呈現證明$q\geq 2$的部分， $q=1$的情形很類似。完整過程記錄於研究日誌。)

(2) $q\geq 2$

第一部分：證明傳遞過程

① $n=p^t+q(q\geq 2)$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t+q)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_2]{\text{1輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p\text{個}},\underbrace{p,0,\cdots,0}_{p\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p,0,\cdots,0,\overset{q}{\underline{\underline{q}}}}_{q\text{個}})=(\underbrace{p,p,\cdots\cdots,p}_{p^{t-1}\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(\underbrace{p^2,p^2,\cdots\cdots,p^2}_{p^{t-2}\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to\ \cdots\cdots\ \xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(p^t,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to(p^t+q)=E_n$$

② $n=p^t\cdot m+q(q\geq 2)$ $(m\geq 2$且$p\nmid m)$

$$(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t\cdot m+q)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}_2]{\text{1輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p\text{個}},\underbrace{p,0,\cdots,0}_{p\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p,0,\cdots,0,\overset{q}{\underline{\underline{q}}}}_{q\text{個}})=(\underbrace{p,p,\cdots\cdots,p}_{p^{t-1}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$$

$$\xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(\underbrace{p^2,p^2,\cdots\cdots,p^2}_{p^{t-2}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\to\ \cdots\cdots\ \xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}(\underbrace{p^t,\cdots,p^t}_{m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\xrightarrow{\text{引理3.1(2)}}C_n$$

第二部分：證明 $S_r^n(k)$ 的公式—利用數學歸納法

(i)當 $r=1$ 時

$$\text{（欲證 }S_1^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^1(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^1=pk+1 & ,k=1,2,\cdots,p^{t-1}\cdot m\\ \dfrac{p^1(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{1-1}=p(k-1)+q & ,k=p^{t-1}\cdot m+1\end{cases}\text{）}$$

$$\text{因為 }S_0^n=(\underbrace{1,1,\cdots\cdots,1}_{(p^t\cdot m+q)\text{個}})\xrightarrow[\text{甲}2]{1\text{輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p\text{個}},\underbrace{\overset{\substack{p+1\\ \downarrow}}{p},0,\cdots,0}_{p\text{個}},\overset{\substack{2p+1\\ \downarrow}}{p},\cdots\cdots,\underbrace{\overset{\substack{p^t\cdot m+1\\ \downarrow}}{p},0,\cdots,0,\overset{\substack{p^t\cdot m+q\\ \downarrow\\ q}}{\underline{\underline{q}}}}_{q\text{個}})$$

$$=(\underbrace{p,p,\cdots\cdots,p}_{p^{t-1}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})=S_1^n$$

故 $S_1^n(1)=p+1,\ S_1^n(2)=2p+1,\ \cdots\cdots\ ,S_1^n(p^{t-1}\cdot m)=p^t\cdot m+1$

$S_1^n(p^{t-1}\cdot m+1)=p^t\cdot m+q$ 原式成立

(ii)假設 當 $r=r'$ 時 原式成立 即

$$S_{r'}^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^{r'}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^{r'}=T+(k-1)\cdot p^{r'} & ,k=1,2,\cdots,p^{t-r'}\cdot m\\ \dfrac{p^{r'}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r'-1}=T+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r'-1} & ,k=p^{t-r'}\cdot m+1\end{cases}$$

則 當 $r=r'+1$ 時

$$\text{(欲證: }S_{r'+1}^n(k)=\begin{cases}\dfrac{p^{r'+1}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+(k-1)\cdot p^{r'+1}=T+(pk-q)\cdot p^{r'} & ,\ k=1,2,\cdots,p^{t-r'-1}\cdot m\\ \qquad\qquad \| \\ \qquad T+(p-q)\cdot p^{r'}\\ \qquad\qquad \| \\ \dfrac{p^{r'+1}(p-q)+(pq-1)}{p-1}+\left[pk-(2p+1-q)\right]\cdot p^{r'}=T+(pk-p-1)p^{r'} & ,\ k=p^{t-r'-1}\cdot m+1\end{cases}\text{)}$$

$$S_{r'}^n=(\underbrace{\overset{\substack{T\\ \downarrow}}{p^{r'}},\overset{\substack{T+p^{r'}\\ \downarrow}}{p^{r'}},\cdots\cdots,\overset{\substack{T+(p^{t-r'}\cdot m-1)p^{r'}\\ \downarrow}}{p^{r'}}}_{p^{t-r'}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$$

$$\xrightarrow[\text{乙}1]{1\text{輪後}}(\underbrace{p^{r'}-1,\cdots,p^{r'}-1}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(p-1),p^{r'}-1,\cdots}_{q\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p^{r'}-1,\cdots,p^{r'}-1}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(p-1),p^{r'}-1,\cdots,\overset{q}{\underline{\underline{p^{r'}+(q-1)}}}}_{q\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{丙}4]{2\text{輪後}}(\underbrace{p^{r'}-2,\cdots,p^{r'}-2}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(2p-2),p^{r'}-2,\cdots}_{q\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{p^{r'}-2,\cdots,p^{r'}-2}_{(p-q)\text{個}},\underbrace{p^{r'}+(2p-2),p^{r'}-2,\cdots,\overset{q}{\underline{\underline{p^{r'}+(q-2)}}}}_{q\text{個}})$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow[\text{丙}4]{p^{r'}\text{輪後}}(\underbrace{0,\cdots,0}_{p-q\text{個}},\underbrace{\overset{\substack{T+(p-q)\cdot p^{r'}\\ \downarrow}}{p^{r'+1}},0,\cdots,0}_{q\text{個}},\cdots\cdots,\underbrace{0,\cdots,0}_{p-q\text{個}},\underbrace{p^{r'+1},0,\cdots,0,\overset{\substack{T+(p^{t-r'}\cdot m-1)p^{r'}\\ \downarrow\\ q}}{\underline{\underline{q}}}}_{q\text{個}})$$

$$=(\underbrace{p^{r'+1},p^{r'+1},\cdots\cdots,p^{r'+1}}_{p^{t-r'-1}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})=S_{r'+1}^n$$

故 $S_{r'+1}^n(1)=T+(p-q)\cdot p^{r'},\ S_{r'+1}^n(2)=T+(2p-q)\cdot p^{r'},\ \cdots\cdots,$

$S_{r'+1}^n(p^{t-r'-1}\cdot m)=T+(p^{t-r'}\cdot m-q)p^{r'},\ S_{r'+1}^n(p^{t-r'-1}\cdot m+1)=T+(p^{t-r'}\cdot m-1)p^{r'}$ 原式成立

由(i)(ii)及**數學歸納法** 得證 ■

定理 3：n 人$(n\geq p+1)$依照規則$T_{1,2,\cdots,p}$傳遞糖果，p 為質數，且n表示成

$$n=p^t\cdot m+q\ \ (t,m\in N,\ \ p\nmid m,\ \ q=1,2,\cdots,p)，令 S=\frac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}，則$$

(1)若$m=1$，最終為成功狀態，且$E_n=[S]$。

(2)若$m\geq 2$，最終為循環狀態，且$C_n=\left[S,S+p^t,\cdots,S+(m-1)p^t\right]$。

【證明】

a. $q=1$

(1)由引理 3.2 知，若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_{t-1}^n\to E_n$。

$$S_{t-1}^n=(\underbrace{\overset{\overset{1+p^{t-1}}{\downarrow}}{p^{t-1}},\ \overset{\overset{1+2\cdot p^{t-1}}{\downarrow}}{p^{t-1}}\ ,\cdots,\ \ \overset{\overset{1+(p-1)\cdot p^{t-1}}{\downarrow}}{p^{t-1}}}_{(p-1)個},\underline{\underline{\overset{\overset{1+p\cdot p^{t-1}}{\downarrow}}{\overset{1}{p^{t-1}}}+1}})\xrightarrow{1輪後}(p^{t-1}-1,p^{t-1}-1,\cdots,p^{t-1}-1,\underline{\underline{\overset{1}{p^{t-1}}+p}})\to\cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{p^{t-1}輪後}(0,0,\cdots,0,p\cdot \overset{\overset{1+p\cdot p^{t-1}}{\downarrow}}{p^{t-1}}+1)=(p^t+1)\qquad 故\ \ E_n=\left[1+p^t\right]=[S]$$

(2)由引理 3.2 知，若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S}{\downarrow}}{p^t},\ \overset{\overset{S+p^t}{\downarrow}}{p^t},\cdots,p^t}_{(m-1)個},\ \underline{\underline{\overset{\overset{S+(m-1)\cdot p^t}{\downarrow}}{\overset{1}{p^t}}+1}}\ )\to\cdots\cdots\to(\underbrace{p^t,p^t,\cdots,p^t}_{(m-1)個},\underline{\underline{\overset{1}{p^t}+1}})$$

故 $C_n=\left[S,S+p^t,\cdots\cdots,S+(m-1)p^t\right]$

b. $q\geq 2$

(1)由引理 3.2 知，若$m=1$，最終為成功狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to E_n$。

$$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{p^t},\qquad \underline{\underline{\overset{\overset{S+(q-1)\cdot p^{t-1}}{\downarrow}}{\overset{q}{q}}}}\qquad)\to(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{p^t}+q)\qquad 故\ \ E_n=[S]$$

(2)由引理 3.2 知，若$m\geq 2$，最終為循環狀態，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n\to C_n$。

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S}{\downarrow}}{p^t},\ \overset{\overset{S+p^t}{\downarrow}}{p^t}\ ,\cdots\cdots,\quad \overset{\overset{S+(m-1)\cdot p^t}{\downarrow}}{p^t}}_{m個},\underline{\underline{\overset{q}{q}}})\xrightarrow{1次後}(\underbrace{\overset{\overset{S}{\downarrow}}{p^t}+q,\ \overset{\overset{S+p^t}{\downarrow}}{p^t}\ ,\cdots,\quad \overset{\overset{S+(m-1)\cdot p^t}{\downarrow}}{p^t}}_{m個}\ )\to\ \cdots\cdots\to(\underbrace{p^t+q,p^t,\cdots,p^t}_{m個})$$

故 $C_n=\left[S,S+p^t,\cdots\cdots,S+(m-1)p^t\right]$ ■

【**舉例**】

(1)當$n=345=7^3\cdot 1+2$，則$S=\dfrac{7^3\cdot(7-2)+(7\cdot 2-1)}{6}=288$，故$E_n=[288]$。

即 345 人依照規則$T_{1,2,\cdots,7}$傳遞糖果，最終會由初始編號 288 的人獨得所有糖果。

(2)當$n=612=11^2\cdot 5+7$，則$S=\dfrac{11^2\cdot(11-7)+(11\cdot 7-1)}{10}=56$，故

$C_n=\left[56,56+11^2,56+2\cdot 11^2,56+3\cdot 11^2,56+4\cdot 11^2\right]=[56,177,298,419,540]$。

即612 人依照規則$T_{1,2,\cdots,11}$傳遞糖果，最終會由初始編號56,177,298,419,540的人循環傳遞糖果。

研究四：傳遞規則$T_{1,2,\cdots,p}$且 p 為質數的冪次方

研究三中，我們證得了結論：規則$T_{1,2,\cdots,p}$(p 為質數)下，只有$n = p^t + q\ (q = 1,2,\cdots,p)$時，會發生成功狀態，其餘皆為循環狀態。我們一直以為，規則$T_{1,2,3,4}$下，應該也可以推論只有$n = 4^t + 1$、$4^t + 2$、$4^t + 3$、$4^t + 4$時，才會發生成功狀態吧！然而經過我們多組數據測試，我們發現這些n值只是發生成功狀態的充分條件，卻不是必要條件。比如：$n = 9 = 4^1 \cdot 2 + 1$，竟然最終也是成功狀態，到底是為什麼呢？顯然，當 p 不為質數時，公式就必須要修正。為了瞭解在規則$T_{1,2,\cdots,p}$下，p 不為質數時與 p 為質數時為何結論會有不同，我們決定先特別針對$p = {p_0}^{\alpha}$ (p_0 為質數)的情形深入探討。首先，我們先舉 $p = 4$ 的幾個例子來觀察：

