2022 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010012**

參展科別　數學

作品名稱　分數的拆分

得獎獎項　三等獎

就讀學校　國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師　夏良忠、洪允東

作者姓名　陳松筠、何宇凡

關鍵詞　<u>單位分數、**Erdös-Straus** 猜想、**Schinzel** 猜想</u>

作者簡介

大家好，我是陳松筠(左)，我來自師大附中科學班。 在高中時，我才開始做專題研究，到了高二時，我了解專題研究有趣的地方，於是，我便花了不少時間在做數學專題。 雖然做這份研究時，時常處處碰壁，但在老師、教授以及宇凡的幫忙下，以及我對研究的熱忱，讓我在每一次的困境中，找到方向與解決方法。 在研究期間，我最沉浸在解決問題與尋找問題上，每一次解決了一個問題，都會有成就感，也會產生另一個問題，於是就驅使我繼續研究。

大家好，我是何宇凡(右)，同樣就讀附中科學班。在高一時我接觸到了數學競賽， 並發掘了自己對數學的興趣，於是我決定與松筠一同研究。 我在這份研究當中，負責大部分程式、演算法，以及較少部分證明。 閒暇時刻我們兩位也會一起討論有關專研、數學競賽或大學數學，互相激勵學習。

摘要

我們已經知道，任何分數都可以拆成數個單位分數和，也有各種不同的拆法，我們發現在不同的拆法中會有各種不同的長度，例如$\frac{2}{5}$可拆成$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$,$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$，等各種不同的形式。由於$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$公式，已經拆成了各種單位分數的和之後，又可拆出各種不同的和。因此在這份報告中，我們想找出各種分數最短拆分的方法。我們的策略是在拆分的過程中，先用「貪心算法」：$\frac{b}{a}=\frac{1}{q+1}+\frac{b-r}{a(q+1)}$，其中$a=bq+r$找出最短拆分長度的一個上界，再利用 Erdös-Straus 猜想、或是直接解不定方程，找出最短拆分長度。

後來我們遇到了 Schinzel 猜想，我們便開始著手討論有關 Erdös-Straus 猜想與 Schinzel 猜想的證明討論，也看了許多關於這兩個猜想的文章。總歸來說，我們討論 Schinzel 猜想的方法是將正整數n模一個適當的整數，得到一個同餘類，去討論哪些正整數n可以寫成$\frac{l}{n}=\frac{1}{q+t}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的形式，其中$q=\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor$。

Abstract

It is known that each fraction has its Eygptian fraction decomposition, and there are many different ways to divide the fraction which results in different lengths. For example, the fraction $\frac{2}{5}$ can be written as $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}, \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$, and so on. Due to the formula, $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$, if the fraction has been written as a series of unit fraction, we can continue separating the unit fractions into another sums of unit fractions. Therefore, this study hopes to explore methods to find the minimum separation of a proper fraction. We plan to use the greedy algorithm, $\frac{b}{a}=\frac{1}{q+1}+\frac{b-r}{a(q+1)}$, where $a=bq+r$, in order to find an upper bound of the minimal separation length, and then we use Erdös-Straus conjecture or solve the Diophantine equation to find the minimal separation length.

After that, we consult the Schinzel conjecture and further to discuss the proof of Erdös-Straus conjecture. All in all, in order to prove the conjecture, we modulo n by a proper integer to get a congruence class, and discuss which integer n can be written as a form of $\frac{l}{n}=\frac{1}{q+t}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

壹、前言

一、研究動機

我們在找專題研究的題目時，偶然地翻了森棚教官數學題的內容， 我們試著去解一些題目，解完後， 發現有更深入的問題可以研究， 便開啟了這一份研究的內容了！

森棚教官數學題中的題目讓我們感到有興趣的有下列兩題， 題目一：如果分母只能用偶數表示的相異單位分數， 要如何湊成 1？最少需要幾項？題目二：如果分母只能用 $2,5,8,11,14,17,\cdots$（即形如$3k+2$的正整數)的相異單位分數， 要如何湊成 1？最少需要幾項？我們就想放寬分母的限制， 例如：將拆分的數列從偶數、$3k+2$等數列的限制拔除：拆分的數列為正整數。

從這兩個題目衍生出我們想要研究的問題， 將上述問題中的限制移除後， 我們發現每一個真分數都可以寫成數個相異單位分數的和， 而每次將這些真分數寫成數個單位分數相加的時候都可以找到各種不同的寫法， 進而得到不同的「拆分長度」， 以$\frac{7}{10}$為例：$\frac{7}{10}=\frac{2+5}{2\times5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$，也可以把它寫成$\frac{7}{10}=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$。因此我想在這份研究計畫中找到對於任意的真分數$\frac{b}{a}$表示成數個相異單位分數的和的最短長度。 等到研究的內容完備後， 仿照題目 1、題目 2 的要求， 再重新加入限制條件， 例如：拆分的數列為奇數、偶數或其他著名的數列， 例如：費氏數列、等差數列。

二、研究目的

(一)　找出任意真分數的拆分使得拆分後的級數長度最短，找出$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)$固定$a,b$時的值，且找出$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)$的最小上界，其中$b<a$。

(二)　找出任意真分數的拆分在等差數列(公差不為 1)的限制下，求拆分的最短長度，並提供一個有效的演算法處理。即尋找

$$\min\left\{l\,\middle|\,\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{x_k}\right\},$$

其中$\langle x_k \rangle$是一個形如$pn+q$的數列，其中$p \neq 1$，且p, q為互質的固定正整數。

(三)　找出任意正有理數的拆分使得拆分後的級數項數最短，即將研究目的(一)推廣到一般的正有理數，以及將研究目的(二)推廣到一般的正有理數。

三、研究設備與器材

利用電腦與 python 計算；最後用 LaTeX 撰寫報告。

貳、研究過程與方法

一、研究方法

從前面的 Erdös-Straus 猜想與 Schinzel 猜想，要去求任意真分數$\frac{b}{a}$的$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)$的值會是很困難的。因此我們的策略是先求$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)$的上界然後再用 Erdös-Straus 猜想與 Schinzel 猜想等內容去估計$\frac{b}{a}$要拆成幾項的範圍，然後用程式去檢驗猜想的規則，最後再思考要如何把範圍縮小。

二、名詞定義

Definition 1 (單位分數). 形如$\frac{1}{n}$的分數，其中$n \in \mathbb{N}$。

Definition 2 (拆分). 將一個真分數拆成數個**相異**單位分數的和，也就是說將一個分數$\frac{b}{a}$寫成 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ 滿足$\forall 1 \leq i < j \leq n$，都有$x_i \neq x_j$。

Definition 3 (拆分長度). 一個分數拆成**相異**單位分數和的項數，例如：$\frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k}$ 的拆分長度為l。

Definition 4 (len(b/a)). 表示分數$\frac{b}{a}$的最短拆分長度，即

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) = \min\left\{ l \,\middle|\, \frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k}, x_1 < \cdots < x_l, x_1, \cdots, x_l \in \mathbb{N} \right\} \tag{1}$$

在正式開始研 $1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ 究之前，我先給個前面提到的森棚教官數學題的解法。

三、森棚教官數學題

為了簡便起見，以下所說的單位分數和都是**相異**的單位分數和。

Problem 1. 如果分母只能用偶數$2,4,6,\cdots$，要湊成1要怎麼湊？最少需要幾項？

我們用兩個步驟解開這題，先構造最小值，再證明小於它的不合。

Solution.

