2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010020

參展科別　數學

作品名稱　「世紀難題-考拉茲猜想」 考拉茲猜想中循環的探討

得獎獎項　三等獎

就讀學校　國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師　陳鵬旭

作者姓名　林昀俊、吳紀甫

關鍵詞　考拉茲猜想、循環

作者簡介

大家好，我是林昀俊(左)，目前就讀師大附中二年級，興趣是數學。

大家好，我是吳紀甫(右)，目前就讀師大附中二年級，興趣是數學，平時喜歡看動漫

摘要

自 1930 年代以來，考拉茲猜想(Collatz conjecture)一直是個未解之謎，其敘述如下：選定一個自然數，如果是偶數，則用 2 來除；如果是奇數，則乘以 3 再加 1，經過有限次迭代，最後一定得到 1。也就是說會得到 1,4,2,1,4,2,…的數列，稱之為 1-2-4 循環。即使此猜想敘述簡單，卻是個橫跨世紀的難題，至近幾年才有一些證明方法出現。

其中一種證明考拉茲猜想的想法為證明所有不符合考拉茲猜想的狀況為假，而其中一種狀況為除了 1-2-4 循環還有其他組循環，即有些正整數在經過數次考拉茲猜想的計算後，會進入一組非 1-2-4 循環的循環。

因此，在此篇報告中我們透過討論每一個奇數在經由乘 3 再加 1 的計算後，所得到的偶數的 2 的冪次，再經由反證法證明除了 1-2-4 循環不會有其他組循環。

Abstract

Since 1930s, the Collatz conjecture has been an unsolved problem. The following is its depiction: Select a positive integer. If it is even, then the next term is one half of the previous term. If it is odd, then the next term is 3 times the previous term plus 1. After limited iterations, it will reach 1. That is to say, we will get a sequence like 1,4,2,1,4,2..., and we call it the 1-2-4 circulation. Although the conjecture's depiction is simple, it is a difficult problem that spans over a century. There comes out some proofs until recent years.

One of the proofs of the Collatz conjecture is to prove that all the situations that are not in accordance with Collatz conjecture are false, and one of the situations is that there will be other circulations except the 1-2-4 circulation. That is to say, there are some positive integers that will go in a circulation and it is not the 1-2-4 circulation after several times of Collatz calculation.

Therefore, in this report, we discuss that the power of 2 of even numbers which come from odd numbers having the calculation of multiplying by 3 and then adding 1. Then we use proof by contradiction to prove that there won't be other circulations except 1-2-4 circulation.

壹、研究動機

在昌爸工作坊上看到了一篇關於世紀難題-「考拉茲猜想」(Collatz conjecture)的介紹，而對於考拉茲猜想的運算，我們發現一個偶數經過數次除以 2 之後必定會變成一個比原本小的奇數 1，又在研發養成所上看到了有關考拉茲猜想可能出現的反例，因此引起了我們想研究這個主題的動機。

貳、研究目的

一、考拉茲猜想的等價猜想

二、說明在進行考拉茲運算中a_{m+1}與a_m的大小關係

三、說明在進行考拉茲運算中a_n與a_0的大小關係

四、證明在考拉茲運算中，除了 1-2-4 循環無其他循環

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦

肆、研究過程、方法與討論

一、名詞及符號定義

(一) 考拉茲猜想：給定任一正整數，若此正整數為奇數，則將其乘以 3 再加 1；若此正整數為偶數，則將其除以 2，重複執行此運算，則必定會得到 1,4,2,1,4,2,…的數列，即稱之進入 1-2-4 循環。

(二) 考拉茲運算：

$$f(x) = \frac{3x+1}{2^b}$$

為一個從正奇數映至正奇數的函數，其中$b \in \mathbb{N}$、為$3x+1$中2的冪次，

也可以將其寫成遞迴形式，即

$$f(a_{n-1}) = a_n$$

其中$n \in \mathbb{N}$。

(三) b_n：滿足

$$f(a_{n-1})=\frac{3a_{n-1}+1}{2^b}=a_n$$

的正整數b，其中我們定義$b_0=0$。

(四) B_n：$\sum_{m=0}^{n} b_m$。

(五) a_0：起始數字、進行考拉茲運算的起始值、值遞迴形式的初始值。

(六) a_n：

$$f_n(a_0)=\frac{3\left(\frac{\left(\frac{3\left(\frac{3a_0+1}{2^{b_1}}\right)+1}{2^{b_2}}\right)}{\cdots}\right)+1}{2^{b_n}}$$

$$=\frac{3(\ldots(3(3(3(3a_0+1)+2^{b_1})+2^{b_1+b_2})+2^{b_1+b_2+b_3})+\cdots)+2^{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}}{2^{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}}$$

$$=\frac{3^n a_0+3^{n-1}+3^{n-2}\times 2^{b_1}+3^{n-3}\times 2^{b_1+b_2}+\cdots+3^1\times 2^{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-2}}+2^{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}}{2^{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}}$$

$$=\frac{3^n a_0+3^{n-1}+3^{n-2}\times 2^{B_1}+3^{n-3}\times 2^{B_2}+\cdots++3^1\times 2^{B_{n-2}}+2^{B_{n-1}}}{2^{B_n}}$$

$$=\frac{3^n a_0+\sum_{m=0}^{n-1}3^{n-1-m}\times 2^{B_m}}{2^{B_n}}$$

為遞迴形式中的第n項。

(七) $\lceil x\rceil$：大於或等於x的最小整數，即$x\le\lceil x\rceil<x+1\wedge\lceil x\rceil\in\mathbb{N}$，$x\in\mathbb{R}$。

(八) $\{x\}$：x的小數部分，即$\{x\}=x-(\lceil x\rceil-x)$，$0\le\{x\}<1$，$x\in\mathbb{R}$。

(九) β_n：$\beta_n=\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil$，即$2^{\beta_n}>3^n>2^{\beta_n-1}\ (n\in\mathbb{N})$。