n 值	表示法	傳遞過程	n 值	表示法	傳遞過程
17	$4^2 \times 1 + 1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{17}} \rightarrow \underset{(4,4,4,5)}{S_1^{17}} \rightarrow \underset{(17)}{E_{17}}$	49	$4^2 \times 3 + 1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{49}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,5)}{S_1^{49}} \rightarrow \underset{(16,16,17)}{S_2^{49}} \rightarrow \underset{(16,16,17)}{C_{49}}$
18	$4^2 \times 1 + 2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{18}} \rightarrow \underset{(4,4,4,4,2)}{S_1^{18}} \rightarrow \underset{(16,2)}{S_2^{18}} \rightarrow \underset{(18)}{E_{18}}$	50	$4^2 \times 3 + 2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{50}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,2)}{S_1^{50}} \rightarrow \underset{(16,16,16,2)}{S_2^{50}} \rightarrow \underset{(18,16,16)}{C_{50}}$
19	$4^2 \times 1 + 3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{19}} \rightarrow \underset{(4,4,4,4,3)}{S_1^{19}} \rightarrow \underset{(16,3)}{S_2^{19}} \rightarrow \underset{(19)}{E_{19}}$	51	$4^2 \times 3 + 3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{51}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,3)}{S_1^{51}} \rightarrow \underset{(16,16,16,3)}{S_2^{51}} \rightarrow \underset{(19,16,16)}{C_{51}}$
20	$4^2 \times 1 + 4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{20}} \rightarrow \underset{(4,4,4,4,4)}{S_1^{20}} \rightarrow \underset{(16,4)}{S_2^{20}} \rightarrow \underset{(20)}{E_{20}}$	52	$4^2 \times 3 + 4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{52}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,4)}{S_1^{52}} \rightarrow \underset{(16,16,16,4)}{S_2^{52}} \rightarrow \underset{(20,16,16)}{C_{52}}$
33	$4^2 \times 2 + 1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{33}} \rightarrow \underset{(4,4,4,4,4,4,4,5)}{S_1^{33}} \rightarrow \underset{(16,17)}{S_2^{33}} \rightarrow \underset{(33)}{E_{33}}$	97	$4^2 \times 6 + 1$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{97}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,5)}{S_1^{97}} \rightarrow \underset{(16,16,16,16,16,17)}{S_2^{97}} \rightarrow \underset{(32,32,33)}{C_{97}}$
34	$4^2 \times 2 + 2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{34}} \rightarrow \underset{(4,4,4,4,4,4,4,4,2)}{S_1^{34}} \rightarrow \underset{(16,16,2)}{S_2^{34}} \rightarrow \underset{(34)}{E_{34}}$	98	$4^2 \times 6 + 2$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{98}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,2)}{S_1^{98}} \rightarrow \underset{(16,16,16,16,16,16,2)}{S_2^{98}} \rightarrow \underset{(34,32,32)}{C_{98}}$
35	$4^2 \times 2 + 3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{35}} \rightarrow \underset{(4,4,4,4,4,4,4,4,3)}{S_1^{35}} \rightarrow \underset{(16,16,3)}{S_2^{35}} \rightarrow \underset{(35)}{E_{35}}$	99	$4^2 \times 6 + 3$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{99}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,3)}{S_1^{99}} \rightarrow \underset{(16,16,16,16,16,16,3)}{S_2^{99}} \rightarrow \underset{(35,32,32)}{C_{99}}$
36	$4^2 \times 2 + 4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{36}} \rightarrow \underset{(4,4,4,4,4,4,4,4,4)}{S_1^{36}} \rightarrow \underset{(16,16,4)}{S_2^{36}} \rightarrow \underset{(36)}{E_{36}}$	100	$4^2 \times 6 + 4$	$\underset{(1,1,\cdots,1)}{S_0^{100}} \rightarrow \underset{(4,4,\cdots,4,4)}{S_1^{100}} \rightarrow \underset{(16,16,16,16,16,16,4)}{S_2^{100}} \rightarrow \underset{(36,32,32)}{C_{100}}$

比較 p 為質數與 $p = 2^2$ 的情形之異同

n 表示成$n = p^t \cdot m + q$ $(t, m \in N$, $p \nmid m$, $q = 1,2,\cdots,p)$

<table>
<tr><th>比較表</th><th>p 為質數（$p \nmid m$）</th><th>$p = 2^2$　$(4 \nmid m)$</th></tr>
<tr><td>傳遞過程
同</td><td colspan="2">$(1)\ q = 1$
① $m = 1$，$S_0^n \rightarrow S_1^n \rightarrow S_2^n \rightarrow \cdots \rightarrow S_{t-1}^n$。　② $m \geq 2$，$S_0^n \rightarrow S_1^n \rightarrow S_2^n \rightarrow \cdots \rightarrow S_t^n$。
$(2)\ q \geq 2$
①) $m = 1$，$S_0^n \rightarrow S_1^n \rightarrow S_2^n \rightarrow \cdots \rightarrow S_t^n$。　② $m \geq 2$，$S_0^n \rightarrow S_1^n \rightarrow S_2^n \rightarrow \cdots \rightarrow S_t^n$。</td></tr>
<tr><td>$S_r^n(k)$公式
同</td><td colspan="2">$(1)\ q = 1$，$S_r^n(k) = S + (k-1) \cdot p^r, k = 1,2,\cdots,p^{t-r} \cdot m$。
$(2)\ q \geq 2$
$S_r^n(k) = \begin{cases} S + (k-1)p^r & ,k = 1,2,\cdots,p^{t-r} \cdot m \\ S + [pk - (2p+1-q)]p^{r-1} & ,k = p^{t-r} \cdot m + 1 \end{cases}$。　$S = \dfrac{p^t(p-q) + (pq-1)}{p-1}$</td></tr>
<tr><td>傳遞結果
異</td><td>$(1)\ m = 1$，為成功狀態。
$(2)\ m \geq 2$時，為 m 人的循環狀態。</td><td>$(1)\ m = 1,2$，為成功狀態。
$(2)\ m \geq 3$，m 為奇數，為 m 人的循環狀態。
$(3)\ m \geq 3$，m 為偶數，為 $\dfrac{m}{2}$ 人的循環狀態。</td></tr>
</table>

上表中傳遞結果為何會不同呢？這讓我們相當好奇，於是我們更細微的觀察 $p = 4$ 情形的最後一階狀態列S_{t-1}^n或S_t^n之後的變化，研究結果如下：(僅說明$q \geq 2$的情形，$q = 1$的情形很類似。)

【問題】為什麼規則$T_{1,2,3,4}$下，$\boldsymbol{n}=4^t\times2+\boldsymbol{q}$會是成功狀態呢？

【分析】n的傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，其中$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underset{=}{q}})\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{4^t+q}}},4^t)=(a_0,a_1)$。

觀察a_0、a_1接下來所傳遞出的糖果數：

$q=2,4$

a_0	a_1
−3	
	−4
−1	
	−2
⋮	⋮

$q=3$

a_0	a_1
−4	
	−1
−2	
	−3
⋮	⋮

如左表，直觀來說，

①$q=2,4$時，a_0給出的糖果總是比a_1少，因此最終糖果會集中在a_0手中。此時$4-q\equiv0(\bmod 2)$。

②$q=3$時，a_0給出的糖果總是比a_1多，因此最終糖果會集中在a_1手中。事實上，<u>$q=1$ 也屬於此型</u>。此時$4-q\equiv1(\bmod 2)$。

因此$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underset{=}{q}})\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{4^t+q}}},4^t)\to(4^t\times2+q)=E_n$，$E_n=\left[S+r\cdot4^t\right]$，其中$4-q\equiv r(\bmod 2)$。

【問題】為什麼規則$T_{1,2,3,4}$下，$\boldsymbol{n}=4^t\times6+\boldsymbol{q}$是 3 人的循環狀態，而非如研究三結論，規則
$T_{1,2,\cdots,p}$(p為質數)下，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}^t\times6+\boldsymbol{q}$是 6 人的循環狀態呢？

【分析】n的傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，其中

$$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+2\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+3\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+4\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+5\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underset{=}{q}})\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{4^t+q}}},4^t,4^t,4^t,4^t,4^t)=(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\ 。$$

觀察a_0、a_1、a_2、a_3、a_4、a_5接下來所傳遞出的糖果數：

$q=2,4$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
−3					
	−4				
		−1			
			−2		
				−3	
					−4
−1					
	−2				
		−3			
			−4		
				−1	
					−2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$q=3$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
−4					
	−1				
		−2			
			−3		
				−4	
					−1
−2					
	−3				
		−4			
			−1		
				−2	
					−3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

如左表，直觀來說，

①$q=2,4$時，最終糖果會集中在a_0、a_2、a_4手中。此時$4-q\equiv0(\bmod 2)$。

②$q=3$時，最終糖果會集中在a_1、a_3、a_5手中。事實上，<u>$q=1$ 也屬於此型</u>。此時$4-q\equiv1(\bmod 2)$。由①②知，

$$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+2\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+3\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+4\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+5\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underset{=}{q}})\to(\overset{\overset{S+r\cdot4^t}{\downarrow}}{2\cdot4^t},\ \overset{\overset{S+r\cdot4^t+2\cdot4^t}{\downarrow}}{2\cdot4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+r\cdot4^t+4\cdot4^t}{\downarrow}}{2\cdot4^t}\ ,\overset{q}{\underset{=}{q}})$$

$$\to(\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{2\cdot4^t+q}}},2\cdot4^t,2\cdot4^t)=(b_0,b_1,b_2)$$，其中$4-q\equiv r(\bmod 2)$。

$q=2,3,4$

b_0	b_1	b_2
−3		
	−4	
		−1
−2		
	−3	
		−4
−1		
	−2	
		−3
−4		
	−1	
		−2
⋮	⋮	⋮

再觀察b_0、b_1、b_2接下來所傳遞出的糖果數：

如左表，直觀來說，

$q=2,3,4$時，b_0,b_1,b_2平均的給出手中的糖果，因此糖果並不會集中在某人手中，而是在此三人間循環傳遞。(<u>$q=1$ 亦同</u>)

因此$S_t^n=(\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4^t},\ \overset{\overset{S+4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+2\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+3\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+4\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+5\cdot4^t}{\downarrow}}{4^t}\ ,\overset{q}{\underset{=}{q}})\to(\overset{\overset{S+r\cdot4^t}{\downarrow}}{2\cdot4^t},\ \overset{\overset{S+r\cdot4^t+2\cdot4^t}{\downarrow}}{2\cdot4^t}\ ,\ \overset{\overset{S+r\cdot4^t+4\cdot4^t}{\downarrow}}{2\cdot4^t}\ ,\overset{q}{\underset{=}{q}})\to C_n$，

$C_n=\left[S+r\cdot4^t,S+r\cdot4^t+2\cdot4^t,S+r\cdot4^t+4\cdot4^t\right]$，其中$4-q\equiv r(\bmod 2)$。

【**問題**】上述公式中的 $\boldsymbol{r}$ 值為什麼決定於 $\boldsymbol{p-q\equiv r(\mathrm{mod}\,d)}$ 、 $\boldsymbol{(p,m)=d}$ 呢？

【**分析**】以規則 $T_{1,2,\cdots,9}$ 、 $n=9^t\times 15+2$ 為例： n 的傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$ ，其中

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S}{\downarrow}}{9^t},\ \overset{\overset{S+9^t}{\downarrow}}{9^t}\ ,\cdots,\ \ \overset{\overset{S+14\cdot 9^t}{\downarrow}}{9^t}}_{15個}\ ,\overset{2}{\underline{\underline{2}}})\to(\underbrace{\overset{3}{\underline{\underline{9^t+2}}},9^t,\cdots,9^t}_{15個})=(a_0,a_1,\cdots,a_{14})$$ 且 a_i 的初始編號為 $S+i\cdot 9^t$ 。

觀察 a_0 、 a_1 、……、 a_{14} 接下來所傳遞出的糖果數：(將 1 個傳遞週期濃縮成 3 行表示)

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	
傳出	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	1輪
總變化	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$+8$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
傳出	-9	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-1	-2	-3	-4	-5	2輪
總變化	-1	$+8$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$+8$	-1	-1	-1	-1	
傳出	-6	-7	-8	-9	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-1	-2	3輪
總變化	-1	-1	-1	-1	$+8$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$+8$	-1	

由上表可看出，除了 a_1 、 a_4 、 a_7 、 a_{10} 、 a_{13} 外，其他人手中的糖果數每輪減少一顆，一直遞減，直至同時降至 0 顆，因此最終糖果會集中在 a_1 、 a_4 、 a_7 、 a_{10} 、 a_{13} 此 5 人手中。

可觀察到以下性質：

(1)每 3 輪會形成一個傳遞週期。

(2) $(9,15)=3\Rightarrow$ 每 3 人保留 1 人，其餘人手中糖果會清空而被淘汰。

(3) $9-2\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow$ 第一個保留的人為 a_1 。

(4) a_1 、 a_4 、 a_7 、 a_{10} 、 a_{13} 的初始編號分別為 $S+1\cdot 9^t, S+4\cdot 9^t, S+7\cdot 9^t, S+10\cdot 9^t, S+13\cdot 9^t$ 。

事實上，**這樣的糖果集中原則，對於任意 p 值，以及任意人數進行傳遞時，皆適用**。

為了方便描述糖果集中原則，我們先定義一個函數： $[x]_p=\begin{cases} x除以p的餘數, & 當p\nmid x \\ p\qquad\qquad\quad , & 當p\mid x\end{cases}$ 。

糖果集中原則：在規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 下，當剩 ℓ 人傳遞糖果，且當前狀態列 $(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{\ell-1}}_{\ell})$ 型如

$$(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})$$ ， $\frac{p}{d}\mid A$ 、 $1\le q\le p$ ，則數輪傳遞後，糖果會集中在

$$\underbrace{a_r,a_{r+d},\cdots\cdots,a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}}$$ 手中，即狀態列變化為 $(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{a_r}}},a_{r+d},\cdots\cdots,a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}})$ ，

其中 $(p,\ell)=d$ 、 $p-q\equiv r(\mathrm{mod}\,d)$ 、 $0\le r<d$ 。特別的是，當 $(p,\ell)=1$ 時， $r=0$ ，此時糖果會在此 ℓ 人間循環傳遞。

【證明】(**僅證明 $1\le q\le p-1$ 個的情形， $q=p$ 時同理。**)

假設當前狀態列為$(\underline{\underline{\overset{q+1}{a_0}}}, a_1, \cdots, a_{\ell-1}) = (\underbrace{\underline{\underline{\overset{q+1}{A+q}}}, A, \cdots, A}_{\ell})$ ，

a_i 每一次糖果數變化可能為以下兩種情形：

(ｉ) 接收$(T-1)$顆糖果，傳出T 顆糖果，糖果總變化量為-1 。

(ⅱ) 接收 p 顆糖果，傳出 1 顆糖果，糖果總變化量為$+(p-1)$ 。

此外，若a_i 在某次傳遞出T 顆糖果，則下次會傳遞出$[T+\ell]_p$ 顆糖果。因此，

a_i 的傳遞情形是 $\underbrace{T \to [T+\ell]_p \to [T+2\ell]_p \to \cdots\cdots \to \left[T+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p}_{\frac{p}{d}\text{次}} \to T \to \cdots\cdots$