(一) 構造最短拆分。

我們已經知道：$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，而題目條件為分母只能用偶數，而且$\frac{1}{3}$可拆成$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$。因此，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$。所以我們只要證明不可能拆成兩項以及不可能拆成三項。而拆成兩項無解是顯然的，因為$\max\left\{\frac{1}{2m}+\frac{1}{2n}\middle| m,n\in\mathbb{N},m\neq n\right\}=\frac{3}{4}$。那麼只要證明：$2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$無解，其中$x,y,z$為相異的正整數，即可說明 1 拆成四個分母為偶數的單位分數的級數和是最短的拆分。

(二) 證明4項是最短拆分。

證明：$2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$無解。不妨令$x<y<z$，則：$2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x}$。則：$x<\frac{3}{2}$，因此$x=1$。故：$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，證明不存在$(y,z)$為相異正整數，則：$yz-y-z=0$，則：$(y-1)(z-1)=1$，故：只有$(2,2)$的解，與原假設不合，所以$2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$無解。

□

Problem 2. 如果分母只能用$2,5,8,11,14,17,\cdots$（即形如$3k+2$的數），要湊成 1 要怎麼湊？最少需要幾項？

Solution. 先假設 $1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{px_k+q}$ 滿足$1<a_1<\cdots<a_n$。顯然，當$n=2$時不合，因為$\max\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\middle| m-2,n-2\in 3\mathbb{N},m\neq n\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}<1$。因此考慮$n>2$的狀況。

(一)　限縮n的範圍。

考慮一個關於n的限制條件的引理。

Lemma 1. 設：

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{px_k + q},$$

其中$p, q, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$，且$\gcd(p, q) = 1$，則

$$n \equiv q \pmod{p}. \tag{2}$$

Proof. 因為　　　　　　　　，因此我們會有

$$\prod_{k=1}^{n}(px_k + q) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j \neq i}(px_j + q), \tag{3}$$

則對第(1)式的左右兩邊同時模p，可得

$$q^n \equiv nq^{n-1} \pmod{p}.$$

又因為$\gcd(p, q) = 1$，因此$n \equiv q \pmod{p}$。 □

由引理 1 可知，我們只需要討論$n = 5, n = 8, \cdots$的狀況。

(二)　證明在$n = 5$時無解。

假設$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$，其中$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$，且

$$a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv a_5 \equiv 2 \pmod{3}$$

則會有

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}=\frac{3041}{3080}<1$$

(三) 構造$n=8$時的解。

我們用 python 以深度優先演算法(dfs, deep first search)，尋找在$n=8$時的所有解，設：

$$1=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_k}$$

滿足當$k=1,2,\cdots,8$都有$a_k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$。經由程式的尋找後總共有 149 組解，而最小的一組解為$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)=(2,5,8,14,20,44,56,77)$，其中最小的一組解的定義為$\max\{a_1,\cdots,a_8\}$為最小值，數對中的每一個數為單位分數的分母。

□

藉由這兩題，我們獲得了對這份專題的啟發，決定要探討最短拆分的問題。

四、文獻探討

(一) 拆分公式

在文獻中，有詳細的列出各種拆分公式的來由與推論，在此我們只將用到的拆分公式列上來。

Proposition 1 (古埃及法).

$$\frac{r}{pq}=\frac{1}{pz}+\frac{1}{qz} \tag{4}$$

其中，$z=\frac{p+q}{r}\in\mathbb{N}$。

Proposition 2 (Fibonacci 法). 對於所有的$a,b\in\mathbb{N}$，當$a=bq+r,0\le r<b$時，並且$q,r\in\mathbb{N}$，會有

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{q+1}+\frac{b-r}{a(q+1)}. \tag{5}$$

當我們對$\frac{b-r}{a(q+1)}$使用 Fibonacci 法做拆分，可以再拆出另一個單位分數。 此外，當$r=0$時，$b|a$，因此$\frac{b}{a}$可約分成單位分數。

Proposition 3 (Stewart 法). 對於所有的正整數n，都有

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)} \tag{6}$$

(二) 目前已知的性質：

Proposition 4. 所有的真分數都可以寫成單位分數的和。

此結果的證明就直接用 Fibonacci 法即可得證。

Proposition 5. $\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)=2$成立，若且惟若存在$p\in\mathbb{N}$使得$p|a^2$且$p\equiv -a \pmod{b}$。若此條件成立，則拆分的結果為

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\left(\frac{a+p}{b}\right)}+\frac{1}{\left[\frac{a+(a^2/p)}{b}\right]} \tag{7}$$

特別的，若$a\equiv -1 \pmod{b}$，則$\frac{b}{a}$必可以拆成兩項相異單位分數和。

Proof. 設：

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\\
\Longrightarrow\ & bxy-ax-ay=0\\
\Longrightarrow\ & x(by-a)-ay=0\\
\Longrightarrow\ & bx(by-a)-a(by-a)=a^2\\
\Longrightarrow\ & (bx-a)(by-a)=a^2
\end{aligned}$$

因此，令

$$\begin{aligned} p &= bx - a \\ q &= by - a \end{aligned}$$

則可得$p|a^2$與$q|a^2$。 又因為x, y是正整數，所以我們可以知道$b|(a+p)$以及$b|(a+q)$。即$p \equiv -a \pmod{b}$與$q \equiv -a \pmod{b}$。

然後我們假設存在$p|a^2$且$p \equiv -a \pmod{b}$。令：

$$q = \frac{a^2}{p}$$

因為$p \equiv -a \pmod{b}$，則：$ap \equiv -a^2 \pmod{b}$。 又因為$\gcd(a, b) = 1$，則：$\gcd(p, b) = 1$。 所以

$$a \equiv -\frac{a^2}{p} \pmod{b}$$

則：$q \equiv -a \pmod{b}$。 所以存在整數y使得$by = q + a$，則可得出

$$p = bx - a$$

$$q = by - a$$

以及

$$(bx - a)(by - a) = pq = a^2$$

因此我們得出方程式

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

有解若且惟若存在p滿足$p|a^2$且$p \equiv -a \pmod{b}$，以及我們可以知道解出來的數對(x, y)會滿足

$$(x, y) = \left(\frac{a+p}{b}, \frac{a+(a^2/p)}{b}\right)$$

□

Remark 1. 當$a \equiv -1 \pmod b$時，顯然會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) = 2$$

的結果，只要取$p = 1$即會有

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\left(\frac{a+1}{b}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{a+a^2}{b}\right)}$$

