2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010019**

參展科別　數學

作品名稱　頂心三角形誕生的奇蹟

得獎獎項　四等獎

就讀學校　國立羅東高級中學

指導教師　鍾明宏

作者姓名　陳平、郭晨馨、簡靖承

關鍵詞　頂心三角形、面積比例、三點共線

作者簡介

我是陳平(中)，目前就讀羅東高中二年級，我的興趣是彈鋼琴、打籃球及研究數學。我從小就對數學特別有興趣，也一直都有在進行數學的研究。升上高中後，因為想要挑戰自己，便找了跟我一樣熱愛數學的同學報名科展。做科展的期間常常因為數學知識的不足，導致許多數學問題無法解決，但我們仍然不會放棄，試著嘗試上網查資料解決問題。很榮幸能夠參加國際科展，也謝謝老師耐心的教導，讓我們成功地踏上科展這條道路。

我是郭晨馨(左)，目前就讀羅東高中二年級。喜歡上數學是從國中開始的，不知道是國小時還沒開竅，還是沒遇到適合我的老師，我小時候並不是很擅長，但在國中時，我遇到了令我改變這一切的老師，他讓我發現原來數學可以這麼好玩。數學能令我感到成就感，面對未知的答案，我喜歡挑戰。這次很榮幸能參加國際科展，也謝謝老師的教導以及和我一同努力的夥伴們。

我是簡靖承(右)，目前就讀羅東高中二年級。我一直以來都很喜歡也比較擅長數學，進入高中後，因為都很喜歡數學，就和志同道合的同學一起報名科展。研究過程中，我們常常遇到困難，但我們不斷的精進自己，並利用不同的角度思考，來解決我們的問題，從而完成我們的作品。很感謝老師的教導，讓我們有機會站上國際科展的舞台。

摘要

在第59屆科展作品（中華民國第59屆中小學科學展覽會換心手術）有給定了一個新的名詞(頂心三角形)：平面上給定$\triangle ABC$及一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，三圓交於三點E、F、G，再以三交點E、F、G為頂點作$\triangle EFG$，則新$\triangle EFG$稱為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，本篇作品主要探討原三角形與其頂心三角形邊長與面積比例關係，並試著利用這些關係求出頂心線以及其他相關性質。

在我們的作品中，我們求出頂心三角形的三邊長為$2\overline{AD}\sin\angle CAB$、$2\overline{BD}\sin\angle ABC$、$2\overline{CD}\sin\angle BCA$，也就是說在原三角形為任意三角形，可以得出頂心三角形的邊長與原三角形之間的邊長關係，我們再進一步利用邊長關係求出頂心三角形對原三角形的面積以及面積比例。我們還發現，當D點在原三角形的外接圓上時，頂心三角形會退化為一直線，稱為頂心線，而此頂心線會通過原三角形的垂心是本篇作品最重要的發現。

Abstract

In the 59th Science Fair project No.030402, they define a new term (Top-Center triangle): $\triangle ABC$ and a point D are given on the plane, with the three vertices A, B, and C as the center, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, and $\overline{DC}$ as the radius to draw a circle respectively. The three circles intersect at the three points E, F, and G, and then take the intersection point E, F, and G as the vertices to form $\triangle EFG$. The new $\triangle EFG$ is called the Top-Center triangle of $\triangle ABC$ at the point D. This research mainly discusses the relationship of the side length and area ratio between the original triangle and its Top-Center triangle and tries to use these relationships to find the Top-Center line and other related properties.

In our research, we find that the three side lengths of Top-Center triangle are $2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $2\overline{BD}\sin\angle ABC$, and $2\overline{CD}\sin\angle BCA$, which means when the original triangle is an arbitrary triangle, the relationship of the side length between the original triangle and its Top-Center triangle can be

obtained. We further use the side length relationship to find the area and area ratio of the original triangle and its Top-Center triangle. We also find that when point D is on the circumcircle of the original triangle, the Top-Center triangle will degenerate into a straight line, called the Top-Center line and that this Top-Center line will pass through the orthocenter of the original triangle is the most important discovery of this article.

壹、 研究動機

我們看完第59屆科展作品後，我們瞭解了如果由原三角形三頂點為圓心，頂點到垂心（內心、外心）之距離為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，原三角形之垂心（內心、外心）會成為新三角形之內心（外心、垂心），因此我們想要探討這個性質的延伸，討論三角形之間的面積比例關係，並進一步探討若是由三角形三頂點為圓心，頂點到三角形內任意一點為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，此新三角形會有什麼性質。

貳、 研究目的

一、　探討$\triangle ABC$與其頂心三角形$\triangle EFG$之相關性質。

二、　研究$\triangle ABC$與其頂心三角形$\triangle EFG$邊長關係及面積比例關係。

三、　探討頂心線相關性質。

參、 研究設備與器材

紙、筆、電腦、Geogebra

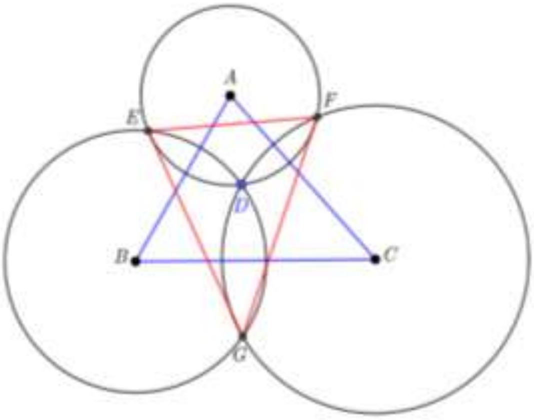
肆、 研究過程及方法

名詞定義：

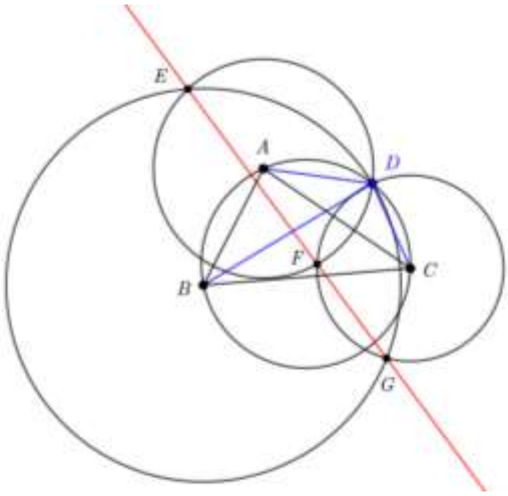
(一) 頂心三角形：平面上給定$\triangle ABC$及一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，三圓交於三點E、F、G，再以三交點E、F、G為頂點作$\triangle EFG$，

則新$\triangle EFG$稱為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形。(圖一)

(二) 頂心多邊形：若以相同的作圖方式可形成頂心多邊形。



(圖一)



(圖二)

(二) 頂心線：若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點在其外接圓上，則$\triangle ABC$在D點的頂心三角形會退化成一直線(證明於研究 3)，我們稱該直線為$\triangle ABC$在D點的頂心線。(圖二)

預備定理：

三角形內角的嵌入不等式

若$A+B+C=k\pi, k\in\mathbb{N}$，則對任意實數$x$、$y$、$z$都有

$$x^2+y^2+z^2+2(-1)^k(xy\cos C+yz\cos A+zx\cos B)\geq 0$$

等號成立條件為$x=y=z=0$或$x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$

Erdos-Mordell Inequality

平面上有一$\triangle ABC$，O為$\triangle ABC$內一點，D、E、F分別為O到$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$之垂線交點，$\overline{OA}=x$，$\overline{OB}=y$，$\overline{OC}=z$，$\overline{OD}=p$，$\overline{OE}=q$，$\overline{OF}=r$，則有不等式

$$x+y+z\geq 2(p+q+r)$$

滿足$\sin A=\sin B=\sin C$等號成立，也就是$\triangle ABC$為正三角形

引理 1 若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點為其外接圓上一動點，L_{EFG}為$\triangle ABC$在D點的頂心線，則E、F、G的軌跡圓三圓交於$\triangle ABC$垂心。

證明：

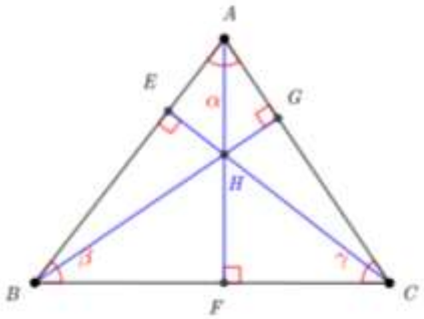
在第 59 屆科展作品有提到頂心三角形還有另一種作圖方式：

以三邊長之延伸線為對稱軸作D點的對稱點E、F、G，則E、F、G為$\triangle ABC$在D點之頂心三角形三頂點。

因為$\triangle ABC$之垂心以三邊長之延伸線為對稱軸作的三對稱點H、I、J在$\triangle ABC$之外接圓上，所以當動點D經過H、I、J時，三頂點E、F、G其中一頂點在$\triangle ABC$之垂心上，也就是說$\triangle ABC$的垂心在三頂點的軌跡圓上，故三頂點的軌跡圓交於一點垂心。

引理 2-1 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，H點為$\triangle ABC$之垂心，$\angle A=\alpha,\angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$，

則 $\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta},\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha},\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$



證明：

設垂心H到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$垂足為E、F、G

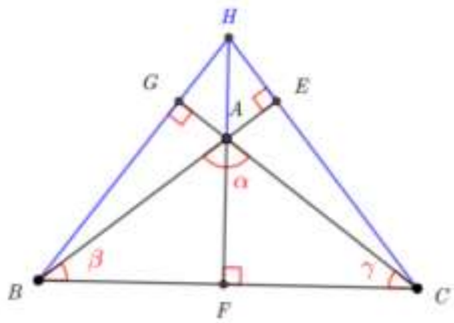
$$\cos\angle CAH=\cos\left(90^\circ-\gamma\right)=\sin\gamma=\frac{\overline{AG}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AB}\cdot\cos\alpha}{\overline{AH}}\Rightarrow\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\cos\angle BAH=\cos\left(90^\circ-\beta\right)=\sin\beta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AC}\cdot\cos\alpha}{\overline{AH}}\Rightarrow\overline{AH}=\overline{AC}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

同理可證$\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}$，$\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}=\overline{BC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$

引理 2-2 若$\triangle ABC$為一鈍角三角形，H點為$\triangle ABC$之垂心，$\angle A=\alpha>90^{\circ}$，$\angle B=\beta,\angle C=\gamma$，

