2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010015**

參展科別　數學

作品名稱　破解清空盒子彈珠的最佳途徑

得獎獎項　四等獎

就讀學校　國立新竹女子高級中學

指導教師　張寶文、吳承彥

作者姓名　張詠甯

關鍵詞　整數分割、算幾不等式、取整函數

作者簡介

我是張詠甯，就讀新竹女中三年級。很開心可以完成這個研究，也很榮幸能夠踏上國際科展的舞台。謝謝帶領我的指導老師，未來我會繼續努力。

摘要

108 學年度台北市普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽數學科筆試(二)試題第四題，題目如下：「小明有 A、B 兩個盒子，一開始 A 盒裝有 22 顆彈珠，而 B 盒是空的。小明每次操作可以從 A 盒中拿一顆彈珠放到 B 盒，或從 A 盒中移去 k 顆彈珠，其中 k 是 B 盒子中的彈珠數量。小明至少需要幾次操作，才能將 A 盒中的彈珠完全清空。」

本研究利用算幾不等式及取整符號來推導出當 A 盒中有 m 顆單色的彈珠時，我們已能快速地找到清空盒內彈珠的的最少操作次數、B 盒最終彈珠數量 x 及操作方法總數 N_m，進而能一一列出最少操作次數的所有可能操作 T_m 過程，而其中操作方法總數 N_m 的計算方法即為著名的正整數分割問題。其次，我們推廣至 A 盒有相同數量的 1~4 種顏色彈珠時，清空 A 盒彈珠所需的最少操作次數以及 B 盒最終彈珠數量。

Abstract

The following is a question from the math competence competition in the 108 academic year. There are two boxes: A is filled with 22 marbles while B is empty. In every move, one can choose to take a marble from box A and put it into box B, or to remove k marbles from box B, with k being the same as the number of marbles in box B. What is the minimum number of moves that should be taken to clear all the marbles in box A ?

This research adopted the arithmetic-geometric mean inequality and the floor function. When given the number of marbles in box A, the minimum moves needed, the final number of marbles left in box B, and the total methods to clear box A can be quickly found. By extension, the process of each method can be listed one by one, and this is related to the renowned problem: integer partition. In addition, we extend the question to find out the relationship between the minimum number of operations required to clear out box A and the final number of marbles in box B when box A has the same number of marbles of 1 to 4 colors.

壹、研究動機

一開始解題時，我們是利用樹狀圖一一列出 A 盒裝有22顆彈珠時的所有可能性求解，過程中，我們發現最少操作次數時 B 盒最終彈珠數及操作方法數不只1種，我們想確定此情況是否為特例，故我們打算列出其他彈珠數的情況，但畫樹狀圖方法太費時，且當 A 盒的彈珠數量增加，最少操作的次數也會增加，因此我們想要找出其中的規律性，求出一般化的解。除了原題目的問題，我們好奇增加顏色的情況下是否對最少操作次數有影響，因此我們嘗試將彈珠顏色從1種增加為n種，試著求出一般化的解。

貳、研究目的

一、探討清空 A 盒彈珠所需的最少操作次數，並將結果一般化。

二、探討在清空 A 盒彈珠的最少操作次數下，B 盒的最終彈珠數量，並將結果一般化。

三、探討在清空 A 盒彈珠的最少操作次數下，清空盒內彈珠的方法數，並將結果一般化。

四、探討 A 盒有相同數量的紅、白兩色彈珠時，清空盒內彈珠所需的最少操作次數，並將結果一般化。

五、探討在清空 A 盒相同數量的紅、白兩色彈珠的最少操作次數下，B 盒的最終紅、白彈珠數量，並將結果一般化。

六、推廣 A 盒有相同數量的多色彈珠時，清空盒內彈珠所需的最少操作次數一般化結果。

七、推廣 A 盒有相同數量的多色彈珠時，最少操作次數下 B 盒中各顏色最終彈珠數量一般化結果。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GitMind 軟體、GeoGebra 繪圖計算機、計算機

肆、研究過程及方法

一、研究問題及符號的定義

（一）研究問題定義

1. A 盒中只有一種顏色的彈珠

每次操作有兩個選擇：一個是從 A 盒中拿 1 顆彈珠放入 B 盒，另一個是從 A 盒中移出與 B 盒同數量的 b 顆彈珠至 C 盒；重複操作直至清空 A 盒內所有彈珠。

2. A 盒中有相同數量的紅、白兩色彈珠

每次操作有三個選擇：第一個是從 A 盒中拿 1 顆紅色彈珠放入 B 盒，第二個是從 A 盒中拿 1 顆白色彈珠放到 B 盒，第三個是從 A 盒中同時移出 b_1 顆紅色彈珠與 b_2 顆白色彈珠至 C 盒；重複操作直至清空 A 盒內所有彈珠。

（二）符號定義

符號	定義
m	A 盒最初彈珠數量，$m \in N$
x	B 盒最終彈珠數量，$1 \le x \le m$ 且 $x \in N$
a	A 盒中的彈珠數，$0 \le a \le m$ 且 $a \in N \cup \{0\}$
b	B 盒中的彈珠數，$0 \le b \le m$ 且 $b \in N \cup \{0\}$
c	C 盒中的彈珠數，$c \in N \cup \{0\}$ 且 $m = a + b + c$
$f_m(x)$	A 盒最初彈珠數量為 m 且 B 盒最終彈珠數量為 x 時，清空 A 盒內彈珠所需最少操作次數，$f_m(x) = x + \left\lceil \frac{m-x}{x} \right\rceil = x + \left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil - 1$
T_m	A 盒最初彈珠數量為 m 時，清空 A 盒內彈珠所需最少操作次數，$T_m = \min\limits_{1 \le x \le m} f_m(x)$
d	當 $k(k-1) < m \le k^2, k \in N$ 時，m 與 k^2 的距離，即 $d = k^2 - m$
e	當 $k^2 < m \le k(k+1), k \in N$ 時，m 與 $k(k+1)$ 的距離，即 $e = k(k+1) - m$
g	當 $2k^2 - 2k < m \le 2k^2 - k, k \in N$ 時，m 與 $2k^2 - k$ 的距離，即

	$g = 2k^2 - k - m$
h	當 $2k^2 - k < m \le 2k^2, k \in N$ 時，m 與 $2k^2$ 的距離，即 $h = 2k^2 - m$
l	當 $2k^2 < m \le 2k^2 + k, k \in N$ 時，m 與 $2k^2 + k$ 的距離，即 $l = 2k^2 + k - m$
u	當 $2k^2 + k < m \le 2k^2 + 2k, k \in N$ 時，m 與 $2k^2 + 2k$ 的距離，即 $u = 2k^2 + 2k - m$
N_m	最少操作次數(T_m)下，不同 x 的操作方法數總和， $N_m = \sum_x p(r_m(x))$
$r_m(x)$	$r_m(x) = x(T_m - x) - (m - x)$
$p(n)$	分割函數，$\forall n \in N, p(n)$ 為 n 的分割數，$p(0) = 1$ 且 $p(-n) = 0$
m_1 、m_2	A 盒最初紅、白色彈珠數量，$m_1, m_2 \in N$
x_1 、x_2	B 盒最終紅、白色彈珠數量，$\forall i, 1 \le x_i \le m_i$ 且 $x_i \in N$
a_1 、a_2	A 盒中的紅、白色彈珠數，$\forall i, 0 \le a_i \le m_i$ 且 $a_i \in N \cup \{0\}$
b_1 、b_2	B 盒中的紅、白色彈珠數，$\forall i, 0 \le b_i \le m_i$ 且 $b_i \in N \cup \{0\}$
c_1 、c_2	C 盒中的紅、白色彈珠數，$\forall i, c_i \in N \cup \{0\}$ 且 $m_i = a_i + b_i + c_i$
T_{m_1, m_2}	A 盒最初紅、白彈珠數量分別為 m_1 、m_2 時，清空 A 盒內彈珠所需最少操作次數
$f_{m_1, m_2}(x_1, x_2)$	A 盒最初紅、白彈珠數量分別為 m_1 、m_2 且 B 盒最終紅、白彈珠數量分別為 x_1 、x_2 時，清空 A 盒內彈珠所需最少操作次數

二、A 盒最初彈珠數量(m)與清空 A 盒內彈珠所需最少操作次數(T_m)的關係

我們先研究原先 $m = 22$ 的特例，以樹狀圖一一列出所有方式，再以數列表示最少操作次

數的過程中 A 盒內彈珠個數的變化，從中找出清空 A 盒內彈珠所需最少操作次數(T_m)的規律，進而證明之。

（一）$m=22$

1. 樹狀圖

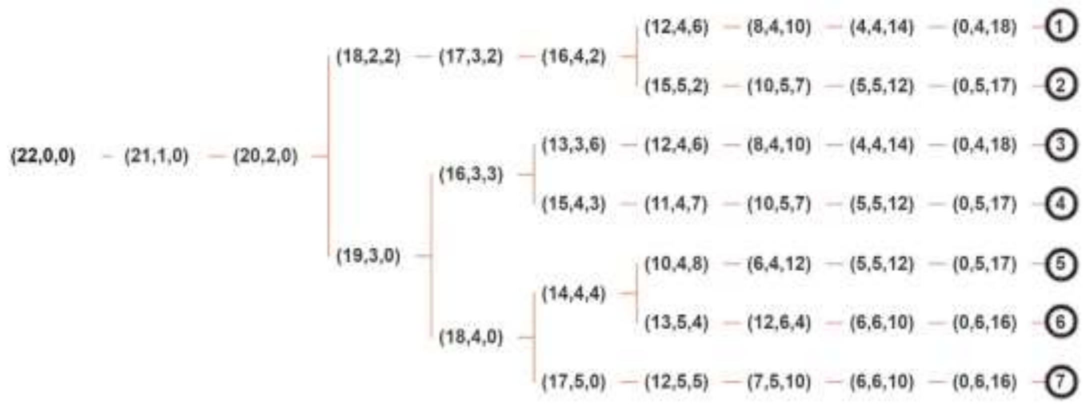
我們以序組 (a,b,c) 表示清空 A 盒彈珠的過程中不同盒內的彈珠個數，其中 a 為 A 盒彈珠數，b 為 B 盒彈珠數，c 為 C 盒彈珠數，$a,b,c\in N\cup\{0\}$ 且 $a+b+c=m$ 。序組的初始狀態為 $(m,0,0)=(22,0,0)$ ，接下來的清空步驟如下：

Step1. 序組狀態必為 $(m-1,1,0)=(21,1,0)$ 。因為每次僅能從 A 盒中拿 1 顆彈珠放入 B 盒或從 A 盒中移出與 B 盒同數量的 b 顆彈珠至 C 盒，故第一步只能從 A 盒中拿 1 顆彈珠放入 B 盒。

Step2. 因為 $b>0$ ，所以可以選擇從 A 盒中拿 1 顆彈珠放入 B 盒或從 A 盒中移出 b 顆彈珠放入 C 盒，直至 $a<b$ 或 $a=0$ 。

Step3. 若 $a<b$，則只能選擇從 A 盒中每次拿 1 顆彈珠放入 B 盒，直至 $a=0$ 。

我們利用 GitMind 軟體將產生最少操作次數的全部過程繪製成圖，請見附錄一，而由此圖可知：當 $m=22$ 時，清空 A 盒的最少操作次數(T_{22})為 9 次，方法數(N_{22})有 7 種，我們將此 7 種方法繪製成下頁圖(一)。



圖(一)：$m=22$ 時，清空 A 盒彈珠操作次數最少的方法

2. 以數列表示圖(一)中各方法 A 盒內逐步減少的彈珠數

以圖(一)中第 1 種方法為例，可將其 A 盒內在 9 次操作中逐步減少的彈珠數一

一列出表示成數列①- $\{1,1,2,1,1,4,4,4,4\}$；

同理，可得：數列②- $\{1,1,2,1,1,1,5,5,5\}$、數列③- $\{1,1,1,3,3,1,4,4,4\}$、

數列④- $\{1,1,1,3,1,4,1,5,5\}$、數列⑤- $\{1,1,1,1,4,4,4,1,5\}$、

數列⑥- $\{1,1,1,1,4,1,1,6,6\}$、數列⑦- $\{1,1,1,1,1,5,5,1,6\}$。

3. 觀察並分析上述 7 個數列的規律

先觀察數字變化較為類似的三組數列，分別是數列①、②及⑥。

數列①- $\{1,1,2,1,1,4,4,4,4\}$：

最後利用 $b=4$ 連續將 A 盒彈珠清空之前，必須先累積四次從 A 盒拿出 1 顆彈珠至 B 盒才達成 $b=4$，於是剩下 $22-4=18$ 顆彈珠，又 $18=4\times4+(2)$，所以在 $b=2$ 時需先從 A 盒拿出 2 顆彈珠至 C 盒，操作次數共 $4+1+4=9$ 次（第一個 4 為將 b 累積到 4，1 為從 A 盒拿出 2 顆彈珠至 C 盒，第二個 4 為利用 $b=4$ 連續四次將 A 盒彈珠清空）。