Proposition 6. 對於所有的$a, b \in \mathbb{N}$滿足$a > b$，都有

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq b \tag{8}$$

Proof. 設：$a = bq + r$，其中$q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < b$。 則由 Fibonacci 法可知，$\frac{b}{a} = \frac{1}{q+1} + \frac{b-r}{a(q+1)}$。 若$b|a$，即$r = 0$，則：$\frac{b}{a} = \frac{1}{q}$。 若$b \nmid a$，則會得到$r \neq 0$，設：$b_1 = b - r, a_1 = a(q+1)$。 定義整數數列$\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle q_n \rangle, \langle r_n \rangle$如下：

$$\begin{cases} a_0 = a,\ b_0 = b,\ q_0 = q,\ r_0 = r \\ a_n = b_n q_n + r_n,\ 0 \leq r_n < b_n\ n \geq 1 \\ a_{n+1} = a_n(q_n + 1) \\ b_{n+1} = b_n - r_n \end{cases} \tag{9}$$

則：由 Fibonacci 法可知，

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{q_0+1}+\frac{1}{q_1+1}+\cdots+\frac{1}{q_m+1} \tag{10}$$

其中m是某個正整數。 則：$\langle q_n+1\rangle$為拆分後的單位分數的分母，然後$\langle r_n\rangle$為嚴格遞減的非負整數數列，則必存在一個正整數N使得對於所有的$n \geq N$，都有$r_n=0$。 當$n<N$時，$r_n \geq 1$，則：當$n<N$時會有$b_n-r_n<b_n$，則：b_n-r_n會在$n=b$時為0。 又因為$\langle b_n\rangle$是嚴格遞減數列，$\langle a_n\rangle$是嚴格遞增數列，所以$\left\langle\left\lfloor\frac{a_n}{b_n}\right\rfloor\right\rangle$會是嚴格遞增數列，則可保證$\langle q_n+1\rangle$是相異的。 因此會有$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq b$。

□

特別的，當$b=2$時，我們有

$$\operatorname{len}\left(\frac{2}{a}\right)=2,\ 2\nmid a$$

若$a \in 2\mathbb{N}$，則會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{2}{a}\right)=1$$

底下針對我們會用到的猜想進行討論，此外，底下的猜想都沒規定單位分數分母的相異性。

(三) Erdös-Straus 猜想

由命題 6 可知，已知

$$\operatorname{len}\left(\frac{4}{n}\right) \leq 4$$

很自然的問題為是否

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{len}\left(\frac{4}{n}\right)=3$$

而經由大量的運算發現，在已知的結果中，都會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{4}{n}\right) \leq 3$$

因此會有 Erdös-Straus 猜想。 其內容如下：對於所有$n \geq 2, n \in \mathbb{N}$都會存在一組正整數數對$(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$滿足

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \tag{11}$$

雖然已經有大量的運算，且已經知道大部分的$n \in \mathbb{N}$都會有解，但是此猜想尚未被證明。由定理 1 可知，在$n > 4$時，此猜想等價於

$$\operatorname{len}\left(\frac{4}{n}\right) \leq 3 \tag{12}$$

自然的，下一個可問的問題是當分母是 5 的時候，$\frac{5}{n}$是否有類似的結果。

(四) Sierpiǹski 猜想

對於所有的$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$，都會存在至少一組$(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$滿足

$$\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \tag{13}$$

由定理 1 可知，此猜想在$n > 4$時，等價於

$$\operatorname{len}\left(\frac{5}{n}\right) \leq 3 \tag{14}$$

(五) Kiss 猜想

對於所有的正整數$n \in \mathbb{N}$，當$l = 4,5,6,7$時，會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{l}{n}\right) \leq 3 \tag{15}$$

而當$l = 8,9,10,11,12$時，會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{l}{n}\right) \leq 4 \tag{16}$$

(六) Schinzel 猜想

對於所有的$n, l \in \mathbb{N}$，都會存在一個$N(l)$使得當$n \geq N(l)$，都會存在一組$(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$滿足

$$\frac{l}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \tag{17}$$

由定理 1 可知，此猜想等價於對於所有的$n \geq N(l)$，都會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{l}{n}\right) \leq 3 \tag{18}$$

五、猜想的補充與證明

因為我們的研究範圍是在討論真分數的拆分，因此我們在 Schinzel 猜想只討論$n > l$的狀況。

(一) 猜想的數值測試：

底下命題可使我們減少程式運算時間。

Proposition 7. 若方程式

$$\frac{l}{n} = \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{x_k}$$

有正整數解，則方程式

$$\frac{l}{mn} = \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{x_k}$$

也會有正整數解。

Proof. 假設：$(a_1, \cdots, a_{l_0})$是方程式

$$\frac{l}{n} = \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{x_k}$$

的一組解，則顯然，當$(ma_1, \cdots, ma_{l_0})$是方程式

$$\frac{l}{mn} = \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{x_k}$$

的一組解。

□

所以當我們測試的時候，發現方程式

$$\frac{l}{n} = \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{x_k}$$

有相異正整數解，則我們就可以推得方程式

$$\frac{l}{mn} = \sum_{k=1}^{l_0} \frac{1}{x_k}$$

也會有相異正整數解，即不須測試n的倍數是否正確。

(二) Erdös-Straus 猜想

參考資料中有提到當n模 9240 時，不同餘表 1 中的任何一數，Erdös-Straus 猜想會成立。

表 1：Erdös-Straus 猜想不一定成立的n模 9240 的值

1	13^2	17^2	19^2	23^2	29^2
31^2	37^2	41^2	43^2	47^2	53^2

59^2	61^2	67^2	71^2	73^2	79^2
83^2	89^2	13×157	13×397	19×139	29×149
31×199	2521	2689	3361	3529	5569
7561	7681	8089	8761		

以下我們固定l，$l \geq 5$，探討$\mathrm{len}\left(\frac{l}{n}\right)$的值。 我們使用 Fibonacci 法以及類似的方法討論 Schinzel 猜想。

(三) Sierpiǹski 猜想($l = 5$)

如前的討論，我們希望去說明$\mathrm{len}\left(\frac{5}{n}\right) \leq 3$。 先將$n$模 5 的同餘類，先討論簡單(當$n \equiv 0,2,3,4 \pmod 5$)的狀況。

$$\frac{5}{5k} = \frac{1}{k} \tag{19}$$
$$\frac{5}{5k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{3}{(k+1)(5k+2)} \tag{20}$$
$$\frac{5}{5k+3} = \frac{1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(5k+3)} \tag{21}$$
$$\frac{5}{5k+4} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(5k+4)} \tag{22}$$

因為

$$\mathrm{len}\left(\frac{2}{(k+1)(5k+3)}\right) \leq 2$$

則只需討論第(20)式中，$\frac{3}{(k+1)(5k+2)}$的狀況。考慮$5k^2 + 7k + 2$模 3 的同餘類，因為

$$(k+1)(5k+2) \equiv 2(k+1)^2 \pmod 3 \equiv \begin{cases} 2 \pmod 3, \text{ if } k \equiv 0,1 \pmod 3 \\ 0 \pmod 3, \text{ if } k \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \tag{23}$$

由命題 5 與第(23)式可知，

1. 當$k \equiv 0,1$時，因為$(k+1)(5k+2) \equiv -1 \pmod 3$，所以我們由註解 1 可知，可以將$\frac{3}{(k+1)(5k+2)}$拆成兩項單位分數和；

2. 而當$k \equiv 2 \pmod 3$時，因為$3|(k+1)(5k+2)$，所以我們可以將$\frac{3}{(k+1)(5k+2)}$約分成為一個單位分數。