則 $\overline{AH}=-\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}=-\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$，$\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}$，$\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}$



證明：

設垂心H到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$之延伸線垂足為E、F、G

$$\cos\angle HBF=\cos\left(90^{\circ}-\gamma\right)=\sin\gamma=\frac{\overline{BF}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{AB}\cdot\cos\beta}{\overline{BH}}\Rightarrow\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

$$\cos\angle HCF=\cos\left(90^{\circ}-\beta\right)=\sin\beta=\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}=\frac{\overline{AC}\cdot\cos\gamma}{\overline{CH}}\Rightarrow\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}$$

$$\cos\angle AHE=\cos\beta=\frac{\overline{EH}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{BH}\cdot\cos\angle BHE}{\overline{AH}}=\frac{\overline{BH}\cdot\cos\left(\angle AHC+\angle AHB\right)}{\overline{AH}}$$

$$=\frac{\overline{BH}\cdot\cos\left(\beta+\gamma\right)}{\overline{AH}}=-\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\beta=-\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\overline{AH}=-\overline{BH}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$=-\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$ 同理可得$\overline{AH}=-\overline{AC}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$

研究 1-1 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，D點為$\triangle ABC$內任意一點，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$,$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$,$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$。

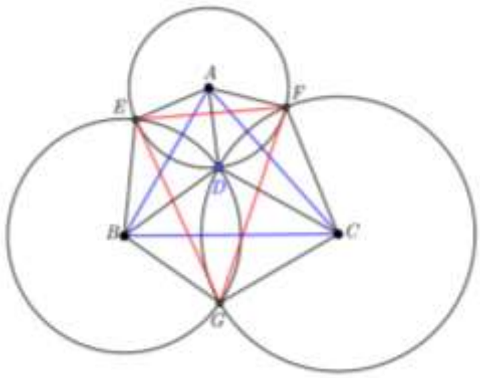
證明：

設$\overline{AD}=a$,$\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$，$\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ $\because\overline{AE}=\overline{AD}=a,\overline{BE}=\overline{BD}=b$

$\therefore$四邊形$ADBE$為箏形$\angle EBA=\angle DBA,\angle EAB=\angle DAB$

同理可證$\angle DBC=\angle GBC,\angle DCB=\angle GCB,$

$\angle DCA=\angle FCA, \angle DAC=\angle FAC$



$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD$

$=2\angle ABC=2\beta \because \overline{BE}=\overline{BG}=b$

$\therefore \triangle BEG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$\angle BEG=\angle BGE=\dfrac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\dfrac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

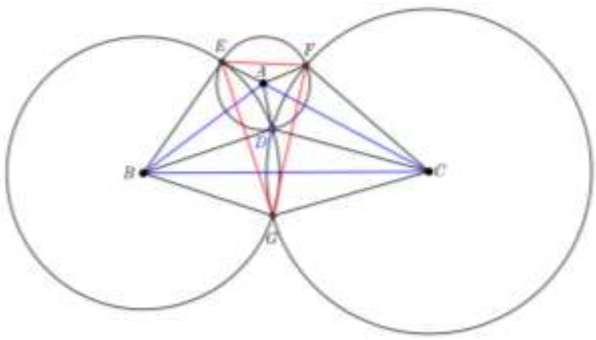
$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得 $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA, \overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$

研究 1-2 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，D 點為 $\triangle ABC$ 內任意一點，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。

證明：

設 $\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ，$\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ ，不失一般性，設 α 為鈍角



$\because \overline{AE}=\overline{AD}=a, \overline{BE}=\overline{BD}=b \therefore$ 四邊形 $ADBE$ 為箏形 $\angle EBA=\angle DBA, \angle EAB=\angle DAB$

同理可證 $\angle DBC=\angle GBC, \angle DCB=\angle GCB, \angle DCA=\angle FCA, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD=2\angle ABC=2\beta$

$\because \overline{BE}=\overline{BG}=b \therefore \triangle BEG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$\angle BEG = \angle BGE = \dfrac{(180^\circ - \angle EBG)}{2} = \dfrac{(180^\circ - 2\beta)}{2} = 90^\circ - \beta$

在$\triangle EBG$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG} = \dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE} \Rightarrow \dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta} = \dfrac{b}{\sin(90^\circ - \beta)}$

$$\Rightarrow \overline{EG} = \frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta} = \frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} = 2b\sin\beta = 2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得$\overline{GF} = 2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$EDF = \angle EAD + \angle FAD = 2\angle BAD + 2\angle CAD = 2\alpha$

$\because \overline{AE} = \overline{AF} = a \quad \therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形$\angle AEF = \angle AFE$

$\angle EAF = 360^\circ - EDF = 360^\circ - 2\alpha$，$\angle AEF = \angle AFE = \dfrac{(180^\circ - \angle EAF)}{2} = \dfrac{(2\alpha - 180^\circ)}{2} = \alpha - 90^\circ$

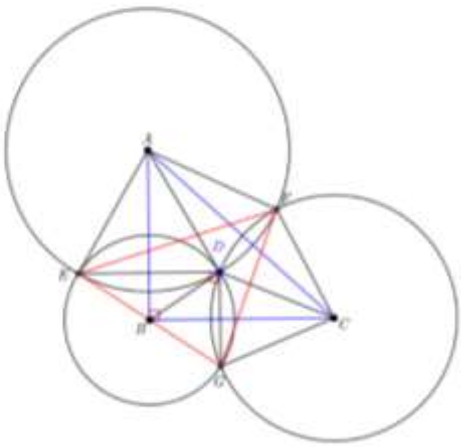
在$\triangle EAF$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE} \Rightarrow \dfrac{\overline{EF}}{\sin(360^\circ - 2\alpha)} = \dfrac{a}{\sin(\alpha - 90^\circ)}$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{a\sin(-2\alpha)}{-\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2a\sin\alpha = 2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故$\overline{EF} = 2\overline{AD}\sin\angle CAB, \overline{EG} = 2\overline{BD}\sin\angle ABC, \overline{GF} = 2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-3 若$\triangle ABC$為一直角三角形，D點為$\triangle ABC$內任意一點，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，則$\overline{EF} = 2\overline{AD}\sin\angle CAB, \overline{EG} = 2\overline{BD}\sin\angle ABC, \overline{GF} = 2\overline{CD}\sin\angle BCA$。

證明：



設$\overline{AD} = a, \overline{BD} = b, \overline{CD} = c$，$\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta,$

$\angle BCA = \gamma$，不失一般性，設β為直角

$\because \overline{AE} = \overline{AD} = a, \overline{BE} = \overline{BD} = b$

$\therefore$ 四邊形 $ADBE$ 為箏形$\angle EBA = \angle DBA, \angle EAB = \angle DAB$

同理可證$\angle DBC = \angle GBC, \angle DCB = \angle GCB, \angle DCA = \angle FCA, \angle DAC = \angle FAC$

$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle BAC=2\alpha$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a \quad \therefore \triangle AEF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^\circ-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\alpha\right)}{2}=90^\circ-\alpha$$

在 $\triangle AEF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

同理可得 $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD=2\angle ABC=2\beta=180^\circ$

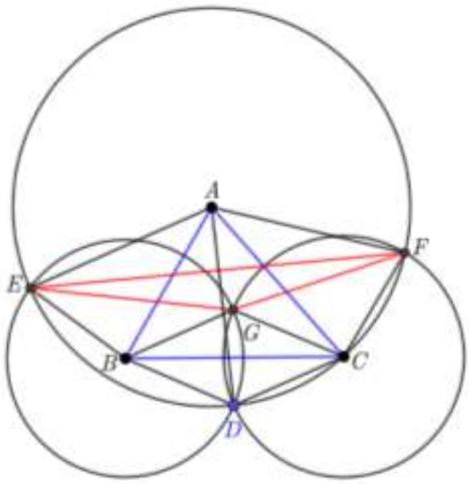
$\because \overline{BE}=\overline{BG}=b, \angle EBG=180^\circ \therefore \overline{EG}$ 為圓 B 直徑, $\angle EDG=90^\circ=\angle ABC$

在 $\triangle EDG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EDG}=2b\Rightarrow\overline{EG}=2b\sin\angle ABC=2\overline{BD}\sin\angle ABC$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-4 若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，D 點為 $\triangle ABC$ 外任意一點，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。

證明：



設 $\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ， $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$,

$\angle BCA=\gamma \because \overline{BG}=\overline{BD}=b, \overline{CD}=\overline{CG}=c$

$\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形 $\angle GBC=\angle DBC, \angle GCB=\angle DCB$

同理可證 $\angle EAB=\angle DAB, \angle EBA=\angle DBA,$

$\angle ACD=\angle ACF, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle EBA=\angle DBA=\angle ABG+\angle GBC+\angle DBC=\angle ABG+2\angle GBC$

$\angle EBG=\angle EBA+\angle ABG=2\angle ABG+2\angle GBC=2\beta$

$\because \overline{EB}=\overline{BG}=b \quad \therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得 $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle CAB=2\alpha$

$\because \overline{EA}=\overline{FA}=a \therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^\circ-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\alpha\right)}{2}=90^\circ-\alpha$$

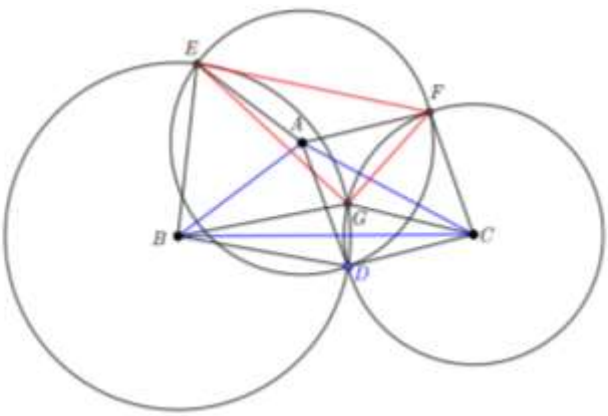
在 $\triangle EAF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB, \overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC, \overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-5 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，D 點為 $\triangle ABC$ 外任意一點，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB, \overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC, \overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。

證明：



設 $\overline{AD}=a, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$ ，

$\angle CAB=\alpha, \angle ABC=\beta, \angle BCA=\gamma$

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b, \overline{CD}=\overline{CG}=c$

