2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010018**

參展科別　數學

作品名稱　探討電梯等待時間的期望值

得獎獎項

就讀學校　臺北市立永春高級中學

指導教師　蔡春風

作者姓名　曾培鈞

關鍵詞　<u>電梯等待時間、期望值、函數積分</u>

作者簡介

我是曾培鈞，就讀臺北市立永春高中二年級數理資優班。數學是我較擅長的科目，於是就選擇進行數學專題。我是個較內斂的人，喜歡靜靜地思考、研究，也因為這樣的過程，讓我發現自己是真的喜歡數學，尤其使用數學方法解釋生活現象、解決生活問題，更是我的樂趣。雖然做專題的過程非常辛苦，尤其花費許多時間，連周末與假日也不例外，但是我不會忘記我的初衷，以及發自內心對數學的喜愛，持續努力下去。

摘要

本研究從電梯的運行方式，電梯的加速、等速、減速運動的時間、電梯開關門的時間，透過物理運動學的角度計算電梯等待時間的期望值。有別於一般從排隊理論的角度切入，本研究將電梯視為主體，以函數及微積分作為工具，分析電梯行駛路徑，以及乘客所需的等待時間。接著，研究者討論有一個外人同時要搭電梯的情況，將電梯運行的方式分類討論，以貼近現實生活。研究者希望透過本研究，能使乘客及管理者明白等待電梯所需的時間，進而作為是否增設電梯或限定樓層停靠的依據。應用本研究的結果，可分析百貨公司顧客等待電梯的時間，以提升顧客的購物體驗，或是在醫院中，分析急需使用電梯病患的等待時間，以增加可用的救援時間。

Abstract

In this study, the researcher explored the expected value of waiting time for elevator boarding. The researcher functionalized the traveling route of an elevator, analyzed the passengers' waiting time in Calculus instead of traditional aspect of Queuing Theory. The researcher began the investigation with a sole passenger, and then discuss the considerations with multiple passengers. Suppose there are passengers randomly spread at some floors and the probability wherever they aim to go is equal. The result contributes on maximizing the benefits of the elevator operation. For example, in department stores, managers can reduce customers' waiting time to improve their shopping experience. In hospitals, managers can decrease the waiting time of patients in urgent need, which could be significant on increasing rescue time.

壹、研究動機

某天等電梯時，覺得等了很久，於是我開始思考要如何縮短等電梯的時間，但是在這之前，我們必須先了解乘客等待時間的期望值。查閱相關文獻後，發現關於等候時間的研究大多是從「排隊理論」著手，但我認為電梯的運行是一個**連續的過程**，且電梯的加減速性能、其他乘客的存在及目的地等因素都會影響等待時間的期望值，因此希望從**函數積分**的觀點來探討它，以求更貼近實際生活。

貳、研究目的

一、將電梯的行駛規則函數化，求出電梯行駛時間。

二、探討有另一個外人在任意樓層先按電梯，乘客在f樓等待時間的期望值。

三、代入實際數據，計算學校電梯等待時間的期望值。

參、研究方法

一、研究器材

電腦、手機、紙、筆、Word、Excel、CodeBlocks、phyphox。

二、名詞定義

（一）建築樓層及電梯性能

1. 建築有F_c樓。

2. 每層樓高h_c公尺。

3. 電梯速率為每秒v_c公尺。

4. 電梯加速和減速的加速度量值為a_c公尺/每秒平方。

5. 電梯開始開門到結束關門的時間為w_c秒。

6. 電梯初始時停在每一層的機率相等。

（二）乘客及外人

1. 乘客位於f樓等電梯。

2. 乘客將要前往f'樓。

3. 外人為乘客以外且想使用或正在使用電梯的人。

4. 第i位外人位於f_i樓等電梯。

5. 第i位外人將要前往f_i'樓。

6. 外人想向上或向下的機率相等。

（三）電梯的運行過程

1. 電梯初始時停在f_0樓。

2. a_i表示電梯第i趟行駛所到的樓層。

3. 電梯運行時時間對速度的函數為$v(t)$。

4. 電梯運行時時間對路徑長的函數為$l(t)$。

5. 在等速行駛階段由$\overline{A_{3n-2}A_{3n-1}}$斜直線下的面積為$\Gamma_n(n \in \mathbb{N})$。

6. 在加減速行駛階段由$\overline{A_{3n-1}A_{3n+1}}$和$t$軸構成的梯形面積為$\Delta_n(n \in \mathbb{N})$。