產生週期為$\dfrac{p}{d}$的循環。【註 1】

觀察$a_0, a_1, \cdots, a_{\ell-1}$ 傳遞出的糖果數，如下表：(將$a_0, a_1, \cdots, a_{\ell-1}$ 以每d 人一組，分成$\dfrac{\ell}{d}$組。)

	a_0	$\cdots$	a_r	$\cdots$	$\cdots$	a_{r+d}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$	$\cdots a_{\ell-1}$	
傳	$-(q+1)$		$-[r+q+1]_p$			$-[r+q+1+d]_p$		$\cdots$		$-\left[r+q+1+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d\right]_p$		一個傳遞週期 $\frac{p}{d}$ 輪
總	-1	$\cdots$	☆	-1	-1	☆	-1	$\cdots$	-1	☆	-1	
傳			$-[r+q+1+\ell]_p$			$-[r+q+1+d+\ell]_p$		$\cdots$		$-\left[r+q+1+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d+\ell\right]_p$		
總	-1	$\cdots$	☆	-1	-1	☆	-1	$\cdots$	-1	☆	-1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
傳			$-\left[r+q+1+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p$			$-\left[r+q+1+d+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p$		$\cdots$		$-\left[r+q+1+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d+\left(\frac{p}{d}-1\right)\ell\right]_p$		
總	-1	$\cdots$	☆	-1	-1	☆	-1	$\cdots$	-1	☆	-1	
			第 1 組			第 2 組				第$\frac{\ell}{d}$組		

存在以下性質：

(1) $a_r, a_{r+d}, \cdots\cdots, a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 每一次傳遞出的糖果數均型如 $[r+q+1+sd+t\ell]_p$, $s,t \in N \cup \{0\}$

因為 $r+q+1+sd+t\ell \equiv 1(\operatorname{mod} d)$【註 2】，所以除了$a_r, a_{r+d}, \cdots\cdots, a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 外，其他人均

不可能為情形(ⅱ)，故手中糖果數每輪會少一顆，且糖果數會同時歸零而淘汰。

(2) 當$a_r, a_{r+d}, \cdots\cdots, a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 外的人之手中糖果數降至零時，共進行了A輪傳遞，又$\dfrac{p}{d} \mid A$ ，

因此必是進行了數個完整週期的傳遞過程。其狀態列變化如下：

$$(\underbrace{\underline{\underline{\overset{q+1}{A+q}}},A,\cdots,A}_{\text{第}1\text{組}},\underbrace{A,\cdots,A}_{\text{第}2\text{組}},\cdots\cdots,\underbrace{A,\cdots,A}_{\text{第}\frac{\ell}{d}\text{組}})$$

$$\xrightarrow{\frac{p}{d}\text{輪}}(\underbrace{A-\frac{p}{d},\cdots,A-\frac{p}{d},\overset{\overset{a_r}{\downarrow}}{A+p-\frac{p}{d}},A-\frac{p}{d},\cdots,A-\frac{p}{d}}_{\text{第}1\text{組}},\cdots\cdots,\underbrace{A-\frac{p}{d},\cdots,A-\frac{p}{d},\overset{\overset{a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}{\downarrow}}{A+p-\frac{p}{d}},A-\frac{p}{d},\cdots,\underline{\underline{A-\overset{q}{\frac{p}{d}}+q}}}_{\text{第}\frac{\ell}{d}\text{組}})$$

$$\xrightarrow{\frac{p}{d}\times2\text{輪}}(\underbrace{A-\frac{2p}{d},\cdots,A-\frac{2p}{d},\overset{\overset{a_r}{\downarrow}}{A+2p-\frac{2p}{d}},A-\frac{2p}{d},\cdots,A-\frac{2p}{d}}_{\text{第}1\text{組}},\cdots\cdots,\underbrace{A-\frac{2p}{d},\cdots,A-\frac{2p}{d},\overset{\overset{a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}{\downarrow}}{A+2p-\frac{2p}{d}},A-\frac{2p}{d},\cdots,\underline{\underline{A-\overset{q}{\frac{2p}{d}}+q}}}_{\text{第}\frac{\ell}{d}\text{組}})$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow{A\text{輪}}(\underbrace{0,\cdots,0,\overset{\overset{a_r}{\downarrow}}{dA},0,\cdots,0}_{\text{第}1\text{組}},\cdots,\underbrace{0,\cdots,0,\overset{\overset{a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}{\downarrow}}{dA},0,\cdots,\underline{\underline{\overset{q}{q}}}}_{\text{第}\frac{\ell}{d}\text{組}})\xrightarrow{1\text{步}}(\underbrace{\underline{\underline{\overset{q+1}{dA+q}}},dA,\cdots,dA}_{\frac{\ell}{d}})=(\underbrace{\underline{\underline{\overset{q+1}{a_r}}},a_{r+d},\cdots\cdots,a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}})$$

【註 1】$\because (p,\ell)=d$　　令 $p=dp',\ell=d\ell'$　其中 $(p',\ell')=1$　則 $p'=\dfrac{p}{d}$

①若 $[T+p''\ell]_p=T$，$1\le p''\le p'-1$　則 $p\,|\,p''\ell\Rightarrow dp'\,|\,p''d\ell'\Rightarrow p'\,|\,p''\ell'\Rightarrow p'\,|\,p''\rightarrow\leftarrow$

因此 $[T+p''\ell]_p\ne T,\ 1\le p''\le p'-1$

② $[T+p'\ell]_p=[T+p'd\ell']_p=[T+p\ell']_p=T$　　由①②知　產生週期為 $\dfrac{p}{d}$ 的循環。

【註 2】$\because\ p-q\equiv r(\bmod d)$　　$\therefore\ p-q-r=d\cdot B$　其中 $B\in Z$

故　$r+q+1+sd+t\ell=p-d\cdot B+1+sd+t\ell=dp'-d\cdot B+1+sd+t\cdot d\ell'\equiv 1(\bmod d)$　■

討論　若 $\dfrac{p}{d}\nmid A$，糖果也會集中在 $a_r,a_{r+d},\cdots\cdots,a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}$ 的手中，但變化後的狀態列不是型如 $(\underline{\underline{\overset{[q+1]_p}{A+q}}},A,\cdots,A)$。本作品所處理的 A 值，皆符合 $\dfrac{p}{d}\,|\,A$。

以上說明，我們可以將過程一般化，調整一下符號表示，便可證得定理 4。

定理 4：n 人 $(n\ge p+1)$ 依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_0{}^{\alpha}$ (p_0 為質數)，且 n 表示成

$$n=p^t\cdot\left(p_0{}^{\beta}m\right)+q=\left(p_0{}^{\alpha}\right)^t\cdot\left(p_0{}^{\beta}m\right)+q\quad(t,m\in N,\ \ p_0\nmid m,\ \ \alpha>\beta,\ \ q=1,2,\cdots,p)，$$

令 $S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$、$p-q\equiv R\,(\bmod p_0{}^{\beta})$、$0\le R<p_0{}^{\beta}$，$S=S_0+R\cdot p^t$，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\ge2$，最終為循環狀態，且 $C_n=\left[S,S+p_0{}^{\alpha t+\beta},\cdots\cdots,S+(m-1)p_0{}^{\alpha t+\beta}\right]$。

【證明】

當 $\beta=0$、$m=1$、$q=1$，即 $n=\left(p_0{}^{\alpha}\right)^t\cdot 1+1$，同引理 3.2 之證明，我們可證得其傳遞過程為 $S_0^n\rightarrow S_1^n\rightarrow S_2^n\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow S_{t-1}^n\rightarrow E_n$，且 $E_n=[S]$，定理 4 結論成立。

以下針對其他情形探討：同引理 3.2 之證明可證得，

a. 當 $q=1$ 時，其傳遞過程為 $S_0^n\rightarrow S_1^n\rightarrow S_2^n\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow S_t^n$，

$$\text{其中 } S_t^n=(\underbrace{p^t,p^t,\cdots\cdots,p^t}_{(p_0{}^{\beta}\cdot m-1)\text{個}},\overset{1}{\underline{\underline{p^t+1}}})\rightarrow(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{\overset{2}{\underline{\underline{p^t+1}}}},\ \overset{\overset{S_0+p^t}{\downarrow}}{p^t},\cdots\cdots,p^t,\ \ \overset{\overset{S_0+(p_0{}^{\beta}m-1)p^t}{\downarrow}}{p^t}\ \ }_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}})=(\underbrace{\overset{2}{\underline{\underline{a_0}}},a_1,\cdots,a_{p_0{}^{\beta}\cdot m-1}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m})$$

b. 當 $q\geq 2$ 時，其傳遞過程為 $S_0^n\rightarrow S_1^n\rightarrow S_2^n\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow S_t^n$，

$$\text{其中 } S_t^n=(\underbrace{p^t,p^t,\cdots\cdots,p^t}_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\rightarrow(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{p^t+q}}}},\ \overset{\overset{S_0+p^t}{\downarrow}}{p^t},\cdots\cdots,\ \ \overset{\overset{S_0+(p_0{}^{\beta}m-1)p^t}{\downarrow}}{p^t}\ \ }_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}})=(\underbrace{\overset{1\vee q+1}{\underline{\underline{a_0}}},a_1,\cdots,a_{p_0{}^{\beta}\cdot m-1}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m})$$

由 a. b.可知，無論 q 值為何，皆存在狀態列 $(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{p_0{}^{\beta}\cdot m-1}}_{p_0{}^{\beta}\cdot m\text{個}})$ 型如 $(\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A)$，其中 a_i 的初始編號為 $S_0+i\cdot p^t$、$S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$ $(0\leq i\leq p_0{}^{\beta}\cdot m-1)$。

接著，觀察其之後的變化。

由**糖果集中原則**知：$(p,p_0{}^{\beta}m)=(p_0{}^{\alpha},p_0{}^{\beta}m)=p_0{}^{\beta}=d$ 且 $p-q\equiv R\ (\bmod p_0{}^{\beta})$、$0\leq R<p_0{}^{\beta}$，數輪傳遞後，糖果會集中在 $a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+(m-1)d}$ 的手中。

(1)若 $m=1$，糖果最終會集中在 a_R 一個人手中，他的初始編號為 $S_0+R\cdot p^t=S$，即 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\geq 2$，糖果會集中在 $a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+(m-1)d}$ 的手中，其中 $(p,m)=1$。

由**糖果集中原則**知：糖果會在 $a_R,a_{R+d},\cdots\cdots,a_{R+(m-1)d}$ 這 m 人間循環傳遞，且他們的初始編號為 $S_0+R\cdot p^t$, $S_0+(R+d)\cdot p^t$, $\cdots\cdots$, $S_0+\left[R+(m-1)d\right]\cdot p^t$。

即 $C_n=\left[S,S+p_0{}^{\alpha t+\beta},\cdots\cdots,S+(m-1)p_0{}^{\alpha t+\beta}\right]$ ■

【**舉例**】

(1)當 $n=250=\left(3^2\right)^2\times\left(3^1\times 1\right)+7$，則 $3^2-7\equiv 2\ (\bmod 3^1)$，$S=\dfrac{9^2(9-7)+(9\cdot 7-1)}{3^2-1}+2\cdot 9^2=190$，

故 $E_n=[S]=[190]$。即 250 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,9}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 190 的人獨得所有糖果。

(2)當 $n=1284=\left(2^3\right)^2\times\left(2^2\times 5\right)+4$，則 $2^3-4\equiv 0(\bmod 2^2)$，$S=\dfrac{8^2(8-4)+(8\cdot 4-1)}{2^3-1}+0\cdot 8^2=41$，

故 $C_n=\left[41,41+2^8,\cdots\cdots,41+4\cdot 2^8\right]=\left[41,297,553,809,1065\right]$。即 1284 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,8}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 41, 297, 553, 809, 1065 的人循環傳遞糖果。

研究五：傳遞規則$T_{1,2,\cdots,p}$且$p\in N, p\geq 2$

最後，我們想挑戰 p 為任意正整數的一般化情形。我們蒐集了各種 p 值的傳遞結果，有了初步發現：若 p 的質因數分解為 $p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$（$p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ，其中 $(m,p)=1$ ， $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$ ，其**傳遞結果與定理 4 類似**，同時，我們也發現，存在某個 R 值，符合定理 4 中 $\boldsymbol{S=S_0+R\cdot p^t}$ 的通式。比如，傳遞規則$T_{1,2,\cdots,30}$下，當 $n=(2\times3\times5)^t\times2^4\times3^2\times1+3$ 時，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$，其中 $S=S_0+\underbrace{129}_{R}\cdot30^t$。然而，這個 R 值該如何決定呢？經過研究發現，這和**糖果集中原則**息息相關，且 **R 值在不同的 n 值間存在著某種線性關係，我們可以利用這個線性關係迭代出所需的 R 值**。

以下舉例說明：

<u>說明</u>：當 $n=(30)^t\times2^2+11$ 時，$E_n=[S]$。其中 $S=S_0+\underset{=3}{R}\cdot30^1$，$S_0=\dfrac{30^t(30-11)+(30\cdot11-1)}{30-1}$。