$\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形

$\angle GBC=\angle DBC, \angle GCB=\angle DCB$

同理可證$\angle EAB=\angle DAB, \angle EBA=\angle DBA, \angle ACD=\angle ACF, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle EBA=\angle DBA=\angle ABG+\angle GBC+\angle DBC=\angle ABG+2\angle GBC$

$\angle EBG=\angle EBA+\angle ABG=2\angle ABG+2\angle GBC=2\beta$

$\because \overline{EB}=\overline{BG}=b \therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^{\circ}-2\beta\right)}{2}=90^{\circ}-\beta$$

在$\triangle EBG$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^{\circ}-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

同理可得$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$EDF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\alpha$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a \quad \therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

$\angle EAF=360^{\circ}-EDF=360^{\circ}-2\alpha$

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(2\alpha-180^{\circ}\right)}{2}=\alpha-90^{\circ}$$

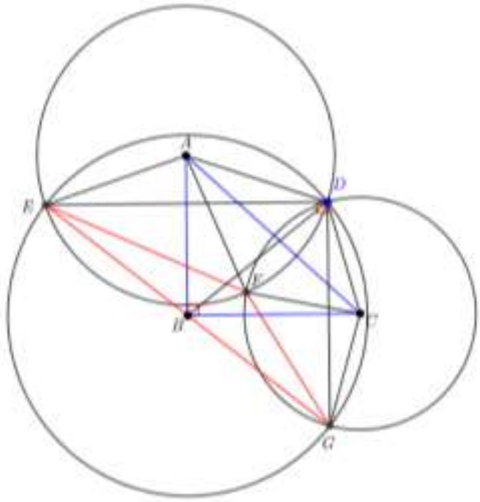
在$\triangle EAF$ 中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin\left(360^{\circ}-2\alpha\right)}=\dfrac{a}{\sin\left(\alpha-90^{\circ}\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{a\sin\left(-2\alpha\right)}{-\sin\left(90^{\circ}-\alpha\right)}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$,$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$,$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-6 若$\triangle ABC$為一直角三角形，D點為$\triangle ABC$外任意一點，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在D點的頂心三角形，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。

證明：



設$\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ，

$\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$

不失一般性，設β為直角

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b,\overline{CD}=\overline{CG}=c$

$\therefore$四邊形$BGCD$為箏形$\angle GBC=\angle DBC,\angle GCB=\angle DCB$

同理可得$\angle EAB=\angle DAB,\angle EBA=\angle DBA,\angle DCA=\angle FCA,\angle DAC=\angle FAC$

$\angle EAB=\angle DAB=\angle BAF+\angle FAC+\angle DAC=\angle BAF+2\angle FAC$

$\angle EAF=\angle EAB+\angle BAF=2\angle BAF+2\angle FAC=2\alpha$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a$ $\therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形$\angle AEF=\angle AFE$

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^\circ-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\alpha\right)}{2}=90^\circ-\alpha$$

在$\triangle EAF$ 中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

同理可得$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

$\angle EBG=\angle EBD+\angle GBD=2\angle ABD+2\angle CBD=2\angle ABC=2\beta=180^\circ$

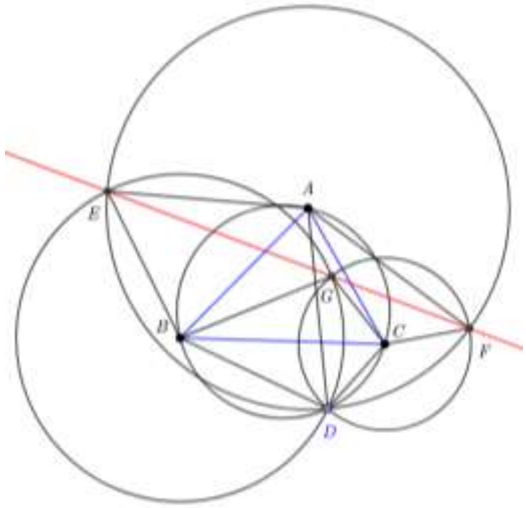
$\because \overline{BE}=\overline{BG}=b,\angle EBG=180^\circ$ $\therefore \overline{EG}$ 為圓B的直徑 , $\angle EDG=90^\circ=\angle ABC$

在$\triangle EDG$ 中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EDG}=2b\Rightarrow\overline{EG}=2b\sin\angle ABC=2\overline{BD}\sin\angle ABC$

故$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-7 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，D點為其外接圓上一動點，L_{EFG}為$\triangle ABC$在D點的頂心線，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。

證明：



設$\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ，

$\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b, \overline{CD}=\overline{CG}=c$

$\therefore$ 四邊形$BGCD$為箏形$\angle GBC=\angle DBC, \angle GCB=\angle DCB$

同理可證$\angle EAB=\angle DAB, \angle EBA=\angle DBA$

$\angle EBA=\angle DBA=\angle ABG+\angle GBC+\angle DBC=\angle ABG+2\angle GBC$

$\angle EBG=\angle EBA+\angle ABG=2\angle ABG+2\angle GBC=2\beta$

$\because \overline{EB}=\overline{BG}=b \quad \therefore \triangle EBG$為等腰三角形$\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^\circ-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\beta\right)}{2}=90^\circ-\beta$$

在$\triangle EBG$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^\circ-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

$\because \overline{AD}=\overline{AF}, \overline{CD}=\overline{CF}, \overline{AC}=\overline{AC} \therefore \triangle ACD\cong\triangle ACF\left(SSS\text{全等}\right)$, $\angle ACD=\angle ACF, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle DCB=\angle GCB=\gamma-\angle ACG$

$\angle GCF=\angle ACF+\angle ACG=\angle ACD+\angle ACG=\left(\gamma+\angle DCB\right)+\angle ACG=2\gamma$

$\because \overline{CG}=\overline{CF}=c \therefore \triangle GCF$ 為等腰三角形$\angle CGF=\angle CFG$

$$\angle CGF=\angle CFG=\frac{\left(180^\circ-\angle GCF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\gamma\right)}{2}=90^\circ-\gamma$$

在$\triangle GCF$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{GF}}{\sin\angle GCF}=\dfrac{\overline{CF}}{\sin\angle CGF}\Rightarrow\dfrac{\overline{GF}}{\sin 2\gamma}=\dfrac{c}{\sin\left(90^\circ-\gamma\right)}$

$$\Rightarrow\overline{GF}=\frac{c\sin 2\gamma}{\cos\gamma}=\frac{2c\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma}=2c\sin\gamma=2\overline{CD}\sin\angle BCA$$

$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle CAB=2\alpha$

$\because\overline{AE}=\overline{AF}=a\ \therefore\triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF=\angle AFE$

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{\left(180^\circ-\angle EAF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\alpha\right)}{2}=90^\circ-\alpha$$

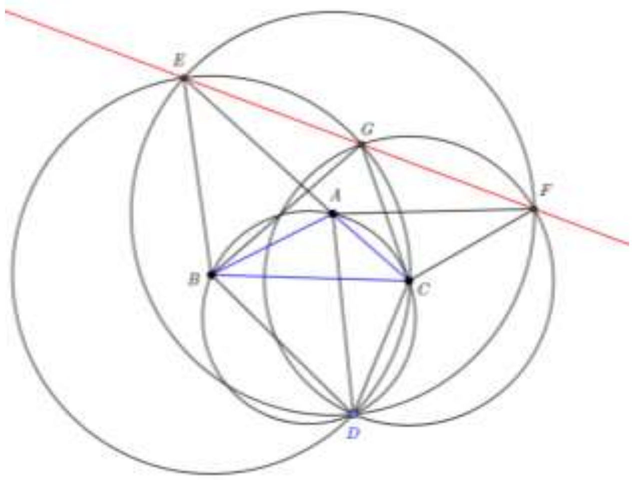
在$\triangle EAF$中，根據正弦定理$\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\sin 2\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$

$$\Rightarrow\overline{EF}=\frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2a\sin\alpha=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB,\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC,\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-8 若$\triangle ABC$為一鈍角三角形，D點為其外接圓上一動點，L_{EFG}為$\triangle ABC$在D點的頂心線，則$\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB,\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC,\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$。

證明：



設 $\overline{AD}=a,\overline{BD}=b,\overline{CD}=c$，

$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$

不失一般性，設α為鈍角

$\because\overline{BG}=\overline{BD}=b,\overline{CD}=\overline{CG}=c$

$\therefore$四邊形$BGCD$為箏形

$\angle GBC=\angle DBC,\angle GCB=\angle DCB$

同理可證$\angle EAB=\angle DAB,\angle EBA=\angle DBA$

$\angle EBA = \angle DBA = \beta + \angle DBC = \beta + \angle GBC = 2\beta + \angle ABG$

$\angle EBG = \angle EBA - \angle ABG = 2\beta$

$\because \overline{EB} = \overline{BG} = b \quad \therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG = \angle BGE$

$$\angle BEG = \angle BGE = \frac{\left(180^\circ - \angle EBG\right)}{2} = \frac{\left(180^\circ - 2\beta\right)}{2} = 90^\circ - \beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG} = \dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE} \Rightarrow \dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta} = \dfrac{b}{\sin\left(90^\circ - \beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG} = \frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta} = \frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} = 2b\sin\beta = 2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

$\because \overline{AD} = \overline{AF}, \overline{CD} = \overline{CF}, \overline{AC} = \overline{AC} \therefore \triangle ACD \cong \triangle ACF\left(SSS\text{全等}\right)$，$\angle ACD = \angle ACF, \angle DAC = \angle FAC$

$\angle DCB = \angle GCB = \gamma + \angle ACG$

$\angle GCF = \angle ACF - \angle ACG = \angle ACD - \angle ACG = \left(\gamma + \angle DCB\right) - \angle ACG = 2\gamma$

$\because \overline{CG} = \overline{CF} = c \therefore \triangle GCF$ 為等腰三角形 $\angle CGF = \angle CFG$

$$\angle CGF = \angle CFG = \frac{\left(180^\circ - \angle GCF\right)}{2} = \frac{\left(180^\circ - 2\gamma\right)}{2} = 90^\circ - \gamma$$

在 $\triangle GCF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{GF}}{\sin\angle GCF} = \dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle CFG} \Rightarrow \dfrac{\overline{GF}}{\sin 2\gamma} = \dfrac{c}{\sin\left(90^\circ - \gamma\right)}$

$$\Rightarrow \overline{GF} = \frac{c\sin 2\gamma}{\cos\gamma} = \frac{2c\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma} = 2c\sin\gamma = 2\overline{CD}\sin\angle BCA$$