三、研究流程

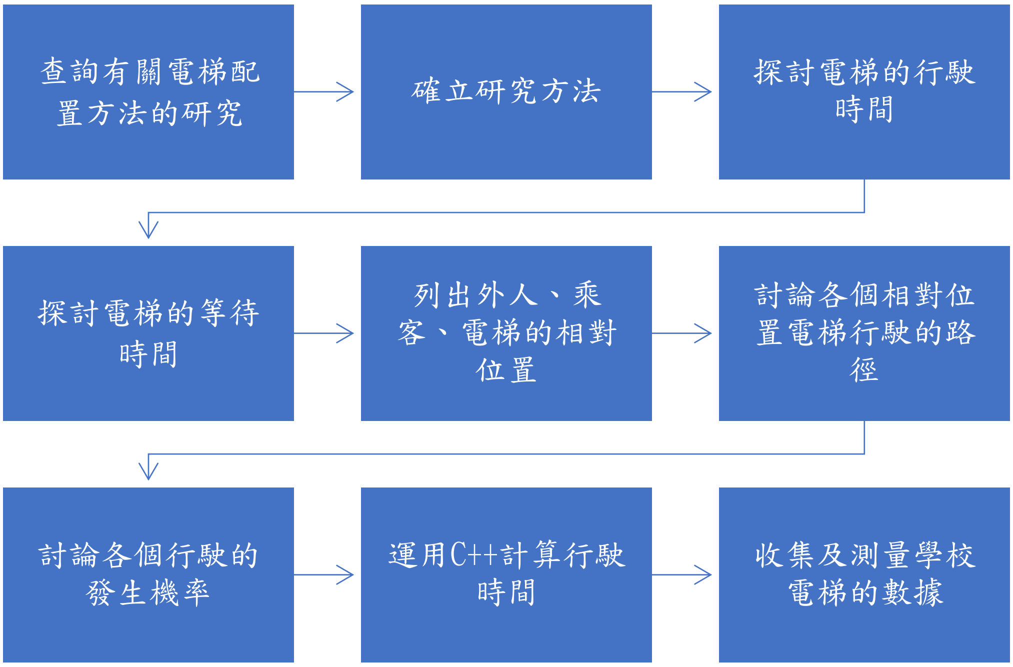

圖 1：研究流程圖

肆、文獻探討

這個主題已有許多相關研究。吳邦誠、陳柏叡（2013）從電梯搭載的最短路徑探討電梯最節能的運作模式，並且求出了電梯初始位於 1 樓，且已知每個人所在樓層及想前往的樓層情況下，電梯搭載的最短路徑。張馨云（2013）以台北 101 為例，用 SIMUL8 模擬雙層電梯的運行，找出花費的時間。林姿伶（2013）從等候理論(Queuing Theory)著手，再用程式模擬電梯的行駛，找出電梯配置的方法。上述文獻都著重於「模擬」與「排隊理論」，但統計上的手法與分析上的手法是不相同的，本研究希望將電梯行駛的過程函數化，並綜合前述研究考量的參數，得到精確的行駛時間，進而求出乘客等待時間的期望值。

伍、研究結果

一、電梯的行駛路徑探討與等待時間期望值

首先我們利用國中物理，考慮電梯行駛的vt圖如圖 2。

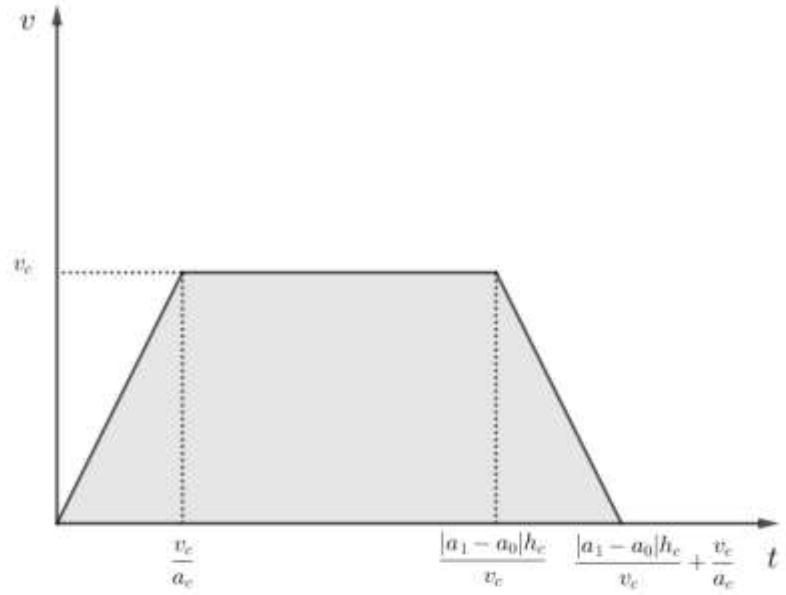

圖 2：$a_0 \to a_1$的電梯行駛vt圖

電梯速率從0加速到最大速率v_c的時間為$\frac{v_c}{a_c}$，因此電梯等速行駛的時間為：

$$\frac{\text{總行駛路徑長}-\text{電梯加速和減速時行駛的路徑長}}{\text{速度}}=\frac{h_c|a_1-a_0|-\frac{{v_c}^2}{a_c}}{v_c}=\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}$$

故電梯行駛的總時間為：

$$\frac{v_c}{a_c}+\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\frac{v_c}{a_c}=\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}+\frac{v_c}{a_c}$$