數列②- $\{1,1,2,1,1,1,5,5,5\}$：

同理，利用 $b=5$ 連續將 A 盒彈珠清空之前，必須先累積 5 個 1，剩下 $22-5=17$ 顆彈珠，又 $17=5\times3+(2)$，所以在 $b=2$ 時需先從 A 盒拿出 2 顆彈珠至 C 盒，操作次數共 $5+1+3=9$ 次（5 為將 b 累積到 5，1 為從 A 盒拿出 2 顆彈珠到 C 盒，3 為利用 $b=5$ 連續三次將 A 盒彈珠清空）。

數列⑥- $\{1,1,1,1,4,1,1,6,6\}$：

同理，利用 $b=6$ 連續將 A 盒彈珠清空之前，必須先累積 6 個 1，剩下 $22-6=16$ 顆彈珠，又 $16=6\times2+(4)$，所以在 $b=4$ 時需先從 A 盒拿出 4 顆彈珠至 C 盒，操作次數共 $6+1+2=9$ 次（6 為將 b 累積到 6，1 為從 A 盒拿出 4 顆彈珠到 C 盒，2 為利用 $b=6$ 連續二次將 A 盒彈珠清空）。

再觀察其餘 4 組數列，分別是數列③、④、⑤及⑦。

數列③-$\{1,1,1,3,3,1,4,4,4\}$ 可看成數列①-$\{1,1,2,1,1,4,4,4,4\}$ 的變形：

最後利用$b=4$連續將A盒彈珠清空，必須先累積 4 個 1，剩下$22-4=18$顆彈珠，又$18=4\times4+2=4\times3+6=4\times3+(3+3)$，所以可以在$b=3$時從$A$盒中連續拿出兩次 3 顆彈珠至$C$盒，操作次數共$4+2+3=9$次（4 為將$b$累積到 4，2 為從$A$盒拿出兩次 3 顆彈珠至$C$盒，3 為利用$b=4$連續三次將$A$盒彈珠清空）。而$18=4\times2+10$，欲使操作次數維持 9 次，則 10 必須拆成三個比 4 小的整數，又$10>3\times3$，故此法勢必增加操作次數。$18=4\times1+14$亦然。故在$b=4$時只有數列①-$\{1,1,2,1,1,4,4,4,4\}$和數列③-$\{1,1,1,3,3,1,4,4,4\}$兩組解。

數列④-$\{1,1,1,3,1,4,1,5,5\}$、數列⑤-$\{1,1,1,1,4,4,4,1,5\}$ 可看成數列②的變形：

同理，最後利用$b=5$連續將A盒彈珠清空，$22-5=17$，

而 $\begin{aligned}17&=5\times3+(2)\\&=5\times2+7=5\times2+(3+4)\\&=5\times1+12=5\times1+(4+4+4)\end{aligned}$，故在$b=5$時有 $\begin{matrix}\{1,1,2,1,1,1,5,5,5\}\\\{1,1,1,3,1,4,1,5,5\}\\\{1,1,1,1,4,4,4,1,5\}\end{matrix}$ 三組解。

數列⑦-$\{1,1,1,1,1,5,5,1,6\}$ 可看成數列⑥-$\{1,1,1,1,4,1,1,6,6\}$ 的變形：

同理，最後利用$b=6$連續將A盒彈珠清空，$22-6=16$，

而 $\begin{aligned}16&=6\times2+(4)\\&=6\times1+10=6\times1+(5+5)\end{aligned}$，故在$b=6$時有 $\begin{matrix}\{1,1,1,1,4,1,1,6,6\}\\\{1,1,1,1,1,5,5,1,6\}\end{matrix}$ 兩組解。

（二）定義最少操作次數(T_m)

我們可以根據前述的討論定義出最少操作次數T_m。設A盒最初彈珠數量為m，B盒最終彈珠數量為x，若利用$b=x$來清空A盒彈珠，需先操作x次使得$b=x$，接著清空A盒所剩的$(m-x)$顆彈珠則需再操作至少$\left\lceil\frac{m-x}{x}\right\rceil$次，故$b=x$時的最少操作次數為$f_m(x)=x+\left\lceil\frac{m-x}{x}\right\rceil=x+\left\lceil\frac{m}{x}\right\rceil-1$，其中$m,x\in N$且$1\le x\le m$，因此我們定義當$A$盒最初彈珠數量為$m$時，清空$A$盒內彈珠所需最少操作次數$T_m=\min\limits_{1\le x\le m}f_m(x)$。

（三）m 與 T_m 的關係

為了找出 m 與 T_m 的關係，我們依舊土法煉鋼先一一列出 T_m 的值，見附錄二，並從中觀察出規律進並驗證之。

1. 由 T_m 的值觀察出規律

表(一)：$T_1 \sim T_{30}$ 的值

m	**1**	**2**	3	**4**	5	**6**	7	8	**9**	10	11	**12**
T_m	**1**	**2**	3	**3**	4	**4**	5	5	**5**	6	6	**6**
m	13	14	15	**16**	17	18	19	**20**				
T_m	7	7	7	**7**	8	8	8	**8**				
m	21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	**30**		
T_m	9	9	9	9	**9**	10	10	10	10	**10**		

我們節錄 $T_1 \sim T_{30}$ 的值於上表(一)，從中發現 T_m 值增加之前，m 為完全平方數或兩個連續正整數乘積，這結果由 $f_m(x)=x+\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil-1$ 的函數特性亦不難猜想，我們將於其後證明之。

2. 證明 m 與 T_m 的關係，其中 $T_m=\min\limits_{1\le x\le m} f_m(x), f_m(x)=x+\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil-1$

【引理一】：當 m 為完全平方數時，即 $m=k^2, k\in N$，則 $T_m=2k-1$，且此時 B 盒最終彈珠數量 $x=k$。

【證明】：

$1°$ 由算幾不等式可知：$x+\frac{k^2}{x}\ge 2k$，等號成立時 $x=\frac{k^2}{x}=k$。

$$\therefore f_{k^2}(x)=x+\left\lceil \frac{k^2}{x} \right\rceil-1\ge x+\frac{k^2}{x}-1\ge 2k-1 \Rightarrow \forall 1\le x\le m, f_{k^2}(x)\ge 2k-1$$

$2°$ 又 $x=k$ 時，$f_{k^2}(x)=k+\left\lceil \frac{k^2}{k} \right\rceil-1=k+k-1=2k-1$。

由 $1°\,\&\,2°$：當 $m=k^2, k\in N$，則 $T_m=\min\limits_{1\le x\le m} f_m(x)=2k-1$，且此時 $x=k$

■

【引理二】：當 $k^2 < m \le k(k+1), k \in N$ 時，則 $T_m = 2k$ 。

【證明】：

$1°$ 由算幾不等式可知：$x + \dfrac{k^2}{x} \ge 2k$ 。

且 $m > k^2$ ，$\therefore f_m(x) = x + \left\lceil \dfrac{m}{x} \right\rceil - 1 \ge x + \dfrac{m}{x} - 1 > x + \dfrac{k^2}{x} - 1 \ge 2k - 1$ 。

又 $k \in N$ ，$\therefore \forall 1 \le x \le m, f_m(x) \ge 2k$ 。

$2°$

$\because k^2 < m \le k(k+1)$

$\therefore k < \dfrac{m}{k} \le (k+1) \Rightarrow \left\lceil \dfrac{m}{k} \right\rceil = k+1$

則 $x = k$ 時，$f_m(x) = k + \left\lceil \dfrac{m}{k} \right\rceil - 1 = k + (k+1) - 1 = 2k$ 。

由 $1° \,\&\, 2°$ ：當 $k^2 < m \le k(k+1), k \in N$ 時，則 $T_m = \min\limits_{1 \le x \le m} f_m(x) = 2k$ 。

■

【引理三】：當 $k(k-1) < m < k^2, k \in N$ ，則 $T_m = 2k-1$ 。

【證明】：

$1°$

$\because m \ge k(k-1)+1 > (k-0.5)^2$ ，由算幾不等式知 $x + \dfrac{(k-0.5)^2}{x} \ge 2k-1$ 。

$\therefore f_m(x) = x + \left\lceil \dfrac{m}{x} \right\rceil - 1 \ge x + \dfrac{m}{x} - 1 > x + \dfrac{(k-0.5)^2}{x} - 1 \ge (2k-1) - 1 = 2k-2$

又 $k \in N$ ，$\therefore \forall 1 \le x \le m, f_m(x) \ge 2k-1$ 。

$2°$

$\because k(k-1) < m < k^2$

$\therefore (k-1) < \dfrac{m}{k} < k \Rightarrow \left\lceil \dfrac{m}{k} \right\rceil = k$

則 $x=k$ 時， $f_m(x)=k+\left\lceil \dfrac{m}{k} \right\rceil -1=k+k-1=2k-1$ 。

由 1° & 2° ：當 $k^2<m<k(k+1), k\in N$ 時，則 $T_m=\min\limits_{1\le x\le m} f_m(x)=2k-1$ 。

■

我們將【引理一】～【引理三】的結果整理成【定理一】。

【定理一】: $\forall k\in N$ ，若 $k(k-1)<m\le k^2$ 時，則 $T_m=2k-1$ 。

若 $k^2<m\le k(k+1)$ 時，則 $T_m=2k$ 。

三、最少操作次數 T_m 下，B 盒最終彈珠數量(x)的值

在【引理一】中，我們已經證明最少操作次數 T_m 下，若 $m=k^2, k\in N$ ，B 盒最終彈珠數量 $x=k$ 。接下來，我們希望對任意的情況皆能快速地得知 x 值，藉以瞭解如何操作才能達到最少操作次數 T_m 。而由於我們已經驗證完 T_m 的值，希望能藉由 T_m 值反求出 x 值。

（一）觀察 T_m 下 x 值的規律

表(二)： $T_1\sim T_{30}$ 下的 x 值

m	**1**	**2**	3	**4**	5	**6**	7	8	**9**	10	11	**12**
T_m	**1**	**2**	3	**3**	4	**4**	5	5	**5**	6	6	**6**
x	**1**	**1~2**	1~3	**2**	2~3	**2~3**	2~4	2~4	**3**	2~5	3~4	**3~4**
m	13	14	15	**16**	17	18	19	**20**				
T_m	7	7	7	**7**	8	8	8	**8**				
x	3~5	3~5	3~5	**4**	3~6	3~6	4~5	**4~5**				
m	21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	**30**		
T_m	9	9	9	9	**9**	10	10	10	10	**10**		
x	3~7	4~6	4~6	4~6	**5**	4~7	4~7	4~7	5~6	**5~6**		

我們節錄在 $T_1\sim T_{30}$ 下的 x 值於上表(二)，從中發現當 $k(k-1)<m<k^2, k\in N$

時，x 值範圍的中心為 k，且 m 距離 k^2 愈遠，x 值範圍愈大；而當 $k^2 < m < k(k+1), k \in N$ 時，x 值範圍則以 k 及 $k+1$ 為中心，同樣當 m 距離 $k(k+1)$ 愈遠，x 值範圍愈大。我們將於其後找出 x 值範圍並驗證之。

【引理四】：已知 $k(k-1) < m \le k^2, k \in N$ 時，$T_m = 2k-1$，則此時

$$k - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \le x \le k + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \text{，其中 } x \in N \text{ 且 } d = k^2 - m \text{ 。}$$

【證明】：

令 x 滿足 $T_m = x + \left\lceil \dfrac{m}{x} \right\rceil - 1 \Rightarrow x + \left\lceil \dfrac{m}{x} \right\rceil = T_m + 1$ 　又 $T_m = 2k-1$

$\therefore x + \left\lceil \dfrac{m}{x} \right\rceil = 2k \Rightarrow (2k-1) < x + \dfrac{m}{x} \le 2k$