(十) 循環：一個奇數a經過有限次考拉茲運算後會得到a，則稱a以及在考拉茲運算中依序得到的奇數為一組循環。

(十一) 1-2-4 循環：1、2、4 中任一數在進行考拉茲猜想的計算時會得到 1,4,2,1,4,2,⋯的數列，稱之為 1-2-4 循環。

在下文中，約定奇數表示正奇數、偶數表示正偶數，且未特別註記時，$n \in \mathbb{N}$。

二、考拉茲猜想的等價猜想

可以顯然知道要**證明考拉茲猜想**，即為**證明所有正整數經過數次的考拉茲運算都會變成1**(以下簡稱歸一)。

又由於如果有一個奇數符合考拉茲猜想，那麼這個奇數乘上2的任意冪次都會符合考拉茲猜想；而且如果有一個偶數符合考拉茲猜想，那麼把這個偶數除掉 2 的冪次使之成為一個奇數，則這個奇數也會符合考拉茲猜想，因此我們又可以將**證明所有正整數會歸一**，等價於**證明所有奇數會歸一**。

所以可以將考拉茲猜想等價於所有奇數會歸一。

下文，將對奇數進行討論

三、說明在進行考拉茲運算中a_{m+1}與a_m的大小關係

<Property 1> 若$b_m = 1$，則$a_{m+1} > a_m$

<proof>

$$\because a_{m+1} = \frac{3a_m + 1}{2^{b_{m+1}}} = \frac{3a_m + 1}{2} = \frac{3}{2}a_m + \frac{1}{2} \quad \text{，又} a_m > 1$$

$$\therefore a_{m+1} > a_m$$

< Property 2> 若$b_m \geq 2$，則$a_{m+1} < a_m$

< proof >

$$\because a_{m+1} = \frac{3a_m + 1}{2^{b_m}} = \frac{3}{2^{b_m}}a_m + \frac{1}{2^{b_m}} \leq \frac{3}{4}a_m + \frac{1}{2^{b_m}} \quad \text{，又} a_m > 1$$

$$\therefore a_{m+1} < a_m$$

再接著四、之前，先說明**<Property 3-1>**

< Property 3-1> 若$2^{B_n} > 3^n$，則$B_n \geq \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$

< proof >

$$2^{B_n} > 3^n \Rightarrow B_n \log 2 > n \log 3 \Rightarrow B_n > \frac{\log 3}{\log 2} n$$

又顯然

$$B_n, n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \frac{\log 3}{\log 2} \notin \mathbb{N}$$

$$\therefore \ B_n \geq \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$$

也可以將**< Property 3-1>**改寫成：若$2^{B_n} > 3^n$，則$B_n \geq \beta_n$，那$2^{\beta_n} - 3^n$又有多大?為了證明下文(四、)中的性質，可以有**< Property 3-2>**

< Property 3-2> $2^{\beta_n} - 3^n > 2^{\beta_n - n} \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq 2$

<proof>

1° 宣稱：

對於任意的$n \in \mathbb{N}$，必可找到一個大於n的m，使得$\left\{\frac{\log 3}{\log 2} m\right\} > \left\{\frac{\log 3}{\log 2} n\right\}$，其中$m \in \mathbb{N}$

證明：

Case1：$\left\{\frac{\log 3}{\log 2} n\right\} < \left\{\frac{\log 3}{\log 2}\right\}$

易知$\beta_{n+1} = \beta_n + 1$，即$\left\lceil \frac{\log 3}{\log 2}(n+1) \right\rceil = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil + 1$，則$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}(n+1)\right\} > \left\{\frac{\log 3}{\log 2} n\right\}$，即可取$m = n + 1$。

Case2：$\left\{\frac{\log 3}{\log 2} n\right\} > \left\{\frac{\log 3}{\log 2}\right\} > 0.58$

考慮

$$\frac{\left\{\frac{\log 3}{\log 2} n\right\}}{1 - \left\{\frac{\log 3}{\log 2} n\right\}}$$

可知其為無理數，若令其為$t + s$ $(t \in \mathbb{N} \ \wedge \ 0 < s < 1, s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$，則

$$1-\left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\}>\left\{\frac{\log 3}{\log 2}(tn)\right\}$$

$$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}(t+1)n\right\}>\left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\}$$

即可取$m=(t+1)n$，此時$\beta_m=\beta_{tn+n}=(t+1)\beta_n-1$，因此，

對於任意的$n\in\mathbb{N}$，必可找到一個大於n的m，使得$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}m\right\}>\left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\}$，其中$m\in\mathbb{N}$。

2° 再來要說明為什麼1°中的命題成立，**< Property 3-1>**就也會成立。

Case1：$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\}<\left\{\frac{\log 3}{\log 2}\right\}$

則可知

$$2^{\beta_n}>3^n\text{、}2^{\beta_m}=2^{\beta_{n+1}}>3^{n+1}=3^m\text{、}2^{\beta_m}-2^{\beta_n}=2<3^m-3^n=3$$

所以

$$2^{\beta_m}>3^m\ \Leftrightarrow\ 2^{\beta_n+1}>3^{n+1}\ \Leftrightarrow\ 2^{\beta_n}>3^n+\frac{3^n}{2}$$

又

$$3^n+\frac{3^n}{2}>3^n+2^{\beta_n-n}$$

所以

$$2^{\beta_n}>3^n+\frac{3^n}{2}>3^n+2^{\beta_n-n}\ \Leftrightarrow\ 2^{\beta_n}-3^n>2^{\beta_n-n}$$

Case2：$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\}>\left\{\frac{\log 3}{\log 2}\right\}>0.58$

首先，先討論

$$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\}<1-\left\{\frac{\log 3}{\log 2}\times 12\right\}<1-\{19.01955\}=1-0.01955=0.9845$$