另外，不論電梯行駛幾趟，行駛過程必定只有加速、等速、減速下列三種的函數平移和

伸縮：

加速函數$v(t) = a_c t$。

減速函數$v(t) = -a_c t$。

等速函數$v(t)$= v_c 。

研究者參考微積分教科書進行本研究所有的積分運算（楊精松、莊紹容，2017）。將以上函數對t進行積分，改寫為時間對路徑長的函數，並繪製成圖形，如圖 3：

加速函數$l(t) = \frac{a_c}{2}t^2 + C\ (C \in \mathbb{R})$。

減速函數$l(t) = -\frac{a_c}{2}t^2 + C\ (C \in \mathbb{R})$。

等速函數$l(t)$= $v_c t + C\ (C \in \mathbb{R})$。

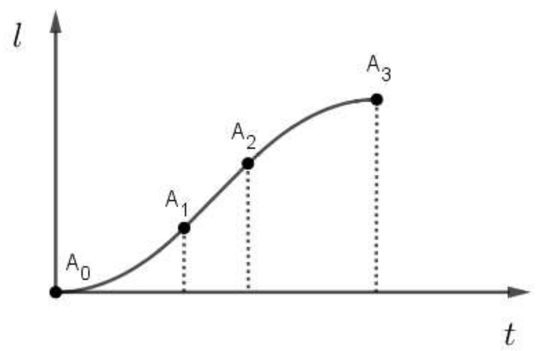

圖 3：$a_0 \rightarrow a_1$的電梯行駛路徑長與時間關係圖

得知$l(t)$函數後，我們發現電梯在行駛多趟時，其路徑長對時間的函數圖形皆會是**加速、等速、減速和靜止四者依序循環**，本研究會將電梯移動中和靜止時兩者分開討論。

（一）電梯行駛$l(t)$函數圖形的點坐標通解

因為電梯自某一層樓行駛至另一層樓的過程必會經歷加速、等速、減速三個階段，且每一段都會是三者依序循環，又因加速、減速的行駛時間及路徑長皆相同，所以每一段之間的差別只在於等速行駛的時間與行駛路徑長，而我們將電梯行駛的每一趟分開討論，以$a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$為例討論：

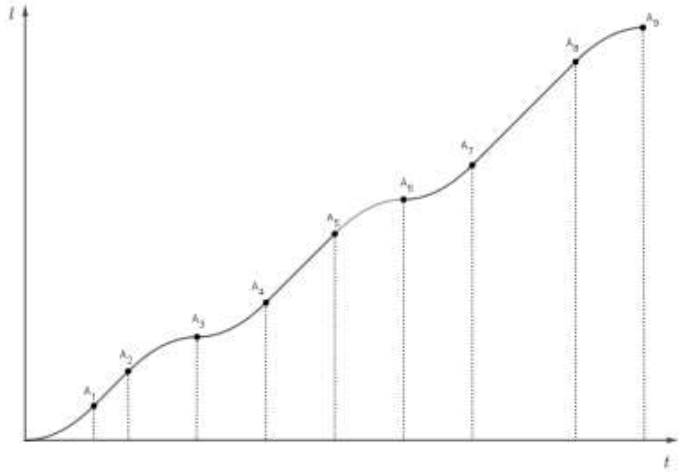

圖 4：$a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$的電梯行駛路徑長與時間關係圖

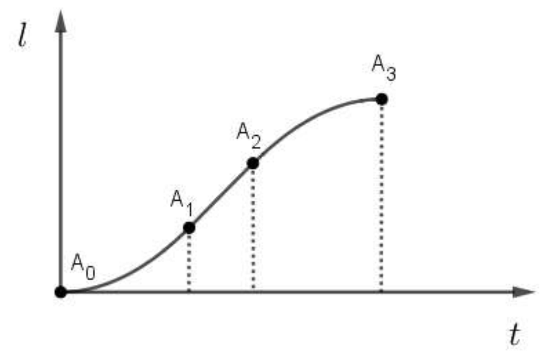

圖 5：$a_0 \rightarrow a_1$的電梯行駛路徑長與時間關係圖

透過簡單推導，我們可以得到圖中前三個點的坐標：

$$A_1\left(\frac{v_c}{a_c},\frac{v_c^2}{2a_c}\right)$$

$$A_2\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c},h_c|a_1-a_0|-\frac{v_c^2}{2a_c}\right)$$

$$A_3\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}+\frac{v_c}{a_c},h_c|a_1-a_0|\right)$$

將a_0以a_1代換、原a_1以a_2代換，並將A_0坐標以A_3坐標代換後，以A_3的點坐標做疊加，即為A_4、A_5、A_6的點坐標，如圖 6：

$$A_4\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}+\frac{2v_c}{a_c},h_c|a_1-a_0|+\frac{v_c^2}{2a_c}\right)$$

$$A_5\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}+\frac{v_c}{a_c}+\frac{h_c|a_2-a_1|}{v_c},h_c|a_1-a_0|+h_c|a_2-a_1|-\frac{v_c^2}{2a_c}\right)$$

$$A_6\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}+\frac{2v_c}{a_c}+\frac{h_c|a_2-a_1|}{v_c},h_c|a_1-a_0|+h_c|a_2-a_1|\right)$$