傳遞規則$T_{1,2,\cdots,30}$、$n=(2\times3\times5)^t\times2^s+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	$s\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……	29	30
$R_3(0,0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	……	0	0
$R_3(1,0)$	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	……	1	0
		1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	1+0·2	0+0·2	……	1+0·2	0+0·2
$R_3(2,0)$	2	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	……	3	0
		1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	1+1·2	0+0·2	……	1+1·2	0+0·2
	3	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	0	……	7	0
		1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	1+3·2	0+0·2	……	1+3·2	0+0·2
	4	15	0	15	0	15	0	15	0	15	0	15	0	……	15	0
		1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	1+7·2	0+0·2	……	1+7·2	0+0·2

傳遞規則$T_{1,2,\cdots,30}$、$n=(2\times3\times5)^t\times2^s\times3+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	$s\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……	29	30
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	……	1	0
	1	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	……	1	0
		5+0·6	4+0·6	3+0·6	2+0·6	1+0·6	0+0·6	5+0·6	4+0·6	3+0·6	2+0·6	1+0·6	0+0·6	……	1+0·6	0+0·6
	2	11	4	9	2	7	0	11	4	9	2	7	0	……	7	0
		5+1·6	4+0·6	3+1·6	2+0·6	1+1·6	0+0·6	5+1·6	4+0·6	3+1·6	2+0·6	1+1·6	0+0·6	……	1+1·6	0+0·6
$R_3(3,1)$	3	23	4	21	2	19	0	23	4	21	2	19	0	……	19	0
		5+3·6	4+0·6	3+3·6	2+0·6	1+3·6	0+0·6	5+3·6	4+0·6	3+3·6	2+0·6	1+3·6	0+0·6	……	1+3·6	0+0·6
	4	47	4	45	2	43	0	47	4	45	2	43	0	……	43	0
		5+7·6	4+0·6	3+7·6	2+0·6	1+7·6	0+0·6	5+7·6	4+0·6	3+7·6	2+0·6	1+7·6	0+0·6	……	1+7·6	0+0·6

傳遞規則$T_{1,2,\cdots,30}$、$n=(2\times3\times5)^t\times2^s\times3^2+q,\ q=1,2,\cdots,30$ 之 R 值表

	$s\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……	29	30
	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	……	4	0
	1	17	10	3	14	7	0	17	10	3	14	7	0	……	7	0
		5+2·6	4+1·6	3+0·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	5+2·6	4+1·6	3+0·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	……	1+1·6	0+0·6
	2	35	28	21	14	7	0	35	28	21	14	7	0		7	0
		5+5·6	4+4·6	3+3·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	5+5·6	4+4·6	3+3·6	2+2·6	1+1·6	0+0·6	……	1+1·6	0+0·6
	3	71	28	57	14	43	0	71	28	57	14	43	0		43	0
		5+11·6	4+4·6	3+9·6	2+2·6	1+7·6	0+0·6	5+11·6	4+4·6	3+9·6	2+2·6	1+7·6	0+0·6	……	1+7·6	0+0·6
$R_3(4,2)$	4	143	28	129	14	115	0	143	28	129	14	115	0		115	0
		5+23·6	4+4·6	3+21·6	2+2·6	1+19·6	0+0·6	5+23·6	4+4·6	3+21·6	2+2·6	1+19·6	0+0·6	……	1+19·6	0+0·6

【說明】

若 $n=(2\times3\times5)^t\times2^{s_1}\times3^{s_2}+q$ 的 R 值記作 $R_q(s_1,s_2)$，由以上表格紫色圈圈，我們可以觀察到：

$R_3(4,2)=129=3+\underbrace{21}_{R_3(3,1)}\cdot6$　且　$R_3(3,1)=21=3+\underbrace{3}_{R_3(2,0)}\cdot6$　且　$R_3(2,0)=3=1+\underbrace{1}_{R_3(1,0)}\cdot2$

且　$R_3(1,0)=1=1+\underbrace{0}_{R_3(0,0)}\cdot2$。

也就是只要我們給定初始值 $R_3(0,0)=0$，依照一定的線性關係，就可依序迭代出 $R_3(4,2)$。

【問題】以上 R 值為什麼會存在線性關係呢？其線性關係如何表示？

【分析】規則 $T_{1,2,\cdots,30}$ 下，$n=(30)^t\times2^{s_1}\times3^{s_2}+3$，找出 $R_3(4,2),\ R_3(3,1),\ R_3(2,0),\ R_3(1,0),\ R_3(0,0)$ 間的線性關係。

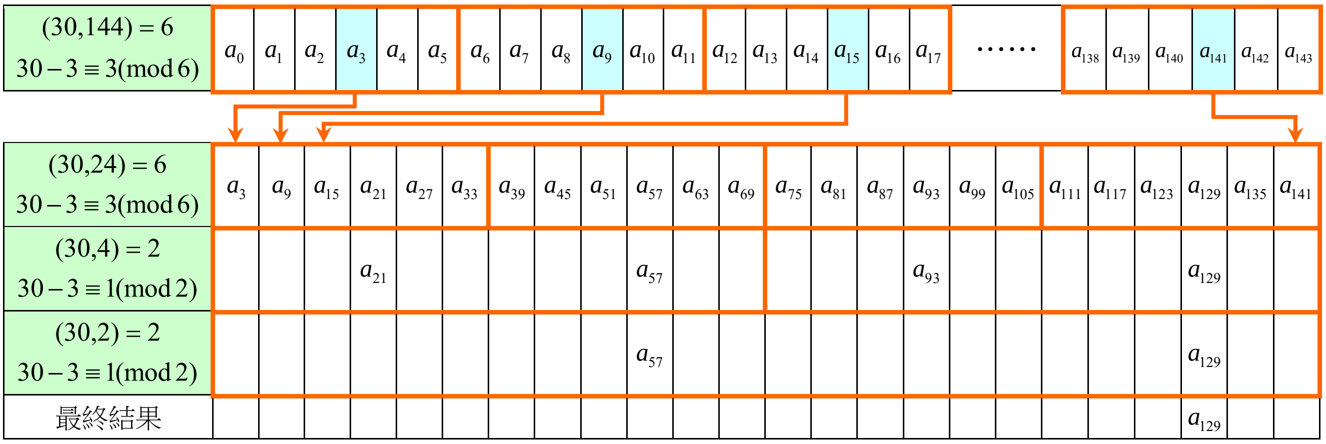
(1) $R_3(4,2)$ 對應 $n=(2\times3\times5)^t\times2^4\times3^2+3=30^t\times144+3$，傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t},\cdots\cdots,\ \overset{\overset{S_0+143\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{144個},\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{4}}{\underline{\underline{30^t+3}}},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t},\cdots\cdots,\ \overset{\overset{S_0+143\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{144個})=(a_0,a_1,\cdots,a_{143})$$

，其中 a_k 的初始編號為

$S_0+k\cdot30^t$、$S_0=\dfrac{30^t(30-3)+(30\times3-1)}{30-1}$ $(0\le k\le143)$。觀察 $(a_0,a_1,\cdots,a_{143})$ 接下來的變化。

因為 $(30,144)=6$ 且 $30-3\equiv3(\mathrm{mod}\,6)$，由**糖果集中原則**可知：數輪傳遞後，糖果會集中於 $a_3,a_9,a_{15},\cdots\cdots,a_{141}$ 共 24 人手中，依此類推。將狀態列變化圖示如下：**＜表 1＞**



$(30,144)=6$ $30-3\equiv3(\mathrm{mod}\,6)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	……	a_{138}	a_{139}	a_{140}	a_{141}	a_{142}	a_{143}

$(30,24)=6$ $30-3\equiv3(\mathrm{mod}\,6)$	a_3	a_9	a_{15}	a_{21}	a_{27}	a_{33}	a_{39}	a_{45}	a_{51}	a_{57}	a_{63}	a_{69}	a_{75}	a_{81}	a_{87}	a_{93}	a_{99}	a_{105}	a_{111}	a_{117}	a_{123}	a_{129}	a_{135}	a_{141}
$(30,4)=2$ $30-3\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$				a_{21}						a_{57}						a_{93}						a_{129}		
$(30,2)=2$ $30-3\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$										a_{57}												a_{129}		
最終結果																						a_{129}		

由＜表 1＞可知，糖果最終集中在 a_{129} 手中，其初始編號為 $S_0+129\cdot30^t$，故 $R_3(4,2)=129$。

(2) $R_3(3,1)$ 對應 $n=(2\times3\times5)^t\times2^3\times3^1+3=30^t\times24+3$，傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t},\cdots\cdots,\ \overset{\overset{S_0+23\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{24個},\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{4}}{\underline{\underline{30^t+3}}},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t},\cdots\cdots,\ \overset{\overset{S_0+23\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{24個})=(a_0,a_1,\cdots,a_{23})$$

。其中 a_k 的初始編號為

$S_0+k\cdot30^t$、$S_0=\dfrac{30^t(30-3)+(30\times3-1)}{30-1}$ $(0\le k\le23)$。觀察 $(a_0,a_1,\cdots,a_{23})$ 接下來的變化。

依照**糖果集中原則**，將狀態列變化圖示如下：**＜表 2＞**

$(30,24)=6$ $30-3\equiv3(\bmod 6)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$(30,4)=2$ $30-3\equiv1(\bmod 2)$				a_3						a_9						a_{15}						a_{21}		
$(30,2)=2$ $30-3\equiv1(\bmod 2)$										a_9												a_{21}		
最終結果																						a_{21}		

由＜表 2＞可知，糖果最終集中在a_{21}手中，其初始編號為$S_0+21\cdot30^t$，故$R_3(3,1)=21$。

觀察＜表 1＞、＜表 2＞的關係

＜表 1＞的第二~五列的糖果集中模式和＜表 2＞的第一~四列一模一樣，只是每個編號呈現$y=3+6x$的線性關係，而這個關係是因為原本＜表 1＞中$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{143}$共 144 人，依照**糖果集中原則**，在數輪傳遞後，糖果會集中在$a_3,a_9,a_{15},\cdots\cdots,a_{141}$手中，而這 24 人若重新編號後，身分就類同＜表 2＞中的$a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{23}$。因此$\boxed{R_3(4,2)=3+6\cdot R_3(3,1)}$。

(3) $R_3(2,0)$對應$n=(2\times3\times5)^t\times2^2\times3^0+3=30^t\times4+3$，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t}\ ,\ \overset{\overset{S_0+2\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}\ ,\ \overset{\overset{S_0+3\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{4個}\ ,\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{\overset{4}{\underline{\underline{\underline{30^t+3}}}}},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t}\ ,\ \overset{\overset{S_0+2\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}\ ,\ \overset{\overset{S_0+3\cdot30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{4個}\ )=(a_0,a_1,a_2,a_3)$$ 。

依照**糖果集中原則**，將狀態列變化圖示如下：**＜表 3＞**

$(30,4)=2$ $30-3\equiv1(\bmod 2)$	a_0	a_1	a_2	a_3
$(30,2)=2$ $30-3\equiv1(\bmod 2)$		a_1		a_3
最終結果				a_3

由＜表 3＞可知，糖果最終集中在a_3手中，其初始編號為$S_0+3\cdot30^t$，故$R_3(2,0)=3$。

＜表 2＞的第二~四列的糖果集中模式和＜表 3＞的第一~三列一模一樣，而每個編號呈現$y=3+6x$的線性關係，因此$\boxed{R_3(3,1)=3+6\cdot R_3(2,0)}$。

(4) $R_3(1,0)$對應$n=(2\times3\times5)^t\times2^1\times3^0+3=30^t\times2+3$，其傳遞過程為$S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$$S_t^n=(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{30^t},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{2個}\ ,\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\underbrace{\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{\overset{4}{\underline{\underline{\underline{30^t+3}}}}},\ \overset{\overset{S_0+30^t}{\downarrow}}{30^t}}_{2個}\ )=(a_0,a_1)$$ 。

依照**糖果集中原則**，將狀態列變化圖示如下：**＜表 4＞**

$(30,2)=2$ $30-3\equiv1(\bmod 2)$		a_0		a_1
最終結果				a_1

由＜表 4＞可知，糖果最終集中在a_1手中，其初始編號為$S_0+1\cdot30^t$，故$R_3(1,0)=1$。

＜表 3＞的第二、三列的糖果集中模式和＜表 4＞的第一~二列一模一樣，而每個編號呈現$y=1+2x$的線性關係，因此$\boxed{R_3(2,0)=1+2\cdot R_3(1,0)}$。

(5) $R_3(0,0)$ 對應 $n=(2\times3\times5)^t\times2^0\times3^0+3=30^t\times1+3$，其傳遞過程為 $S_0^n\to S_1^n\to S_2^n\to\cdots\to S_t^n$，

$S_t^n=(\overset{\overset{s_0}{\downarrow}}{30^t},\overset{3}{\underline{\underline{3}}})\to(\overset{\overset{s_0}{\downarrow}}{30^t}+3)=(a_0)$，此時顯然 $R_3(0,0)=0$。因此 $\boxed{R_3(1,0)=1+2\cdot R_3(0,0)}$。

我們將以上研究結論整理如下：

R 值線性關係：

n 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ($t,m\in N$, $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p$)，將 n 的 R 值記作 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$，若 $(p,p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i})=d$ 、 $p-q\equiv r\ (\mathrm{mod}\, d)$ 、 $0\le r<d$，則

$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)=r+R_q(Max\{s_1-\alpha_1,0\},Max\{s_2-\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-\alpha_i,0\})\times d$。