的狀況，由上述條件知可以找到$\beta_{n+12}=\beta_n+19$使得

$$2^{\beta_{n+12}}>3^{n+12}$$

則上式$\Leftrightarrow\ 2^{\beta_n+19}>3^{n+12}\ \Leftrightarrow\ 2^{\beta_n}>3^n\times\frac{3^{12}}{2^{19}}\ \Leftrightarrow\ 2^{\beta_n}>3^n+3^n\times\frac{7213}{524288}$

又在$n\geq 8$時，$3^n\times\frac{7213}{524288}>2^{\beta_n-n}$

所以$2^{\beta_n}>3^n+3^n\times\frac{7213}{524288}>3^n+2^{\beta_n-n}\ \Leftrightarrow\ 2^{\beta_n}-3^n>2^{\beta_n-n}$

再來，要討論

$$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\} > 1 - \left\{\frac{\log 3}{\log 2}\times 12\right\} > 1 - \{19.01954\} = 1 - 0.01954 = 0.9846$$

的狀況，由1°的討論知可找到異於n的正整數m，使得$\left\{\frac{\log 3}{\log 2}m\right\} > \left\{\frac{\log 3}{\log 2}n\right\}$，

所以可以知道

$$2^{\beta_n} > 3^n \text{、} 2^{\beta_m} > 3^m \text{、} 2 > \frac{2^{\beta_m-\beta_n+1}}{3^{m-n}} > \frac{2^{\beta_n}}{3^n} > \frac{2^{\beta_m}}{3^m} > 1$$

所以

$$\frac{2^{\beta_m-\beta_n+1}}{3^{m-n}} > \frac{2^{\beta_n}}{3^n} \Leftrightarrow \frac{2^{\beta_m-2\beta_n+1}}{3^{m-2n}} > 1 \Leftrightarrow \frac{2^{(t+1)\beta_n-2\beta_n-1}}{3^{(t+1)n-2n}} > 1 \Leftrightarrow \frac{2^{(t-1)\beta_n-1}}{3^{(t-1)n}} > 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2^{\beta_n}}{3^n}\right)^{t-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{\beta_n}}{3^n} > 2^{\frac{1}{t-1}} \Leftrightarrow 2^{\beta_n} > 2^{\frac{1}{t-1}} \times 3^n$$

又

$$2^{\frac{1}{t-1}} \times 3^n > 3^n + 2^{\beta_n-n}$$

$$\therefore 2^{\beta_n} - 3^n > 2^{\beta_n-n}$$

四、說明在進行考拉茲運算中a_n與a_0的大小關係

此段將下文(五、)會用到的各種大小關係另外提出來證明，目的在於使下文(五、)證明的過程比較不會太繁瑣。

< Property 4> 若$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 1 \wedge 1 \le b_n \le \left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil - n$，則$a_n > a_0$

< proof >

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 1 \wedge 1 \le b_n \le \left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil - n$$

$$\Rightarrow n \le B_n \le \left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil - 1$$

由**< Property 3>**知，此時

$$2^{B_n} < 3^n$$

又

$$a_n = \frac{3^n a_o + \sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_n}}$$

且

$$\frac{3^n a_o+\sum_{m=0}^{n-1}3^{n-1-m}\times 2^{B_m}}{2^{B_n}}>\frac{3^n a_o}{2^{B_n}}>\frac{2^{B_n}}{2^{B_n}}a_0=a_0$$

$$\therefore a_n>a_0$$

< Property 5> 若$b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=1\ \wedge\ b_n>\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n$，則$a_n<a_0$

< proof >

當$n=1$時，由**<property1>**知命題成立。

當$n\geq 2$時：

1°先證$b_n=\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n+1$的狀況：

因為a_0為奇數，不妨令$a_0=2k_0+1\ (\ k_0\in\{\ x|x\in\mathbb{Z}\ \wedge x\geq 0\ \})$，則

$$a_1=\frac{3a_0+1}{2^{b_1}}=\frac{3a_0+1}{2}=\frac{3(2k_0+1)+1}{2}=3k_0+2$$

又a_1為奇數，所以可以將$k_0=2k_1+1\ (\ k_1\in\{\ x|x\in\mathbb{Z}\ \wedge x\geq 0\ \})$代入，得

$$a_1=3(2k_1+1)+2=6k_1+5=2\times 3^1k_1+(2\times 3^1-1)$$

此時 $a_0=2(2k_1+1)+1=4k_1+3=2^{1+1}k_1+(2^{1+1}-1)$

同理可得

$$a_2=\frac{3a_1+1}{2^{b_2}}=\frac{3(6k_1+5)+1}{2}=9k_1+8$$

$$k_1=2k_2+1(\ k_2\in\{\ x|x\in\mathbb{Z}\ \wedge x\geq 0\ \})\text{代入}$$

此時$a_0=8k_2+7=2^{2+1}k_2+(2^{2+1}-1)$

$$\Rightarrow\ a_2=18k_2+17=2\times 3^2k_2+(2\times 3^2-1)$$

$$\cdots$$

$$a_{n-1}=\frac{3a_{n-2}+1}{2^{b_{n-1}}}=\frac{3[2\times 3^{n-2}k_{n-2}+(2\times 3^{n-2}-1)]+1}{2}=3^{n-1}k_{n-2}+(3^{n-1}-1)$$