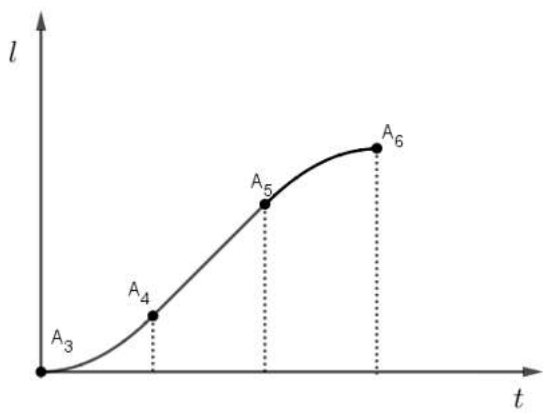

圖 6：$a_1\rightarrow a_2$的電梯行駛路徑長與時間關係圖

同上述方法，以此方式疊加可推得，$A_n(n\geq 3)$的坐標通解為：

$$A_{3n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{h_c|a_m-a_{m-1}|}{v_c}+n\frac{v_c}{a_c},\sum_{m=1}^{n}h_c|a_m-a_{m-1}|\right)$$

$$A_{3n+1}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{h_c|a_m-a_{m-1}|}{v_c}+(n+1)\frac{v_c}{a_c},\sum_{m=1}^{n}h_c|a_m-a_{m-1}|+\frac{v_c^2}{2a_c}\right)$$

$$A_{3n+2}\left(\sum_{m=1}^{n+1}\frac{h_c|a_m-a_{m-1}|}{v_c}+n\frac{v_c}{a_c},\sum_{m=1}^{n+1}h_c|a_m-a_{m-1}|-\frac{v_c^2}{2a_c}\right)$$

（二）電梯行駛$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{t})$函數下面積通解

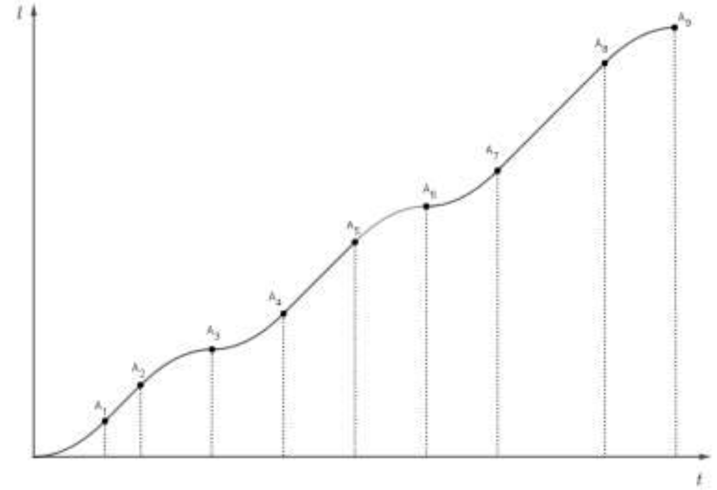

圖 7：$a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_3$的電梯行駛路徑長與時間關係圖

以上圖為例，觀察圖形會發現加速函數和減速函數會對稱於一點，而該點是減速函數的終點，也是加速函數的起點，以A_2至A_4間的曲線為例，加速函數A_2至A_3和減速函數A_3至A_4會對稱於點A_3，所以在計算A_2至A_4間曲線下的面積時，可將其視為一梯形，計算$\overline{A_2A_4}$下的面積；且電梯行駛必為加速、等速、減速三者依序循環，所以之後在計算整個函數下面積時，將會分成加減速和等速兩個時段進行討論，以$a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_3$為例，面積計算方式如下圖 8。

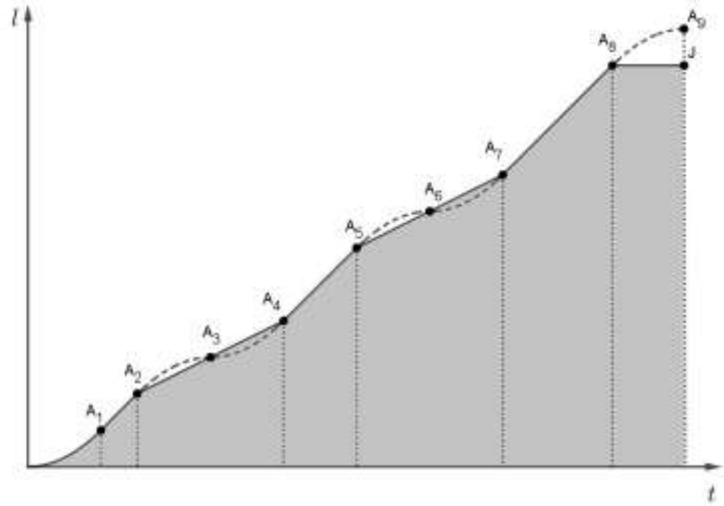

圖 8：$a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_3$的電梯行駛$l(t)$函數下面積計算方式