因此我們會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{5}{5k+2}\right) \leq 3$$

所以我們只剩下$\frac{5}{5k+1}$的狀況。 考慮$\frac{5}{5k+1}$的狀況。 因為

$$\frac{5}{5k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{4}{(k+1)(5k+1)} \tag{24}$$

則當$2 \nmid k$時，$4|(k+1)(5k+1)$，此時$\frac{5}{5k+1}$可以拆成兩項單位分數的和。另外，

$$\frac{4}{(k+1)(5k+1)} = \frac{1}{(k+1)(5k+1)} + \frac{3}{(k+1)(5k+1)}$$

當$3 \nmid k$時，會有$3|(k+1)(5k+1)$，此時$\frac{5}{5k+1}$可拆成三項單位分數的和。 也就是說，

$$\operatorname{len}\left(\frac{5}{5k+1}\right) \leq 3$$

若且惟若 $n \not\equiv 1 \pmod{30}$。 所以只要是$2 \nmid k,\ 3 \nmid k$時，$\operatorname{len}\left(\frac{5}{5k+1}\right) \leq 3$。 因此只剩$\frac{5}{30k+1}$的狀況未知。因此假設$n = 30k+1$。則會有

$$\frac{1}{30k+1} = \frac{1}{6k+2} + \frac{9}{(30k+1)(6k+2)}$$

則$(30k+1)(6k+2)$模 9 的結果如下表

表 2：$(30k+1)(6k+2)$模 9 的結果

$k \bmod 3$	0	1	2
$6k+2 \bmod 9$	2	-1	5
$30k+1 \bmod 9$	1	4	-2
$(30k+1)(6k+2) \bmod 9$	2	-4	-1

而我們討論k模 3 的同餘類的原因是因為$\gcd(30,9)=\gcd(6,9)=3$，因此：

$$\begin{aligned}&\{r|r\equiv 30k+1 \pmod 9,\ \forall k=0,\cdots,8\}\\=&\{r|r\equiv 30k+1 \pmod 9\ \forall k=0,1,2\}\\=&\{1,4,7\}\end{aligned}$$

以及

$$\{r|r\equiv 6k+2 \pmod 9\ \forall k=0,\cdots,8\}=\{r|r\equiv 6k+1 \pmod 9\ \forall k=0,1,2\}.$$

則用前面的命題 5 與表 2 可知，因為

1. 當$k\equiv 1 \pmod 3$時，我們可以將命題 5 的p取為$30k+1$；
2. 而當$k\equiv 2 \pmod 3$時，由註解 1 可知，$\frac{9}{(30k+1)(6k+2)}$可拆成兩項單位分數的和。

因此，當$3\nmid k$時，$\frac{9}{(30k+1)(6k+2)}$可拆成兩項單位分數和。 所以我們再考慮$n=90k+1$。會有

$$\frac{5}{90k+1}=\frac{1}{18k+3}+\frac{14}{(90k+1)(18k+3)} \tag{25}$$

然後就考慮$(90k+1)(18k+3)$模 14 的狀況。因為

$$(90k+1)(18k+3)\equiv(4k+3)(6k+1) \pmod{14},$$

則考慮$4k+3,6k+1,(4k+3)(6k+1)$模 14 的結果。

表 3：$(90k+1)(18k+3)$模 14 的結果

$k \bmod 7$	1	2	3	4	5	6	7
$6k+1 \bmod 14$	7	13	5	11	3	9	1
$4k+3 \bmod 14$	7	11	1	5	9	-1	5
$(6k+1)(4k+3) \bmod 14$	7	3	5	-1	-1	5	5

在表 3 中，我們之所以將k模 7 做討論是因為$\{2lk+1|k=0,1,\cdots,6\}=\{2lk+1|k=0,1,\cdots,12,13\}$都是$\{1,3,5,7,9,11,13\}$。 由表 3 與命題 5 可知：

1. 當$k\equiv 1 \pmod 7$時，我們可以將命題 5 的p取$90k+1$(抑或是$18k+3$)，可以將$\frac{14}{(90k+1)(18k+3)}$在$k\equiv 1 \pmod{14}$時，可以拆成兩項單位分數的和；

2. 當$k\equiv 2 \pmod 7$時，因為

$$(18k+3)\equiv(4k+3) \pmod{14} \equiv -3 \pmod{14} \equiv -(90k+1)(18k+3) \pmod{14},$$

所以將命題 5 的p取$(18k+3)$後，可將$\frac{14}{(90k+1)(18k+3)}$在$k\equiv 2 \pmod 7$時，可以拆成兩項單位分數的和；

3. 當$k\equiv 4,5 \pmod 7$時，因為$(90k+1)(18k+3)\equiv -1 \pmod{14}$，所以可以將命題 5 的$p$取為$1$，即代表$\frac{14}{(90k+1)(18k+3)}$在$k\equiv 4,5 \pmod 7$時，可以拆成兩項單位分數的和；

4. 當$k\equiv 6 \pmod 7$時，因為

$$(90k+1)\equiv 9 \pmod{14} \equiv -5 \pmod{14} \equiv (90k+1)(18k+3) \pmod{14},$$

所以將命題 5 的p取為$90k+1$，可將$\frac{14}{(90k+1)(18k+3)}$在$k\equiv 6 \pmod 7$時，拆成兩項單位分數的和。

因此當$k \equiv 0,3 \pmod{7}$時$\frac{14}{(90k+1)(18k+3)}$無法用上述方法拆解成兩項。 即$n \equiv 1,271 \pmod{630}$時$\frac{5}{n}$無法寫成$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$跟$\frac{1}{q+2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，其中$q=\lfloor\frac{n}{5}\rfloor$。 因此$\frac{5}{630k+1}$與$\frac{5}{630k+271}$的狀況，目前沒有結論。

(四) $\frac{6}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的是否有解狀況

考慮n模 6 的同餘類，則：

$$\frac{6}{6k}=\frac{1}{k} \tag{26}$$
$$\frac{6}{12k+2}=\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{6k+1}+\frac{1}{(3k+1)(6k+1)} \tag{27}$$
$$\frac{6}{12k+8}=\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{6k+4} \tag{28}$$
$$\frac{6}{6k+3}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(2k+1)} \tag{29}$$
$$\frac{6}{6k+4}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(3k+2)} \tag{30}$$
$$\frac{6}{6k+5}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(6k+5)} \tag{31}$$

上述的皆為單位分數的和，即$\mathrm{len}\left(\frac{6}{n}\right)\le 3$，其中$n \not\equiv 1 \pmod{6}$。 因此，只需討論$n \equiv 1 \pmod{6}$的狀況。 令$n=6k+1$，因為

$$\frac{6}{6k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{5}{(k+1)(6k+1)}$$

我們針對$\frac{5}{(k+1)(6k+1)}$來討論，以k模 5 的同餘類來討論：

1. 當$k \equiv 1,2 \pmod{5}$時$(6k+1)(k+1) \equiv 4 \pmod{5} \equiv -1 \pmod{5}$，此二情況可用命題 5 拆成兩項單位分數的和；