$k_{n-2}=2k_{n-1}+1(\ k_{n-2},k_{n-1}\in\{\ x|x\in\mathbb{Z}\ \wedge x\geq 0\ \})$代入， 此時$a_0=2^nk_{n-1}+2^n-1$

$$a_{n-1}=2\times 3^{n-1}k_{n-1}+(2\times 3^{n-1}-1)$$

$$a_n=\frac{3a_{n-1}+1}{2^{b_n}}=\frac{3[2\times 3^{n-1}k_{n-1}+(2\times 3^{n-1}-1)]+1}{2^{b_n}}=\frac{3^n}{2^{b_n-1}}k_{n-1}+\frac{3^n-1}{2^{b_n-1}}$$

$$\exists!\,k\ \ (1\leq k<2^{b_n}\ \wedge\ k\in\mathbb{N})$$

$$k_{n-1}=2^{b_n}k_n+k\ (\ k_{n-1}\in\{\ x|x\in\mathbb{Z}\ \wedge x\geq 0\ \})\text{代入}$$

$$\Rightarrow a_n = 2\times 3^n k_n + \frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{b_n-1}}\text{，使得}\frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{b_n-1}}\text{為一奇數}$$

$$\text{此時}a_0 = 2^{n+b_n}k_n + 2^n k + 2^n - 1$$

因此

$$a_n < a_0 \Leftrightarrow 2\times 3^n k_n + \frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{b_n-1}} < 2^{n+b_n}k_n + 2^n k + 2^n - 1$$

$$\text{又 } 2^{n+b_n} = 2\times 2^{n+b_n-1} = 2\times 2^{n+\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n+1-1} = 2\times 2^{\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil} > 2\times 3^n$$

$$\Rightarrow\ 2^{n+b_n}k_n > 2\times 3^n k_n$$

所以只需證明

$$\frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{b_n-1}} < 2^n k + 2^n - 1 \quad \text{式}(1)$$

2°

$$\because 2^{b_n-1+n} = 2^{n+\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n+1-1} = 2^{\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil} > 3^n$$

$$\Rightarrow 2^{\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil}(x+1) - 1 > 3^n(x+1) - 1\ (x\geq 0)$$

$$\Rightarrow 2^{B_n}(x+1) - 1 = 2^{b_n-1+n}(x+1) - 1 > 3^n(x+1) - 1$$

$$\Rightarrow 2^n(x+1) - \frac{1}{2^{b_n-1}} > \frac{3^n(x+1)-1}{2^{b_n-1}}$$

$$\Rightarrow (2^n(x+1)-1) - \frac{1}{2^{b_n-1}} > \left(\frac{3^n(x+1)-1}{2^{b_n-1}}\right) - 1$$

$$\Rightarrow 2^n(x+1) - 1 > \frac{3^n(x+1)-1}{2^{b_n-1}} + \left(\frac{1}{2^{b_n-1}} - 1\right)$$

$x = k$代入

$$2^n k + 2^n - 1 > \frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{b_n-1}} + \left(\frac{1}{2^{b_n-1}} - 1\right)$$

又

$$2^n k + 2^n - 1\text{、}\frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{b_n-1}}\text{皆為奇數，}-1 < \frac{1}{2^{b_n-1}} - 1 < 0$$

因此

$$2^n k + 2^n - 1 \geq \frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{b_n-1}}$$

故式(1)成立，故$a_n < a_0$。

3° $b_n \geq \left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil - n + 2$的狀況，仿上述1°, 2°的方法即可得證。

< Property 6-1>

若一個有序數對$(b_1, b_2, \dots, b_n)$，使得$a_n < a_0$，
其中$b_1 = 1,\ b_2, b_3, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{N},\ b_n = m \geq 2 \wedge m \in \mathbb{N}$，
則數對$(b_1{}', b_2{}', \dots, b_n{}')$，也會使得$a_n{}' < a_0{}'$，
其中$b_1' = b_1 + x,\ b_n' = b_n - x \geq 2,\ x \in \mathbb{N}$，$b_k' = b_k\ \ \forall\, k \in \{\, x | 1 \leq x \leq n, x \neq 1, n \,\}$

< proof >

1° 首先要說明a_1、a_{n-1}、$a_1{}'$、$a_{n-1}{}'$的通式以及其存在性：
因為

$$a_{n-1} = \frac{3^{n-2}a_1 + \sum_{m=0}^{n-2} 3^{n-3-m} \times 2^{B_m - B_1}}{2^{B_{n-1}-B_1}}$$

所以發現將a_1改寫成

$$2^{B_{n-1}-B_1}k + a_1$$

此時a_{n-1}就會變成

$$3^{n-2}k + a_{n-1}$$

(k為參數且k為一個非負整數)

但是為了滿足a_1及a_{n-1}皆為奇數，因此須將a_1改寫成

$$2^{B_{n-1}-B_1+1}k + a_1$$

此時a_{n-1}就會變成

$$2 \times 3^{n-2}k + a_{n-1}$$

(k為參數且k為一個非負整數)

也就是說我們能找到兩個奇數

$$j_1, j_{n-1} (1 \leq j_1 < 2^{B_{n-1}-B_1+1}, 1 \leq j_2 < 2 \times 3^{n-2})$$

使得a_1滿足通式

$$2^{B_{n-1}-B_1+1}k + j_1$$

a_{n-1}滿足通式

$$2 \times 3^{n-2}k + j_{n-1}$$

(k為參數且k為一個非負整數)

這裡為了書寫方便，我們也可以令兩偶數i_1, i_{n-1}

$$i_1 = 2^{B_{n-1}-B_1+1}、i_{n-1} = 2 \times 3^{n-2}$$

$$\Rightarrow a_1 = i_1 k + j_1、a_{n-1} = i_{n-1}k + j_{n-1}$$

又在$(b_1, b_2, \dots, b_n)$以及$(b_1{}', b_2{}', \dots, b_n{}')$兩個數對中

$$b_k' = b_k\ \ \forall\, k \in \{\, x | 1 \leq x \leq n, x \neq 1, n \,\}$$

同理可得$a_1{}'$與$a_{n-1}{}'$也符合通式

$$a_1' = i_1 k + j_1、a_{n-1}' = i_{n-1}k + j_{n-1}$$

2° 由1°知，我們可以令

$$a_1 = i_1k + j_1、a_{n-1} = i_{n-1}k + j_{n-1}$$

其中i_1, i_{n-1}為兩偶數、j_1, j_{n-1}為兩奇數、k為參數且為非負整數，則

$$a_1 = \frac{3a_0 + 1}{2^{b_1}} = \frac{3a_0 + 1}{2} \Rightarrow a_0 = \frac{2a_1 - 1}{3} = \frac{2(i_1k + j_1) - 1}{3}$$