接著我們討論整個函數曲線下的面積。

1. $\boldsymbol{\Gamma_n}$的通解

對於任意$n > 1$，

$$\Gamma_n = \left(\sum_{m=1}^{n-1} h_c|a_m - a_{m-1}| + \frac{h_c|a_n - a_{n-1}|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_n - a_{n-1}|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right)$$

$$\Gamma_1 = \left(\frac{h_c|a_1 - a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1 - a_0|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right)$$

證明：

令t_i為A_i的t坐標，l_i為A_i的l坐標，則

$$\Gamma_n = \frac{1}{2}(l_{3n-2} + l_{3n-1})(t_{3n-1} - t_{3n-2})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n-1} h_c|a_m - a_{m-1}| + \frac{v_c^2}{2a_c} + \sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}| - \frac{v_c^2}{2a_c}\right)\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{h_c|a_m - a_{m-1}|}{v_c} + (n-1)\frac{v_c}{a_c} - \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{h_c|a_m - a_{m-1}|}{v_c} + n\frac{v_c}{a_c}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sum_{m=1}^{n-1} h_c|a_m - a_{m-1}| + h_c|a_n - a_{n-1}|\right)\left(\frac{h_c|a_n - a_{n-1}|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right)$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{n-1} h_c|a_m - a_{m-1}| + \frac{h_c|a_n - a_{n-1}|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_n - a_{n-1}|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right)$$

2. $\boldsymbol{\Delta_n}$的通解

$$\Delta_n = \frac{2v_c}{a_c}\sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}|$$

證明：

令t_i為A_i的t坐標，l_i為A_i的l坐標，則

$$\Delta_n = \frac{1}{2}(l_{3n-1} + l_{3n+1})(t_{3n+1} - t_{3n-1})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}| - \frac{v_c^2}{2a_c} + \sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}| + \frac{v_c^2}{2a_c}\right)\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{h_c|a_m - a_{m-1}|}{v_c} + (n+1)\frac{v_c}{a_c} - \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{h_c|a_m - a_{m-1}|}{v_c} + (n-1)\frac{v_c}{a_c}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}| \times \frac{2v_c}{a_c}$$

$$= \frac{2v_c}{a_c}\sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}|$$

3. 最終減速階段

令l_i為A_i的l坐標，t_i為A_i的t坐標，則行駛n趟的最終減速階段矩形面積為

$$l_{3n-1}(t_{3n} - t_{3n-1})$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}| - \frac{v_c^2}{2a_c}\right)\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{h_c|a_m - a_{m-1}|}{v_c} + n\frac{v_c}{a_c} - \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{h_c|a_m - a_{m-1}|}{v_c} + (n-1)\frac{v_c}{a_c}\right)\right)$$

$$= \frac{v_c}{a_c}\sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}| - \frac{v_c^3}{2a_c^2}$$

4. 電梯靜止時的花費時間

令l_i為A_i的l坐標

則第n次靜止的時間

$$= w_c l_{3n}$$

$$= w_c \sum_{m=1}^{n} h_c|a_m - a_{m-1}|$$

5. 電梯行駛$\boldsymbol{n}$趟的$\boldsymbol{l(t)}$函數下面積

電梯行駛1趟的$l(t)$函數圖形下面積

$$\int_{t=0}^{\frac{v_c}{a_c}} \frac{1}{2} a_c t^2 \; dt + \Gamma_1 + \left(h_c|a_1 - a_0| - \frac{v_c^2}{2a_c}\right)\frac{v_c}{a_c}$$

$$= \left(\frac{h_c|a_1 - a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1 - a_0|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right) + \frac{h_c|a_1 - a_0| v_c}{a_c}$$

已知電梯行駛n趟的函數必會有初始時的加速、n段等速行駛、$n-1$段加減速階段（不含一開始加速和最終減速，且將一次加速和一次減速視為一階段）、最後的減速階段和$n-1$次的靜止。因此電梯行駛n趟的$l(t)$函數圖形下面積$(n > 1)$為

$$\int_{t=0}^{\frac{v_c}{a_c}} \frac{1}{2} a_c t^2 \; dt + \Gamma_1 + \sum_{k=2}^{n} \Gamma_k + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k + \frac{v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{n} h_c|a_k - a_{k-1}| - \frac{v_c^3}{2a_c^2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\left(w_c \sum_{m=1}^{k} h_c|a_m - a_{m-1}|\right)$$

$$= \left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\left(\sum_{m=1}^{k-1} h_c|a_m - a_{m-1}| + \frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right)\right) +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2v_c}{a_c}\sum_{m=1}^{k} h_c|a_m - a_{m-1}|\right) + \frac{v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{n} h_c|a_k - a_{k-1}| - \frac{v_c^3}{3a_c^2} + w_c\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{k} h_c|a_m - a_{m-1}|\right)$$

$$= \left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k-1} h_c|a_m - a_{m-1}| + \frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{v_c} - \frac{v_c}{a_c}\right) +$$

$$\frac{2v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{k} h_c|a_m - a_{m-1}|\right) + \frac{v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{n} h_c|a_k - a_{k-1}| - \frac{v_c^3}{3a_c^2} + w_c\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{k} h_c|a_m - a_{m-1}|\right)$$