R 值迭代法：

依照 R **值線性關係**，列出以下 R 值間的關係式，直至 $(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 降階至 $(0,0,\cdots,0)$。即

$$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)\to R_q(Max\{s_1-\alpha_1,0\},Max\{s_2-\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-\alpha_i,0\})\to$$
$$R_q(Max\{s_1-2\alpha_1,0\},Max\{s_2-2\alpha_2,0\},\cdots,Max\{s_i-2\alpha_i,0\})\to\cdots\cdots\to R_q(0,0,\cdots,0)$$

給定初始值 $R_q(0,0,\cdots,0)=0$，可迭代出 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 之值。

定理 5：n 人($n\ge p+1$)依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ($t,m\in N$, $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p$)。令 $S_0=\dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$,

$S=S_0+R\cdot p^t$，其中 $R=R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 依照 R **值迭代法**得出，則

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\ge2$，最終為循環狀態，且

$$C_n=\left[S,S+p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i},\cdots\cdots,S+(m-1)\cdot p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\right]。$$

【證明】

當 $n=(p)^t\times1+1$ 時，顯然成立。以下針對其他情形探討：

（ｉ）證明存在 R 值線性關係

已知 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ 的 R 值為 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$，其中 $S=S_0+R\cdot p^t$ 代表最終狀態第一個不被淘汰的人之初始編號。同引理 3.2 與定理 4 之證明，我們可證得：

無論 q 值為何，必存在狀態列 $(\underbrace{a_0, a_1, \cdots, a_{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m-1}}_{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m\text{個}})$ 型如 $(\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}}, A, \cdots, A)$ ，其中 a_k 的初始編號為 $S_0 + k \cdot p^t$ 、 $S_0 = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$ （$0 \le k \le p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m-1$）。

接著，觀察其之後的變化。由**糖果集中原則**知：

$(p, p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} m) = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_j^{\alpha_j}, p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}) = p_1^{\min\{\alpha_1, s_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, s_2\}} \cdots p_i^{\min\{\alpha_i, s_i\}} = d$

且 $p-q \equiv r \pmod{d}$ 、$0 \le r < d$ ，數輪傳遞後，糖果會集中在 $a_r, a_{r+d}, \cdots\cdots, a_{r+\left(\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1\right)d}$ 的手中，這些人重新編號後成為 $b_0, b_1, \cdots\cdots, b_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1}$ 。

顯然，舊編號與新編號會呈現線性關係 $\underset{\text{舊編號}}{y} = r + d \cdot \underset{\text{新編號}}{x}$ ，因此，b_k 的初始編號為

$S_0 + (r + d \cdot k) \cdot p^t$ （$0 \le k \le \dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m - 1$）。

同理，當 $n' = (p)^t \times (\dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m) + q$ 時，我們也可證得，無論 q 值為何，必存在狀態列 $(\underbrace{c_0, c_1, \cdots, c_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1}}_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m\text{個}})$ 型如 $(\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}}, A, \cdots, A)$ ，其中 c_k 的初始編號為 $S_0 + k \cdot p^t$ 、

$S_0 = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$ $(0 \le k \le \dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m - 1)$。接著，我們化簡 $\dfrac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m$ 可得：

$$\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m = \frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{p_1^{\min\{\alpha_1, s_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, s_2\}} \cdots p_i^{\min\{\alpha_i, s_i\}}} \cdot m = p_1^{Max\{s_1-\alpha_1, 0\}} p_2^{Max\{s_2-\alpha_2, 0\}} \cdots p_i^{Max\{s_i-\alpha_i, 0\}} \cdot m$$

因此，n' 的 R 值可記為 $R_q(Max\{s_1-\alpha_1, 0\}, Max\{s_2-\alpha_2, 0\}, \cdots, Max\{s_i-\alpha_i, 0\})$ 。

又 $(c_0, c_1, \cdots, c_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1})$ 和 $(b_0, b_1, \cdots\cdots, b_{\frac{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}}{d} \cdot m-1})$ 接下來的傳遞過程會一模一樣，

因此 n 的 R 值為 $r + R_q(Max\{s_1-\alpha_1, 0\}, Max\{s_2-\alpha_2, 0\}, \cdots, Max\{s_i-\alpha_i, 0\}) \times d$ 。

即 $R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i) = r + R_q(Max\{s_1-\alpha_1, 0\}, Max\{s_2-\alpha_2, 0\}, \cdots, Max\{s_i-\alpha_i, 0\}) \times d$ 。

(ii)**證明迭代法可得出** $R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i)$

(i)的步驟可依此類推，必能將 $R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i)$ 降階至 $R_q(0, 0, \cdots, 0)$，也就是 $n = (p)^t \times (m) + q$ 的 R 值。同引理 3.2 之證明可得，無論 q 值為何，必存在狀態列 $(\underbrace{a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}}_{m\text{個}})$ 型如 $(\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}}, A, \cdots, A)$ ，其中 a_k 的初始編號為 $S_0 + k \cdot p^t$ 、 $S_0 = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1}$ $(0 \le k \le m-1)$，

此時 $(p, m) = 1$ 。由**糖果集中原則**知：糖果會在此 m 人間循環傳遞，即 $R_q(0, 0, \cdots, 0) = 0$ 。

(ⅲ)**證明定理 5**

已知 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ，設 $R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)$ 降階至 $R_q(0,0,\cdots,0)$ 共降階 X 次。

由(i) (ii)知，其狀態列 S_t^n 之後的變化為

$$\underbrace{(\overset{\overset{S_0}{\downarrow}}{a_0},\ \overset{\overset{S_0+p^t}{\downarrow}}{a_1}\ ,\ \overset{\overset{S_0+2p^t}{\downarrow}}{a_2}\ ,\cdots,a_{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}\cdot m-1})}_{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}\cdot m\text{個}}\xrightarrow[p-q\equiv r_1(\bmod d_1)]{(p,p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}\cdot m)=d_1}\underbrace{(\ \overset{\overset{S_0+r_1\cdot p^t}{\downarrow}}{a_0}{}^{(1)}\ ,\ \overset{\overset{S_0+(r_1+d_1)\cdot p^t}{\downarrow}}{a_1}{}^{(1)}\ ,\ \overset{\overset{S_0+(r_1+2d_1)\cdot p^t}{\downarrow}}{a_2}{}^{(1)}\ ,\cdots\cdots,a_{\frac{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}}{d_1}\cdot m-1}{}^{(1)})}_{\frac{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}}{d_1}\cdot m\text{個}}$$

$$\xrightarrow[p-q\equiv r_2(\bmod d_2)]{(p,\frac{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}}{d_1}\cdot m)=d_2}\underbrace{(\ \overset{\overset{S_0+(r_1+r_2d_1)\cdot p^t}{\downarrow}}{a_0}{}^{(2)}\ ,\ \overset{\overset{S_0+(r_1+r_2d_1+d_1d_2)\cdot p^t}{\downarrow}}{a_1}{}^{(2)}\ ,\ \overset{\overset{S_0+(r_1+r_2d_1+2d_1d_2)\cdot p^t}{\downarrow}}{a_2}{}^{(2)}\ ,\cdots\cdots,a_{\frac{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}}{d_1d_2}\cdot m-1}{}^{(2)})}_{\frac{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}}{d_1d_2}\cdot m\text{個}}$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow[p-q\equiv r_X(\bmod d_X)]{(p,\frac{p_1^{s1}p_2^{s2}\cdots p_i^{si}}{d_1d_2\cdots d_{X-1}}\cdot m)=d_X}\underbrace{(\ \overset{\overset{S_0+R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)\cdot p^t}{\downarrow}}{a_0}{}^{(X)}\ ,\ \overset{\overset{S_0+(R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)+(d_1d_2\cdots d_X))\cdot p^t}{\downarrow}}{a_1}{}^{(X)}\ ,\ \overset{\overset{S_0+(R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)+2(d_1d_2\cdots d_X))\cdot p^t}{\downarrow}}{a_2}{}^{(X)}\ ,\cdots,a_{m-1}{}^{(X)})}_{m\text{個}}$$

其中 $p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}=d_1d_2\cdots d_X$ ，可得以下結論：

(1)若 $m=1$，最終為成功狀態，且 $E_n=[S]$。

(2)若 $m\geq 2$ ，最終為循環狀態，且

$C_n=\left[S,S+p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i},\cdots\cdots,S+(m-1)\cdot p^tp_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\right]$。 ■

【舉例】

(1)當 $n=2596=\left(2^2\times3\right)^2\times\left(2\times3^2\right)+4$ ，依照 R 值線性關係列出以下關係式：

$$\overset{n=(12)^2\cdot\left(2^1\cdot3^2\right)+4}{R_4(1,2)}\xrightarrow[\substack{\left.\begin{matrix}(12,18)=6\\12-4\equiv2(\bmod 6)\end{matrix}\right\}\text{得}\\R_4(1,2)=2+R_4(0,1)\cdot6}]{}\overset{n=(12)^2\cdot\left(2^0\cdot3^1\right)+4}{R_4(0,1)}\xrightarrow[\substack{\left.\begin{matrix}(12,3)=3\\12-4\equiv2(\bmod 3)\end{matrix}\right\}\text{得}\\R_4(0,1)=2+R_4(0,0)\cdot3}]{}\overset{n=(12)^2\cdot\left(2^0\cdot3^0\right)+4}{R_4(0,0)}\ \overset{R\text{值迭代法}}{\Rightarrow\underbrace{R_4(0,0)}_{0}\to\underbrace{R_4(0,1)}_{2}\to\underbrace{R_4(1,2)}_{14}}$$

$S_0=\dfrac{12^2(12-4)+(12\cdot4-1)}{12-1}=109$ ， $S=109+\underset{R_4(1,2)}{\boxed{14}}\cdot12^2=2125$ ，故 $E_n=[S]=[2125]$ 。

即 2596 人依照規則$T_{1,2,\cdots,12}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 2125 的人獨得所有糖果。

(2)當 $n=3013=\left(2^2\times5\right)^1\times\left(2\times5^2\times3\right)+13$ ，依照 R 值線性關係列出以下關係式：

$$\overset{n=(20)^1\cdot\left(2^1\cdot5^2\cdot3\right)+13}{R_{13}(1,2)}\xrightarrow[\substack{\left.\begin{matrix}(20,50)=10\\20-13\equiv7(\bmod 10)\end{matrix}\right\}\text{得}\\R_{13}(1,2)=7+10\cdot R_{13}(0,1)}]{}\overset{n=(20)^1\cdot\left(2^0\cdot5^1\cdot3\right)+13}{R_{13}(0,1)}\xrightarrow[\substack{\left.\begin{matrix}(20,5)=5\\20-13\equiv2(\bmod 5)\end{matrix}\right\}\text{得}\\R_{13}(0,1)=2+5\cdot R_{13}(0,0)}]{}\overset{n=(20)^1\cdot\left(2^0\cdot5^0\cdot3\right)+13}{R_{13}(0,0)}\ \overset{R\text{值迭代法}}{\Rightarrow\underbrace{R_{13}(0,0)}_{0}\to\underbrace{R_{13}(0,1)}_{2}\to\underbrace{R_{13}(1,2)}_{27}}$$

$S_0=\dfrac{20^1(20-13)+(20\cdot13-1)}{20-1}=21$ ， $S=21+\underset{R_{13}(1,2)}{\boxed{27}}\cdot20^1=561$ ，故

$C_n=\left[561,561+2^3\cdot5^3,561+2\cdot2^3\cdot5^3\right]=[561,1561,2561]$

即 3013 人依照規則$T_{1,2,\cdots,20}$ 傳遞糖果，最終會由初始編號 561, 1561, 2561 的人循環傳遞糖果。

研究六：找出達到成功狀態或循環狀態的最小傳遞數

在研究五中，我們完整的推導出在規則$T_{1,2,\cdots,p}$ ($p\in N$, $p\geq 2$)下，「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件，以及最終不被淘汰的人之初始編號的通式。接著，我們很好奇，若要達到「成功狀態」或「循環狀態」，最少需要進行幾次傳遞呢？

以下我們分別舉 p 為質數與 p 不為質數各一個例子來觀察：

(一) p 為質數　(觀察 $p=3$ 的情形)

(1)若 $n=3^t\cdot 1+q$ $(q=1,2,3)$

① $q=1$

由引理 2.2，可知其傳遞過程為　($S_r^n=\underbrace{(3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r,\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})}_{3^{t-r}\text{個}}$)

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{3}\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3\times\frac{n-1}{3}\right)\text{次}]{3\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{9}\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-1}{3^r}\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3^r\times\frac{n-1}{3^r}\right)\text{次}]{3^r\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{3^{r+1}}\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{3\text{人}}{S_{t-1}^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3^{t-1}\times\frac{n-1}{3^{t-1}}\right)\text{次}]{}\overset{1\text{人}}{E_n}$$

由上圖可知， $S_0^n\to E_n$ 共經過　$(n-1)\times t$　次傳遞。

② $q\geq 2$

由引理 2.2，可知其傳遞過程為　($S_r^n=(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{3^{t-r}\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$)

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-q}{3}+1\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3\times\frac{n-q}{3}\right)\text{次}]{3\text{輪}}\overset{\frac{n-q}{9}+1\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-q}{3^r}+1\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3^r\times\frac{n-q}{3^r}\right)\text{次}]{3^r\text{輪}}\overset{\frac{n-q}{3^{r+1}}+1\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{2\text{人}}{S_t^n}\xrightarrow[\text{傳遞}1\text{次}]{}\overset{1\text{人}}{E_n}$$