$EDF = \angle EAD + \angle FAD = 2\angle BAD + 2\angle CAD = 2\angle CAB = 2\alpha$

$\because \overline{AE} = \overline{AF} = a \therefore \triangle EAF$ 為等腰三角形 $\angle AEF = \angle AFE$

$$\angle AEF = \angle AFE = \frac{180^\circ - \left(360^\circ - EDF\right)}{2} = \frac{\left(2\alpha - 180^\circ\right)}{2} = \alpha - 90^\circ$$

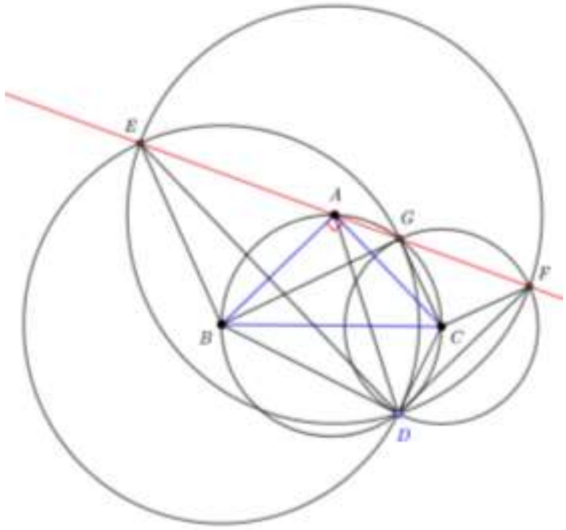
在 $\triangle EAF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EAF} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle AFE}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{EF}}{\sin\left(360^\circ - 2\alpha\right)} = \frac{a}{\sin\left(\alpha - 90^\circ\right)} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{a\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2a\sin\alpha = 2\overline{AD}\sin\angle CAB$$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

研究 1-9 若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，D 點為其外接圓上一動點，L_{EFG} 為 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心線，則 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$ 。

證明：



設 $\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ ，

$\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$

不失一般性，設 α 為直角

$\because \overline{BG}=\overline{BD}=b, \overline{CD}=\overline{CG}=c$

$\therefore$ 四邊形 $BGCD$ 為箏形

$\angle GBC=\angle DBC, \angle GCB=\angle DCB$

同理可證 $\angle EAB=\angle DAB, \angle EBA=\angle DBA$

$\angle EBA=\angle DBA=\angle ABG+\angle GBC+\angle DBC=\angle ABG+2\angle GBC$

$\angle EBG=\angle EBA+\angle ABG=2\angle ABG+2\angle GBC=2\beta$

$\because \overline{EB}=\overline{BG}=b \therefore \triangle EBG$ 為等腰三角形 $\angle BEG=\angle BGE$

$$\angle BEG=\angle BGE=\frac{\left(180^{\circ}-\angle EBG\right)}{2}=\frac{\left(180^{\circ}-2\beta\right)}{2}=90^{\circ}-\beta$$

在 $\triangle EBG$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin\angle EBG}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin\angle BGE}\Rightarrow\dfrac{\overline{EG}}{\sin 2\beta}=\dfrac{b}{\sin\left(90^{\circ}-\beta\right)}$

$$\Rightarrow \overline{EG}=\frac{b\sin 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=2b\sin\beta=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$

$\because \overline{AD}=\overline{AF}, \overline{CD}=\overline{CF}, \overline{AC}=\overline{AC} \therefore \triangle ACD\cong\triangle ACF\left(SSS\text{全等}\right)$, $\angle ACD=\angle ACF, \angle DAC=\angle FAC$

$\angle DCB=\angle GCB=\gamma+\angle ACG$

$\angle GCF=\angle ACF-\angle ACG=\angle ACD-\angle ACG=\left(\gamma+\angle DCB\right)-\angle ACG=2\gamma$

$\because \overline{CG}=\overline{CF}=c \therefore \triangle GCF$ 為等腰三角形 $\angle CGF=\angle CFG$

$$\angle CGF=\angle CFG=\frac{\left(180^\circ-\angle GCF\right)}{2}=\frac{\left(180^\circ-2\gamma\right)}{2}=90^\circ-\gamma$$

在 $\triangle GCF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{GF}}{\sin\angle GCF}=\dfrac{\overline{CG}}{\sin\angle CFG}\Rightarrow\dfrac{\overline{GF}}{\sin 2\gamma}=\dfrac{c}{\sin\left(90^\circ-\gamma\right)}$

$$\Rightarrow \overline{GF}=\frac{c\sin 2\gamma}{\cos\gamma}=\frac{2c\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma}=2c\sin\gamma=2\overline{CD}\sin\angle BCA$$

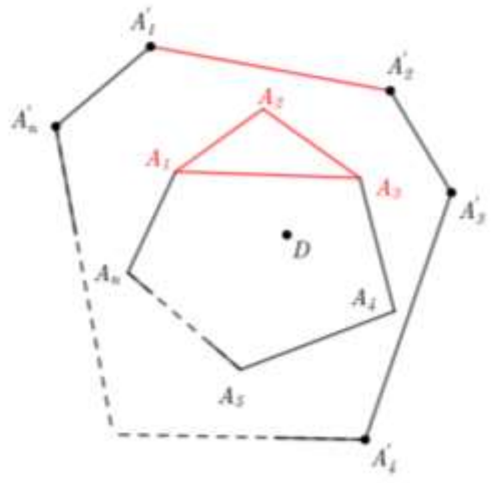
$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2\angle BAD+2\angle CAD=2\angle CAB=2\alpha=180^\circ$

$\because \overline{AE}=\overline{AF}=a, \angle EAF=180^\circ \therefore \overline{EF}$ 為圓 A 的直徑， $\angle EDF=90^\circ=\angle CAB$

在 $\triangle EDF$ 中，根據正弦定理 $\dfrac{\overline{EF}}{\sin\angle EDF}=2a\Rightarrow\overline{EF}=2a\sin\angle CAB=2\overline{AD}\sin\angle CAB$

故 $\overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$, $\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$, $\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$

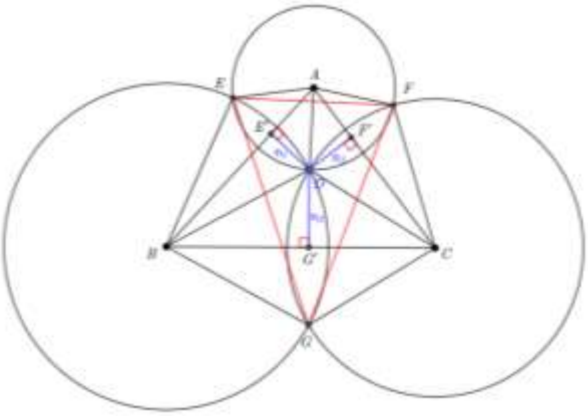
研究 1-10 平面上給定一任意 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 及一點 D ，則 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 在 D 點的頂心多邊形 $A_1'A_2'...A_n'$ 邊長滿足 $\overline{A_{k-1}'A_k'}=2\overline{A_kD}\sin\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$, $k\ge1$, $A_0=A_n$, $A_0'=A_n'$



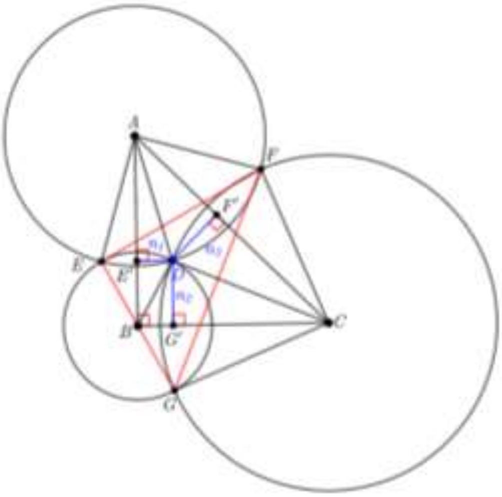
證明：

在 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 中，頂點 $A_1A_2A_3$ 可形成一三角形，而 $\overline{A_1'A_2'}$ 為 $\triangle A_1A_2A_3$ 在 D 的頂心三角形其中一邊長，滿足 $\overline{A_1'A_2'}=2\overline{A_2D}\sin\angle A_1A_2A_3$ ，同理可得 $\overline{A_2'A_3'}=2\overline{A_3D}\sin\angle A_2A_3A_4$ ... ，因此可以得到 $\overline{A_{k-1}'A_k'}=2\overline{A_kD}\sin\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$, $k\ge1$, $A_0=A_n$, $A_0'=A_n'$，根據研究 1-1 至 1-8 可知無論 $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 為銳角、鈍角或直角， D 點在 $\triangle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ 內、外或外接圓上，皆會滿足此邊長關係。

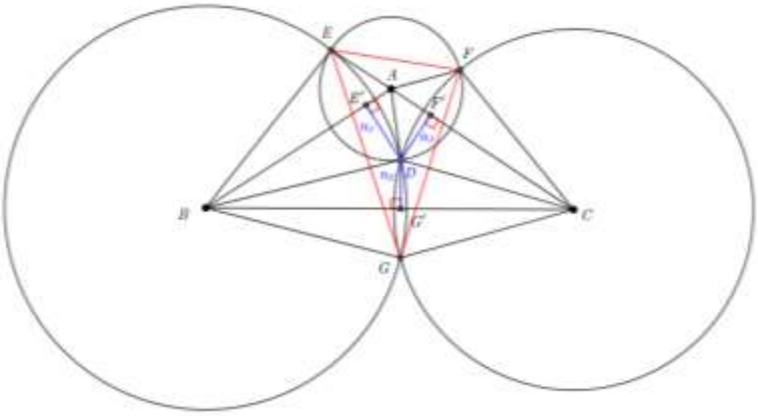
研究 2-1 若$\triangle ABC$為任意三角形，D點為$\triangle ABC$內任意一點，D點到$\triangle ABC$三邊長的垂線分別交$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$於E'、G'、F'三點，$\overline{E'D}=n_1,\overline{G'D}=n_2,\overline{F'D}=n_3$，$\angle BAC=\alpha,\angle ABC=\beta,\angle BCA=\gamma$，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在$D$點的頂心三角形，則$\triangle EFG$之面積為$2n_1n_3\sin\alpha+2n_1n_2\sin\beta+2n_2n_3\sin\gamma$



銳角三角形(圖一)



直角三角形(圖二)



鈍角三角形(圖三)

證明：

$\because \overline{BE}=\overline{BD},\overline{AE}=\overline{AD}$ $\therefore$四邊形$BEAD$為箏形，$\overline{AB}$垂直平分$\overline{ED}$