2. 而當$k \equiv 4 \pmod{5}$時，因為$5|(k+1)(6k+1)$，所以$\frac{5}{(k+1)(6k+1)}$可直接約分。

此外，由於

$$\frac{6}{6k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(k+1)(6k+1)}+\frac{2}{(k+1)(6k+1)}$$

則：當$k \equiv 5 \pmod 6$時，因為$6|(k+1)$，所以$\frac{3}{(k+1)(6k+1)}$與$\frac{2}{(k+1)(6k+1)}$皆可約分成單位分數。 又

$$\frac{6}{6k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(6k+1)}+\frac{4}{(k+1)(6k+1)}$$

所以當$k \equiv 3 \pmod 4$時，因為$4|(k+1)$所以$\frac{4}{(k+1)(6k+1)}$可以約分成單位分數。所以目前剩當$k \equiv 0,3 \pmod 5$且$k \not\equiv 5 \pmod 6$且$k \not\equiv 3 \pmod 4$，尚無定論。

(五) $\frac{7}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$有解的狀況。

當$n \equiv 0 \pmod 7$，也就是$7|n$，$\frac{7}{n}$可以寫成單位分數，即$\text{len}\left(\frac{7}{n}\right)=1$，若

$n \equiv 6 \pmod 7$，則由命題 5 可知，可拆成兩項單位分數和。 此外，當

$n \equiv 5 \pmod 7$時，我們有

$$\frac{7}{7k+5}=\frac{1}{k+1}+\frac{2}{(k+1)(7k+5)}$$

由命題 6 可知，$\text{len}\left(\frac{2}{(k+1)(7k+5)}\right) \le 2$，因此我們會有$\text{len}\left(\frac{7}{7k+5}\right) \le 3$。因此考慮$n \equiv 1,2,3,4 \pmod 7$的狀況。

$$\frac{7}{7k+2}=\frac{1}{k+1}+\frac{5}{(k+1)(7k+2)} \tag{32}$$

$$\frac{7}{7k+3}=\frac{1}{k+1}+\frac{4}{(k+1)(7k+3)} \tag{33}$$

$$\frac{7}{7k+4}=\frac{1}{k+1}+\frac{3}{(k+1)(7k+4)} \tag{34}$$

則先看第(32)式，我們要將$\frac{7}{7k+2}$拆成三項單位分數和，即要將$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$拆成兩項單位分數的和。

$$(k+1)(7k+2) \equiv 2(k+1)^2 \pmod 5 \equiv \begin{cases} 2 \pmod 5, \text{ if } k \equiv 0,3 \pmod 5 \\ 3 \pmod 5, \text{ if } k \equiv 1,2 \pmod 5 \\ 0 \pmod 5, \text{ if } k \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

因此，分別討論k除以 5 的餘數。

表 4：$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$是否能拆成兩項

k mod 5	1	2	3	4	5
$k+1$ mod 5	2	3	4	0	1
$7k+2$ mod 5	4	1	3	0	2
$(k=1)(7k+2)$ mod 5	3	3	2	0	2

由表 4 與命題 5 可知，當$k \equiv 1,3 \pmod 5$時，我們可以取$p = k+1$； 而當$k \equiv 4 \pmod 5$時，$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$可以約分成單位分數。 $\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$能拆成兩項。 所以只須討論表 4 中無法直接看出來的情況，即$k \equiv 0,2 \pmod 5$的狀況。

1. 設：$k \equiv 2 \pmod 5$，令：$k = 5t+2$，則：$(k+1)(7k+2) = 175t^2 + 185t + 48$。

   則：我們有

$$\frac{5}{(7k+2)(k+1)} = \frac{1}{35t^2+37t+1} + \frac{2}{(35t^2+37t+1)(175t^2+185t+48)}$$

   又因為$175t^2 + 185t + 48 \equiv t(t+1) \pmod 2$，且$2|t(t+1)$，則當

   $k \equiv 2 \pmod 5$時，會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{7}{7k+2}\right) \leq 3$$

2. 設：$k \equiv 0 \pmod 5$，令：$k = 5t$，則：$(k+1)(7k+2) = 175t^2 + 45t + 2$。則：

$$\frac{5}{(k+1)(7k+2)} = \frac{1}{35t^2+9t+1} + \frac{3}{(35t^2+9t+1)(175t^2+45t+2)}$$

$$\begin{aligned}(35t^2+9t+1)(175t^2+45t+2) &\equiv (2t^2+1)(t^2+2) \pmod 3 \\ &\equiv \begin{cases} 0 \pmod 3, \text{ if } 3 \nmid t \\ 2 \pmod 3, \text{ if } 3 \mid t \end{cases}\end{aligned}$$

因此，當$3|t$時，分母同餘$-1 \pmod 3$，由命題 5 可知，所以可得

$$\operatorname{len}\left(\frac{5}{(k+1)(7k+2)}\right) \leq 3$$

則：

$$\operatorname{len}\left(\frac{7}{7k+2}\right) \leq 4$$

然而我們想知道是否能有更多的狀況可以讓$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$能拆成兩項單位分數的和。 因此，我們可以將$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$寫成

$$\frac{5}{(k+1)(7k+2)} = \frac{2}{(k+1)(7k+2)} + \frac{3}{(k+1)(7k+2)} \tag{35}$$

由第 (35) 式可知，我們需要討論$(k+1), (7k+2)$模 2 與模 3 的情形。

(1). $2|(k+1)(7k+2)$若且惟若 $k+1 \equiv 0 \pmod 2 \vee\ 7k+2 \equiv 0 \pmod 2$，則：$k \equiv 0 \vee 1 \pmod 2$。 因此，對於所有的正整數$k$，我們都有$2|(k+1)(7k+2)$。

(2). $3|(k+1)(7k+2)$若且惟若 $k+1 \equiv 0 \pmod 3 \vee\ 7k+2 \equiv k+2 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$。 則：$k \equiv 1 \vee 2 \pmod 3$。

由前面的討論可知，在$5|k$的狀況下，當$k \equiv 1,2,3,4,5 \pmod 6$時，$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$可以拆成兩項單位分數和。 亦即只剩下$k \equiv 0 \pmod 6$且$k \equiv 0 \pmod 5$時，即$30|k$，我們還無法確認$\frac{7}{7k+2}$是否能拆成三項單位分數的和。

另外，

$$\frac{5}{(k+1)(7k+2)} = \frac{1}{(k+1)(7k+2)} + \frac{4}{(k+1)(7k+2)} \tag{36}$$

由第(36)式可知，我們要考慮$(k+1)(7k+2)$模 4 的結果：

表 5：$(k+1)(7k+2)$模 4 的結果

k mod 4	0	1	2	3
$k+1$ mod 4	1	2	3	0
$7k+2$ mod 4	2	1	0	3
$(k+1)(7k+2)$ mod 4	2	2	0	0

由表 5 可知，當$k \equiv 2,3 \pmod 4$時，$\frac{4}{(k+1)(7k+2)}$可約分成一個單位分數。 因此，當$k \equiv 1,2 \pmod 4$時，$\frac{4}{(k+1)(7k+2)}$沒辦法約分成為單位分數。 又由前面的討論可知，當$30\nmid k$時，$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$可拆成兩項單位分數的和，因此當$k \equiv 1 \pmod 4$時，可以拆成兩項單位分數和，因為同餘方程