我們分成 $(2k-1) < x + \dfrac{m}{x}$ 與 $x + \dfrac{m}{x} \le 2k$ 兩段來討論：

1° 　$(2k-1) < x + \dfrac{m}{x}$，$x \in N$

$\Leftrightarrow x^2 - (2k-1)x + m > 0 \Leftrightarrow \left[x - \dfrac{(2k-1)}{2} \right]^2 + \dfrac{1}{4}\left[4m - (2k-1)^2 \right] > 0$

又 $m > k(k-1), m \in N \Rightarrow m \ge k(k-1)+1$

$\therefore 4m - (2k-1)^2 \ge 4[k(k-1)+1] - (2k-1)^2 > 0$

故 $\forall x \in N, (2k-1) < x + \dfrac{m}{x}$

2° 　$x + \dfrac{m}{x} \le 2k$，$x \in N$

$\Leftrightarrow x^2 - 2kx + m \le 0 \Rightarrow \left(x-k\right)^2 - \left(k^2 - m\right) \le 0 \Rightarrow \left(x-k\right)^2 - \left(\sqrt{k^2-m}\right)^2 \le 0$

$\Rightarrow \left(x - k - \sqrt{k^2-m}\right)\left(x - k + \sqrt{k^2-m}\right) \le 0 \Rightarrow k - \sqrt{k^2-m} \le x \le k + \sqrt{k^2-m}$

令 $d = k^2 - m$，且 $x \in N$ 　$\therefore k - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \le x \le k + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$

由 1° & 2°：已知 $k(k-1) < m \le k^2, k \in N$ 時，$T_m = 2k-1$，則此時

$k - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \le x \le k + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$，其中 $x \in N$ 且 $d = k^2 - m$ 。

■

【引理五】：已知 $k^2<m\le k(k+1), k\in N$ 時，$T_m=2k$，則此時

$\left(x-k\right)\left(x-(k+1)\right)\le e$，其中 $x\in N$ 且 $e=k(k+1)-m$。

或表示為 $k+\left\lfloor \frac{1}{2}-\sqrt{e+\frac{1}{4}} \right\rfloor \le x\le k+\left\lfloor \frac{1}{2}+\sqrt{e+\frac{1}{4}} \right\rfloor$。

【證明】：

令 x 滿足 $T_m=x+\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil-1\Rightarrow x+\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil=T_m+1$　又 $T_m=2k$

$\therefore x+\left\lceil \frac{m}{x} \right\rceil=2k+1\Rightarrow 2k<x+\frac{m}{x}\le(2k+1)$

我們分成 $2k<x+\frac{m}{x}$ 與 $x+\frac{m}{x}\le(2k+1)$ 兩段來討論：

1°　$2k<x+\frac{m}{x}$，$x\in N$

$\Leftrightarrow x^2-2kx+m>0\Leftrightarrow\left(x-k\right)^2+\left(m-k^2\right)>0$

又 $m>k^2\Rightarrow m-k^2>0$

$\therefore \forall x\in N, 2k<x+\frac{m}{x}$

2°　$x+\frac{m}{x}\le(2k+1)$，$x\in N$

$\Leftrightarrow x^2-(2k+1)x+m\le 0$
$\Rightarrow\left(x-k\right)\left(x-(k+1)\right)-\left[k(k+1)-m\right]\le 0$
$\Rightarrow\left(x-k\right)\left(x-(k+1)\right)\le\left[k(k+1)-m\right]$

令 $e=k(k+1)-m$，且 $x\in N$

$\therefore\left(x-k\right)\left(x-(k+1)\right)\le e$

又 $x^2-(2k+1)x+m\le 0$

$$\Rightarrow\left[x-\frac{(2k+1)}{2}\right]^2 \le \frac{1}{4}\left[(2k+1)^2-4m\right]$$

$$\Rightarrow\left[x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \le \left[k(k+1)-m+\frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow\left[x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \le \left(e+\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore k+\frac{1}{2}-\sqrt{e+\frac{1}{4}} \le x \le k+\frac{1}{2}+\sqrt{e+\frac{1}{4}}$$

又 $x\in N$

$$\therefore k+\left\lceil\frac{1}{2}-\sqrt{e+\frac{1}{4}}\right\rceil \le x \le k+\left\lfloor\frac{1}{2}+\sqrt{e+\frac{1}{4}}\right\rfloor$$

由 $1^\circ \& 2^\circ$：已知 $k^2<m\le k(k+1), k\in N$ 時，$T_m=2k$，

則此時 $\big(x-k\big)\big(x-(k+1)\big)\le e$，

其中 $x\in N$ 且 $e=k(k+1)-m$。

或表示為 $k+\left\lceil\frac{1}{2}-\sqrt{e+\frac{1}{4}}\right\rceil \le x \le k+\left\lfloor\frac{1}{2}+\sqrt{e+\frac{1}{4}}\right\rfloor$。

■

我們將【引理四】及【引理五】的結果整理成【定理二】。

【定理二】：$\forall k\in N$，

(i) 已知 $k(k-1)<m\le k^2$ 時，$T_m=2k-1$，則此時

$k-\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor \le x\le k+\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor$，其中 $x\in N$ 且 $d=k^2-m$。

(ii) 已知 $k^2<m\le k(k+1)$ 時，$T_m=2k$，則此時

$\big(x-k\big)\big(x-(k+1)\big)\le e$，其中 $x\in N$ 且 $e=k(k+1)-m$。

或表示為$k+\left\lfloor \frac{1}{2}-\sqrt{e+\frac{1}{4}} \right\rfloor \le x \le k+\left\lfloor \frac{1}{2}+\sqrt{e+\frac{1}{4}} \right\rfloor$。

四、最少操作次數T_m下的操作方法數總和(N_m)

在前述$m=22$的例子中，我們以數列表示各方法A盒內逐步減少的彈珠數，從中發現有些數列可視為相同x值的數列變形，而我們已經找出T_m下的x值範圍，故接下來我們試圖找出相同x值的不同數列表示法，藉以計算相同x值的操作方法數，進而加總得到T_m下的操作方法數總和(N_m)。

（一）研究方法

1. 問題的轉換

在最少操作次數T_m下，若B盒最終彈珠數量為x，則數列中必須先累積x個1，故我們令數列中有x個「1」及(T_m-x)個「□」，其中「□」表示待定數字且$1\le □\le x$；若不論順序，數列可暫時表示為$\{1, 1, \ldots, 1, □, □, \ldots, □\}$，待決定「□」內的數字後再依其合理的位置插入。

因$1\le □\le x$，故(T_m-x)個「□」中最多可填入的數字總和為$x(T_m-x)$，而以m而言，數列中已填入x個「1」，需再填入的數字總和為$(m-x)$。因此，我們可以將問題轉換為先將(T_m-x)個「□」內全填滿「x」值，再自(T_m-x)個「x」中決定每個要扣除的數字，該數字為 0~$(x-1)$，而扣除的數字總和為$x(T_m-x)-(m-x)$。

我們令扣除的數字總和為$r_m(x)=x(T_m-x)-(m-x)$，並將扣除的(T_m-x)個數字由大至小排列形成新的數列，因此，問題可轉換成將$r_m(x)$分解為(T_m-x)個 0~$(x-1)$的數字並由大至小排列，此為著名的正整數分割問題：

「一個正整數n可以寫成一些正整數$a_1, a_2, \ldots, a_k$的和，即$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$且$a_1\ge a_2\ge \ldots \ge a_k>0$，其方法數以分割函數$p(n)$表示」。分割函數的定義為

$\forall n \in N, p(n)$ 為 n 的分割數， $p(0)=1$ 且 $p(-n)=0$；我們列舉 $n=0\sim 10$ 的分割數於下表(三)。

表(三)：$n=0\sim 10$ 的分割數 $p(n)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

以下我們先證明 $r_m(x) \le (T_m - x)$ 以確認 $r_m(x)$ 最多可分割成 $(T_m - x)$ 個 1，則將原問題轉換成正整數分割問題是可行的，並令 $p(r_m(x))$ 為 $r_m(x)$ 的分割數，即 T_m 下 B 盒最終彈珠數量為 x 的操作方法數，則操作方法數總和 $N_m = \sum_x p(r_m(x))$ ，其後再以 $m=10$ 為例說明。

2. 證明 $r_m(x) \le (T_m - x)$

【證明】：

$$(T_m - x) - r_m(x) = (T_m - x) - [x(T_m - x) - (m - x)] = x^2 - (T_m + 2)x + m + T_m$$

我們分 $k(k-1) < m \le k^2, k \in N$ 及 $k^2 < m \le k(k+1), k \in N$ 兩段來討論：

1° 當 $k(k-1) < m \le k^2$ 時，$T_m = 2k-1$ ，$k - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \le x \le k + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$ ，其中 $d = k^2 - m$ 。

$$\begin{aligned}
& x^2 - (T_m + 2)x + m + T_m \\
&= x^2 - (2k+1)x + m + (2k-1) \\
&\ge x^2 - (2k+1)x + [k(k-1)+1] + (2k-1) \quad (\because m > k(k-1) \Rightarrow m \ge k(k-1)+1) \\
&= x^2 - (2k+1)x + (k^2 + k) \\
&= (x-k)(x-(k+1)) \\
&\ge 0 \quad (\because k - \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor \le x \le k + \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor)
\end{aligned}$$

2° 當 $k^2 < m \le k(k+1)$ 時，$T_m = 2k$ ，$\left(x-k\right)\left(x-(k+1)\right) \le e$ ，其中 $e = k(k+1) - m$ 。

$$
\begin{aligned}
& x^2-(T_m+2)x+m+T_m \\
&= x^2-(2k+2)x+m+2k \\
&\geq x^2-(2k+2)x+(k^2+1)+2k \quad (\because m>k^2 \Rightarrow m \geq (k^2+1)) \\
&= x^2-(2k+2)x+(k+1)^2 \\
&= [x-(k+1)]^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

由 $1^\circ \& 2^\circ$：$(T_m-x)-r_m(x) \geq 0 \Rightarrow r_m(x) \leq (T_m-x)$。

■

3. $m=10$

因 $3^2<m=10 \leq 3\cdot 4$，故 $T_{10}=2\cdot 3=6$ 且 $(x-3)(x-4) \leq e=3\cdot 4-10=2$，即 $x=2\sim 5$。

(1) $x=2$ 時，A 盒內逐步減少的彈珠數所形成的數列初始狀態表示為 $\{1, 1, \square, \square, \square, \square\}$，此時要扣除的數字總和為 $r_{10}(2)=2\cdot 4-(10-2)=0$，又 $p(r_{10}(2))=p(0)=1$，故數列只有 1 種表示法為 $\{1, 1, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{2}\}$。

(2) $x=3$ 時，數列初始狀態表示為 $\{1, 1, 1, \square, \square, \square\}$，此時 $r_{10}(3)=3\cdot 3-(10-3)=2$，又 $p(r_{10}(3))=p(2)=2$，即 $2=2+0+0=1+1+0$，故數列有 2 種表示法為 $\{1, \boxed{1_c}, 1, 1, 1, \boxed{3}, \boxed{3}\}$ 及 $\{1, 1, \boxed{2}, \boxed{2}, 1, \boxed{3}\}$，其中第二項 1_c 需視為第二步將 1 顆彈珠放入 C 盒內才為合理的數列。

(3) $x=4$ 時，數列初始狀態表為 $\{1, 1\{1, 1, \boxed{2}, 1, 1, \boxed{4}\}$ 及 $\{1, 1, 1, \boxed{3}, \boxed{3}, \boxed{1_b}\}$，其中 1_b 為調整初始數列順序得之，視為最後一步將 1 顆彈珠放入 B 盒內，則此時 B 盒最終彈珠數量 x 仍為 4。

(4) $x=5$ 時，數列初始狀態表示為 $\{1, 1, 1, 1, 1, \square\}$，此時 $r_{10}(5)=5\cdot 1-(10-5)=0$，又 $p(r_{10}(5))=p(0)=1$，故數列只有 1 種表示法為 $\{1, 1, 1, 1, 1, \boxed{5}\}$。

因此由(1)~(4)可知：$N_{10}=1+2+2+1=6$。

（二）證明N_m的計算方式

【引理六】：已知$k(k-1)<m\le k^2, k\in N$時，$T_m=2k-1$且

$k-\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor\le x\le k+\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor$，其中$x\in N$且$d=k^2-m$，則

$$N_m=\sum_x p(r_m(x))=p(d)+2\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{d}\rfloor}p(d-i^2)$$ 。