$\overline{EE'}=\overline{DE'}\Rightarrow n_1=\frac{1}{2}\overline{ED}$同理可得$n_2=\frac{1}{2}\overline{GD},n_3=\frac{1}{2}\overline{FD}$

$\because \angle BE'D=\angle BG'D=\angle CG'D=\angle CF'D=\angle AF'D=\angle AE'D=90^\circ$

$\therefore$四邊形$BE'DG'$、四邊形$CG'DF'$、四邊形$AF'DE'$為圓內接四邊形

$\angle FDE = 180^\circ - \alpha, \angle EDG = 180^\circ - \beta, \angle GDF = 180^\circ - \gamma$ (圓內接四邊形對角互補)

$\triangle EFG = \triangle FDE + \triangle EDG + \triangle GDF$

$$= \frac{1}{2}\overline{ED}\cdot\overline{FD}\sin\angle FDE + \frac{1}{2}\overline{ED}\cdot\overline{GD}\sin\angle EDG + \frac{1}{2}\overline{GD}\cdot\overline{FD}\sin\angle GDF$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2n_1\cdot 2n_3\sin\angle FDE + \frac{1}{2}\cdot 2n_1\cdot 2n_2\sin\angle EDG + \frac{1}{2}\cdot 2n_2\cdot 2n_3\sin\angle GDF$$

$$= 2n_1n_3\sin\left(180^\circ - \alpha\right) + 2n_1n_2\sin\left(180^\circ - \beta\right) + 2n_2n_3\sin\left(180^\circ - \gamma\right)$$

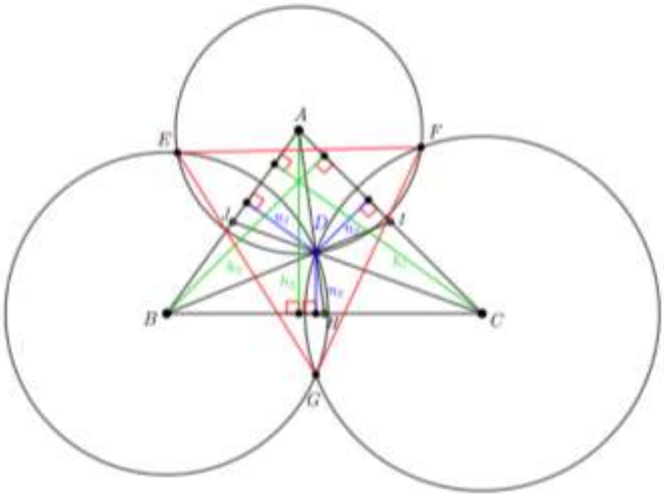
$$= 2n_1n_3\sin\alpha + 2n_1n_2\sin\beta + 2n_2n_3\sin\gamma$$

研究 2-2 若 D 點為 $\triangle ABC$ 的重心，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在重心 D 的頂心三角形，

$\angle CAB = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle BCA = \gamma$，則 $\triangle EFG$ 面積

$= \frac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2\right)$，且 $\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} \le 1$，$\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立。

證明：



設 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 邊上的高分別為 h_1、h_2、h_3，重心到三邊長 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 之垂直距離分別為 n_1 、 n_2 、 n_3 ，$\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中線分別為 $\overline{CJ}$ 、 $\overline{AH}$ 、 $\overline{BI}$ ，

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AC}\sin\gamma = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_1$

$\Rightarrow h_1 = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}}\sin\gamma$，同理可得

$$h_2 = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\overline{BC}}\sin\alpha\ ,\ h_3 = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{\overline{AC}}\sin\beta$$

$\because n_1 : h_1 = \overline{JD} : \overline{JC} = 1:3 \quad \therefore n_1 = \frac{1}{3}h_1$ 同理可得 $n_2 = \frac{1}{3}h_2$, $n_3 = \frac{1}{3}h_3$

根據研究 2-1 $\triangle EFG = 2n_1n_3\sin\alpha + 2n_1n_2\sin\beta + 2n_2n_3\sin\gamma$

$$= 2\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{3\cdot\overline{AB}}\sin\gamma\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{AC}}\sin\beta\cdot\sin\alpha + 2\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{3\cdot\overline{AB}}\sin\gamma\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{BC}}\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$+2\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{BC}}\sin\alpha\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{3\cdot\overline{AC}}\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\overline{BC}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \frac{2}{9}\cdot\overline{AC}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \frac{2}{9}\cdot\overline{AB}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$= \frac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)$$

$\triangle ABC = \dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{4R} = \dfrac{2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma}{4R} = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ (R為外接圓半徑)

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} = \frac{\frac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{9R^2}$$

$$= \frac{(2R\sin\alpha)^2+(2R\sin\beta)^2+(2R\sin\gamma)^2}{9R^2}$$

$$= \frac{4R^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)}{9R^2} = \frac{4}{9}\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\frac{1-\cos 2\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\right]$$

則根據三角形內角的嵌入不等式，對任意實數 x 、 y 、 z 恆有

$$x^2+y^2+z^2+2(-1)^k\left(xy\cos 2\alpha+yz\cos 2\beta+zx\cos 2\gamma\right)\geq 0$$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow 2\alpha+2\beta+2\gamma=2\pi$, $k=2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(xy\cos 2\alpha+yz\cos 2\beta+zx\cos 2\gamma\right)\geq 0$

取 $x=y=z=1$ 代入不等式得

$$3+2\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\geq 0 \Rightarrow \cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\geq -\frac{3}{2}$$

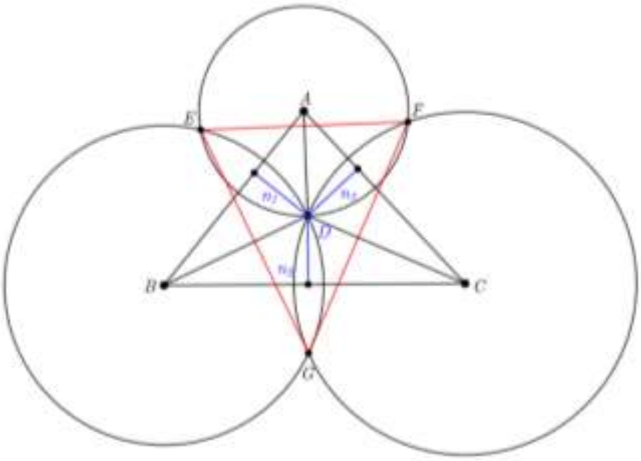
$$\Rightarrow -\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\leq\frac{3}{2} \Rightarrow 3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\leq\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}\left[3-\left(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\right)\right] \le 1 \Rightarrow \frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} \le 1$$

等號在 $x:y:z=\sin\beta:\sin\gamma:\sin\alpha=1:1:1$時成立，此時 $\alpha=\beta=\gamma=60^{\circ}$，$\triangle ABC$ 為正三角形。

> **研究 2-3** 若 D 點為 $\triangle ABC$ 的內心，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在內心 D 的頂心三角形，
> $\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$，則 $\triangle EFG$ 面積 $=2r^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$，$r$ 為 $\triangle ABC$ 內接圓半徑，且 $\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\le 1$，$\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立。

證明：



設 $\overline{AD}=a,\overline{BD}=b,\overline{CD}=c$，內心到三邊長

$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 之垂直距離分別為 n_1、n_2、n_3

根據研究 2-1

$\triangle EFG=2n_1n_3\sin\gamma+2n_1n_2\sin\alpha+2n_2n_3\sin\beta$

$\because D$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心 $\therefore n_1=n_2=n_3=r$

$\triangle EFG=2r^2\sin\alpha+2r^2\sin\beta+2r^2\sin\gamma$

$=2r^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

$\triangle ABC=r\cdot S\ ,(S=\frac{\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB}}{2})$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{2r^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)}{r\cdot S}=\frac{2r\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)}{S}=\frac{4r\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)}{\left(\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB}\right)}$$

$\because \overline{BC}=2R\sin\alpha,\overline{AC}=2R\sin\beta,\overline{AB}=2\mathrm{R}\sin\gamma$

$\therefore \overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB}=2R\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{4r\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)}{2R\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)}=\frac{2r}{R}$$

根據 *Erdos-Mordell Inequality* $a+b+c\ge 2\left(n_1+n_2+n_3\right)\Rightarrow a+b+c\ge 6r$

當 $\triangle ABC$ 為正三角形時等號成立，因此 $a=b=c=R$

$a+b+c\ge 2\left(n_1+n_2+n_3\right)\Rightarrow 3R\ge 6r\Rightarrow \frac{2r}{R}\le 1$，得 $\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{2r}{R}\le 1$

研究 2-4 若$\triangle ABC$為一銳角三角形，D點為$\triangle ABC$的垂心，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在垂心D的頂心三角形，$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$，則$\triangle EFG$面積$=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$ (R為$\triangle ABC$外接圓半徑)，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}\le 1$，當$\triangle ABC$為正三角形時等號成立。

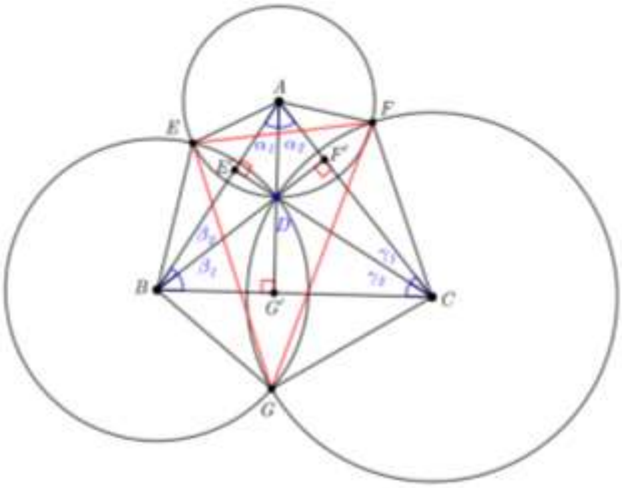
證明：

設,$\overline{AD}=a,\overline{BD}=b,\overline{CD}=c$ ，$\angle DAB=\alpha_1,\angle DAC=\alpha_2,\angle DBC=\beta_1,\angle DBA=\beta_2,\angle DCA=\gamma_1$

$\angle DCB=\gamma_2$，垂心到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$垂足為E'、G'、F'。

$\because \angle EBA=\angle DBA=\beta_2$ (四邊形$EADB$為箏形)