$$a_n = \frac{3a_{n-1} + 1}{2^m} = \frac{3(i_{n-1}k + j_{n-1}) + 1}{2^m}$$

又$a_n < a_0$

$$\therefore \frac{3(i_{n-1}k + j_{n-1}) + 1}{2^m} < \frac{2(i_1k + j_1) - 1}{3}$$

$$\Rightarrow 9(i_{n-1}k + j_{n-1}) + 3 < 2^{m+1}(i_1k + j_1) - 2^m \quad 式(2)$$

3° 由1°知，我們也可以令

$$a_1' = i_1k + j_1、a_{n-1}' = i_{n-1}k + j_{n-1}$$

其中i_1, i_{n-1}為兩偶數、j_1, j_{n-1}為兩奇數、k為參數且為一非負整數(與2°中相同)，則

$$a_1' = \frac{3a_0{}' + 1}{2^{b_1{}'}} = \frac{3a_0{}' + 1}{2^{1+x}} \Rightarrow a_0' = \frac{2^{1+x}a_1' - 1}{3} = \frac{2^{1+x}(i_1k + j_1) - 1}{3}$$

$$a_n' = \frac{3a_{n-1}' + 1}{2^{b_n{}'}} = \frac{3(i_{n-1}k + j_{n-1}) + 1}{2^{m-x}}$$

又

$$2^{(1+x)+(m-x)}(i_1k + j_1) - 2^{m-x} = 2^{m+1}(i_1k + j_1) - 2^{m-x}$$
$$> 2^{m+1}(i_1k + j_1) - 2^m$$

由式(2)知

$$2^{m+1}(i_1k + j_1) - 2^m > 9(i_{n-1}k + j_{n-1}) + 3$$

$$\Rightarrow \frac{2^{1+x}(i_1k + j_1) - 1}{3} > \frac{3(i_{n-1}k + j_{n-1}) + 1}{2^{m-x}}$$

$$\Rightarrow a_0' > a_n'$$

< Property 6-2>

若一個有序數對$(b_1, b_2, \dots, b_n)$，使得$a_n < a_0$，

其中$b_1 = y \in \mathbb{N},\ b_2, b_3, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{N},\ b_n = m \geq 2 \land m \in \mathbb{N}$，

則數對$(b_1{}', b_2{}', \dots, b_n{}')$，也會使得$a_n{}' < a_0{}'$，

其中$b_1' = b_1 + x,\ b_n' = b_n - x \geq 2,\ x \in \mathbb{N},\ b_k' = b_k\ \ \forall\, k \in \{\, x | 1 \leq x \leq n, x \neq 1, n\,\}$

< proof >

仿**< Property 6-1>**的證明方法，此性質可得證

< Property 7-1>
若一個數對$(b_1, b_2, \dots, b_n)$，使得$a_n < a_0$，
其中$b_v = 1,\ b_u = m \geq 2 \wedge m \in \mathbb{N}\ (1 < v < u \leq n)$,
$b_k \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \{\, x | 1 \leq x \leq n, x \neq v, u \,\}$，
則數對$(b_1{}', b_2{}', \dots, b_n{}')$，也會使得$a_n{}' < a_0{}'$，
其中 $b_v' = b_v + x,\ b_u' = b_u - x \geq 2,\ x \in \mathbb{N}$，$b_k' = b_k\ \forall\ k \in \{\, x | 1 \leq x \leq n, x \neq v, u \,\}$

< proof >
1° 仿**< Property 6-1>**的第一步驟，同樣可以證明a_v、a_u、$a_v{}'$、$a_u{}'$的通式以及其存在性
2° 由1°知，可以令

$$a_v = i_v k + j_v \text{、} a_{u-1} = i_{u-1} k + j_{u-1}$$

其中i_v, i_u為兩偶數、j_v, j_u為兩奇數、k為參數且為一非負整數，則

$$a_v = \frac{3^v a_0 + \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_v}}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2^{B_v} a_v - \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{3^v} = \frac{2^{B_v}(i_v k + j_v) - \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{3^v}$$

$$\left(令 \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m} = \Sigma_1 \right)$$

$$= \frac{2^{B_v}(i_v k + j_v) - \Sigma_1}{3^v}$$

$$a_n = \frac{3^{n-u+1} a_u + \sum_{m=u-1}^{n} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m - B_{u-1}}}{2^{B_n - B_u}}$$

$$= \frac{3^{n-u+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^{n-u} + \sum_{m=u}^{n} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m - B_{u-1}}}{2^{B_n - B_u}}$$

$$\left(令 \sum_{m=u}^{n} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m - B_{u-1}} = \Sigma_2 \right)$$

$$= \frac{3^{n-u+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^{n-u} + \Sigma_2}{2^{B_n - B_u}}$$

又$a_n < a_0$

$$\Rightarrow \frac{3^{n-u+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^{n-u} + \Sigma_2}{2^{B_n - B_u}} < \frac{2^{B_v}(i_v k + j_v) - \Sigma_1}{3^v}$$

$$\Rightarrow 3^{n-u+v+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^v(3^{n-u} + \Sigma_2) < 2^{B_n - B_u + B_v}(i_v k + j_v) - 2^{B_n - B_u}\Sigma_1 \quad 式(3)$$