【證明】：

$$\begin{aligned}r_m(x)&=x(T_m-x)-(m-x)\\&=x(2k-1-x)-(m-x)\\&=-x^2+2kx-m\\&=-(x-k)^2+(k^2-m)\\&=-(x-k)^2+d\end{aligned}$$

$$\therefore N_m=\sum_{x=k-\lfloor\sqrt{d}\rfloor}^{k+\lfloor\sqrt{d}\rfloor}p(r_m(x))=\sum_{x=k-\lfloor\sqrt{d}\rfloor}^{k+\lfloor\sqrt{d}\rfloor}p(-(x-k)^2+d)=p(d)+2\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{d}\rfloor}p(d-i^2)$$

■

【引理七】：已知$k^2<m\le k(k+1), k\in N$時，$T_m=2k$且$|x-k||x-(k+1)|\le e$，其中

$x\in N$且$e=k(k+1)-m$，$N_m=\sum_x p(r_m(x))=2\sum_{j=1}^{j(j-1)\le e}p(e-j(j-1))$。

【證明】：

$$\begin{aligned}r_m(x)&=x(T_m-x)-(m-x)=x(2k-x)-(m-x)=-x^2+(2k+1)x-m\\&=-(x-k)(x-(k+1))+k(k+1)-m=-(x-k)(x-(k+1))+e\end{aligned}$$

$$\therefore N_m=\sum_x^{|x-k||x-(k+1)|\le e}p(r_m(x))=\sum_x^{|x-k||x-(k+1)|\le e}p(-(x-k)(x-(k+1))+e)$$

$$=2\sum_{j=1}^{j(j-1)\le e} p(e-j(j-1))$$

■

我們將【引理六】及【引理七】的結果整理成【定理三】。

【定理三】：$\forall k,m,x\in N$，

(i)已知 $k(k-1)<m\le k^2$ 時，$T_m=2k-1$，$k-\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor\le x\le k+\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor$ 且

$d=k^2-m$，則此時 $N_m=p(d)+2\sum_{i=1}^{\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor}p(d-i^2)$。

(ii)已知 $k^2<m\le k(k+1)$ 時，$T_m=2k$，$\left(x-k\right)\left(x-(k+1)\right)\le e$ 且

$e=k(k+1)-m$，則此時 $N_m=2\sum_{j=1}^{j(j-1)\le e}p(e-j(j-1))$。

其中 $\forall n\in N\cup\{0\},\ p(n)$ 為分割函數。

五、 A 盒最初紅、白兩色彈珠數相等時(即 $m_1=m_2$)，清空盒內彈珠所需的最少操作次數 (T_{m_1,m_2})

我們依舊先以樹狀圖研究 $m_1=m_2$ 時的最少操作次數 T_{m_1,m_2} 及此時 B 盒最終紅、白彈珠數 x_1 與 x_2，從中歸納出 T_{m_1,m_2} 的規律進而證明之。我們先以 $m_1=m_2=3$ 為例說明觀察到的規律。

（一） $m_1=m_2=3$

1. 樹狀圖

我們以序組 $(a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2)$ 表示清空 A 盒彈珠的過程中不同盒內的彈珠個數，其中 a_1,b_1,c_1 分別為 A,B,C 盒內的紅色彈珠數，a_2,b_2,c_2 分別為 A,B,C 盒內的白色彈珠數，且 $\forall i,a_i+b_i+c_i=m_i$ 且 $a_i,b_i,c_i\in N\cup\{0\}$。

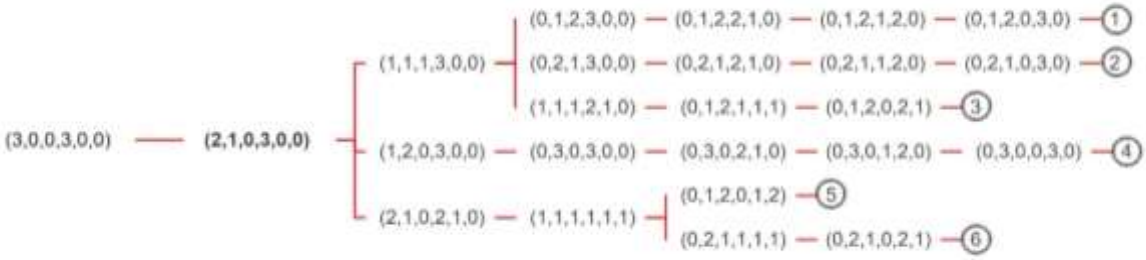
序組的初始狀態為 $(m_1,0,0,m_2,0,0)=(3,0,0,3,0,0)$，接下來的清空步驟如下：

Step1. 序組狀態有兩種可能：第一種為$(m_1-1,1,0,m_2,0,0)=(2,1,0,3,0,0)$，第二種為$(m_1,0,0,m_2-1,1,0)=(3,0,0,2,1,0)$。因為每次僅能從$A$盒中拿 1 顆紅色或白色彈珠放入$B$盒，或從$A$盒中移出與$B$盒同數量的紅、白色彈珠各$b_1$、$b_2$顆至$C$盒，故第一步只能從$A$盒中拿 1 顆紅色或白色彈珠放入$B$盒。

Step2. 因為$b_1 \ge 0$或$b_2 \ge 0$，所以可以選擇從A盒中拿 1 顆紅色或白色彈珠放入B盒，或從A盒中移出紅、白色彈珠各b_1、b_2顆至C盒，直至$a_1<b_1$或$a_2<b_2$或$a_1=a_2=0$。

Step3. 若$a_1<b_1$或$a_2<b_2$，則只能選擇從A盒中每次拿 1 顆紅色或白色彈珠放入B盒，直至$a_1=a_2=0$。

我們利用 GitMind 軟體將清空A盒彈珠的所有可能過程繪製成圖，請見附錄三，又因$m_1=m_2$，不失一般性，並僅節錄$x_1 \le x_2$的部份分支於下圖(六)。



圖(六)

2. 觀察並分析各分支的規律

(1) $x_1=x_2$

分支④：$x_1=x_2=3$

利用$x_1=x_2=3$連續清空A盒的彈珠前必須累積紅、白彈珠各 3 顆放入B盒，又$\left\lceil \dfrac{m_1-x_1}{x_1} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{m_2-x_2}{x_2} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{3-3}{3} \right\rceil = 0$，故再操作 0 次就能將$A$盒的紅、

白彈珠清空，總操作次數為$3+3+0=6$次。

分支⑤：$x_1=x_2=1$

利用$x_1=x_2=1$連續清空A盒的彈珠前必須將紅、白彈珠各1顆放入B盒，又$\left\lceil \frac{m_1-x_1}{x_1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m_2-x_2}{x_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3-1}{1} \right\rceil = 2$，故再操作2次同時將紅、白彈珠各1顆放入$B$盒就能將$A$盒的紅、白彈珠清空，總操作次數為$1+1+2=4$次。

分支⑥：$x_1=x_2=2$

利用$x_1=x_2=2$連續清空A盒的彈珠前必須累積紅、白彈珠各2顆放入B盒，又$\left\lceil \frac{m_1-x_1}{x_1} \right\rceil = \left\lceil \frac{m_2-x_2}{x_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3-2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil = 1$，故要在$b_1=b_2=1$時將紅、白彈珠各1顆移至$C$盒，總操作次數為$2+2+1=5$。

(2) $x_1 \neq x_2$

分支①：$x_1=1, x_2=3$

利用$x_1=1, x_2=3$連續清空A盒的彈珠前必須累積1紅3白的彈珠放入B盒，又$\left\lceil \frac{m_1-x_1}{x_1} \right\rceil = \left\lceil \frac{3-1}{1} \right\rceil = 2$且$\left\lceil \frac{m_2-x_2}{x_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3-3}{3} \right\rceil = 0$，故需要多操作2次將紅彈珠移至$C$盒才能將$A$盒的彈珠清空，總操作次數為$1+3+2=6$次。

分支②：$x_1=2, x_2=3$

利用$x_1=2, x_2=3$連續清空A盒的彈珠前必須累積2紅3白的彈珠放入B盒，又$\left\lceil \frac{m_1-x_1}{x_1} \right\rceil = \left\lceil \frac{3-2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1$且$\left\lceil \frac{m_2-x_2}{x_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3-3}{3} \right\rceil = 0$，故需要多操作1次將紅彈珠移至$C$盒才能將$A$盒的彈珠清空，總操作次數為$2+3+1=6$次。

分支③： $x_1=1,x_2=2$

利用 $x_1=1,x_2=2$ 連續清空 A 盒的彈珠前必須累積 1 紅 2 白的彈珠放入 B 盒，又 $\left\lceil\frac{m_1-x_1}{x_1}\right\rceil=\left\lceil\frac{3-1}{1}\right\rceil=2$ 且 $\left\lceil\frac{m_2-x_2}{x_2}\right\rceil=\left\lceil\frac{3-2}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=1$，故需要多操作 2 次才能將 A 盒的紅彈珠清空，其中 1 次是將 1 顆紅彈珠移至 C 盒，另 1 次可同時將 1 紅 1 白的彈珠移至 C 盒，總操作次數為 $1+2+2=5$ 次。

（二）定義最少操作次數 T_{m_1,m_2}

我們可以根據前述的討論定義出最少操作次數 T_{m_1,m_2}。設 A 盒最初紅、白彈珠數分別為 m_1、m_2，B 盒最終紅、白彈珠數分別為 x_1、x_2，要利用 $b_1=x_1,b_2=x_2$ 清空 A 盒彈珠，必須先操作 (x_1+x_2) 次，而清空其餘彈珠則需要多操作 $\max\left\{\left\lceil\frac{m_1-x_1}{x_1}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_2-x_2}{x_2}\right\rceil\right\}$ 次，故 $b_1=x_1,b_2=x_2$ 時的最少操作次數為

$$f_{m_1,m_2}(x_1,x_2)=x_1+x_2+\max\left\{\left\lceil\frac{m_1-x_1}{x_1}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_2-x_2}{x_2}\right\rceil\right\}=x_1+x_2+\max\left\{\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1,\left\lceil\frac{m_2}{x_2}\right\rceil-1\right\}$$

，其中 $\forall i, m_i\in N, 1\le x_i\le m_i$；因此我們定義當 A 盒最初紅、白彈珠數分別為 m_1、m_2 時，清空 A 盒內彈珠所需最少操作次數為 $T_{m_1,m_2}=\min\limits_{1\le x_i\le m_i} f_{m_1,m_2}(x_1,x_2)$。

（三）T_{m_1,m_2} 值的觀察

我們發現在最少操作次數 T_{m_1,m_2} 下的 x_1 與 x_2 相等，且 T_{m_1,m_2} 值會以 $m_1=2k^2$ 為中心且以 $2k^2\pm k$ 及 $2k^2\pm 2k$ 區分為四個區間形成規律，此可仿照單色彈珠的情形由算幾不等式推知，下表(四)我們節錄了 $m_1=m_2=1\sim 12$ 時的情況。

表(四)： $m_1=m_2=1\sim 12$

$m_1=m_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

<table>
<tr><td>x_1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>T_{m_1,m_2}</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td>6</td><td>7</td><td>7</td><td colspan="2">8</td><td>8</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">9</td></tr>
</table>

（四）證明當 $m_1 = m_2$ 時，在最少操作次數 T_{m_1,m_2} 下，$x_1 = x_2$ 。

【證明】：

$T_{m_1,m_2} = \min\limits_{1\le x_i \le m_i} f_{m_1,m_2}(x_1,x_2)$ ，其中 $f_{m_1,m_2}(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + \max\left\{\left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1, \left\lceil \frac{m_2}{x_2} \right\rceil - 1\right\}$

$\because m_1 = m_2$

不失一般性，我們可令 $x_1 \le x_2 \Rightarrow \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 \ge \left\lceil \frac{m_2}{x_2} \right\rceil - 1$

$$\begin{aligned}\therefore f_{m_1,m_2}(x_1,x_2) &= x_1 + x_2 + \max\left\{\left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1, \left\lceil \frac{m_2}{x_2} \right\rceil - 1\right\} = x_1 + x_2 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 \\ &\ge x_1 + x_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 = 2x_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1\end{aligned}$$

故 $T_{m_1,m_2} = \min\limits_{1\le x_i \le m_i} f_{m_1,m_2}(x_1,x_2) = \min\limits_{1\le x_i \le m_i}\left(x_1 + x_2 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1\right) = \min\limits_{1\le x_1 \le m_1}\left(2x_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1\right)$ ，