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod 4 \\ k \equiv 0 \pmod{30} \end{cases}$$

無正整數解。 因此，當$k \equiv 2 \pmod 4$且$k \equiv 0 \pmod{30}$時，即$k \equiv 30 \pmod{60}$時，無法用我們討論的方法將$\frac{5}{(k+1)(7k+2)}$寫成兩項單位分數的和。 但是當$n \not\equiv 1 \pmod 7$時，我們有

$$\operatorname{len}\left(\frac{7}{n}\right) \leq 4$$

再看第(33)式，因為$(k+1)(7k+3) \equiv -(k+1)^2 \pmod 4$。則：

$$(k+1)(7k+3) \equiv \begin{cases} 0 \pmod 4, \text{ if } 2 \nmid k \\ \\ 3 \pmod 4, \text{ if } 2 \mid k \end{cases}$$

因此，由命題 5 可知，當$n = 7k+3$時有$\operatorname{len}\left(\frac{7}{n}\right) \leq 3$。

當$n = 7k+4$時，考慮第(34)式，因為

$$(k+1)(7k+4) = 7k^2 + 11k + 4 \equiv k(k+1) \pmod 2 \equiv 0 \pmod 2$$

則將$\frac{3}{(k+1)(7k+4)}$拆成$\frac{1}{(k+1)(7k+4)} + \frac{2}{(k+1)(7k+4)}$，則：$\operatorname{len}\left(\frac{3}{(k+1)(7k+4)}\right) = 2$。 因此當$n = 7k+4$時，會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{7}{n}\right) \leq 3$$

此外，我們還剩下$\frac{7}{7k+1}$的狀況要討論。 首先，$\frac{7}{7k+1}$用 Fibonacci 法可得：

$$\frac{7}{7k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{6}{(k+1)(7k+1)} \tag{37}$$

因為 $(k+1)(7k+1) \equiv (k+1)(-k+1) \pmod 4 = 1 - k^2$ ，所以當$2 \nmid k$時，會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{7}{7k+1}\right)=3$$

因為

$$\frac{6}{(k+1)(7k+1)}=\frac{2}{(k+1)(7k+1)}+\frac{4}{(k+1)(7k+1)}$$

又因為當$(k+1)(7k+1) \equiv (k+1)^2 \pmod 3$，所以當$k \equiv 2 \pmod 3$時，會有$3|(k+1)(7k+1)$，因此

$$\frac{7}{7k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{2}{\frac{k+1}{3}(7k+1)}$$

再由命題 5 可知，

$$\operatorname{len}\left(\frac{2}{\frac{k+1}{3}(7k+1)}\right) \leq 2$$

因此，當$6\nmid k$時，會有$\operatorname{len}\left(\frac{7}{7k+1}\right) \leq 3$。 所以目前只剩當$n = 42k+1 \vee 420k+32$時尚無定論。

六、目前的推論

我們目前的推論是找出關於$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)$上界的估算方法。

Lemma 2. 方程式

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_l} \tag{38}$$

只有有限組正整數解。

我們用反證法證明。

Proof. 假設第 (38) 式有無限多組解，亦即會存在無限多組正整數序對$\{(x_{n1},\cdots,x_{nl})\}_{n\in\mathbb{N}}$滿足

$$\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{x_{nk}}$$

對於所有的正整數n都會成立。 不妨設：$x_{n1}\geq x_{n2}\geq\cdots\geq x_{nl}$ 則：

$$\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{x_{nk}}\leq\frac{l}{x_{nl}}$$

我們可得x_{nl}的範圍：

$$x_{nl}\leq\frac{al}{b}$$

又因為$\frac{1}{x_{nl}}\leq\frac{b}{a}$，因為第 (38) 式的要求為正整數解，所以我們可得

$$x_{nl}\geq\frac{a}{b}$$

則我們可得n_{nl}的範圍：

$$\frac{a}{b}\leq x_{nl}\leq\frac{al}{b}$$

因為x_{nl}為正整數，所以x_{nl}只會有有限個選擇。 因此會存在一個正整數c滿足

$$\frac{a}{b}<c<\frac{al}{b}$$

且有無窮多個m滿足$x_{ml}=c$。 令

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b}{a}-\frac{1}{c}$$

則方程式

$$\frac{b_1}{a_1}=\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{x_k}$$

有無限多組正整數解。 重複上面的推論，我們可以得到一個正整數c_1滿足

$$\frac{a_1}{b_1} \leq c_1 \leq \frac{a_1(l-1)}{b_1}$$

且有無窮多個正整數n滿足$x_{n,l-1} = c_1$。 令

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} - \frac{1}{c_1}$$

則：方程式

$$\frac{b_2}{a_2} = \sum_{k=1}^{l-2} \frac{1}{x_k}$$

有無窮多組正整數解。 依此類推，我們可得對於所有的正整數$t < l$，都會存在一個正整數c_t滿足

$$\frac{a_t}{b_t} \leq c_t \leq \frac{a_t(l-t)}{b_t}$$

且有無窮多個正整數m滿足$x_{m,l-t} = c_t$。 令：

$$\frac{b_{t+1}}{a_{t+1}} = \frac{b_t}{a_t} - \frac{1}{c_t}$$

則方程式

$$\frac{b_t}{a_t} = \sum_{k=1}^{l-t} \frac{1}{x_k} \tag{39}$$

有無限多組正整數解。 當我們推論到$l - t = 1$時，會有

$$\frac{b_{l-1}}{a_{l-1}} = \frac{1}{x_1}$$

則可知

$$x_1 = \frac{a_{l-1}}{b_{l-1}}$$

可能存在或是不可能存在。 然而，依據假設以及前面的推論我們知道x_1有無窮多個正整數解，這顯然不可能。 因此，方程式

$$\frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k}$$

只會有有限組正整數解。

□

Remark 2. 令：引理 2 的方程式共有N組正整數解，設正整數序對集合$S = \{(x_{n1}, \cdots, x_{nl}) | n = 1, \cdots, N\}$表示方程式

$$\frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k}$$

的所有的正整數解。此外，將集合T定義如下：

$$T = \left\{ \sum_{k=1}^{l} x_{nk} \middle| (x_{n1}, \cdots, x_{nk}) \in S \right\}$$

則：max$T$存在。因為集合S跟T都是有限集。

Theorem 1. 若不定方程

$$\frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k} \tag{40}$$

有正整數解，則此方程式必有相異正整數解，其中$a > b$。

這個定理的證明有點複雜，我們先略述證明的想法： 我們只要說明在作拆分的運算時，只會碰到有限次$\frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_j}$的狀況，其中$i \neq j$，那麼就得證定理 1 。

Proof. 考慮第(40)式，且令$(a_1, \cdots, a_l)$為其中的一組解，滿足$a_1 \leq \cdots \leq a_l$。

考慮$a_i = a_{i+1} = n \in \mathbb{N}$的狀況，則將$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} = \frac{2}{n}$拆分後，分母總和比拆分之前的來的大。考慮$n$的奇偶性： 首先，當$n$為奇數時，考慮

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{n\left(\frac{n+1}{2}\right)} \tag{41}$$