3° 由1°知，也可以令

$$a'_v = i_v k + j_v \text{、} a'_{u-1} = i_{u-1} k + j_{u-1}$$

其中i_v, i_u為兩正偶數、j_v, j_u為兩正奇數、k為參數且為一非負整數，則

$$a'_v = \frac{3^v a_0' + \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_v'}} = \frac{3^v a_0' + \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_v+x}}$$

$$\Rightarrow a'_0 = \frac{2^{B_v+x} a_v' - \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{3^v} = \frac{2^{B_v+x}(i_v k + j_v) - \sum_{m=0}^{v-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{3^v}$$

$$= \frac{2^{B_v+x}(i_v k + j_v) - \Sigma_1}{3^v}$$

$$a'_n = \frac{3^{n-u+1} a_u' + 3^{n-u} + \sum_{m=u}^{n} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m - B_{u-1} - x}}{2^{B_n' - B_u'}}$$

$$= \frac{3^{n-u+1} a_u' + 3^{n-u} + \sum_{m=u}^{n} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m - B_{u-1} - x}}{2^{B_n - B_u - x}}$$

$$= \frac{3^{n-u+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + \sum_{m=u-1}^{n} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m - B_{u-1} - x}}{2^{B_n - B_u - x}}$$

$$= \frac{3^{n-u+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^{n-u} + 2^{-x}\Sigma_2}{2^{B_n - B_u - x}}$$

又

$$2^{B_n - B_u + B_v}(i_v k + j_v) - 2^{B_n - B_u - x}\Sigma_1 > 2^{B_n - B_u + B_v}(i_v k + j_v) - 2^{B_n - B_u}\Sigma_1$$

由式(3)知

$$2^{B_n - B_u + B_v}(i_v k + j_v) - 2^{B_n - B_u}\Sigma_1 > 3^{n-u+v+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^v(3^{n-u} + \Sigma_2)$$

又因為$\Sigma_2 > 0$，所以

$$3^{n-u+v+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^v(3^{n-u} + \Sigma_2) > 3^{n-u+v+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^v(3^{n-u} + 2^{-x}\Sigma_2)$$

$$\Rightarrow \frac{2^{B_v+x}(i_v k + j_v) - \Sigma_1}{3^v} > \frac{3^{n-u+1}(i_{u-1} k + j_{u-1}) + 3^{n-u} + 2^{-x}\Sigma_2}{2^{B_n - B_u - x}}$$

$$\Rightarrow a'_0 > a'_n$$

< Property 7-2>

若一個數對$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$，使得$a_n < a_0$，

其中$b_v = y \in \mathbb{N},\ b_u = m \geq 3 \wedge m \in \mathbb{N}\ (1 < v < u \leq n),$

$b_k \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \{\, x | 1 \leq x \leq n, x \neq v, u \,\}$，

則數對$(b_1', b_2', \ldots, b_n')$，也會使得$a_n' < a_0'$，

其中 $b'_v = b_v + x,\ b'_u = b_u - x \geq 2,\ x \in \mathbb{N}$，$b'_k = b_k\ \forall\ k \in \{\, x | 1 \leq x \leq n, x \neq v, u \,\}$

< proof >

仿**< Property 7-1>**的證明方法，此性質可得證

< Property 7-3>
若一個數對$(b_1, b_2, \dots, b_n)$，使得$a_n < a_0$，
其中$b_v = y \in \mathbb{N},\ b_n = m \geq 3 \wedge m \in \mathbb{N}\ (1 < v < n)$,
$b_k \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \{\, x|1 \leq x < n, x \neq v, n \,\}$，
則數對$(b_1{}', b_2{}', \dots, b_n{}')$，也會使得$a_n{}' < a_0{}'$，
其中 $b'_v = b_v + x,\ b'_n = b_n - x \geq 2,\ x \in \mathbb{N}$，$b'_k = b_k\ \forall\ k \in \{\, x|1 \leq x < n, x \neq v, n \,\}$

< *proof* >
仿**< Property 7-1>**的證明方法，此性質可得證

< Property 8>
若一個數對$(b_1, b_2, \dots, b_n)$使得$a_n < a_0$，
其中$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$，
則數對$(b_1{}', b_2{}', \dots, b_n{}')$，也會使得$a_n{}' < a_0{}'$，
其中$b'_m = b_m + 1 (1 \leq m \leq n), b'_k = b_k\ \forall k \in \{x|1 \leq x \leq n, x \neq m\}$

< *proof* >
1° 當$m = n$時：

$$\because a_n < a_0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{3^n a_0 + \sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_n}} < a_0$$

$$\therefore a'_n = \frac{3^n a_0{}' + \sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m{}'}}{2^{B_n{}'}} = \frac{3^n a_0{}' + \sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_n+1}}$$

$$< \frac{3^n a_0{}' + \sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_n}} < a'_0$$

(由**< Property 6-1>**的第一步驟知，a_0與a'_0符合相同通式，因此上述的算式會成立)
2° 當$1 < m < n$時：
將$x = 1$、$v = m$代入**< Property 7-3>**中，對應到此題中可以得到

$$2a_n{}' < a_0{}'$$

$$\therefore\ a'_n < a'_0$$

3° 當$m = 1$時：
因為$b'_k = b_k\ \forall k \in \{x|1 < x \leq n, x \neq m\}$，由**< Property 6-1>**的第一步驟知，a_1與a'_1符合相同通式、a_n與a'_n符合相同通式，由此為基礎進行以下推論

$$\because\ a_1 = \frac{3a_0+1}{2^{b_1}}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2^{b_1}a_1 - 1}{3} > a_n$$

$$\therefore\ a_0' = \frac{2^{b_1'}a_1' - 1}{3} = \frac{2^{b_1+1}a_1' - 1}{3} > \frac{2^{b_1}a_1' - 1}{3} > a_n'$$

$$\Rightarrow a_0' > a_n'$$

五、證明在考拉茲運算中，除了 1-2-4 循環無其他組循環

反設有一組不為 1-2-4 循環的循環，此組循環中共有n個相異奇數，其中令最小的數為 a，且在這組循環中無組其他循環，且 a 在經過 n 次考拉茲運算後會等於 a，即

$$a = f_n(a) = \frac{3^n a + \sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_n}}$$