由上圖可知， $S_0^n\to E_n$ 共經過　$(n-1)+(n-q)\times(t-1)+1$　次傳遞。

(2)若 $n=3^t\cdot m+q$ （$m\geq 2$, $3\nmid m$， $q=1,2,3$）

① $q=1$

由引理 2.2，可知其傳遞過程為　（ $S_r^n=\underbrace{(3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r,\overset{1}{\underline{\underline{3^r+1}}})}_{3^{t-r}\cdot m\text{個}}$ ）

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{3}\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3\times\frac{n-1}{3}\right)\text{次}]{3\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{9}\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-1}{3^r}\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3^r\times\frac{n-1}{3^r}\right)\text{次}]{3^r\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{3^{r+1}}\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{\frac{n-1}{3^{t-1}}\text{人}}{S_{t-1}^n}\to\overset{m\text{人}}{S_t^n}=\overset{m\text{人}}{C_n}$$

由上圖可知， $S_0^n\to C_n$ 共需要　$(n-1)\times t$　次傳遞

② $q\geq 2$

由引理 2.2，可知其傳遞過程為　($S_r^n=(\underbrace{3^r,3^r,\cdots\cdots,3^r}_{3^{t-r}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$)

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-q}{3}+1\text{人}}{S_1^n}\to\cdots\overset{\frac{n-q}{3^r}+1\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(3^r\times\frac{n-q}{3^r}\right)\text{次}]{3^r\text{輪}}\overset{\frac{n-q}{3^{r+1}}+1\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{\frac{n-q}{3^{t-1}}+1\text{人}}{S_{t-1}^n}\to\overset{(m+1)\text{人}}{S_t^n}\xrightarrow[\text{傳遞}1\text{次}]{}\overset{m\text{人}}{C_n}$$

由上圖可知， $S_0^n\to C_n$ 共需要　$(n-1)+(n-q)\times(t-1)+1$　次傳遞

由(1)(2)可知，相同的 q 值，無論 $m=1$ 或 $m\geq 2$ ，即最終為成功狀態或循環狀態，傳遞次數的公式相同。而 $q=1$ 和 $q\geq 2$ 最大的差別就是傳遞次數多一次，我們將它稱為傳遞尾差 Y 。

$\boxed{\text{推論}}$ 在規則 $T_{1,2,\cdots,p}$（p 為質數)下，若 $n=p^t\cdot m+q$（$t,m\in N$， $p\nmid m$， $q=1,2,\cdots,p$），則達到成功狀態或循環狀態的最少傳遞次數為 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)+Y$ ，其中 $Y=\begin{cases}0 & ,\text{當}\,q=1\\ 1 & ,\text{當}\,q\geq 2\end{cases}$ 。

(二) p 不為質數 (觀察 $p=2\times3\times5$ 的情形) (舉同研究五的例子來說明)

(1) $n=(2\times3\times5)^t\times2^4\times3^2+q$ （$q=1,2,\cdots,30$）

① $q=1$

同引理 3.2，可知其 $S_0^n\to S_t^n$ 的傳遞過程為 （ $S_r^n=(\underbrace{30^r,30^r,\cdots\cdots,30^r,\overset{1}{\underline{\underline{30^r+1}}}}_{30^{t-r}\cdot144\text{個}})$ ）

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{}\overset{\frac{n-1}{30}\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(30\times\frac{n-1}{30}\right)\text{次}]{}\overset{\frac{n-1}{30^2}\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-1}{30^r}\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(30^r\times\frac{n-1}{30^r}\right)\text{次}]{}\overset{\frac{n-1}{30^{r+1}}\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{144\text{人}}{S_t^n}$$

接下來考慮 S_t^n 之後的傳遞情形，由研究五知，其傳遞過程皆符合糖果集中原則。

已知其「 R 值迭代法」的降階過程為

$$R_1(4,2)\xrightarrow{\text{降1次}}R_1(3,1)\xrightarrow{\text{降2次}}R_1(2,0)\xrightarrow{\text{降3次}}R_1(1,0)\xrightarrow{\text{降4次}}R_1(0,0)$$

即其傳遞過程為

$$S_t^n=(\underbrace{30^t,30^t,\cdots\cdots,\overset{1}{\underline{\underline{30^t+1}}}}_{144\text{個}})\xrightarrow[\text{傳遞}30^t\times144\text{次}]{(30,144)=6=d_1}(\underbrace{6\times30^t,6\times30^t,\cdots\cdots,\overset{1}{\underline{\underline{6\times30^t+1}}}}_{24\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{傳遞}6\times30^t\times24\text{次}]{(30,24)=6=d_2}(\underbrace{36\times30^t,36\times30^t,36\times30^t,\overset{1}{\underline{\underline{36\times30^t+1}}}}_{4\text{個}})$$

$$\xrightarrow[\text{傳遞}36\times30^t\times4\text{次}]{(30,4)=2=d_3}(\underbrace{72\times30^t,\overset{\substack{\text{留下的人}\\1}}{\underline{\underline{72\times30^t+1}}}}_{2\text{個}})\xrightarrow[\text{傳遞}72\times30^t\times2\text{次}]{\substack{(30,2)=2=d_4\\30-1\equiv1(\text{mod}\,2)}}(144\times30^t+1)=E_n$$

說明：(1)同 p 為質數的情形， $S_0^n\to S_t^n$ 共需要 $(n-1)+(n-1)\times(t-1)$ 次傳遞。

(2) $S_t^n\to E_n$ 共需要 $\underbrace{30^t\times144}_{(n-1)}\times\underset{\text{降階次數}}{4}$ 次傳遞。

(3) $S_0^n\to E_n$ 共需要 $(n-1)+(n-1)\times(t-1)+(n-1)\times\underset{\text{降階次數}}{X}$ 。

② $q\geq2$

同引理 3.2，可知其 $S_0^n\to S_t^n$ 的傳遞過程為 （$S_r^n=(\underbrace{30^r,30^r,\cdots\cdots,30^r}_{30^{t-r}\cdot144\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$）

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{}\overset{\frac{n-q}{30}+1\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(30\times\frac{n-q}{30}\right)\text{次}]{}\overset{\frac{n-q}{30^2}+1\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-q}{30^r}+1\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(30^r\times\frac{n-q}{30^r}\right)\text{次}]{}\overset{\frac{n-q}{30^{r+1}}+1\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{145\text{人}}{S_t^n}$$

接下來考慮 S_t^n 之後的傳遞情形，已知其「 R 值迭代法」的降階過程同樣為

$$R_q(4,2)\xrightarrow{\text{降1次}}R_q(3,1)\xrightarrow{\text{降2次}}R_q(2,0)\xrightarrow{\text{降3次}}R_q(1,0)\xrightarrow{\text{降4次}}R_q(0,0)$$

即其傳遞過程為

$$S_t^n=(\underbrace{30^t,30^t,\cdots\cdots,30^t}_{144\text{個}},\underset{=}{\overset{q}{q}})\xrightarrow[\text{傳遞}30^t\times144\text{次}]{(30,144)=6=d_1}(\underbrace{6\times30^t,6\times30^t,\cdots\cdots,6\times30^t}_{24\text{個}},\underset{=}{\overset{q}{q}})$$

$$\xrightarrow[\text{傳遞}6\times30^t\times24\text{次}]{(30,24)=6=d_2}(\underbrace{36\times30^t,36\times30^t,36\times30^t,36\times30^t}_{4\text{個}},\underset{=}{\overset{q}{q}})$$

$$\xrightarrow[\text{傳遞}36\times30^t\times4\text{次}]{(30,4)=2=d_3}(\underbrace{72\times30^t,72\times30^t}_{2\text{個}},\underset{=}{\overset{q}{q}})\xrightarrow[\substack{\text{傳遞}72\times30^t\times2\text{次}\\ \text{或}(72\times30^t\times2+1)\text{次}}]{\substack{(30,2)=2=d_4\\ 30-q\equiv r_4\,(\mathrm{mod}\,2)}}(144\times30^t+q)=E_n$$

說明：(1) $S_0^n\to S_t^n$ 共需要 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)$ 次傳遞。

(2)當 $r_4=0$ 時， $S_t^n\to E_n$ 共需要 $\underbrace{30^t\times144}_{(n-q)}\times\underbrace{4}_{\text{降階次數}}+1$ 次傳遞。

當 $r_4=1$ 時， $S_t^n\to E_n$ 共需要 $\underbrace{30^t\times144}_{(n-q)}\times\underbrace{4}_{\text{降階次數}}$ 次傳遞。

(3) $S_0^n\to E_n$ 共需要 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)+(n-q)\times\underbrace{X}_{\text{降階次數}}+\underbrace{Y}_{\text{傳遞尾差}(0\vee1)}$ 次傳遞。

【問題】為什麼會有傳遞尾差？如何決定傳遞尾差為 0 或 1 呢？

【分析】由上面的例子，顯然問題出在最後一次執行「糖果集中」的步驟。即

$$(\underbrace{72\times30^t,72\times30^t}_{2\text{個}},\underset{=}{\overset{q}{q}})\xrightarrow[\substack{\text{傳遞}72\times30^t\times2\text{次}\\ \text{或}(72\times30^t\times2+1)\text{次}}]{\substack{(30,4)=2=d_4\\ 30-q\equiv r_4\,(\mathrm{mod}\,2)}}(144\times30^t+q)$$

(1)當 $r_4=0$ 時，則 $\overset{\text{留下的人}}{(\underbrace{72\times30^t,72\times30^t}_{2\text{個}}},\underset{=}{\overset{q}{q}})=(a_0,a_1,\underset{=}{\overset{q}{q}})$。觀察 a_0 、 a_1 接下來糖果數變化。

令 a_0 接收(或 a_1 傳)糖果為 D_0 步驟， a_1 接收糖果為 D_1 步驟，則

$$(a_0,a_1,\underset{=}{\overset{q}{q}})\xrightarrow[D_0]{a_0\text{收}}(\overset{q+1}{\underline{\underline{a_0+q}}},a_1)\xrightarrow[D_1]{a_1\text{收}}(a_0-1,\overset{q+2}{\underline{\underline{a_1+q+1}}})\xrightarrow[D_0]{a_0\text{收}}(\overset{q+3}{\underline{\underline{a_0+q+1}}},a_1-1)\cdots\xrightarrow[D_0]{a_0\text{收}}E_n$$

$$\text{即傳遞步驟依序為 }D_0\to\overbrace{\underbrace{(D_1\to D_0)}_{a_1\text{減少1顆}}\to\underbrace{(D_1\to D_0)}_{a_1\text{減少1顆}}\to\cdots\cdots\to\underbrace{(D_1\to\overset{a_1\text{歸零淘汰}}{D_0}\ )}_{a_1\text{減少1顆}}}^{\text{共執行}72\times30^t\text{輪}}\ 。$$

因此需要 $72\times30^t\times2+1$ 次傳遞，此時傳遞尾差 $Y=1$ 。

(2)當 $r_4=1$ 時，則 $\overset{\text{留下的人}}{(\underbrace{72\times30^t,72\times30^t}_{2\text{個}}},\underset{=}{\overset{q}{q}})=(a_0,a_1,\underset{=}{\overset{q}{q}})$。則

$$(a_0,a_1,\underset{=}{\overset{q}{q}})\xrightarrow[D_0]{a_0\text{收}}(\overset{q+1}{\underline{\underline{a_0+q}}},a_1)\xrightarrow[D_1]{a_1\text{收}}(a_0-1,\overset{q+2}{\underline{\underline{a_1+q+1}}})\xrightarrow[D_0]{a_0\text{收}}(\overset{q+3}{\underline{\underline{a_0+q+1}}},a_1-1)\cdots\xrightarrow[D_1]{a_1\text{收}}E_n$$

$$\text{即傳遞步驟依序為}\overbrace{\underbrace{(D_0\to D_1)}_{a_0\text{減少1顆}}\to\underbrace{(D_0\to D_1)}_{a_0\text{減少1顆}}\to\cdots\cdots\to\underbrace{(D_0\to\overset{a_0\text{歸零淘汰}}{D_1}\ )}_{a_0\text{減少1顆}}}^{\text{共執行}72\times30^t\text{輪}}\ 。$$

因此需要 $72\times30^t\times2$ 次傳遞。此時傳遞尾差 $Y=0$ 。

由(1)(2)可知，Y 值決定於最後一次糖果集中時，糖果是否會集中在 a_1 手上。若在 a_1 手上，則 $Y=0$ ；若不在 a_1 手上，則 $Y=1$ 。

我們將以上性質整理成以下引理並證明：

引理 6.1：在規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 下，當前狀態列 $(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{\ell-1}}_{\ell})$ 型如 $(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})$，若

$(p,\ell)=d\neq1$ 、 $p-q\equiv r(\operatorname{mod}d)$ 、 $0\le r<d$ 、 $\frac{p}{d}|A$，則 $(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{\ell-1}}_{\ell})\longrightarrow$

$(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{a_r}}},a_{r+d},\cdots\cdots,a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}})=(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{dA+q}}},dA,\cdots,dA}_{\frac{\ell}{d}})$，且此過程共需要 $A\times\ell$ 次傳遞。

【證明】

由糖果集中原則知，$(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{\ell-1}}_{\ell})$ 在數輪傳遞後，糖果會集中在 $\underbrace{a_r,a_{r+d},\cdots\cdots,a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}}$ 手中。

令 a_k 接收糖果為 D_k 步驟($a_{\ell-1}$ 傳出糖果為 D_0)，$(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})$ 的前一個狀態列為