$\therefore \angle EBD=2\angle EGD=2\beta_2$ (圓周角) $\angle EGD=\beta_2=\gamma_1$ (D點為垂心)



同理可得$\angle FGD=\gamma_1=\beta_2$

$\angle EGF=\angle EGD+\angle FGD=\angle ABD+\angle ACD$

$=2\beta_2=2\left(90^\circ-\alpha\right)=180^\circ-2\alpha$

根據引理 2-1，$b=\dfrac{\overline{AB}\cdot\cos\beta}{\sin\gamma}$, $c=\dfrac{\overline{AC}\cdot\cos\gamma}{\sin\beta}$

$\overline{EG}=2b\sin\beta=2\dfrac{\overline{AB}\cdot\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot\sin\beta$

$=2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\dfrac{\overline{AB}}{\sin\gamma}=2R\sin 2\beta\left(\dfrac{\overline{AB}}{\sin\gamma}=2R\right)$

同理可得$\overline{GF}=2R\sin 2\gamma$

$$\triangle EFG=\frac{1}{2}\cdot\overline{EG}\cdot\overline{GF}\sin\angle EGF=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin 2\beta\cdot 2R\sin 2\gamma\sin\left(180^\circ-2\alpha\right)=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin\beta\cos\beta\cdot 2\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

當$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$且$0^\circ<\alpha$、$\beta$、$\gamma<90^\circ$時，根據算幾不等式

$\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\ge\sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ，$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$時

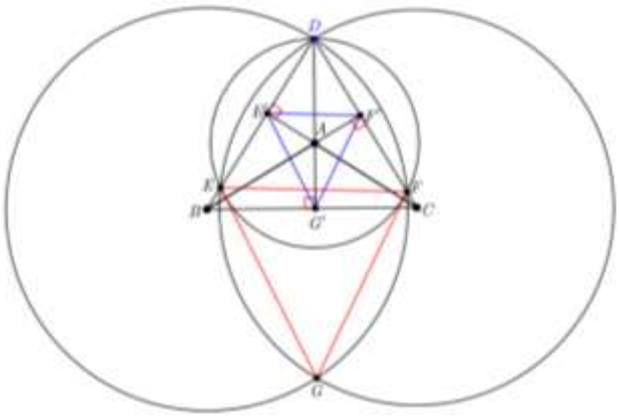
$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$有最大值$\dfrac{1}{8}$，即$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le\dfrac{1}{8}$

故$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le 1$，當$\triangle ABC$為正三角形時等號成立。

研究 2-5 若$\triangle ABC$為一鈍角三角形，D點為$\triangle ABC$的垂心，$\triangle EFG$為$\triangle ABC$在垂心D的頂心三角形，$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$，則$\triangle EFG$面積$=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC$，且$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}<8$。

證明：

設垂心到三邊長$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$之延長線的垂足為F',G',E'，不失一般性，設α為鈍角



$\because \angle AE'B=\angle AG'B=90^\circ$

$\therefore A, G', B, E'$四點共圓，且此圓直徑為$\overline{AB}$

同理可得A, F', C, G'四點共圓，且此圓直徑為$\overline{AC}$

$\because \overline{DE'}:\overline{DE}=1:2,\ \overline{DF'}:\overline{DF}=1:2, \angle E'DF'=\angle EDF$

$\therefore \triangle E'DF' \sim \triangle EDF$(SAS相似)，且$\overline{E'F'}:\overline{EF}=1:2$

同理可證$\overline{E'G'}:\overline{EG}=1:2,\ \overline{F'G'}:\overline{FG}=1:2$

$\because \overline{E'F'}:\overline{EF}=1:2,\ \overline{E'G'}:\overline{EG}=1:2,\ \overline{F'G'}:\overline{FG}=1:2$,

$\therefore \triangle E'F'G' \sim \triangle EFG\left(SSS相似\right)$，且$\triangle E'F'G':\triangle EFG=1:4$

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \Rightarrow \beta+\gamma=180^\circ-\alpha$

在$\triangle BCE'$中，$\angle E'=90^\circ \Rightarrow \angle ABE'=90^\circ-\left(\beta+\gamma\right)=90^\circ-\left(180^\circ-\alpha\right)=\alpha-90^\circ$

同理可得$\angle ACF'=\alpha-90^\circ$

$\because \angle ABE'=\angle AG'E'$　($AG'BE'$四點共圓,所對的弧相同)

$\angle ACF'=\angle AG'F'$　($AF'CG'$四點共圓,所對的弧相同)

$\therefore \angle E'G'F'=\angle E'G'A+\angle F'G'A=\angle ABE'+\angle ACF'=\left(\alpha-90^\circ\right)+\left(\alpha-90^\circ\right)=2\alpha-180^\circ$

$$\frac{\overline{G'E'}}{\sin\angle E'BC}=\overline{AB}\Rightarrow \overline{G'E'}=\overline{AB}\cdot\sin\angle E'BC=\overline{AB}\cdot\sin\left(90^\circ-\gamma\right)=\overline{AB}\cdot\cos\gamma$$

$$\frac{\overline{G'F'}}{\sin\angle F'CB}=\overline{AC}\Rightarrow \overline{G'F'}=\overline{AC}\cdot\sin\angle F'CB=\overline{AC}\cdot\sin\left(90^\circ-\beta\right)=\overline{AC}\cdot\cos\beta$$

$$\triangle E'F'G'=\frac{1}{2}\overline{G'E'}\cdot\overline{G'F'}\sin\angle E'G'F'=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin\left(2\alpha-180^\circ\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin\left(180^\circ-2\alpha\right)=-\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin 2\alpha$$

$$=-\overline{AB}\cdot\cos\gamma\cdot\overline{AC}\cdot\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha=-\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha$$

$$=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\alpha\right)=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\triangle ABC$$

$$\because\triangle E'F'G':\triangle EFG=1:4\ \therefore\triangle EFG=4\triangle E'F'G'=-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\triangle ABC=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC$$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\frac{8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC}{\triangle ABC}=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|$$

$$\because -1<\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<0\Rightarrow 0<\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|<1\Rightarrow 0<8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|<8$$

$$\therefore\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|<8$$

當 α 趨近到 180° 時， $\lim\limits_{\alpha\to\pi-}\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\lim\limits_{\alpha\to\pi-}\dfrac{8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC}{\triangle ABC}=8$ ，

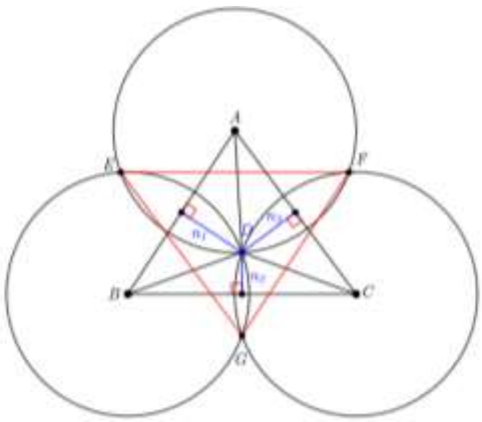
此時 $\triangle ABC$ 趨近於一直線，故 $\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}<8$

當 α 趨近到 90° 時， $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{8\left|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right|\triangle ABC}{\triangle ABC}=0$ ，

此時 $\triangle ABC$ 趨近於直角三角形，故 $\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}>0$

> 研究 2-6 若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形， D 點為 $\triangle ABC$ 的外心， $\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在外心 D 的頂心三角形， $\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$ ，則 $\triangle EFG$ 面積 $=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)，且 $\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}=1$ 。

證明：



設 $\overline{AD}=a,\overline{BD}=b,\overline{CD}=c$ ，外心到三邊長 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 之垂直距離分別為 n_1 、 n_2 、 n_3

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot n_1=\frac{1}{2}ab\sin\angle BDA$$

$$\Rightarrow n_1=\frac{ab}{AB}\sin\angle BDA=\frac{R^2}{AB}\sin 2\gamma$$

$$= R^2 \cdot \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\overline{AB}} = R^2 \cdot \frac{\sin\gamma}{\overline{AB}} \cdot 2\cos\gamma = R^2 \cdot \frac{1}{2R} \cdot 2\cos\gamma = R\cos\gamma$$

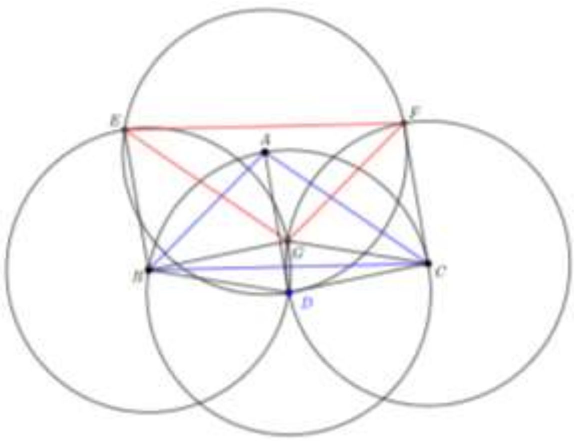
同理可得 $n_2 = R\cos\alpha,\ n_3 = R\cos\beta$

根據研究 2-1

$$\begin{aligned}
\triangle EFG &= 2n_1n_3\sin\alpha + 2n_1n_2\sin\beta + 2n_2n_3\sin\gamma \\
&= 2R\cos\gamma \cdot R\cos\beta \cdot \sin\alpha + 2R\cos\gamma \cdot R\cos\alpha \cdot \sin\beta + 2R\cos\alpha \cdot R\cos\beta \cdot \sin\gamma \\
&= 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\alpha + 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\beta + 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\gamma \\
&= 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma) \\
&= 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma) \\
&= 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma
\end{aligned}$$

$$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} = \frac{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = 1$$

研究 2-7 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，D 點為 $\triangle ABC$ 的外心，$\triangle EFG$ 為 $\triangle ABC$ 在外心 D 的頂心三角形，$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = R$（$R$ 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑），$\angle CAB = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle BCA = \gamma$，$\triangle EFG$ 面積 $= 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$，且 $\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} = 1$。



證明：

根據研究 1-5，$\angle BEG = \angle BGE = \frac{(180^\circ - \angle EBG)}{2} = \frac{(180^\circ - 2\beta)}{2} = 90^\circ - \beta$

$$\angle CFG = \angle CGF = \frac{(180^\circ - \angle FCG)}{2} = \frac{(180^\circ - 2\gamma)}{2} = 90^\circ - \gamma$$