而且易知 $n \neq 1$，其中令$a = a_0 = a_n$、$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$分別為此組循環中其他$n-1$個數，且為a_0在進行考拉茲運算時會依序得到的。

接著將證明此組循環不存在：

$$\because a = \frac{3^n a + \sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_n}} \ \Rightarrow\ a = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} 3^{n-1-m} \times 2^{B_m}}{2^{B_n} - 3^n}$$

又a為正數

$$\therefore 2^{B_n} - 3^n > 0$$

由**< Property 3>**知

$$B_n \geq \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$$

因為a為此循環中最小的數，所以由**< Property 1>**以及**< Property 2>**可以顯然知道對於每一個

$$b_m\ , m \in \{\, x | x \in \mathbb{N}\ \wedge 2 \leq x \leq n \,\}$$

取值範圍一定有上界，否則在某次的考拉茲運算結束後，得到的奇數就會小於a，又同樣由**< Property 1>**以及**< Property 2>**可以顯然知道，在

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{m-1} = 1$$

的條件下，可以找到b_m的最大值，否則若某個 $b_m \geq 2$（$m \in \{\, x | x \in \mathbb{N}\ \wedge 2 \leq x \leq n \,\}$），則在進行考拉茲運算時會有$a_m < a_{m-1}$，不能保證會找到$b_m$的最大值，又由**< Property 4>**知道當

$$b_m \le \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} m \right\rceil - m$$

才能滿足

$$a_m > a_0 = a$$

因此在這裡就給出了b_m ($m \in \{ x | x \in \mathbb{N} \wedge 2 \le x \le n \}$)的範圍。

此時也可以由**< Property 4>**知道，

若

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 1 \wedge b_n \le \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil - n \ \left(B_n \le \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \right)$$

則$a_0 < a_n$與$a_0 = a_n$矛盾；

若

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 1 \ \wedge \ b_n > \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil - n \ \left(B_n > \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \right)$$

則$a_0 > a_n$與a_0為此組循環中最小數以及$a_0 = a_n$皆矛盾，因此若

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 1 \ (\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \ge 2)$$

則不會出現任何一組循環 。

由上文可以知道

$$B_n \ge \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$$

時，才有可能會出現某組循環，再來分成

$$B_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \text{ 、 } B_n > \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$$

兩部分，證明不會有除了 1-2-4 循環的任一組循環出現。

首先，要證

$$\text{若} B_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \text{，則} a_n < a_0 \ \ \forall (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

1° 我們先證一個特例，

< Property 9>

若

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-2} = 1 \text{ 、} b_{n-1} = 2 \text{ 、} b_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil - n \ \ \left(B_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \right) \forall n \ge 3$$

則

$$a_n < a_0$$

< *proof* >

因為a_0為奇數，不妨令$a_0 = 2k_0 + 1$ ($k_0 \in \{ x | x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0 \}$)，則

$$a_1 = \frac{3a_0 + 1}{2^{b_1}} = \frac{3a_0 + 1}{2} = \frac{3(2k_0 + 1) + 1}{2} = 3k_0 + 2$$

又a_1為奇數，所以可以將$k_0 = 2k_1 + 1$ ($k_1 \in \{ x | x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0 \}$)代入，得

$$a_1 = 3(2k_1 + 1) + 2 = 6k_1 + 5 = 2 \times 3^1 k_1 + (2 \times 3^1 - 1)$$

$$\text{此時 } a_0 = 2(2k_1 + 1) + 1 = 4k_1 + 3 = 2^{1+1} k_1 + (2^{1+1} - 1)$$

同理可得

$$a_2 = \frac{3a_1 + 1}{2^{b_2}} = \frac{3(6k_1 + 5) + 1}{2} = 9k_1 + 8k_1 = 2k_2 + 1$$

($k_2 \in \{ x | x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0 \}$)代入

$$\text{此時} a_0 = 8k_2 + 7 = 2^{2+1} k_2 + (2^{2+1} - 1)$$

$$\Rightarrow a_2 = 18k_2 + 17 = 2 \times 3^2 k_2 + (2 \times 3^2 - 1)$$

…

$$a_{n-2} = \frac{3a_{n-3} + 1}{2^{b_{n-2}}} = \frac{3[2 \times 3^{n-3} k_{n-3} + (2 \times 3^{n-3} - 1)] + 1}{2} = 3^{n-2} k_{n-2} + (3^{n-2} - 1)$$

$k_{n-2} = 2k_{n-3} + 1$($k_{n-3}, k_{n-2} \in \{ x | x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0 \}$)代入 此時$a_0 = 2^{n-1} k_{n-2} + 2^{n-1} - 1$

$$a_{n-2} = 2 \times 3^{n-2} k_{n-2} + (2 \times 3^{n-2} - 1)$$

$$a_n = \frac{3\left(\frac{3a_{n-2} + 1}{2^{b_{n-1}}}\right) + 1}{2^{b_n}} = \frac{3\left(\frac{3a_{n-2} + 1}{2^2}\right) + 1}{2^{b_n}} = \frac{9a_{n-2} + 3 + 2^2}{2^{2+b_n}}$$

$$= \frac{9[2 \times 3^{n-2} k_{n-2} + (2 \times 3^{n-2} - 1)] + 3 + 2^2}{2^{2+b_n}}$$

$$= \frac{3^n}{2^{1+b_n}} k_{n-2} + \frac{3^n - 3 + 2}{2^{1+b_n}} = \frac{3^n}{2^{1+b_n}} k_{n-2} + \frac{3^n - 1}{2^{1+b_n}}$$

$$\exists!\, k \ \ (1 \leq k < 2^{b_n + 2} \ \land \ k \in \mathbb{N})$$

$k_{n-2} = 2^{b_n+2} k_n + k$ ($k_n \in \{ x | x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0 \}$)代入