則我們要說明

$$2n < \frac{n+1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \tag{42}$$

第(42)式等價於

$$\begin{aligned} &4n < n+1+n(n+1) \\ \iff &n^2+2n+1 > 4n \\ \iff &(n-1)^2 > 0 \end{aligned}$$

$(n-1)^2$顯然大於0，因為$\frac{b}{a}$為真分數，所以不會出現$x_j = 1$的狀況，因此得證第(42)式。

那如果n是偶數，則考慮

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{43}$$

那麼只要說明

$$2n < \frac{n}{2}+1+\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n^2}{4}+n+1 \tag{44}$$

則第(44)式等價於

$$8n < n^2 + 4n + 4$$

$$\iff n^2 - 4n + 4 > 0$$

$$\iff (n-2)^2 > 0$$

而因為當$n = 2$時，就不會出現第 (40) 式的內容，所以$n \geq 4$。 因此得證第(44)式。

我們只要碰到有$x_i = x_{i+1} = \cdots = x_j$的狀況時，其中$j \geq i + 2$，都用前述的方法：即

$$\frac{2}{x_i} = \frac{1}{\frac{x_i+1}{2}} + \frac{1}{x_i\left(\frac{x_i+1}{2}\right)},\ x_i \in \mathbb{N}\backslash 2\mathbb{N} \tag{45}$$

$$\frac{2}{x_i} = \frac{1}{\frac{x_i}{2}} + \frac{1}{\frac{x_i}{2}\left(\frac{x_i}{2}+1\right)},\ x_i \in 2\mathbb{N} \tag{46}$$

拆分。 我們稱前面的方法，即第 (45) 與 (46) 式，為異化分母的過程。 假設s_0為第 (40) 式中，所有分母的和，即

$$s_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

，以及s_k表示將第 (40) 式用異化分母的過程作k次之後，所得到的分母總和。 由前面的內容可知，$\langle s_k \rangle$是個嚴格遞增的正整數數列，再由引理 2 可知，方程式

$$\frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k}$$

只有有限組正整數解，因此$\langle s_k \rangle$有上界，所以會存在一個正整數n_0使得當進行到第n_0次時，可將第(40)式化為相異單位分數的和。

□

Remark 3. 由上面的證明發現，如果

$$\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{m_k},$$

且在$m_1, m_2, \ldots, m_l$中，對於所有的$m_i = m_j$都有$m_i = m_j > 2$，則我們會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)\leq l,$$

其中，分數b/a不一定要是真分數。

因此若

$$\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{x_k} \tag{47}$$

則會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)\leq l \tag{48}$$

當我們有了這個命題之後，底下的定理會比較好證明。 此外，我們在證明 Erdös-Straus 猜想或 Schinzel 猜想時，只要證明其有正整數解，即可得該猜想有相異正整數解。 然而我們目前的研究只能討論到這些，沒辦法進一步的研究 Erdös-Straus 猜想、Sierpiǹski 猜想與 Schinzel 猜想等猜想的證明，因為我們的工具並不夠，且每次在做相關猜想的計算時，總是會有幾個無法寫出來的同餘類。 那底下就先說明len函數的一些性質：

Corollary 1. 設：$\frac{b}{a},\frac{d}{c}$皆為真分數且$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}<1$，則會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)+\operatorname{len}\left(\frac{d}{c}\right)\geq \operatorname{len}\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right) \tag{49}$$

系理 1 即為len函數有三角不等式的性質。運用這個系理可以將底下的定理與推論證明出來。而系理 1 的證明如下：

Proof. 設：

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)=l_1, \operatorname{len}\left(\frac{d}{c}\right)=l_2$$

則：可設

$$\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l_1}\frac{1}{m_k},\ \frac{d}{c}=\sum_{k=1}^{l_2}\frac{1}{n_k}$$

其中，$m_1 < m_2 < \cdots < m_{l_1}$以及$n_1 < n_2 < \cdots < n_{l_2}$。 所以我們能將$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$寫成$l_1+l_2$項單位分數的和。 因此由定理 1 可知，我們會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right) \leq \operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)+\operatorname{len}\left(\frac{d}{c}\right) \tag{50}$$

□

底下的定理則是關於前面 Erdös-Straus 猜想的定理。

Theorem 2. 令：$n, k \in \mathbb{N}$滿足$n > 4k$，若方程式

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

有相異正整數解(x, y, z)，則會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{4k}{n}\right) \leq 3k \tag{51}$$

Proof. 因為我們可以將$\frac{4k}{n}$寫成k項$\frac{4}{n}$的和，且由假設可知，

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \tag{52}$$

有解。 則我們可以將$\frac{4k}{n}$拆成$3k$項單位分數的和。 由定理 1 可知，我們會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{4k}{n}\right) \leq 3k \tag{53}$$

□

證明完定理後，會有一個跟此定理類似的推論，內容如下：

Corollary 2. 設：$a > b$且a, b為正整數，若 Erdös-Straus 猜想為真，則會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq b - \left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor \tag{54}$$

Proof. 由定理 2 可知，

$$\operatorname{len}\left(\frac{4k}{a}\right) \leq 3k$$

則用除法原理，可得$b = 4k + r$，其中$0 \leq r < 4$。 則由命題 6 可知，

$$\operatorname{len}\left(\frac{r}{a}\right) \leq r$$

由系理 1 可知，

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq 3k + r = 3\left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor + b - 4\left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor = b - \left\lfloor \frac{b}{4} \right\rfloor$$

□

此外，當對於所有的正整數n, l滿足$n > l$，方程式

$$\frac{l}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

有解的時候，也會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{kl}{n}\right) \leq 3l \tag{55}$$

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq b-(l-3)\left\lfloor\frac{b}{l}\right\rfloor \tag{56}$$

經由前面的推測，我們認為當方程式

$$\frac{7}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

有解，則

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq b-4\left\lfloor\frac{b}{7}\right\rfloor, \tag{57}$$

七、關於 Schinzel 猜想的額外補充

我們利用程式去解不定方程

$$\frac{l}{n}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x_k}$$

目前我們使用 dfs 演算法處理。程式的概念是先輸入一開始要拆的分數$\frac{l}{n}$，在輸入最大的長度N，然後用 dfs 去填$(x_1,\cdots,x_N)$。然後我們目前的猜測是：

Conjecture 1. 對於所有的n,l滿足$n>l>3$，都會有

$$\operatorname{len}\left(\frac{l}{n}\right) \leq \lfloor\log_2 l\rfloor+1 \tag{58}$$

關於這個猜想的數值測試，我們都只有測試到$n\leq 10000$以及$l\leq 12$與$l=17$的狀況。 另外，我們也測試了$l>17$與少量的分母測試，發現都有如以上猜想的結果。

八、關於 Schinzel 猜想中，$N(l)$的值

(一) Schinzel 猜想$N(l)$值下界的程式測試結果

目前我們用程式跑了 100 萬筆資料，關於 Schinzel 猜想中$N(l)$值的內容。 目前已知的結果：

表 6：Schinzel 猜想的$N(l)$值的下界。

l	$N(l)$的一個下界
8	144482
9	39314
10	77522
11	7152
12	589682

此外，我們也有將$\frac{l}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$在$l=8{,}9$時，是否有解的狀況跑到$n=10^7$，而在$l=8$時，$N(8)$的下界仍然是144482，而當$l=9$時，我們也發現$N(9)$的下界也是39314。 因此我們猜測：