（三）電梯等待時間的期望值

綜上所述，可得電梯行駛1趟在a_1樓的電梯等待時間期望值

$$=\left(\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\frac{h_c|a_1-a_0|v_c}{a_c}\right)\div h_c|a_1-a_0|$$

電梯行駛n趟在a_n樓的電梯等待時間期望值$(n>1)$

$$=\left(\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k-1}h_c|a_m-a_{m-1}|+\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\left(\frac{2v_c}{a_c}+w_c\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{k}h_c|a_m-a_{m-1}|\right)+\frac{v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{n}h_c|a_k-a_{k-1}|-\frac{v_c^3}{3a_c^2}\right)\div\sum_{m=1}^{n}h_c|a_m-a_{m-1}|$$

二、有一外人在任意樓層先按電梯，在f樓等電梯所需時間的期望值

（一）電梯接待的先後順序

先說明外人先按電梯的情形，此時我們針對外人、乘客、電梯的相對位置，和外人、乘客的方向總共$3!\times 2!=12$種情況分別討論，得出以下結果。

1. $f_0\to f$發生在$f\to f'$與$f_1\to f_1'$兩趟行駛順路，且乘客在電梯開始減速前就按電梯時，一種情況中$f_0\to f$與$f_0\to f_1\to f_1'\to f$兩段行駛皆可能出現，且兩事件發生的機率視乘客按電梯的時間點而定，若乘客在電梯行駛至f減速前按電梯，會發生$f_0\to f$，反之則為$f_0\to f_1\to f_1'\to f$，兩者發生的機率如下：

圖 9：$f \rightarrow f'$與$f_1 \rightarrow f_1'$順路時乘客、外人、電梯的相對位置圖

$$P(f_0 \rightarrow f) = \frac{\frac{|f - f_0|h_c}{v_c}}{\frac{|f_1 - f_0|h_c}{v_c} + \frac{|f - f_1|h_c}{v_c} + \frac{v_c}{a_c}} = \frac{|f - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}}$$

$$P(f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow f_1' \rightarrow f) = 1 - \frac{|f - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}} = \frac{|f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}}{|f_1 - f_0| + |f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}}$$

圖 10：$f \rightarrow f'$與$f_1 \rightarrow f_1'$順路時乘客、外人、電梯的相對位置圖

$$P(f_0 \to f) = \frac{\frac{|f_1 - f_0|h_c}{v_c}}{\frac{|f_1 - f_0|h_c}{v_c} + \frac{|f - f_1|h_c}{v_c} + \frac{v_c}{a_c}} = \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}}$$

$$P(f_0 \to f_1 \to f_1' \to f) = 1 - \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}} = \frac{|f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}}{|f_1 - f_0| + |f - f_1| + \frac{v_c^2}{a_c h_c}}$$

2. $f_0 \to f_1 \to f$發生在$f_1 \to f_1'$和$f_1 \to f$兩趟行駛順路時，一種情況中$f_0 \to f_1 \to f$、$f_0 \to f_1 \to f_1' \to f$兩段行駛皆可能出現，則此時$f_1 \to f_1'$和$f_1 \to f$兩趟行駛順路，且$f_1'$在$f_1$和$f$之間，會發生$f_0 \to f_1 \to f_1' \to f$，其機率為$\frac{|f_1 - f|}{F_c}$。

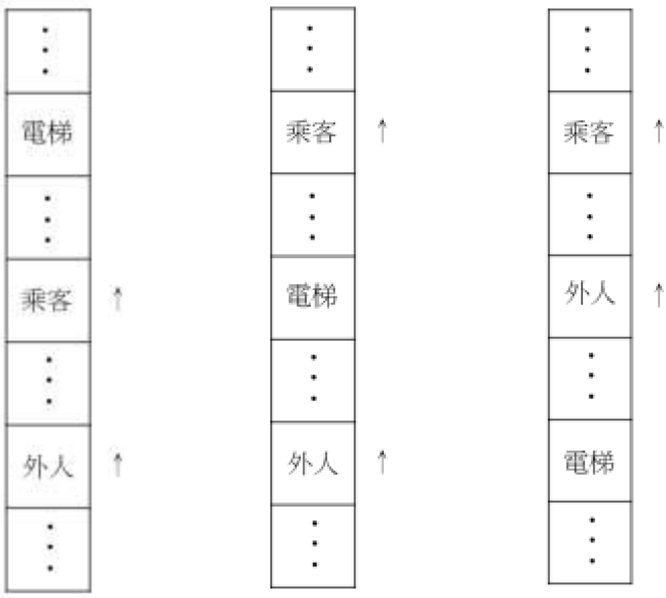

圖 11：$f_1 \to f_1'$和$f_1 \to f$同向時乘客、外人、電梯的相對位置圖

3. 若$f \to f'$與$f_1 \to f_1'$兩趟行駛不順路時，則只會發生$f_0 \to f_1 \to f_1' \to f$。

（二）電梯的行駛路徑與等待時間期望值

1. $f_0 \to f$

由上討論可得等待時間期望值為

$$=\left(\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\frac{h_c|a_1-a_0|v_c}{a_c}\right)\div h_c|a_1-a_0|$$