$\Rightarrow a_n = 2 \times 3^n k_n + \frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{1+b_n}}$，使得$\frac{3^n k + 3^n - 1}{2^{1+b_n}}$為一奇數

$$\text{此時} a_0 = 2^{1+b_n+n} k_n + 2^{n-1} k + 2^{n-1} - 1 = 2^{B_n+1} k_n + 2^{n-1} k + 2^{n-1} - 1$$

又因為$k \geq 1 \Rightarrow k - 1 \geq 0$，所以我們將$a_0$以及$a_n$改寫為

$$a_n = 2 \times 3^n k_n + \frac{3^n (k - 1) + 2 \times 3^n - 1}{2^{1+b_n}}$$

$$a_0 = 2^{B_n+1} k_n + 2^{n-1}(k - 1) + 2^n - 1$$

接著宣稱

$$2^n - 1 > \frac{2 \times 3^n - 1}{2^{1+b_n}} \quad \forall n \geq 3 \quad \text{式}(4)$$

將式(4)等價於

$$2^{n+1+b_n}-2^{1+b_n}-2\times 3^n+1>0$$

$$\Rightarrow 2^{n+1+\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n}-2^{1+\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n}-2\times 3^n+1>0$$

$$\Rightarrow 2^{\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil+1}-2^{\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n+1}-2\times 3^n+1>0 \quad \text{式(5)}$$

接著證明

$$\because 2^{b_n-1+n}=2^{n+\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil-n+1-1}=2^{\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil}>3^n$$

$$\Rightarrow 2\times 2^{\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil}(x+1)-1>2\times 3^n(x+1)-1\ (x\geq 0)$$

$$\Rightarrow 2^{B_n+1}(x+1)-1=2^{b_n+1+n}(x+1)-1>2\times 3^n(x+1)-1$$

$$\Rightarrow 2^n(x+1)-\frac{1}{2^{b_n+1}}>\frac{3^n(x+1)-1}{2^{b_n+1}}$$

$$\Rightarrow (2^n(x+1)-1)-\frac{1}{2^{b_n+1}}>\left(\frac{3^n(x+1)-1}{2^{b_n+1}}\right)-1$$

$$\Rightarrow 2^n(x+1)-1>\frac{3^n(x+1)-1}{2^{b_n+1}}+\left(\frac{1}{2^{b_n+1}}-1\right)$$

$x=k$代入

$$2^nk+2^n-1>\frac{3^nk+3^n-1}{2^{b_n+1}}+\left(\frac{1}{2^{b_n+1}}-1\right)$$

又

$$2^nk+2^n-1\text{、}\frac{3^nk+3^n-1}{2^{b_n+1}}\text{皆為奇數，}-1<\frac{1}{2^{b_n+1}}-1<0$$

因此

$$2^nk+2^n-1\geq\frac{3^nk+3^n-1}{2^{b_n+1}}$$

故式(5)成立，因此式(4)成立，故$a_n<a_0$。

因此式(5)成立，故式(4)也成立，證畢

2° 再來要證明

< Property 10>

若

$$B_n=\left\lceil\frac{\log 3}{\log 2}n\right\rceil$$

則

對於任意數對 $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ $b_1,b_2,\dots,b_n\in\mathbb{N}$

恆有 $a_n<a_0$

< *proof* >

上文我們證明了

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = \left(1,1, \dots, 1,2, \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil - n\right)$$

時，

$$a_n < a_0$$

再由**< Property 6-1>**以及**< Property 6-2>**就可以知

$$\text{對於任意數對 } (b_1, b_2, \dots, b_n)\text{，滿足 } B_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$$

$$a_n < a_0$$

皆會成立，證畢

剛剛已經證明了

$$\text{當} B_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \text{，} a_n < a_0$$

也就是說當

$$B_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$$

時，不會出現任何一組循環

接著要證明

< Property 11>

$$\text{若} B_n > \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \text{，則} a_n < a_0$$

< *proof* >

由**< Property 8>**、**< Property 10>**，可以知道若數對

$$(b_1, b_2, \dots, b_n + k) \quad b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N} \wedge B_n = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil \wedge k \in \mathbb{N}$$

則

$$a_n < a_0$$

再由**< Property 6-1>**、**< Property 6-2>**、**< Property 7-1>**、**< Property 7-2>**、**< Property 7-3>**可得證。

至此，我們證明了，若

$$B_n \geq \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$$

則

$$a_n < a_0$$

伍、結論

一、 若$B_n < \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$，則$a_n > a_0$

二、 若$B_n \geq \left\lceil \frac{\log 3}{\log 2} n \right\rceil$，則$a_n < a_0$

三、 考拉茲猜想中除了 1-2-4 循環無其他組循環

陸、未來展望

在此篇報告中，證明了在考拉茲猜想中不會出現除了 1-2-4 循環的任一組循環，也就是解決了不符合考拉茲猜想的一個反例。

若能搭配其他已被證過的反例，例如：會發散、...等，那麼距離證明考拉茲猜想又更近了一點。

柒、參考文獻

[1] 昌爸工作坊-3x+1 克拉茨猜想(Collatz conjecture)。2021 年 9 月 30 日，取自 http://www.mathland.idv.tw/history/421guass.htm

[2] 研發養成所(Bridan's Blog - 4rdp, For R&D Person)- 完整非電腦證明考拉茲猜想 (三) (Collatz conjecture 3)。2021 年 10 月 21 日，取自 http://4rdp.blogspot.com/2019/09/collatz-conjecture-3.html

【評語】010020

作者研究分考拉茲猜想，考拉茲變換是將奇整數乘以 3 加以及將偶數除以 2，原本的考拉茲猜想宣稱任何正數經過有限多次變換後會得到 1。這個的猜想是相當具挑戰性的問題，作者證明除了 1,4,2 以外沒有其他的循環數列，算是相當有趣的成果。事實上，此猜想歷來已有不少的研究，建議作者可以多參考相關的文獻，站在巨人的肩膀上應該可以有機會可以看得遠。