$(A,A,\cdots,\overset{1}{\underline{\underline{A+1}}})$ 或 $(A,A,\cdots,A,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$，則傳遞步驟(含前一步驟)依序為（$r\neq0$）

$$\overbrace{\left(\underbrace{\overset{\text{不算}}{D_0}\to D_1}_{a_0\text{減少1顆}}\to\cdots\to D_{\ell-1}\right)\to\left(\underbrace{D_0\to D_1}_{a_0\text{減少1顆}}\to\cdots\to D_{\ell-1}\right)\to\cdots\cdots\to\left(\underbrace{D_0\to\overset{a_0\text{歸零淘汰}}{D_1}}_{a_0\text{減少1顆}}\to\cdots\to D_{\ell-1}\right)}^{\text{共}A\text{輪}}\to\overset{\text{算}}{D_0}$$

因此共需要 $A\times\ell$ 次傳遞。(同理 $r=0$) ■

討論 因為 $(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})$ 的前一個狀態列為 $(A,A,\cdots,\overset{1}{\underline{\underline{A+1}}})$ 或 $(A,A,\cdots A,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$，即 S_r^n 的型式，

故 $S_r^n\to S_{r+1}^n$ 也需要 $A\times\ell$ 次傳遞。

引理 6.2：在規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 下，當前狀態列 $(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{\ell-1}}_{\ell})$ 型如 $(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})$，若 $(p,\ell)=d\neq1$

且 $(p,\frac{\ell}{d})=1$ 、 $p-q\equiv r(\operatorname{mod}d)$ 、 $0\le r<d$，則 $(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})\longrightarrow E_n\vee C_n$，

且此過程共需要 $A\times\ell-1+Y$ 次傳遞，其中 $Y=\begin{cases}0 & ,當r=d-1\\1 & ,當r\neq d-1\end{cases}$。

【證明】

由糖果集中原則知，$(\underbrace{a_0,a_1,\cdots,a_{\ell-1}}_{\ell})$ 在數輪傳遞後，糖果會集中在 $\underbrace{a_r,a_{r+d},\cdots\cdots,a_{r+\left(\frac{\ell}{d}-1\right)d}}_{\frac{\ell}{d}}$ 手中。

令 a_k 接收糖果為 D_k 步驟($a_{\ell-1}$ 傳出糖果為 D_0)，$(\underbrace{\overset{[q+1]_p}{\underline{\underline{A+q}}},A,\cdots,A}_{\ell})$ 的前一個狀態列為

$(A,A,\cdots,\overset{1}{\underline{\underline{A+1}}})$ 或 $(A,A,\cdots,A,\overset{q}{\underline{\underline{q}}})$，

(1)當 $r=d-1$，$a_{\ell-1}$ 為留下的人，a_0 為被淘汰的人，則傳遞步驟(含前一步驟)依序為

$$\overbrace{\left(\underbrace{\overset{\text{不算}}{D_0}\to D_1}_{a_0\text{減少1顆}}\to\cdots\to D_{\ell-1}\right)\to\left(\underbrace{D_0\to D_1}_{a_0\text{減少1顆}}\to\cdots\to D_{\ell-1}\right)\to\cdots\cdots\to\left(\underbrace{D_0\to\overset{a_0\text{歸零淘汰}}{D_1}}_{a_0\text{減少1顆}}\to\cdots\to\overset{a_{\ell-1}\text{保留}}{D_{\ell-1}}\right)}^{\text{共}A\text{輪}}$$

因此共需要 $A\times\ell-1+0$ 次傳遞，此時 $Y=0$。

(2)當 $r\neq d-1$，$a_{\ell-1}$ 為被淘汰的人，則傳遞步驟(含前一步驟)依序為

$$\overset{\text{不算}}{D_0}\to\overbrace{\left(D_1\to\cdots\to\underbrace{D_{\ell-1}\to D_0}_{a_{\ell-1}\text{減少1顆}}\right)\to\left(D_1\to\cdots\to\underbrace{D_{\ell-1}\to D_0}_{a_{\ell-1}\text{減少1顆}}\right)\to\cdots\cdots\to\left(D_1\to\cdots\to\underbrace{D_{\ell-1}\to\overset{\substack{a_{\ell-1}\text{傳給}a_r\\\text{並歸零淘汰}}}{D_0}}_{a_{\ell-1}\text{減少1顆}}\right)}^{\text{共}A\text{輪}}$$

因此共需要 $A\times\ell-1+1$ 次傳遞，此時 $Y=1$。 ■

定理 6：n 人 $(n\geq p+1)$ 依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$ 傳遞糖果，$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1,p_2,\cdots,p_j$ 為 p 的相異質因數)，且 n 表示成 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ ($t,m\in N$, $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$, $(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p$)。

(1)當 $(s_1,s_2,\cdots,s_i)=(0,0,\cdots,0)$，達到成功狀態或循環狀態的最小傳遞數為

$$(n-1)+(n-q)\times(t-1)+\underset{\text{傳遞尾差}}{Y}\text{，其中 }Y=\begin{cases}0 & \text{，當 }q=1\\1 & \text{，當 }q\geq 2\end{cases}\text{。}$$

(2)當 $(s_1,s_2,\cdots,s_i)\neq(0,0,\cdots,0)$，若其 R 值迭代法的降階過程為

$$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)\xrightarrow{\text{降1次}}\cdots\cdots\xrightarrow{\text{降}(X-1)\text{次}}R_q(s_1',s_2',\cdots,s_i')\xrightarrow{\text{降}X\text{次}}R_q(0,0,\cdots,0)\text{，}$$

則達到成功狀態或循環狀態的最小傳遞數為

$$(n-1)+(n-q)\times(t-1)+(n-q)\cdot\underset{\text{降階次數}}{X}+\underset{\text{傳遞尾差}}{Y}\text{，其中 }Y=\begin{cases}0 & \text{，當 }r_X=d_X-1\\1 & \text{，當 }r_X\neq d_X-1\end{cases}\text{，}$$

$(p,p_1^{s_1'}p_2^{s_2'}\cdots p_i^{s_i'})=d_X$、$p-q\equiv r_X\pmod{d_X}$、$0\leq r_X<d_X$。

【證明】

(1)當 $(s_1,s_2,\cdots,s_i)=(0,0,\cdots,0)$，即 $n=p^t\cdot m+q$ ($(m,p)=1$, $q=1,2,\cdots,p$)。

若 $n=(p)^t\times1+1$，同引理 3.2，可知其傳遞過程為 ($S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r,\overset{1}{\underline{\underline{p^r+1}}}}_{p^{t-r}\text{個}})$)

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p}\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p\times\frac{n-1}{p}\right)\text{次}]{p\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p^2}\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-1}{p^r}\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^r\times\frac{n-1}{p^r}\right)\text{次}]{p^r\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p^{r+1}}\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{p\text{人}}{S_{t-1}^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^{t-1}\times\frac{n-1}{p^{t-1}}\right)\text{次}]{}\overset{1\text{人}}{E_n}$$

由**引理 6.1**、**引理 6.2** 知，$S_0^n\to E_n$ 共經過 $(n-1)\times t$ 次傳遞。定理 6 顯然成立。

以下針對其他情形探討：

① $q=1$ （$m\neq 1$ ）

同引理 3.2，可知其傳遞過程為 $\left(S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r,\overset{1}{\underline{\underline{p^r}}}}_{p^{t-r}\cdot m\text{個}}+1)\right)$

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p}\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p\times\frac{n-1}{p}\right)\text{次}]{p\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p^2}\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-1}{p^r}\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^r\times\frac{n-1}{p^r}\right)\text{次}]{p^r\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p^{r+1}}\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{\frac{n-1}{p^{t-1}}\text{人}}{S_{t-1}^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^{t-1}\times\frac{n-1}{p^{t-1}}\right)\text{次}]{\substack{\text{最後執行}\\\text{糖果集中}}}\overset{m\text{人}}{S_t^n}=C_n$$

說明：(1)由**引理 6.1** 知， $S_r^n\to S_{r+1}^n$ $(1\le r\le t-1)$ 需要 $\left(p^r\times\dfrac{n-1}{p^r}\right)=(n-1)$ 次傳遞。

(2) $S_0^n\to C_n$ 共需要 $(n-1)+(n-1)\times(t-1)+\underset{Y}{0}$ 次傳遞。

② $q\geq 2$

同引理 3.2，可知其傳遞過程為 $\left(S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r}_{p^{t-r}\cdot m\text{個}},\overset{q}{\underline{\underline{q}}})\right)$

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-q}{p}+1\text{人}}{S_1^n}\to\cdots\overset{\frac{n-q}{p^r}+1\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^r\times\frac{n-q}{p^r}\right)\text{次}]{p^r\text{輪}}\overset{\frac{n-q}{p^{r+1}}+1\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\to\overset{\frac{n-q}{p^{t-1}}+1\text{人}}{S_{t-1}^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^{t-1}\times\frac{n-q}{p^{t-1}}\right)\text{次}]{\substack{\text{最後執行}\\\text{糖果集中}}}\overset{(m+1)\text{人}}{S_t^n}\xrightarrow[\text{傳遞1次}]{}\overset{m\text{人}}{E_n\vee C_n}$$

說明：(1)由**引理 6.1** 知， $S_r^n\to S_{r+1}^n$ $(1\le r\le t-1)$ 需要 $\left(p^r\times\dfrac{n-q}{p^r}\right)=(n-q)$ 次傳遞。

(2) $S_t^n\to E_n\vee C_n$ 需要1次傳遞。

(3) $S_0^n\to E_n\vee C_n$ 共經過 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)+\underset{Y}{1}$ 次傳遞。

(2)當 $(s_1,s_2,\cdots,s_i)\neq(0,0,\cdots,0)$ ，

即 $n=(p)^t\times(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)+q$ （ $p\nmid p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}$ ， $(m,p)=1$ ， $q=1,2,\cdots,p$ ）。

① $q=1$

同引理 3.2，其前段傳遞流程為 $\left(S_r^n=(\underbrace{p^r,p^r,\cdots\cdots,p^r,\overset{1}{\underline{\underline{p^r}}}}_{p^{t-r}\cdot p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m\text{個}}+1)\right)$

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n}\xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p}\text{人}}{S_1^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p\times\frac{n-1}{p}\right)\text{次}]{p\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p^2}\text{人}}{S_2^n}\to\cdots\overset{\frac{n-1}{p^r}\text{人}}{S_r^n}\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^r\times\frac{n-1}{p^r}\right)\text{次}]{p^r\text{輪}}\overset{\frac{n-1}{p^{r+1}}\text{人}}{S_{r+1}^n}\cdots\xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^{t-1}\times\frac{n-1}{p^{t-1}}\right)\text{次}]{p^{t-1}\text{輪}}\overset{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m\text{人}}{S_t^n}$$

說明：(1)由**引理 6.1** 知， $S_r^n\to S_{r+1}^n$ $(1\le r\le t-1)$ 需要 $\left(p^r\times\dfrac{n-1}{p^r}\right)=(n-1)$ 次傳遞。

(2) $S_0^n\to S_t^n$ 共需要 $(n-1)+(n-1)\times(t-1)$ 次傳遞。

接下來考慮 S_t^n 之後的傳遞情形，由研究五知，其傳遞過程皆符合糖果集中原則。

已知 R 值迭代法的降階過程為

$$R_q(s_1,s_2,\cdots,s_i)\xrightarrow{\text{降1次}}\cdots\cdots\xrightarrow{\text{降}(X-1)\text{次}}R_q(s_1',s_2',\cdots,s_i')\xrightarrow{\text{降}X\text{次}}R_q(0,0,\cdots,0)$$

即其傳遞過程為

$$\overset{\frac{n-1}{p^t}\text{人}}{S_t^n} = (\underbrace{p^t, p^t, \cdots\cdots, p^t, \underline{\underline{\underline{p^t \overset{1}{+1}}}}}_{(p_1^{s1} p_2^{s2} \cdots p_i^{si} \cdot m)\text{個}=\frac{n-1}{p^t}\text{個}}) \xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^t \times \frac{n-1}{p^t}\right)\text{次}]{\substack{\text{糖果集中1次} \\ (p,\frac{n-1}{p^t})=d_1}} \overset{\frac{n-1}{d_1 p^t}\text{人}}{T_1} \xrightarrow[\text{傳遞}\left(d_1 p^t \times \frac{n-1}{d_1 p^t}\right)\text{次}]{\substack{\text{糖果集中2次} \\ (p,\frac{n-1}{d_1 p^t})=d_2}} \overset{\frac{n-1}{d_2 d_1 p^t}\text{人}}{T_2} \to \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{傳遞}\left(d_{X-2}\cdots d_2 d_1 p^t \times \frac{n-1}{d_{X-2}\cdots d_2 d_1 p^t}\right)\text{次}]{\substack{\text{糖果集中}(X-1)\text{次} \\ (p,\frac{n-1}{d_{X-2}\cdots d_2 d_1 p^t})=d_{X-1}}} \overset{\frac{n-1}{d_{X-1}\cdots d_2 d_1 p^t}\text{人}}{T_{X-1}} \xrightarrow[p-1\equiv r_X \pmod{d_X}]{\substack{\text{最後執行糖果集中} \\ \text{糖果集中}X\text{次} \\ (p,\frac{n-1}{d_{X-1}\cdots d_2 d_1 p^t})=d_X}} \overset{m\text{人}}{E_n \vee C_n}$$