即在最少操作次數 T_{m_1,m_2} 下，$x_1 = x_2$ 。

■

（五）推導當 $m_1 = m_2$ 時，T_{m_1,m_2} 的值

【引理八】：當 $m_1 = m_2 = 2k^2, k \in N$ 時，$T_{m_1,m_2} = 4k - 1$ ，且此時 B 盒最終紅、白彈珠數量 $x_1 = x_2 = k$ 。

【證明】：

$1°$ 由算幾不等式知：$2x_1 + \frac{2k^2}{x_1} \ge 4k$ ，等號成立時

$$2x_1 = \frac{2k^2}{x_1} = 2k \Rightarrow x_1 = k \text{ 。}$$

$$\therefore 2x_1 + \left\lceil \frac{2k^2}{x_1} \right\rceil - 1 \ge 2x_1 + \frac{2k^2}{x_1} - 1 \ge 4k - 1$$

$$\Rightarrow \forall 1 \le x_1 \le 2k^2, 2x_1 + \left\lceil \frac{2k^2}{x_1} \right\rceil - 1 \ge 4k - 1$$

$2°$ 又 $x_1 = k$ 時， $2x_1 + \left\lceil \frac{2k^2}{x_1} \right\rceil - 1 = 2k + \left\lceil \frac{2k^2}{k} \right\rceil - 1 = 2k + 2k - 1 = 4k - 1$ 。

由 $1° \& 2°$ ： $T_{m_1, m_2} = \min\limits_{1 \le x_1 \le m_1} \left(2x_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 \right) = 4k - 1$ ，且此時 $x_1 = x_2 = k$ 。

■

【引理九】：當 $2k^2 - 2k < m_1 = m_2 \le 2k^2 - k, k \in N$ 時， $T_{m_1, m_2} = 4k - 2$ 。

【證明】：

$1°$ 由算幾不等式可知： $2x_1 + \frac{2(k-\frac{1}{2})^2}{x_1} \ge 2(2k-1)$ 。

且 $m_1 = m_2 > 2k^2 - 2k \ge 2k^2 - 2k + 1 > 2(k - \frac{1}{2})^2$ ，

$$\therefore 2x_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 \ge 2x_1 + \frac{m_1}{x_1} - 1 > 2x_1 + \frac{2(k-\frac{1}{2})^2}{x_1} - 1 \ge 2(2k-1) - 1 = 4k - 3$$

$$\Rightarrow \forall 1 \le x_1 \le m_1, 2x_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 \ge 4k - 2$$

$2°$

$$\because 2k^2 - 2k < m_1 \le 2k^2 - k$$

$$\therefore 2k - 2 < \frac{m_1}{k} \le 2k - 1 \Rightarrow \left\lceil \frac{m_1}{k} \right\rceil = 2k - 1$$

則 $x_1 = k$ 時， $2x_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 = 2k + (2k-1) - 1 = 4k - 2$ 。

由 $1°\&2°$：$T_{m_1,m_2}=\min\limits_{1\le x_1\le m_1}\left(2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\right)=4k-2$ 。

■

【引理十】：當 $2k^2-k<m_1=m_2<2k^2, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k-1$ 。

【證明】：

$1°$ 由算幾不等式可知：$2x_1+\frac{2(k-\frac{1}{4})^2}{x_1}\ge 2(2k-\frac{1}{2})$ 。

且 $m_1=m_2>2k^2-k\ge 2k^2-k+1>2(k-\frac{1}{4})^2$ ，

$\therefore 2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\ge 2x_1+\frac{m_1}{x_1}-1>2x_1+\frac{2(k-\frac{1}{4})^2}{x_1}-1\ge 2(2k-\frac{1}{2})-1=4k-2$

$\Rightarrow \forall 1\le x_1\le m_1, 2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\ge 4k-1$

$2°$

$\because 2k^2-k<m_1<2k^2$

$\therefore 2k-1<\frac{m_1}{k}<2k\Rightarrow\left\lceil\frac{m_1}{k}\right\rceil=2k$

則 $x_1=k$ 時，$2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1=2k+(2k)-1=4k-1$ 。

由 $1°\&2°$：$T_{m_1,m_2}=\min\limits_{1\le x_1\le m_1}\left(2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\right)=4k-1$ 。

■

【引理十一】：當 $2k^2<m_1=m_2\le 2k^2+k, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k$ 。

【證明】：

$1°$ 由算幾不等式可知，$2x_1+\frac{2k^2}{x_1}\ge 4k$

$$\therefore 2x_1+\left\lceil \frac{m_1}{x_1}\right\rceil -1\ge 2x_1+\frac{m_1}{x_1}-1>2x_1+\frac{2k^2}{x_1}-1\ge 4k-1$$

$$\Rightarrow \forall 1\le x_1\le m_1,\ 2x_1+\left\lceil \frac{m_1}{x_1}\right\rceil -1\ge 4k$$

2°

$$\because 2k^2<m_1<2k^2+k$$

$$\therefore 2k<\frac{m_1}{k}<2k+1\Rightarrow \left\lceil \frac{m_1}{k}\right\rceil =2k+1$$

則 $x_1=k$ 時，$2x_1+\left\lceil \frac{m_1}{x_1}\right\rceil -1=2k+(2k+1)-1=4k$ 。

由 1° & 2° ：$T_{m_1,m_2}=\min\limits_{1\le x_1\le m_1}\left(2x_1+\left\lceil \frac{m_1}{x_1}\right\rceil -1\right)=4k$ 。

■

【引理十二】：當 $2k^2+k<m_1=m_2\le 2k^2+2k,\ k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k+1$ 。

【證明】：

1° 由算幾不等式可知：$2x_1+\dfrac{2(k+\frac{1}{4})^2}{x_1}\ge 2(2k+\dfrac{1}{2})$ 。

且 $m_1=m_2>2k^2+k\ge 2k^2+k+1>2(k+\frac{1}{4})^2$ ，

$$\therefore 2x_1+\left\lceil \frac{m_1}{x_1}\right\rceil -1\ge 2x_1+\frac{m_1}{x_1}-1>2x_1+\frac{2(k+\frac{1}{4})^2}{x_1}-1\ge 2(2k+\frac{1}{2})-1=4k$$

$$\Rightarrow \forall 1\le x_1\le m_1,\ 2x_1+\left\lceil \frac{m_1}{x_1}\right\rceil -1\ge 4k+1$$

2°

$$\because 2k^2+k<m_1<2k^2+2k$$

$$\therefore 2k+1<\frac{m_1}{k}<2k+2\Rightarrow \left\lceil \frac{m_1}{k}\right\rceil =2k+2$$

則 $x_1=k$ 時，$2x_1+\left\lceil \frac{m_1}{x_1}\right\rceil -1=2k+(2k+2)-1=4k+1$ 。

由$1°\&2°$：$T_{m_1,m_2}=\min\limits_{1\le x_1\le m_1}\left(2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\right)=4k+1$。

■

我們將【引理八】～【引理十二】的結果整理成【定理四】。

【定理四】：$\forall k\in N$，若$2k^2-2k<m_1=m_2\le 2k^2-k$，則$T_{m_1,m_2}=4k-2$。

若$2k^2-k<m_1=m_2\le 2k^2$，則$T_{m_1,m_2}=4k-1$。

若$2k^2<m_1=m_2\le 2k^2+k$，則$T_{m_1,m_2}=4k$。

若$2k^2+k<m_1=m_2\le 2k^2+2k$，則$T_{m_1,m_2}=4k+1$。

六、$m_1=m_2$時，最少操作次數(T_{m_1,m_2})下B盒最終紅、白彈珠數(x_1、x_2)的值

在【引理八】中，我們已經證明最少操作次數T_{m_1,m_2}下，若$m_1=m_2=2k^2,k\in N$，B盒最終紅、白彈珠數量$x_1=x_2=k$。接下來，我們希望對任意的情況皆能快速地得知x_1、x_2值，藉以瞭解如何操作才能達到最少操作次數T_{m_1,m_2}。而由於我們已經驗證完T_{m_1,m_2}的值，希望能藉由T_{m_1,m_2}值反求出x_1、x_2值。

【引理十三】：已知$2k^2-2k<m_1=m_2\le 2k^2-k,k\in N$時，$T_{m_1,m_2}=4k-2$，則此時$x_1=x_2$且$(x_1-k)(2x_1-(2k-1))\le g$，或表示為

$$k-\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k-\left\lceil\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rceil。$$

【證明】：

令x_1滿足$T_{m_1,m_2}=2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\Rightarrow 2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil=T_{m_1,m_2}+1$

又$T_{m_1,m_2}=4k-2$

$$\therefore 2x_1+\left[\frac{m_1}{x_1}\right]=4k-1\Rightarrow(4k-2)<2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k-1)$$

我們分成 $(4k-2)<2x_1+\frac{m_1}{x_1}$ 與 $2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k-1)$ 兩段討論：

1° $(4k-2)<2x_1+\frac{m_1}{x_1},x\in N$

$$\Leftrightarrow 2{x_1}^2-(4k-2)x_1+m_1>0$$
$$\Leftrightarrow 2({x_1}^2-(2k-1)x_1)+m_1>0$$
$$\Leftrightarrow 2\left[x_1-\frac{(2k-1)}{2}\right]^2+\left[m_1-\frac{(2k-1)^2}{2}\right]>0$$

又 $m_1>2k^2-2k,m_1\in N\Rightarrow m_1\ge 2k^2-2k+1$

$$\therefore m_1-\frac{(2k-1)^2}{2}\ge 2k^2-2k+1-\frac{(2k-1)^2}{2}>0$$

故 $\forall x\in N,(4k-2)<2x_1+\frac{m_1}{x_1}$

2° $2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k-1),x_1\in N$

$$\Leftrightarrow 2{x_1}^2-(4k-1)x_1+m_1\le 0$$
$$\Rightarrow (x_1-k)(2x_1-(2k-1))-k(2k-1)-m_1\le 0$$
$$\Rightarrow (x_1-k)(2x_1-(2k-1))\le k(2k-1)-m_1$$

令 $g=k(2k-1)-m_1$，且 $x_1\in N$

$$\therefore (x_1-k)(2x_1-(2k-1))\le g$$

又 $2{x_1}^2-(4k-1)x_1+m_1\le 0$

$$\Rightarrow 2(x_1{}^2-\frac{(4k-1)}{2}x_1)+m\le 0$$

$$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(4k-1)}{4})^2-(\frac{(4k-1)^2}{8}-m)\le 0$$

$$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(4k-1)}{4})^2\le(\frac{(4k-1)^2}{8}-m)$$

$$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(4k-1)}{4})^2\le g+\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow (x_1-\frac{(4k-1)}{4})^2\le\frac{8g+1}{16}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\le x_1-k+\frac{1}{4}\le\frac{\sqrt{8g+1}}{4}$$

$$\Rightarrow k-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\le x_1\le k-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8g+1}}{4}$$

又 $x_1\in N$

$$\therefore k-\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rfloor\le x_1\le k-\left\lceil\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rceil$$

由 $1°\,\&\,2°$：已知 $2k^2-2k<m_1=m_2\le 2k^2-k, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k-2$，則此時

$$x_1=x_2 \text{ 且 } (x_1-k)(2x_1-(2k-1))\le g \text{ ，或表示為}$$

$$k-\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k-\left\lceil\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rceil \text{。}$$

■

【引理十四】：已知 $2k^2-k<m_1=m_2\le 2k^2, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k-1$，則此時

$$k-\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k+\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor \text{。}$$

【證明】：

令 x_1 滿足 $T_{m_1,m_2}=2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\Rightarrow 2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil=T_{m_1,m_2}+1$

又 $T_{m_1,m_2}=4k-1$

$\therefore 2x_1+\left[\dfrac{m_1}{x_1}\right]=4k \Rightarrow (4k-1)<2x_1+\dfrac{m_1}{x_1}\le 4k$

我們分成 $(4k-1)<2x_1+\dfrac{m_1}{x_1}$ 與 $2x_1+\dfrac{m_1}{x_1}\le 4k$ 兩段討論：

$1^\circ \quad (4k-1)<2x_1+\dfrac{m_1}{x_1}, x\in N$

$$\Leftrightarrow 2{x_1}^2-(4k-1)x_1+m_1>0$$
$$\Leftrightarrow 2({x_1}^2-\frac{(4k-1)}{2}x_1)+m_1>0$$
$$\Leftrightarrow 2\left[x_1-\frac{(4k-1)}{4}\right]^2+\left[m_1-\frac{(4k-1)^2}{8}\right]>0$$