2. $f_0 \to f_1 \to f$

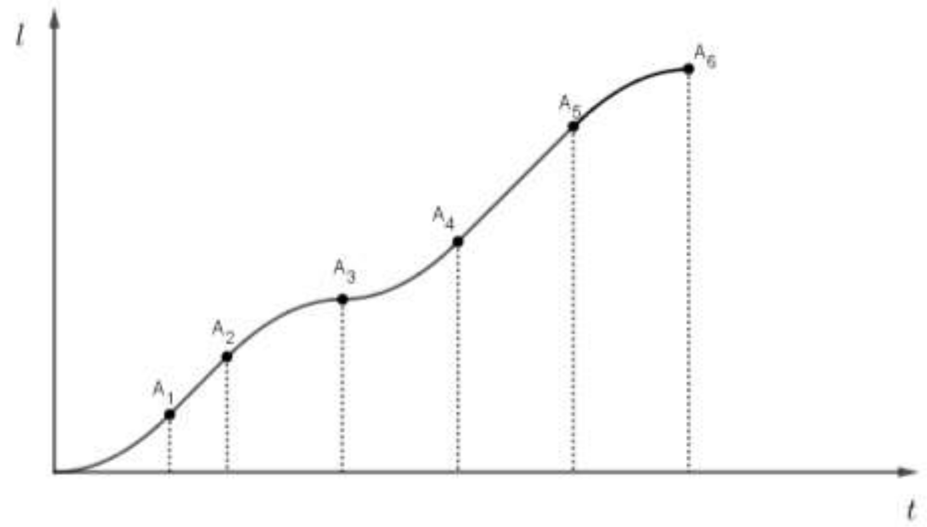

圖 12：$f_0 \to f_1 \to f$的行駛路徑長圖

由上討論可得等待時間期望值為

$$=\left(\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\left(h_c|a_m-a_{m-1}|+\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2v_c}{a_c}+w_c\right)h_c|a_1-a_0|+\frac{v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{2}h_c|a_k-a_{k-1}|-\frac{v_c^3}{3a_c^2}\right)\div\sum_{m=1}^{n}h_c|a_m-a_{m-1}|$$

3. $f_0 \to f_1 \to f_1' \to f$

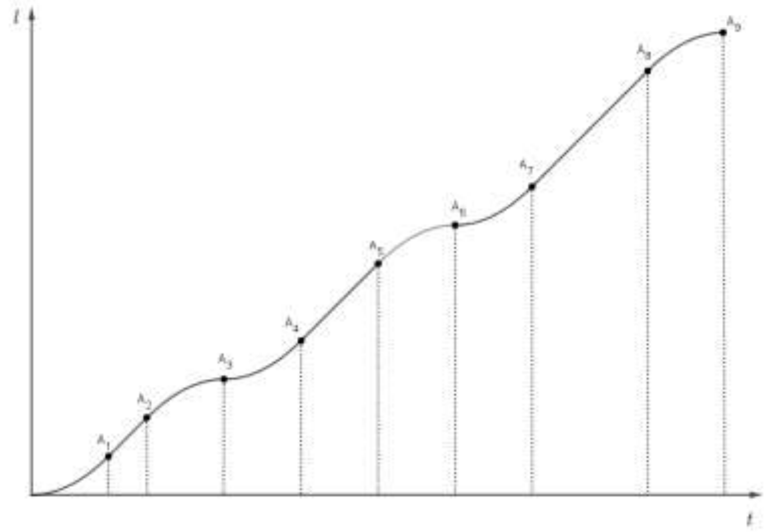

圖 13：$f_0 \to f_1 \to f_1' \to f$的行駛路徑長圖

由上討論可得等待時間期望值為

$$
\begin{aligned}
=&\left(\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)\right.\\
&+\sum_{k=2}^{3}\left(\sum_{m=1}^{k-1}h_c|a_m-a_{m-1}|+\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)\\
&\left.+\left(\frac{2v_c}{a_c}+w_c\right)\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{m=1}^{k}h_c|a_m-a_{m-1}|\right)+\frac{v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{3}h_c|a_k-a_{k-1}|-\frac{v_c^3}{3a_c^2}\right)\\
&\div\sum_{m=1}^{3}h_c|a_m-a_{m-1}|
\end{aligned}
$$