其中 $T_k = (\underbrace{d_k \cdots d_2 d_1 p^t, d_k \cdots d_2 d_1 p^t, \cdots\cdots, d_k \cdots d_2 d_1 p^t, \underline{\underline{\underline{d_k \cdots \overset{1}{d_2} d_1 p^t +1}}}}_{(\frac{p_1^{s1} p_2^{s2} \cdots p_i^{si}}{d_k \cdots d_2 \cdot d_1}\cdot m)\text{個}=\frac{n-1}{d_k \cdots d_2 \cdot d_1 p^t}\text{個}})$ 、 $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} = d_1 d_2 \cdots d_X$

$$p_1^{s_1'} p_2^{s_2'} \cdots p_i^{s_i'} \cdot m = \frac{n-1}{d_{X-1} \cdots d_2 d_1 p^t}$$

說明：(1)由**引理 6.1** 知， $S_t^n \to T_{X-1}$ 共需要 $(n-1)\cdot(X-1)$ 次傳遞。

(2)由**引理 6.2** 知，$T_{X-1} \to E_n \vee C_n$ 共需要 $d_{X-1}\cdots d_2 d_1 p^t \times \dfrac{n-1}{d_{X-1}\cdots d_2 d_1 p^t} = (n-1)$ 次傳遞。

($\because d_X \mid p \quad \therefore r_X = d_X - 1 \Rightarrow Y = 0$ 由**引理 6.2** 知 T_{X-1} 下一步 $\to E_n \vee C_n$ 需要 $A \times \ell - 1 + Y$ 次傳遞，故 $T_{X-1} \to E_n \vee C_n$ 需要 $A \times \ell + Y$ 次傳遞)

(3) $S_t^n \to E_n \vee C_n$ 共需要 $(n-1)\cdot X + \underset{0}{Y}$ 次傳遞。

(4) $S_0^n \to E_n \vee C_n$ 共經過 $(n-1)+(n-1)\times(t-1)+(n-1)\times \underset{\text{降階次數}}{X} + \underset{0}{Y}$ 次傳遞。

② $q \ge 2$ 時

同引理 3.2，其前段傳遞流程為 $(S_r^n = (\underbrace{p^r, p^r, \cdots\cdots, p^r}_{p^{t-r}\cdot p_1^{s1} p_2^{s2}\cdots p_i^{si}\cdot m\text{個}}, \underline{\underline{\overset{q}{q}}}))$

$$\overset{n\text{人}}{S_0^n} \xrightarrow[\text{傳遞}(n-1)\text{次}]{1\text{輪}} \overset{\frac{n-q}{p}+1\text{人}}{S_1^n} \xrightarrow[\text{傳遞}\left(p\times\frac{n-q}{p}\right)\text{次}]{p\text{輪}} \overset{\frac{n-q}{p^2}+1\text{人}}{S_2^n} \to \cdots \overset{\frac{n-q}{p^r}+1\text{人}}{S_r^n} \xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^r\times\frac{n-q}{p^r}\right)\text{次}]{p^r\text{輪}} \overset{\frac{n-q}{p^{r+1}}+1\text{人}}{S_{r+1}^n} \cdots \to \overset{(p_1^{s1} p_2^{s2}\cdots p_i^{si}\cdot m+1)\text{人}}{S_t^n}$$

說明：(1)由**引理 6.1** 知， $S_r^n \to S_{r+1}^n$ $(1 \le r \le t-1)$ 需要 $\left(p^r \times \dfrac{n-q}{p^r}\right) = (n-q)$ 次傳遞。

(2) $S_0^n \to S_t^n$ 共經過 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)$ 次傳遞。

接下來考慮 S_t^n 之後的傳遞情形，由研究五知，其傳遞過程皆符合糖果集中原則。

已知 R 值迭代法的降階過程為

$$R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i) \xrightarrow{\text{降1次}} \cdots\cdots \xrightarrow{\text{降}(X-1)\text{次}} R_q(s_1', s_2', \cdots, s_i') \xrightarrow{\text{降}X\text{次}} R_q(0,0,\cdots,0)$$

即其傳遞過程為

$$\overset{\frac{n-q}{p^t}+1\text{人}}{S_t^n} = (\underbrace{p^t, p^t, \cdots\cdots, p^t}_{(p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}\cdot m)\text{個}=\frac{n-q}{p^t}\text{個}}, \overset{q}{\underset{=}{q}}) \xrightarrow[\text{傳遞}\left(p^t\times\frac{n-q}{p^t}\right)\text{次}]{\substack{\text{糖果集中1次}\\ (p,\frac{n-q}{p^t})=d_1}} \overset{\frac{n-q}{d_1p^t}+1\text{人}}{T_1} \xrightarrow[\text{傳遞}\left(d_1p^t\times\frac{n-q}{d_1p^t}\right)\text{次}]{\substack{\text{糖果集中2次}\\ (p,\frac{n-q}{d_1p^t})=d_2}} \overset{\frac{n-q}{d_2d_1p^t}+1\text{人}}{T_2} \to \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow[\text{傳遞}\left(d_{X-2}\cdots d_2d_1p^t\times\frac{n-q}{d_{X-2}\cdots d_2d_1p^t}\right)\text{次}]{\substack{\text{糖果集中}(X-1)\text{次}\\ (p,\frac{n-q}{d_{X-2}\cdots d_2d_1p^t})=d_{X-1}}} \overset{\frac{n-q}{d_{X-1}\cdots d_2d_1p^t}+1\text{人}}{T_{X-1}} \xrightarrow[p-q\equiv r_X\ (\operatorname{mod} d_X)]{\substack{\text{最後執行糖果集中}\\ \text{糖果集中}X\text{次}\\ (p,\frac{n-q}{d_{X-1}\cdots d_2d_1p^t})=d_X}} \overset{m\text{人}}{E_n \vee C_n}$$

其中 $T_k = (\underbrace{d_k\cdots d_2d_1p^t, d_k\cdots d_2d_1p^t, \cdots\cdots, d_k\cdots d_2d_1p^t}_{(\frac{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i}}{d_k\cdots d_2\cdot d_1}\cdot m)\text{個}=\frac{n-q}{d_k\cdots d_2\cdot d_1p^t}\text{個}}, \overset{q}{\underset{=}{q}})$ 、 $p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_i^{s_i} = d_1d_2\cdots d_X$ 、

$$p_1^{s_1'}p_2^{s_2'}\cdots p_i^{s_i'}\cdot m = \frac{n-q}{d_{X-1}\cdots d_2d_1p^t}$$

說明：(1)由**引理 6.1** 知，$S_t^n \to T_{X-1}$ 共需要 $(n-q)\cdot(X-1)$ 次傳遞。

(2)由**引理 6.2** 知，$T_{X-1} \to E_n \vee C_n$ 共需要 $d_{X-1}\cdots d_2d_1p^t \times \dfrac{n-q}{d_{X-1}\cdots d_2d_1p^t} + Y = (n-q)+Y$ 次傳遞，其中 $Y = \begin{cases} 0 & ,\text{當} r_X = d_X - 1 \\ 1 & ,\text{當} r_X \neq d_X - 1 \end{cases}$ ，$(p, p_1^{s_1'}p_2^{s_2'}\cdots p_i^{s_i'}) = d_X$ 、 $p-q \equiv r_X\ (\operatorname{mod} d_X)$ 、 $0 \le r_X < d_X$ 。

(3) $S_t^n \to E_n \vee C_n$ 共需要 $(n-q)\cdot X + Y$ 次傳遞。

(4) $S_0^n \to E_n \vee C_n$ 共經過 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)+(n-q)\cdot \underset{\text{降階次數}}{X} + \underset{\text{傳遞尾差}}{Y}$ 次傳遞。

【**舉例**】

(1)當 $n = 345 = 7^3\cdot 1 + 2$，規則 $T_{1,2,\cdots,7}$。由**定理 3** 知，最終會由初始編號 288 的人獨得所有糖果。由**定理 6(1)**知 $Y=1$。則達到成功狀態的最小傳遞數為 $(345-1)+(345-2)\cdot(3-1)+1=1031$。即 345 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,7}$ 傳遞糖果，經過 1031 次傳遞後，最終會由初始編號 288 的人獨得所有糖果。

(2)當 $n = 2596 = \left(2^2\times 3\right)^2 \times \left(2\times 3^2\right) + 4$，規則 $T_{1,2,\cdots,12}$。由**定理 5** 知，最終會由初始編號 2125 的人獨得所有糖果。且其 R 值迭代法的降階過程為 $\underset{R_4(s_1,s_2)}{R_4(1,2)} \xrightarrow{\text{降1次}} \underset{R_4(s_1',s_2')}{R_4(0,1)} \xrightarrow{\text{降2次}} R_4(0,0)$，故 $X=2$。又 $(2^2\times 3, 2^0\times 3^1) = 3 = d_X$ 、 $12-4 \equiv \underset{r_X}{2}\ (\operatorname{mod} 3)$，由**定理 6(2)**知 $Y=0$。則達到成功狀態的最小傳遞數為 $(2596-1)+(2596-4)\cdot(2-1)+(2596-4)\cdot 2+0=10371$。即 2596 人依照規則 $T_{1,2,\cdots,12}$ 傳遞糖果，經過 10371 次傳遞後，最終會由初始編號 2125 的人獨得所有糖果。

叁、研究結果

n 人($n \geq p+1$)依照規則$T_{1,2,\cdots,p}$($p \geq 2$)傳遞糖果，$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_j^{\alpha_j}$ ($p_1, p_2, \cdots, p_j$ 為 p 的相異質因數)，n 可唯一表示成 $n = (p)^t \times (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i} \cdot m) + q$ ($t, m \in N$，$p \nmid p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}$，$(m, p) = 1$，$q = 1, 2, \cdots, p$)。令 $S = \dfrac{p^t(p-q)+(pq-1)}{p-1} + R \cdot p^t$。則

(一)傳遞結果：

(1)當 $m=1$，最終為成功狀態，且獨得所有糖果者的初始編號為 S。

(2)當 $m \geq 2$，最終為循環狀態，且由 m 人循環傳遞糖果，而此 m 人的初始編號是

$$S\,,\ S + p^t p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}\,,\ \cdots\cdots\,,\ S + (m-1) \cdot p^t p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_i^{s_i}$$ 。

上述公式中的 R 值，可透過我們研究出來的「**R 值迭代法**」求得。

(二)達到成功狀態或循環狀態的最小傳遞數：

(1)當 $(s_1, s_2, \cdots, s_i) = (0, 0, \cdots, 0)$，最小傳遞數為 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)+\underset{\text{傳遞尾差}}{Y}$，其中 $Y = \begin{cases} 0, \text{當} q = 1 \\ 1, \text{當} q \geq 2 \end{cases}$。

(2)當 $(s_1, s_2, \cdots, s_i) \neq (0, 0, \cdots, 0)$，若其 R 值迭代法的降階過程為

$$R_q(s_1, s_2, \cdots, s_i) \xrightarrow{\text{降}1\text{次}} \cdots\cdots \xrightarrow{\text{降}(X-1)\text{次}} R_q(s_1', s_2', \cdots, s_i') \xrightarrow{\text{降}X\text{次}} R_q(0, 0, \cdots, 0)$$，

最小傳遞數為 $(n-1)+(n-q)\times(t-1)+(n-q)\cdot \underset{\text{降階次數}}{X} + \underset{\text{傳遞尾差}}{Y}$，其中 $Y = \begin{cases} 0 & ,\text{當} r_X = d_X - 1 \\ 1 & ,\text{當} r_X \neq d_X - 1 \end{cases}$，

$(p, p_1^{s_1'} p_2^{s_2'} \cdots p_i^{s_i'}) = d_X$ 、 $p - q \equiv r_X \pmod{d_X}$ 、 $0 \leq r_X < d_X$ 。

肆、結論與未來展望

一、本作品最大的貢獻是，**找出 n 人($n \geq p+1$)依照規則 $T_{1,2,\cdots,p}$($p \geq 2$)傳遞糖果，「成功狀態」與「循環狀態」的充要條件，以及最終不被淘汰的人之初始編號的通式**，更進一步找出**達到成功狀態或循環狀態的最小傳遞數**。我們以程式驗證其正確性，並給予嚴謹的證明。

二、R 值在不同 n 值間具有線性關係，此線性關係與糖果集中原則密切相關，**依照 R 值線性關係可以讓我們給定初始值後，進而迭代出所需的 R 值**。特別的是，當 p 為質數時，$R=0$。

三、未來我們可改變傳遞規則，比如 $T_{1,1,2}$ 、$T_{1,1,2,2}$ 等等，當然並不是任意傳遞規則 $T_{a,b,c,\cdots}$ 皆可行，比如 $T_{1,3}$ 、$T_{2,1}$ 即無法進行傳遞。

伍、參考文獻資料

1.游森棚(2020)。**森棚教官的數學題**。科學研習月刊。第 59 卷第二期。

2.簡民惠。**天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討**。中華民國第 40 屆中小學科學展覽會　國中組。

3.許志農(主編)(2019)。**普通高級中學數學 2**。台北：龍騰文化。

4.馮志剛(2005)。**數學歸納法的証題方法與技巧**。上海：華東師範大學出版社。

【評語】010024

本問題源於科學教育月刊專欄，本質上是一個離散動態系統的問題。這一類問題的主要目的是釐清此動態系統的結果，會按照什麼規則而可以分類。作者基本上對其全貌得到了判別的條件，但是各個主要證明中的細節，以及證明的整體脈絡似未能釐清，是較為不足之處。整體而言是一個有數學內容的作品。