又 $m_1>2k^2-k, m_1\in N \Rightarrow m_1\ge 2k^2-k+1$

$$\therefore m_1-\frac{(4k-1)^2}{8}\ge 2k^2-k+1-\frac{(4k-1)^2}{8}>0$$

故 $\forall x\in N, (4k-1)<2x_1+\dfrac{m_1}{x_1}$

$2^\circ \quad 2x_1+\dfrac{m_1}{x_1}\le 4k, x_1\in N$

$$\Leftrightarrow 2{x_1}^2-4kx_1+m_1\le 0$$
$$\Rightarrow 2({x_1}^2-2kx_1)+m_1\le 0$$
$$\Rightarrow 2(x_1-k)^2-(2k^2-m_1)\le 0$$
$$\Rightarrow 2(x_1-k)^2\le(2k^2-m_1)$$
$$\Rightarrow (x_1-k)^2\le\frac{(2k^2-m_1)}{2}$$
$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{(2k^2-m_1)}{2}}\le x_1-k\le\sqrt{\frac{(2k^2-m_1)}{2}}$$
$$\Rightarrow k-\sqrt{\frac{(2k^2-m_1)}{2}}\le x_1\le k+\sqrt{\frac{(2k^2-m_1)}{2}}$$

令 $h=2k^2-m_1$ ，且 $x_1\in N$

$$\therefore k-\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor\le x_1\le k+\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor$$

由$1°$&$2°$：已知$2k^2-k<m_1=m_2\le 2k^2,k\in N$時，$T_{m_1,m_2}=4k-1$，則此時

$$k-\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k+\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor$$ 。

■

【引理十五】： 已知$2k^2<m_1=m_2\le 2k^2+k,k\in N$時，$T_{m_1,m_2}=4k$，則此時$x_1=x_2$且

$(x_1-k)(2x_1-(2k+1))\le l$，或表示為

$$k+\left\lfloor\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rfloor\le x\le k+\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rfloor$$ 。

【證明】：

令x_1滿足$T_{m_1,m_2}=2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\Rightarrow 2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil=T_{m_1,m_2}+1$

又$T_{m_1,m_2}=4k$

$\therefore 2x_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil=4k+1\Rightarrow 4k<2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k+1)$

我們分成$4k<2x_1+\frac{m_1}{x_1}$與$2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k+1)$兩段討論：

$1°$　$4k<2x_1+\frac{m_1}{x_1},x\in N$

$\Leftrightarrow 2{x_1}^2-4kx_1+m_1>0$

$\Leftrightarrow 2({x_1}^2-2kx_1)+m_1>0$

$\Leftrightarrow 2\ x_1-k\ ^2+\left[m_1-2k^2\right]>0$

又$m_1>2k^2,m_1\in N\Rightarrow m_1\ge 2k^2+1$

$\therefore m_1-2k^2\ge(2k^2+1)-2k^2>0$

故$\forall x\in N,4k<2x_1+\frac{m_1}{x_1}$

$2°\quad 2x_1+\dfrac{m_1}{x_1}\le(4k+1), x_1\in N$

$$\Leftrightarrow 2x_1{}^2-(4k+1)x_1+m_1\le 0$$
$$\Rightarrow (x_1-k)(2x_1-(2k+1))-\ k(2k+1)-m_1\ \le 0$$
$$\Rightarrow (x_1-k)(2x_1-(2k+1))\le\ k(2k+1)-m_1$$

令 $l=k(2k+1)-m_1$ ，且 $x_1\in N$

$\therefore (x_1-k)(2x_1-(2k+1))\le l$

又 $2x_1{}^2-(4k+1)x_1+m_1\le 0$

$$\Rightarrow 2(x_1{}^2-\frac{(4k+1)}{2}x_1)+m_1\le 0$$
$$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(4k+1)}{4})^2-(\frac{(4k+1)^2}{8}-m_1)\le 0$$
$$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(4k+1)}{4})^2\le(\frac{(4k+1)^2}{8}-m_1)$$
$$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(4k+1)}{4})^2\le l+\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow (x_1-\frac{(4k+1)}{4})^2\le\frac{8l+1}{16}$$
$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\le x_1-k-\frac{1}{4}\le\frac{\sqrt{8l+1}}{4}$$
$$\Rightarrow k+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\le x_1\le k+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8l+1}}{4}$$

又 $x_1\in N$

$$\therefore k+\left\lceil\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rceil\le x_1\le k+\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rfloor$$

由 $1°\,\&\,2°$ ：已知 $2k^2<m_1=m_2\le 2k^2+k, k\in N$ 時， $T_{m_1,m_2}=4k$ ，則此時 $x_1=x_2$

且 $(x_1-k)(2x_1-(2k+1))\le l$ ，或表示為

$$k+\left\lceil\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rceil\le x_1=x_2\le k+\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rfloor 。$$

■

【引理十六】：已知 $2k^2+k<m_1=m_2\le 2k^2+2k, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k+1$，則此時 $x_1=x_2$

且 $2(x_1-k)(x_1-(k+1))\le u$ ，或表示為

$$k+\left\lfloor \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2u+1}}{2}\right\rfloor \le x\le k+\left\lfloor \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2u+1}}{2}\right\rfloor 。$$

【證明】：

令 x_1 滿足 $T_{m_1,m_2}=2x_1+\left\lfloor \frac{m_1}{x_1}\right\rfloor-1\Rightarrow 2x_1+\left\lfloor \frac{m_1}{x_1}\right\rfloor=T_{m_1,m_2}+1$

又 $T_{m_1,m_2}=4k+1$

$$\therefore 2x_1+\left\lfloor \frac{m_1}{x_1}\right\rfloor=4k+2\Rightarrow (4k+1)<2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k+2)$$

我們分成 $(4k+1)<2x_1+\frac{m_1}{x_1}$ 與 $2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k+2)$ 兩段討論：

1° $\quad (4k+1)<2x_1+\frac{m_1}{x_1}, x\in N$

$$\Leftrightarrow 2{x_1}^2-(4k+1)x_1+m_1>0$$

$$\Leftrightarrow 2({x_1}^2-\frac{(4k+1)}{2}x_1)+m_1>0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[x_1-\frac{(4k+1)}{4}\right]^2+\left[m_1-\frac{(4k+1)^2}{8}\right]>0$$

又 $m_1>2k^2+k, m_1\in N\Rightarrow m_1\ge 2k^2+k+1$

$$\therefore m_1-\frac{(4k+1)^2}{8}\ge(2k^2+k+1)-\frac{(4k+1)^2}{8}>0$$

故 $\forall x\in N, 4k+1<2x_1+\frac{m_1}{x_1}$

2° $\quad 2x_1+\frac{m_1}{x_1}\le(4k+2), x_1\in N$

$\Leftrightarrow 2{x_1}^2-(4k+2)x_1+m_1 \le 0$

$\Rightarrow (2x_1-2k)(x_1-(k+1))-\ 2k(k+1)-m_1\ \le 0$

$\Rightarrow 2(x_1-k)(x_1-(k+1)) \le\ 2k(k+1)-m_1$

令 $u=2k(k+1)-m_1$，且 $x_1 \in N$

$\therefore 2(x_1-k)(x_1-(k+1)) \le u$

又 $2{x_1}^2-(4k+2)x_1+m_1 \le 0$

$\Rightarrow 2({x_1}^2-(2k+1)x_1)+m_1 \le 0$

$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(2k+1)}{2})^2-(\frac{(2k+1)^2}{2}-m_1) \le 0$

$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(2k+1)}{2})^2 \le (\frac{(2k+1)^2}{2}-m_1)$

$\Rightarrow 2(x_1-\frac{(2k+1)}{2})^2 \le u+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x_1-\frac{(2k+1)}{2})^2 \le \frac{2u+1}{4}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2u+1}}{2} \le x_1-k-\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{2u+1}}{2}$

$\Rightarrow k+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2u+1}}{2} \le x_1 \le k+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2u+1}}{2}$

又 $x_1 \in N$

$\therefore k+\left\lceil \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2u+1}}{2} \right\rceil \le x_1 \le k+\left\lfloor \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2u+1}}{2} \right\rfloor$

由 1° & 2°：已知 $2k^2+k<m_1=m_2 \le 2k^2+2k, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k+1$，則此時 $x_1=x_2$ 且 $2(x_1-k)(x_1-(k+1)) \le u$ ，或表示為

$$k+\left\lceil \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2u+1}}{2} \right\rceil \le x_1=x_2 \le k+\left\lfloor \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2u+1}}{2} \right\rfloor。$$

■

我們將【引理十三】到【引理十六】的結果整理成【定理五】。

【定理五】：$\forall k \in N$ ，

(i) 已知 $2k^2-2k<m_1=m_2\le 2k^2-k, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k-2$，則此時 $x_1=x_2$ 且

$(x_1-k)(2x_1-(2k-1))\le g$，或表示為

$$k-\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k-\left\lceil\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rceil。$$

(ii) 已知 $2k^2-k<m_1=m_2\le 2k^2, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k-1$，則此時

$$k-\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k+\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor。$$

(iii) 已知 $2k^2<m_1=m_2\le 2k^2+k, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k$，則此時

$x_1=x_2$ 且 $(x_1-k)(2x_1-(2k+1))\le l$，或表示為

$$k+\left\lceil\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rceil\le x\le k+\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rfloor。$$

(iiii) 已知 $2k^2+k<m_1=m_2\le 2k^2+2k, k\in N$ 時，$T_{m_1,m_2}=4k+1$，則

此時 $x_1=x_2$ 且 $2(x_1-k)(x_1-(k+1))\le u$，或表示為

$$k+\left\lceil\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2u+1}}{2}\right\rceil\le x\le k+\left\lfloor\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2u+1}}{2}\right\rfloor。$$

七、A 盒有相同數量的多色彈珠時，清空盒內彈珠所需的最少操作次數

由前述討論的過程中，我們猜想當 A 盒有相同數量的 n 種顏色彈珠時(即 $m_1=m_2=\cdots=m_n$)的最少操作次數 $T_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ 應可仿照前述的方式推廣，將 $T_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ 分成 $2n$ 個區間陳述。

仿照【定理一】及【定理四】的證明過程，我們可以推論出【定理六】:

【定理六】: $\forall k\in N, n=1,2,\cdots,4$ 且 $-n\le q<n,\ q\in Z$，

當 $nk^2+qk<m_1=m_2=\cdots=m_n\le nk^2+(q+1)k$ 時，$T_{m_1,m_2,\cdots,m_n}=2nk+q$。

【證明】:

$$T_{m_1,m_2,\cdots,m_n}=\min_{1\le x_i\le m_1}\left\{x_1+x_2+\cdots+x_n+\max\left\{\left\lceil\frac{m_1-x_1}{x_1}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_2-x_2}{x_2}\right\rceil,\cdots,\left\lceil\frac{m_n-x_n}{x_n}\right\rceil\right\}\right\}$$

1°

因 $m_1=m_2=\cdots=m_n$，不失一般性，我們令 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$，則

$\max\left\{\left\lceil\frac{m_1-x_1}{x_1}\right\rceil,\left\lceil\frac{m_1-x_2}{x_2}\right\rceil,\cdots,\left\lceil\frac{m_1-x_n}{x_n}\right\rceil\right\}=\left\lceil\frac{m_1-x_1}{x_1}\right\rceil=\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1$，

故 $T_{m_1,m_2,\cdots,m_n}=\min_{1\le x_1\le m_1}\left\{nx_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\right\}$。

2°

由算幾不等式可知：$nx_1+\frac{n(k+\frac{q}{2n})^2}{x_1}\ge 2n(k+\frac{q}{2n})$，

且 $m_1>nk^2+qk\ge nk^2+qk+1=n(k+\frac{q}{2n})^2+1-\frac{q^2}{4n}\ge n(k+\frac{q}{2n})^2$ ($\because n\le 4$) (等號發生時 $n=4,q=-4$)

$\therefore nx_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\ge nx_1+\frac{m_1}{x_1}-1>nx_1+\frac{n(k+\frac{q}{2n})^2}{x_1}-1\ge 2n(k+\frac{q}{2n})-1=2nk+q-1$

又 $x\in N\Rightarrow\forall 1\le x_1\le m_1, nx_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1\ge 2nk+q$

3°

$\because nk^2+qk<m_1\le nk^2+(q+1)k$

$\therefore nk+q<\frac{m_1}{k}\le nk+(q+1)\Rightarrow\left\lceil\frac{m_1}{k}\right\rceil=nk+(q+1)$