$\because \overline{BG} = \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{CG}$ $\therefore$ 四邊形 $BDCG$ 為菱形 $\angle BDC = \angle BGC$

$\angle BDC + 2\angle BAC = 360^\circ \Rightarrow \angle BGC + 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow \angle BGC = 360^\circ - 2\alpha$

$\angle EGF = 360^\circ - \angle BGE - \angle CGF - \angle BGC \Rightarrow \angle EGF = 360^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) - (360^\circ - 2\alpha)$

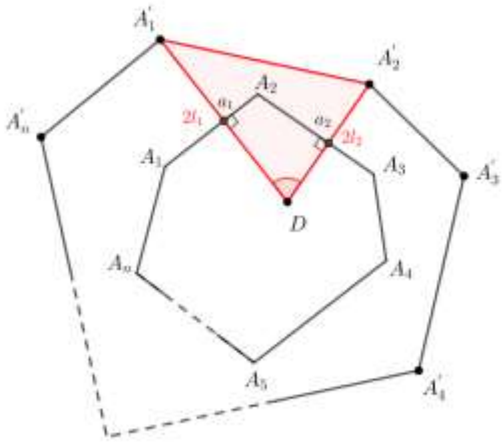
$\Rightarrow \angle EGF = \beta + \gamma + 2\alpha - 180^\circ \Rightarrow \angle EGF = \alpha$

$\overline{EG} = 2\overline{BD}\sin\beta = 2R\sin\beta$, $\overline{GF} = 2\overline{CD}\sin\gamma = 2R\sin\gamma$ (R為外接圓半徑)

$\triangle EFG = \frac{1}{2}\cdot\overline{EG}\cdot\overline{FG}\sin\angle EGF = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma\sin\alpha = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$\frac{\triangle EFG}{\triangle ABC} = \frac{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = 1$

研究 2-8 若多邊形 $A_1A_2...A_n$ 為一任意多邊形，D點為多邊形 $A_1A_2...A_n$ 內任意一點，D點到多邊形 $A_1A_2...A_n$ 邊長 $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,..., $\overline{A_nA_1}$ 之垂直距離分別為 l_1 , l_2 , ... , l_n ，則多邊形 $A_1A_2...A_n$ 在 D 點的頂心多邊形 $A_1'A_2'...A_n'$ 面積為 $2\sum_{k=1}^{n} l_k l_{k+1}\sin\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ ，其中 $l_{n+1} = l_1$, $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$ 。



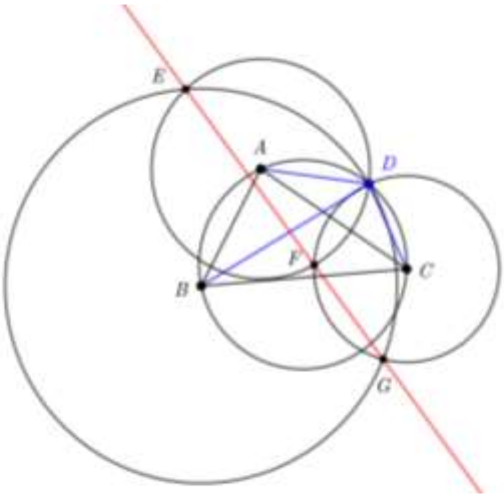
證明：

頂心多邊形 $A_1'A_2'...A_n' = \triangle A_1'A_2'D + \triangle A_2'A_3'D + \cdots + \triangle A_n'A_1'D = \sum_{k=1}^{n}\triangle A_k'A_{k+1}'D$ ，

$\triangle A_k'A_{k+1}'D = \frac{1}{2}(2l_k)(2l_{k+1})\sin\angle A_k'DA_{k+1}' = 2l_kl_{k+1}\sin\angle A_k'DA_{k+1}'$ ，設 $\overline{A_k'D}$ 交 $\overline{A_kA_{k+1}}$ 於點 a_k ，因 $\angle A_{k+1}a_kD = \angle A_{k+1}a_{k+1}D = 90^\circ$，所以四邊形 $a_kA_{k+1}a_{k+1}D$ 為圓內接四邊形，$\angle a_kA_{k+1}a_{k+1}$ 與 $\angle a_kDa_{k+1}$ 互補， $\triangle A_k'A_{k+1}'D = 2l_kl_{k+1}\sin\angle A_k'DA_{k+1}' = 2l_kl_{k+1}\sin(180^\circ - \angle A_kA_{k+1}A_{k+2}) = 2l_kl_{k+1}\sin\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ ，因此

頂心多邊形 $A_1'A_2'...A_n'$ 面積 $= 2\sum_{k=1}^{n} l_kl_{k+1}\sin\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ ，其中 $l_{n+1} = l_1$, $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$ 。

研究 3-1 若 $\triangle ABC$ 為一任意三角形，D 點在 $\triangle ABC$ 的外接圓上時，則 $\triangle ABC$ 在 D 點的頂心三角形會退化為一直線，即三頂點三點共線。



證明：

設 $\overline{AD}=a$，$\overline{BD}=b$，$\overline{CD}=c$，$\angle BAC=\alpha, \angle ABC=\beta, \angle ACB=\gamma$

根據研究 1，頂心三角形三邊長 $\overline{EF}$ 、 $\overline{EG}$ 、 $\overline{GF}$ 為 $2a\sin\alpha,\ 2b\sin\beta,\ 2c\sin\gamma$，

若 $\triangle EFG$ 兩邊相加等於第三邊，則 E 、 F 、 G 三點共線

$\because \dfrac{\overline{AB}}{\sin\gamma}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2R$ (正弦定理)，R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑

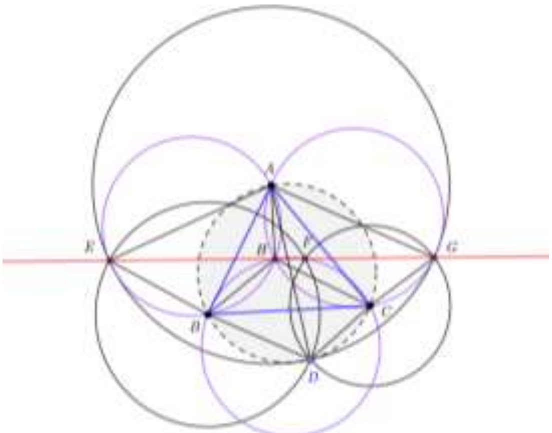
$\therefore \overline{AB}=2R\sin\gamma,\ \overline{BC}=2R\sin\alpha,\ \overline{AC}=2R\sin\beta$

$\because \overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}=\overline{BD}\cdot\overline{AC}$ (托勒密定理)

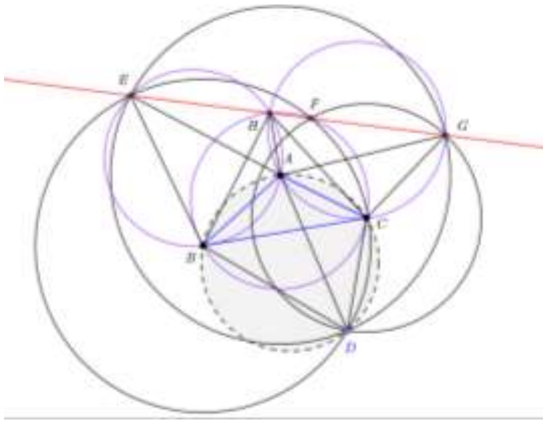
$\therefore a\cdot 2R\sin\alpha+c\cdot 2R\sin\gamma=b\cdot 2R\sin\beta \Rightarrow 2a\sin\alpha+2c\sin\gamma=2b\sin\beta$

$\because 2a\sin\alpha+2c\sin\gamma=2b\sin\beta \Rightarrow \overline{EF}+\overline{GF}=\overline{EG}$ $\quad\therefore E$ 、 F 、 G 三點共線

研究 3-2 若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點為$\triangle ABC$之外接圓上一動點，則$\triangle ABC$在D點的頂心線必通過$\triangle ABC$之垂心。



圖(一)



圖(二)

證明：

設$\triangle ABC$之垂心為H點，$\overline{AD}=a$，$\overline{BD}=b$，$\overline{CD}=c$，$\angle CAB=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle BCA=\gamma$

根據引理 1，三頂點E、F、G之軌跡交於垂心H (如圖一)，所以垂心在三頂點之軌跡（紫色）圓周上，在四邊形$ABDC$中，利用托勒密定理

$$\overline{AB}\cdot c+\overline{AC}\cdot b=\overline{BC}\cdot a\Rightarrow 2R\sin\gamma\cdot c+2R\sin\beta\cdot b=2R\sin\alpha\cdot a\Rightarrow c\sin\gamma+b\sin\beta=a\sin\alpha$$

在四邊形$AEBH$中，$\overline{AH}\cdot\overline{EB}+\overline{BH}\cdot\overline{EA}=\overline{AB}\cdot\overline{EH}\Rightarrow\overline{AH}\cdot b+\overline{BH}\cdot a=\overline{AB}\cdot\overline{EH}$

根據引理 2-1，$\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma},\ \overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}$

$$\overline{AH}\cdot b+\overline{BH}\cdot a=\overline{AB}\cdot\overline{EH}\Rightarrow\overline{AB}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot b+\overline{AB}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot a=\overline{AB}\cdot\overline{EH}$$

$$\Rightarrow\overline{EH}=b\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}+a\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

如圖二，若$\triangle ABC$為鈍角三角形時$\overline{AH}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{BH}\cdot\overline{AE}$

$$\Rightarrow\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{BH}\cdot\overline{AE}-\overline{AH}\cdot\overline{BE}$$

根據引理 2-2 $\overline{BH}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma},\overline{AH}=-\overline{AB}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$

$$\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{BH}\cdot\overline{AE}-\overline{AH}\cdot\overline{BE}\Rightarrow\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\overline{AB}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot a+\overline{AB}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot b$$

$$\Rightarrow\overline{EH}=a\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\cdot+b\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