三、實際應用，計算學校電梯等待時間的期望值

由於積分計算過度複雜，研究者尋求同學協助，寫了一個 C++程式，將前面導出的通解代入，用以快速算等待時間，程式碼截圖如下圖 14。

圖 14：計算電梯等待時間的 C++程式碼

查詢學校電梯使用執照後得知，電梯最大速度為每秒 1 公尺，且學校建築每層樓高 4 公尺，以 phyphox 測量學校電梯的加速度為 0.45 公尺/每秒平方，再以 Excel 計算各情況的等待時間，再將數據進行加權求得電梯等待時間的期望值，下表以建築中教師辦公室最多的樓層 2 樓為例進行模擬：

表 1：$f_0 = 0, f_1 = 1, f = 2$的電梯等待時間期望值

樓層	f_0	f_1	f	f_1'							
	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6	
上	趟數	P		t							期望值
	1	0.25		23.3519							24.93676
	3	0.75		19.6749		26.23868	23.23045	24.89438	27.72634	31.02551	
下	趟數	P		t							期望值
	2	0.428571429		3.3611							15.99192
	3	0.571428571		19.6749		26.23868	23.23045	24.89438	27.72634	31.02551	

由表中可知乘客要往上的等待時間約為 24.94 秒，而要往下的等待時間約為 15.99 秒，實際詢問經常使用電梯的老師，這與他們的生活經驗非常接近，代表我們的研究是合理的。此方法也可以用來計算有外人時的情況，上表為電梯初始時位於地下一樓，外人位於一樓時乘客的電梯等待時間期望值，將f_0、f_1一一代入，在依照電梯初始及外人所在樓層隨機，求得在一外人時，乘客位在 2 樓，乘客向上的電梯等待時間期望值為 28.37 秒，向下的等待時間期望值為 27.24 秒。

陸、結論

一、電梯由a_0樓行駛自a_1樓，行駛1趟在a_1樓的電梯等待時間期望值

$$=\left(\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\frac{h_c|a_1-a_0|v_c}{a_c}\right)\div h_c|a_1-a_0|$$

二、在有外人的情況下，電梯行駛樓層為$a_0\to a_1\to a_2\to\cdots\to a_n$，行駛$n$趟在$a_n$樓的電梯等待時間期望值$(n>1)$

$$=\left(\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_1-a_0|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k-1}h_c|a_m-a_{m-1}|+\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{2}\right)\left(\frac{h_c|a_k-a_{k-1}|}{v_c}-\frac{v_c}{a_c}\right)+\left(\frac{2v_c}{a_c}+w_c\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{k}h_c|a_m-a_{m-1}|\right)+\frac{v_c}{a_c}\sum_{k=1}^{n}h_c|a_k-a_{k-1}|-\frac{v_c^3}{3a_c^2}\right)\div\sum_{m=1}^{n}h_c|a_m-a_{m-1}|$$

三、本研究設計了 C++程式及 Excel 運算函式輔助計算，所得的電梯等待時間期望值與使用者的生活經驗相符。

柒、討論與未來展望

本研究從電梯運行方式去計算電梯的等待時間，得出了電梯的運行時間，並且求出了在一個外人的情況下，在各樓層電梯等待時間的期望值，最後也使用我們建立的模型計算學校電梯的等待時間期望值。

未來研究者希望能再增加幾個變因做討論，像是在建築物中多增加一些外人或增加電梯的數量等等，讓本研究更符合現實情形，數據更加準確；也希望能將本研究實際運用在生活中，並且找到能使電梯運行效益最大化的方法，如此一來，可改善像商場中顧客等待電梯的時間，以提升顧客的購物體驗，或是在醫院中，減少急需使用電梯病患的等待時間，增加救援時間。

捌、參考文獻

1. 吳邦誠、陳柏叡（2013）。電梯搭載最短路徑問題。取自 https://reurl.cc/Rjr3Ex。
2. 王之郁、林狄忠、陳尚緯（2015）。神速電梯法則。取自 https://www.shs.edu.tw/works/essay/2015/11/2015111308251596.pdf。
3. 張云馨（2013）。高樓層垂直運輸系統模擬。取自 https://reurl.cc/KpQDzq。
4. 林姿伶（2013）。高層建築物垂直運輸運輸配置之乘客搭乘行為研究。取自 https://reurl.cc/ZrALqW。
5. 楊精松、莊紹容（2017）。**Calculus 微積分**。臺北市：東華出版。

【評語】010018

本作品探討電梯等候時間的數學模式。在此模式中，電梯從靜止會先等加速度運動到最高速度，然後維持等速運動，之後，再以與加速度相同的減速度，在到達目的地樓層時將時速降為零。作者首先計算，任意兩樓層之間的行經時間公式。再以簡單的一致分配(uniform distribution)計算電梯從任意樓層抵達某給定樓層的平均等候時間。接著推廣到，中間有人搶先一步叫了電梯，先去搭載「外人」再抵達給定樓層搭載後按電梯的人，後者的平均等待時間。整個作品雖然有趣，但是所獲的的數學結果與結論偏少。建議接下來可以考慮先按電梯的人，其目的地樓層沒經過後按的人的樓層，或者經過但是兩者目的地方向相反的狀況、或者後按的人按的時候，電梯恰巧行進在半途，讓作品的結果更加豐富。