則 $x_1=k$ 時，$nx_1+\left\lceil\frac{m_1}{x_1}\right\rceil-1=nk+(nk+q+1)-1=2nk+q$。

由 $1°\&2°\&3°$：$\forall k\in N, n=1,2,\cdots,4$ 且 $-n\le q<n,\ q\in Z$

當 $nk^2+qk<m_1=m_2=\cdots=m_n\le nk^2+(q+1)k$ 時，$T_{m_1,m_2,\cdots,m_n}=2nk+q$。

■

八、A 盒有相同數量的多色彈珠時，最少操作次數下 B 盒中各顏色的最終彈珠數量

在【定理六】我們已經推廣出了 A 盒有 1~4 種顏色彈珠時的最少操作次數，我們猜想在最少操作次數下 B 盒中各顏色的最終彈珠數量可以仿照前述的方式推廣。

仿照【定理二】及【定理五】的證明過程，我們可以推論出【定理七】:

【定理七】: $\forall k \in N, n = 1, 2, \cdots, 4$ 且 $-n \le q < n,\ q \in Z$ ，

已知 $nk^2 + qk < m_1 = m_2 = m_3 \le nk^2 + (q+1)k$ 時，

$T_{m_1, m_2, m_3} = 2nk + q$ 且 $x_1 = x_2 = x_3$ ，

則 $(x-k)(nx-(nk+(q+1))) \le z$ ，或表示為

$$k + \left\lceil \frac{(q+1)}{2n} - \frac{\sqrt{4nz+(q+1)^2}}{2n} \right\rceil \le x_1 \le k + \left\lfloor \frac{(q+1)}{2n} + \frac{\sqrt{4nz+(q+1)^2}}{2n} \right\rfloor ,$$

其中 $z = nk^2 + (q+1)k - m_1$ 。

【證明】:

令 x_1 滿足 $nx + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil - 1 = T_{m_1,m_2,m_3} \Rightarrow nx + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil = T_{m_1,m_2,m_3} + 1$

又 $T_{m_1, m_2, m_3} = 2nk + q$

$$\therefore nx_1 + \left\lceil \frac{m_1}{x_1} \right\rceil = 2nk + q + 1$$

$$\Rightarrow 2nk + q < nx_1 + \frac{m_1}{x_1} \le 2nk + q + 1$$

我們分成 $2nk + q < nx_1 + \frac{m_1}{x_1}$ 與 $nx_1 + \frac{m_1}{x_1} \le 2nk + q + 1$ 兩段討論：

1° $(2nk+q) < nx_1 + \frac{m_1}{x_1}, x \in N$

$$\Leftrightarrow nx_1^{\,2} - (2nk+q)x_1 + m_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow n(x_1^{\,2} - \frac{(2nk+q)}{n}x_1) + m_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow n\left[x_1 - \frac{(2nk+q)}{2n}\right]^2 + \left[m_1 - \frac{(2nk+q)^2}{4n}\right] > 0$$

又 $m_1 > nk^2 + qk, m_1 \in N \Rightarrow m_1 \geq nk^2 + qk + 1$

$$\therefore m_1 - \frac{(2nk+q)^2}{4n} \geq (nk^2 + qk + 1) - \frac{(2nk+q)^2}{4n} \geq 0$$

又等號成立時，$n = 4, q = -4$

$$n\left[x_1 - \frac{(2nk+q)}{2n}\right]^2 = 4\left[x_1 - \frac{(8k-4)}{8}\right]^2 > 0$$

故 $\forall x \in N, 2nk + q < nx_1 + \dfrac{m_1}{x_1}$

2° $\quad nx_1 + \dfrac{m_1}{x_1} \leq (2nk + q + 1), x_1 \in N$

$\Leftrightarrow nx_1{}^2 - (2nk + q + 1)x_1 + m_1 \leq 0$

$\Rightarrow (x_1 - k)(nx_1 - (nk + (q+1))) - k(nk + (q+1)) - m_1 \leq 0$

$\Rightarrow (x_1 - k)(nx_1 - (nk + (q+1))) \leq k(nk + (q+1)) - m_1$

令 $z = k(nk + (q+1)) - m_1$，且 $x_1 \in N$

$\therefore (x_1 - k)(nx_1 - (nk + (q+1))) \leq z$

又 $nx_1{}^2 - (2nk + q + 1)x_1 + m_1 \leq 0$

$$\Rightarrow n(x_1{}^2 - \frac{(2nk+q+1)x_1}{n}) + m_1 \leq 0$$

$$\Rightarrow n(x_1 - \frac{(2nk+q+1)}{2n})^2 - (\frac{(2nk+q+1)^2}{4n} - m_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow n(x_1 - \frac{(2nk+q+1)}{2n})^2 \leq (\frac{(2nk+q+1)^2}{4n} - m_1)$$

$$\Rightarrow n(x_1 - \frac{(2nk+q+1)}{2n})^2 \leq z + \frac{(q+1)^2}{4n}$$

$$\Rightarrow (x_1 - \frac{(2nk+q+1)}{2n})^2 \leq \frac{4nz + (q+1)^2}{4n^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{4nz + (q+1)^2}}{2n} \leq x_1 - k - \frac{(q+1)}{2n} \leq \frac{\sqrt{4nz + (q+1)^2}}{2n}$$

$$\Rightarrow k + \frac{(q+1)}{2n} - \frac{\sqrt{4nz + (q+1)^2}}{2n} \leq x_1 \leq k + \frac{(q+1)}{2n} + \frac{\sqrt{4nz + (q+1)^2}}{2n}$$

又 $x_1 \in N \therefore k + \left[\dfrac{(q+1)}{2n} - \dfrac{\sqrt{4nz + (q+1)^2}}{2n}\right] \leq x_1 \leq k + \left[\dfrac{(q+1)}{2n} + \dfrac{\sqrt{4nz + (q+1)^2}}{2n}\right]$

■

伍、研究結果

一、A 盒中只有一種顏色的彈珠

項目 / m	最少操作次數 T_m	B 盒最終彈珠數量 x	操作方法總數 N_m
$k(k-1)<m\le k^2$	$2k-1$	$k-\lfloor\sqrt{d}\rfloor\le x\le k+\lfloor\sqrt{d}\rfloor$	$p(d)+2\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{d}\rfloor}p(d-i^2)$
$k^2<m\le k(k+1)$	$2k$	$k+\left\lfloor\frac{1}{2}-\sqrt{e+\frac{1}{4}}\right\rfloor\le x\le k+\left\lfloor\frac{1}{2}+\sqrt{e+\frac{1}{4}}\right\rfloor$	$2\sum_{j=1}^{j(j-1)\le e}p(e-j(j-1))$

二、A 盒有相同數量的紅、白兩色彈珠

項目 / $m_1=m_2$	最少操作次數 T_{m_1,m_2}	B 盒最終紅、白彈珠數 $x_1=x_2$
$2k^2-2k<m_1\le 2k^2-k$	$4k-2$	$k-\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k-\left\lfloor\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8g+1}}{4}\right\rfloor$
$2k^2-k<m_1\le 2k^2$	$4k-1$	$k-\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k+\left\lfloor\sqrt{\frac{h}{2}}\right\rfloor$
$2k^2<m_1\le 2k^2+k$	$4k$	$k+\left\lfloor\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k+\left\lfloor\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{8l+1}}{4}\right\rfloor$
$2k^2+k<m_1\le 2k^2+2k$	$4k+1$	$k+\left\lfloor\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2u+1}}{2}\right\rfloor\le x_1=x_2\le k+\left\lfloor\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2u+1}}{2}\right\rfloor$

三、A 盒有相同數量的 1~4 色彈珠

$m_1=m_2=\cdots=m_4$ / 項目	$nk^2+qk<m_1=m_2=\cdots=m_n\le nk^2+(q+1)k$
最少操作次數 $T_{m_1=m_2=\cdots=m_n}$	$2nk+q$
B 盒最終各顏色彈珠數 $x_1=x_2=\cdots=x_n$	$k+\left\lfloor\frac{(q+1)}{2n}-\frac{\sqrt{4nz+(q+1)^2}}{2n}\right\rfloor\le x_1\le k+\left\lfloor\frac{(q+1)}{2n}+\frac{\sqrt{4nz+(q+1)^2}}{2n}\right\rfloor$

陸、結論

經由前述的討論，當 A 盒中有 m 顆單色的彈珠時，我們已能快速地找到清空盒內彈珠的的最少操作次數 T_m 、 B 盒最終彈珠數量 x 及操作方法總數 N_m ，進而能一一列出最少操作次數的所有可能操作過程。其次，我們試著先找出了當 A 盒中有相同數量的兩種顏色彈珠時的最少操作次數 T_{m_1,m_2} 、B 盒最終彈珠數(x_1 、 x_2)，並討論出 A 盒中有相同數量的 1~4 種顏色彈珠的最少操作次數以及最少操作次數下 B 盒中各顏色的最終彈珠數。

柒、未來展望

我們相信類似的條件下仍能繼續找出其中規律，未來希望能推廣出 A 盒中有相同或不同數量的 n 種顏色彈珠的最少操作次數 $T_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ 、 B 盒最終彈珠數量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及操作方法總數 $N_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ 。

捌、參考資料及其他

參考資料

[1] 108 學年度台北市普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽數學科筆試(二)

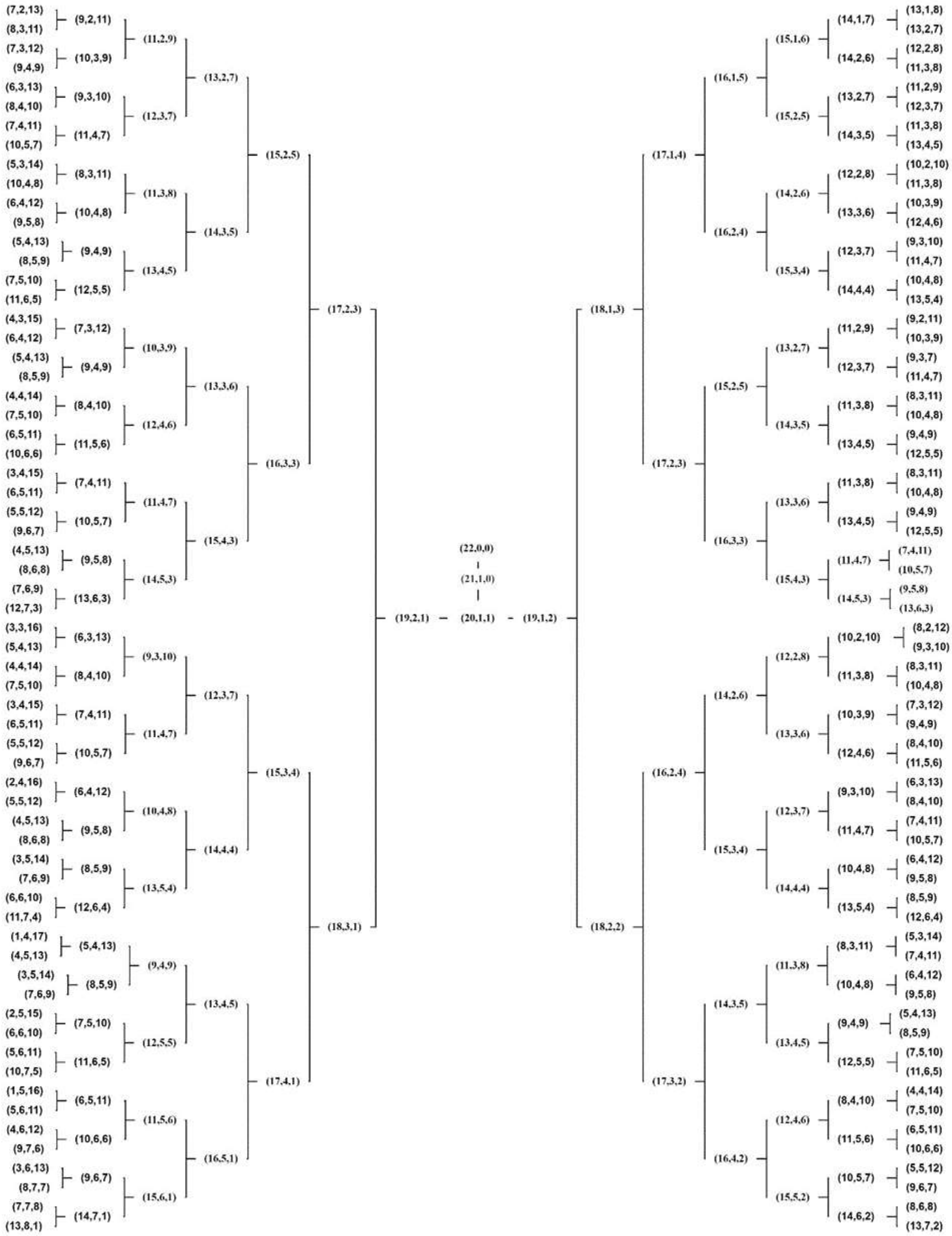
[2] 卡司塔維奇(2011)。解開分割數結構之謎。科學人雜誌，**111**，20。