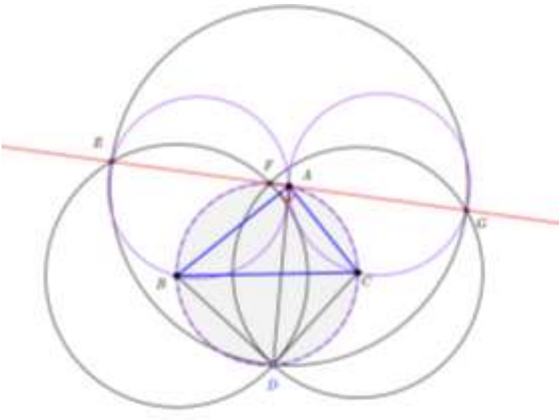
同理可得$\overline{GH}=c\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}+a\cdot\dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}$

$$
\begin{aligned}
\overline{EH}+\overline{GH}&=b\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}+a\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}+c\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+a\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}\\
&=\frac{b\cdot\cos\alpha\sin\beta+a\cdot\cos\beta\sin\beta+c\cdot\cos\alpha\sin\gamma+a\cdot\cos\gamma\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{(b\cdot\sin\beta+c\cdot\sin\gamma)\cos\alpha+a\cdot\cos\beta\sin\beta+a\cdot\cos\gamma\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{a\cdot\sin\alpha\cos\alpha+a\cdot\cos\beta\sin\beta+a\cdot\cos\gamma\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\\
&=\frac{a}{\sin\beta\sin\gamma}(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma)\\
&=\frac{a}{\sin\beta\sin\gamma}\left(\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin2\beta+\frac{1}{2}\sin2\gamma\right)\\
&=\frac{a}{\sin\beta\sin\gamma}\left\{\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\left[2\sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)\right]\right\}\\
&=\frac{a}{\sin\beta\sin\gamma}\left[\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos(\gamma-\beta)\right]\\
&=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\left[\cos(\gamma-\beta)-\cos(\gamma+\beta)\right]\\
&=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\cdot2\sin\beta\sin\gamma=2a\sin\alpha=\overline{EG}
\end{aligned}
$$

$\because\ \overline{EH}+\overline{HG}=\overline{EG}\ \therefore E$ 、 H 、 G 三點共線

若$\triangle ABC$為直角三角形，不失一般性，設α為直角(如圖三)

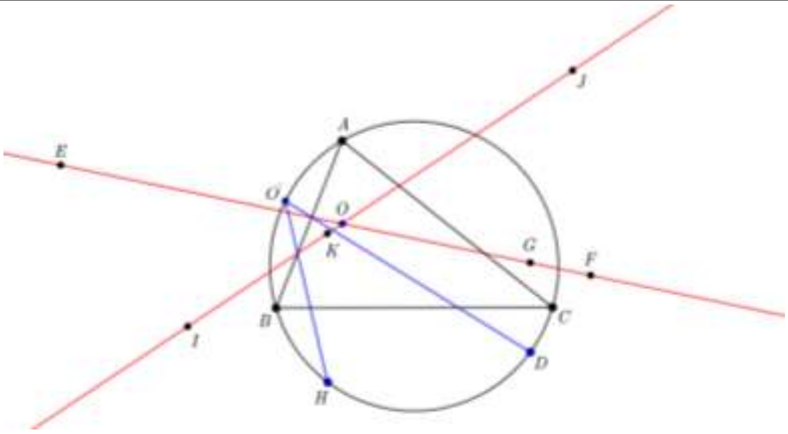
$\overline{EG}=2a\sin\alpha=2a\sin90^{\circ}=2a$ (圓A直徑)，所以$\overline{EG}$通過圓心A，又因$\triangle ABC$垂心與頂點A重合，故直線EG通過$\triangle ABC$的垂心。



圖(三)

故$\triangle ABC$在D點的頂心線必通過$\triangle ABC$的垂心

研究 3-3 若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點、H點為$\triangle ABC$之外接圓上任意兩點，L_{EFG}為$\triangle ABC$在D點的頂心線，L_{IJK}為$\triangle ABC$在H點的頂心線，則L_{EFG}與L_{IJK}的夾角為$\frac{DH}{2}$



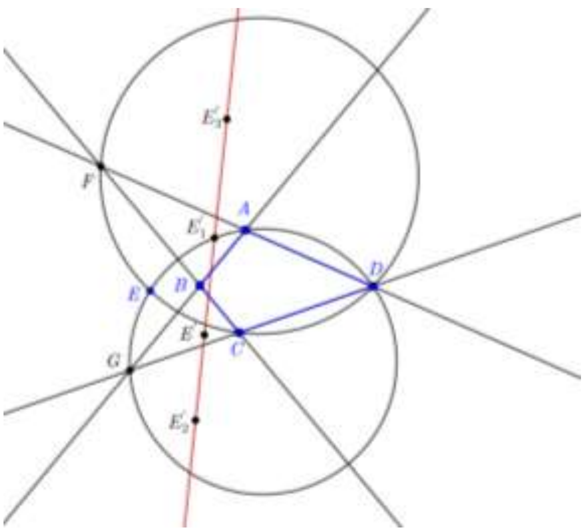
證明：

設$\triangle ABC$之垂心為O，垂心O以$\overline{AB}$之延長線為對稱軸作對稱點O'，因為D點與E點，H點與I點，O點與O'點對稱於$\overline{AB}$之延長線，故$\angle EOI = \angle DO'H$，又因$\angle DO'H = \frac{DH}{2}$，故$L_{EFG}$與$L_{IJK}$之夾角為$\frac{DH}{2}$

研究 3-4 平面上給定為一任兩邊皆不平行的四邊形$ABCD$及一點E，當E點為**密克點** **(** *Miquel Point* **)** 時，四邊形$ABCD$在E點的頂心四邊形四頂點四點共線。

證明：

設$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AD}$交於$F$點，$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{DC}$交於$G$點，當$E$點為**密克點**時，$E$點在$\triangle DCF$的外接圓上，所以$E$點以邊長$\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$為對稱軸做對稱點$E_1', E_2', E_3'$三點共線，$E$點在$\triangle ADG$外接圓上，$E$點以邊長$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$為對稱軸做對稱點$E', E_2', E_3'$三點共線，故四邊形$ABCD$在$E$點的頂心四邊形四頂點$E'E_1'E_2'E_3'$四點共線。



伍、 研究結果

研究 1 結果　給定$\triangle ABC$及三角形內或外一點D，分別以A、B、C三頂點為圓心，$\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$為半徑畫圓，再以三交點E、G、F為頂點作$\triangle EFG$，

$$\text{則 } \overline{EF}=2\overline{AD}\sin\angle CAB$$
$$\overline{EG}=2\overline{BD}\sin\angle ABC$$
$$\overline{GF}=2\overline{CD}\sin\angle BCA$$

推廣至多邊形：平面上給定一任意n邊形$A_1A_2...A_n$及一點D，則n邊形$A_1A_2...A_n$在D點的頂心多邊形$A_1'A_2'...A_n'$邊長滿足$\overline{A_{k-1}'A_k'}=2\overline{A_kD}\sin\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$, $k\ge 1$, $A_0=A_n$, $A_0'=A_n'$

研究 2 結果

D點	$\triangle EFG$面積	$\dfrac{\triangle EFG}{\triangle ABC}$
重心	$=\dfrac{2}{9}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2\right)$	≤ 1
內心	$2r^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$	≤ 1
垂心(銳角三角形)	$2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$	≤ 1
垂心(鈍角三角形)	$8\left\|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right\|\triangle ABC$	<8
外心	$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	1

推廣至多邊形：若多邊形$A_1A_2...A_n$為一任意多邊形，D點為多邊形$A_1A_2...A_n$內任意一點，D點到多邊形$A_1A_2...A_n$邊長$\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,..., $\overline{A_nA_1}$之垂直距離分別為l_1 , l_2 , ... , l_n，則多邊形$A_1A_2...A_n$在D點的頂心多邊形$A_1'A_2'...A_n'$面積為$2\sum_{k=1}^{n}l_kl_{k+1}\sin\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$，

其中$l_{n+1}=l_1$, $A_{n+1}=A_1$, $A_{n+2}=A_2$。

研究 3 結果　一、若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點在$\triangle ABC$的外接圓上時，則$\triangle ABC$在D點的頂心三角形會退化為一直線，即三頂點三點共線。

二、若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點在其外接圓上，則$\triangle ABC$在D點的頂心線通過$\triangle ABC$的垂心。

三、若$\triangle ABC$為一任意三角形，D點、H點為$\triangle ABC$之外接圓上任意兩點，L_{EFG}為$\triangle ABC$在D點的頂心線，L_{IJK}為$\triangle ABC$在H點的頂心線，則L_{EFG}與L_{IJK}的夾角為$\dfrac{DH}{2}$

推廣至四邊形：平面上給定為一任兩邊皆不平行的四邊形$ABCD$及一點E，當E點為**密克點**(*Miquel Point*)時，四邊形$ABCD$在E點的頂心四邊形四頂點四點共線。

陸、　未來展望與參考資料

一、未來展望

(一)由此作品可發現當D點為原$\triangle ABC$內的特定點時，則$\triangle ABC$在D的頂心三角形面積與原$\triangle ABC$面積比≤ 1，且等號成立時滿足條件 1.$\triangle ABC$為正三角形，或是，2.D點在$\triangle ABC$之外心。我們利用程式 Geogebra 觀察到，當D點為$\triangle ABC$內任意一點時，所形成的頂心三角形面積比恆≤ 1，當D點為$\triangle ABC$的外心時，面積比$=1$。因此我們想進一步探討當D點為$\triangle ABC$內任意一點，所形成的頂心三角形與原$\triangle ABC$面積比是否恆≤ 1。

(二)我們希望能深入研究頂心多邊形的相關性質，並探討面積比例問題。

二、參考資料

1. 李政豐、朱啟台、陳昭地(103 年 4 月)。三角形三個最大值問題的迴響(電子版)。科學教育月刊
2. 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會換心手術— 從三角形出發探討 N 邊形多心性質之研究
3. Shanhe Wu, Lokenath Debnath.Generalization of the Wolstenholme cyclic inequality and its application. Computers & Mathematics with Applications. 2007 年 1 月,53(1): 104 – 114
4. Bankoff, L. (1958). An Elementary Proof of the Erdos-Mordell Theorem.*The American Mathematical Monthly,65*(7), 521-521. doi:10.2307/2308580
5. 高中數學課本第三冊（2019）。第一章：三角。南一書局。
6. 高中數學課本第三冊（2019）。第三章：平面向量。南一書局。

【評語】010019

本作品探討頂心三角形得到一系列和頂心三角形有關的結果並得到頂心線的一些相關性質. 這些都是有趣的結果，研究精神佳且有新意. 可惜的是相關幾何結論有些雜亂，有許多結果但都不夠深入。如果作者能聚焦處理某部分的題材，如頂心線等，在特定面向加強研究的深度，整個作品會提高一個層次。