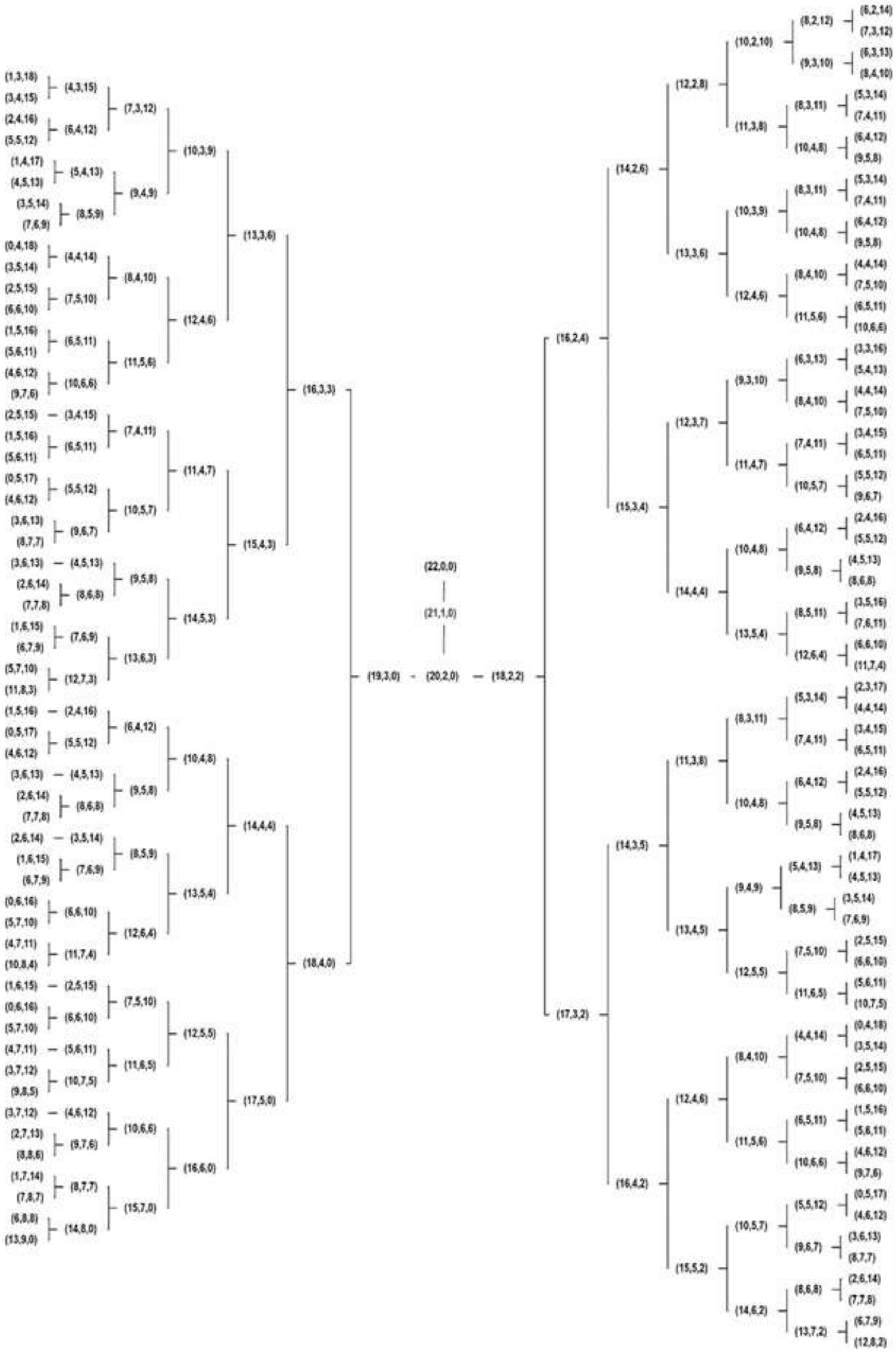
[3] 嚴鎮軍(主編)(1993)。初中數學競賽教程。台北市：九章出版社。

[4] 嚴鎮軍(主編)(1991)。高中數學競賽教程。台北市：九章出版社。

[5] 潘承洞(2002)。簡明數論。台北市：九章出版社。

附錄一：$m = 22$ 時產生清空 A 盒彈珠最少操作次數的過程





附錄二：$m=1\sim50$ 的相關數值

<table>
<tr><td>m</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="3">3</td><td>4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">8</td><td>9</td><td colspan="4">10</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">12</td></tr>
<tr><td>T_m</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="3">3</td><td>3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">5</td><td>5</td><td colspan="4">6</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$r_m(x)$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$p(r_m(x))$</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>N_m</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="3">3</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">3</td><td>1</td><td colspan="4">6</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>m</td><td colspan="3">13</td><td colspan="3">14</td><td colspan="3">15</td><td>16</td><td colspan="4">17</td><td colspan="4">18</td><td colspan="2">19</td><td colspan="2">20</td><td colspan="5">21</td></tr>
<tr><td>T_m</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">7</td><td>7</td><td colspan="4">8</td><td colspan="4">8</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">8</td><td colspan="5">9</td></tr>
<tr><td>x</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$r_m(x)$</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$p(r_m(x))$</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>N_m</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">3</td><td>1</td><td colspan="4">8</td><td colspan="4">6</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="5">13</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>m</td><td colspan="3">22</td><td colspan="3">23</td><td colspan="3">24</td><td>25</td><td colspan="4">26</td><td colspan="4">27</td><td colspan="4">28</td><td colspan="2">29</td><td colspan="2">30</td></tr>
<tr><td>T_m</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">9</td><td colspan="3">9</td><td>9</td><td colspan="4">10</td><td colspan="4">10</td><td colspan="4">10</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">10</td></tr>
<tr><td>x</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$r_m(x)$</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$p(r_m(x))$</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>N_m</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3">4</td><td colspan="3">3</td><td>1</td><td colspan="4">14</td><td colspan="4">8</td><td colspan="4">6</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

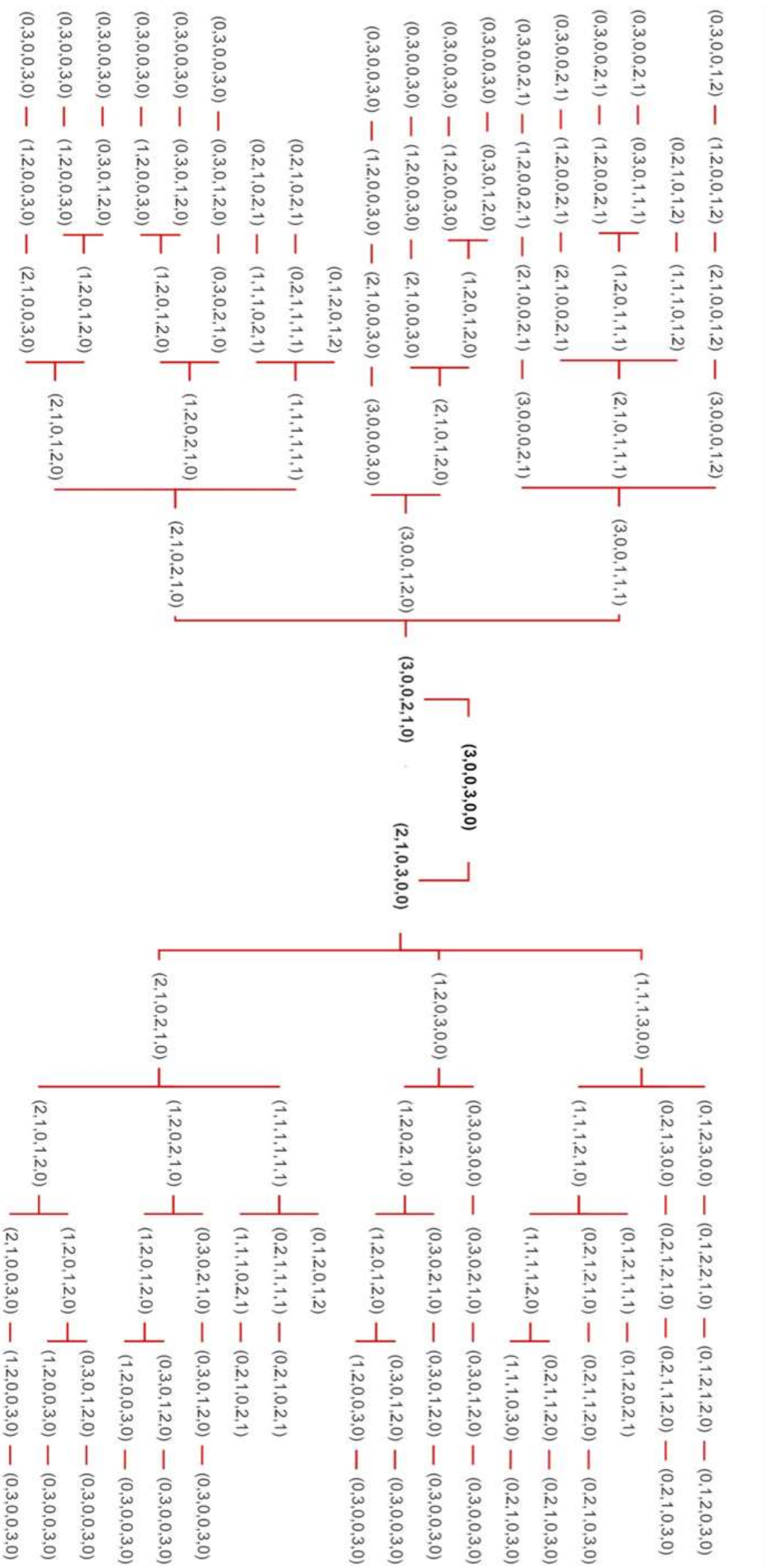
<table>
<tr><td>m</td><td colspan="5">31</td><td colspan="5">32</td><td colspan="3">33</td><td colspan="3">34</td><td colspan="3">35</td><td>36</td><td colspan="4">37</td></tr>
<tr><td>T_m</td><td colspan="5">11</td><td colspan="5">11</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">11</td><td colspan="3">11</td><td>11</td><td colspan="4">12</td></tr>
<tr><td>x</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$r_m(x)$</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$p(r_m(x))$</td><td>1</td><td>5</td><td>7</td><td>5</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>7</td><td>3</td></tr>
</table>

N_m	19	13	7	4	3	1	20	

m	38				39				40				41		42		43					44				
T_m	12				12				12				12		12		13					13				
x	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	6	7	6	7	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
$r_m(x)$	2	4	4	2	1	3	3	1	0	2	2	0	1	1	0	0	2	5	6	5	2	1	4	5	4	1
$p(r_m(x))$	2	5	5	2	1	3	3	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	7	11	7	2	1	5	7	5	1
N_m	14				4				6				2		2		29					19				

m	45					46			47			48			49	50					
T_m	13					13			13			13			13	14					
x	5	6	7	8	9	6	7	8	6	7	8	6	7	8	7	5	6	7	8	9	10
$r_m(x)$	0	3	4	3	0	2	3	2	1	2	1	0	1	0	0	0	4	6	6	4	0
$p(r_m(x))$	1	3	5	3	1	2	3	2	1	2	1	1	1	1	1	1	5	11	11	5	1
N_m	13					7			4			3			1	34					

附錄三：$m_1 = m_2 = 3$ 時清空 A 盒彈珠的所有過程



【評語】010015

本作品推廣一個數學競賽中的問題，可以視為一個特定規則下尋找最佳策略的問題。原始問題是一個有趣的小問題，作者對此問題做了延伸工作，做出了完整的結果，對於問題的掌握度相當高。可惜問題本身能繼續延伸的方向有限，且目前所得到的結果亦能預測，是比較美中不足之處。整體來說是有數學味道的作品。