Conjecture 2. 對於所有的$n\in\mathbb{N}$且$n\geq 144482$，都會存在至少一組$(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$使得

$$\frac{8}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \tag{59}$$

以及對於所有的正整數n*滿足*$n\geq 758$，都會存在至少一組$(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$使得

$$\frac{9}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \tag{60}$$

(二)　$N(l)$下界的演算法

我們在使用程式檢驗$N(l)$下界時，會使用到命題 2 、命題 5 、命題 7 以及定理 1 。 我們也是使用 dfs 演算法，這樣一來，我們可以得到一個有規律的解，也比較不會有遺漏討論的解。

事前準備：

1. 輸入我們所希望程式跑的l,n_0,N，其中$n_0<N$，程式將會檢驗分數$\frac{l}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$是否有正整數解，其中$n_0\leq n<N$。

2. 創造陣列$main$，將所有要跑的分母值都儲存於該陣列中

3. 定義函數$factor(n)$，該函數會傳回n的因數

4. 定義函數$minus(n)$，該函數會將陣列中所有n的倍數的值都變成 0

開始檢驗: 檢驗方程式

$$\frac{l}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

是否有解，且假設$x < y < z$。

1. 先計算x的範圍：

$$\left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil \leq x \leq \left\lfloor \frac{3n}{l} \right\rfloor$$

   並在該範圍內將所有的正整數c代入方程式，即$x = c$，並判斷方程式

$$\frac{l}{n} - \frac{1}{c} = \frac{n - cl}{cn} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

   是否有相異正整數解。

2. 檢驗是否有a的因數等價於$-a \pmod b$，若有，則將其解依照理論輸出，若無則進入下一步驟(註)

3. 檢驗是否有a^2的因數等價於$-a \pmod b$，若有，則將其解依照理論輸出，若無則進入下一步(註)

4. 將無解的情況全部存於一陣列中，該陣列的最大值再+1 即為我們要找的$N(l)$之下界

5. 最後輸出$N(l)$，以及完成該次程式所花費之時間

註：我們理論的結果應為a^2的因數等價於$-a \pmod b$時有解，但我們發現:大部分的解都可找到a的因數等價於$-a \pmod b$，且a的因數包含於a^2的因數中。

此外，在跑a^2的因數時，需要花費非常多的時間，所以我們才先檢驗a的因數，這可以大幅縮減運算量。

九、關於森棚教官數學題的延伸

我們在解完森棚教官的數學題之後，也有想過 1 是否能寫成形如$pn+q$的單位分數和，即是否存在一個正整數l使得

$$1=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{px_k+q},$$

其中$x_1,\ x_2,\dots,\ x_l$為相異正整數。

首先，前面的引理 1 有提到假設$p,\ q$互質，則$l\equiv q\ (\mathrm{mod}\ p)$，如果能找到一個正整數$r$使得$l=pr+q$讓方程式

$$1=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{px_k+q},$$

有解，這個問題就解開了。

此外，除了將正整數1拆成形如$pn+q$的單位分數之和，我們也想知道給定一個真分數，抑或是假分數，是否能拆成形如$pn+q$的單位分數和？ 即方程式

$$\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{px_k+q}$$

是否有相異的正整數解？

在討論這個問題之前，先給個符號上的定義：

Definition 5. 給定正整數p與小於p的非負整數q，定義集合$S_{p,q}$如下：

$$S_{p,q}:=\left\{\frac{b}{a}\middle|\exists\ l\in\mathbb{N},\ k_1,\dots,k_l\in\mathbb{N}\ \ni\ \forall\ i\neq j,\ k_i\neq k_j,\ \wedge\ \frac{b}{a}=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{pk_i+q}\right\}. \tag{61}$$

探討分數$\frac{b}{a}$是否為$S_{p,q}$的元素，我們可以仿造引理 1 命題如下：

Proposition 8. 設：$p \in \mathbb{N}$且$q \in \{1,2,\ldots,p-1\}$，滿足$p,\ q$互質。 給定分數$\frac{b}{a}$，若$\frac{b}{a} \in S_{p,q}$，且存在l個正整數$k_1,\ k_2,\ldots,\ k_l$使得

$$\frac{b}{a} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{pk_i + q}. \tag{62}$$

則會滿足以下的關係式：

$$bq \equiv al \pmod{p}. \tag{63}$$

Proof. 已知，$\frac{b}{a} \in S_{p,q}$且

$$\frac{b}{a} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{pk_i + q},$$

則將右式通分後，可得

$$\frac{b}{a} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{l} \prod_{j \neq i} (px_j + q)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{l} (px_i + q)}.$$

則

$$\begin{aligned}
b\prod_{i=1}^{l}(px_i + q) &= a\sum_{i=1}^{l}\prod_{j \neq i}(px_j + q) \\
\implies bq^l &\equiv laq^{l-1} \pmod{p}. \\
\implies bq &\equiv al \pmod{p}.
\end{aligned}$$

□

另外，我們也發現一個關於有理數是否能拆成形如pn的定理，敘述如下：

Proposition 9. 對於所有的正整數p，集合$S_{p,0}$即為正有理數集。

在證明這個命題之前，我們先講一個引理：

Lemma 3. 任給一個$a > 0$，我們都可以找到$b_n > b_{n-1} > \cdots > b_1 > a$，其中$b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$使得

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}. \tag{64}$$

Proof. 我們假設r為一個正整數滿足

$$1 \geq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\lfloor a \rfloor + k}$$

且

$$1 < \sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{\lfloor a \rfloor + k}.$$

則令

$$\frac{b'}{a'} = 1 - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\lfloor a \rfloor + k}.$$

則我們可知

$$0 < \frac{b'}{a'} < \frac{1}{\lfloor a \rfloor + r + 1},$$

故他為真分數。 由命題 6 可知，$\frac{b'}{a'}$可拆成b'項單位分數和以內，那我們就用 Fibonacci 法拆成l項，其中$l \leq b'$。 注意到因為

$$\frac{b'}{a'} < \frac{1}{\lfloor a \rfloor + r + 1},$$

則

$$\frac{a'}{b'} > \lfloor a \rfloor + r + 1.$$

故可得

$$\left\lfloor \frac{a'}{b'} \right\rfloor \geq \lfloor a \rfloor + r + 1.$$

因此$\frac{b\prime}{a\prime}$用 Fibonacci 法拆分後，最小分母至少是$\lfloor a \rfloor + r + 1$，而$\lfloor a \rfloor + r + 1 \geq 3$，且用 Fibonacci 法拆分後，每個分母都相異，因此分數b'/a'的這一個拆分不會有一個分母會落在集合$\{\lfloor a \rfloor + 1, \dots, \lfloor a \rfloor + r\}$中。 故得證引理 3 。

□

有了這個引理之後，我們可以證明底下的命題：

Proof of Proposition 9. 我們可以將$\frac{b}{a}$是否能拆成形如$\frac{1}{pn}$的單位分數和，看成是否存在一個正整數l使得方程式

$$\frac{pb}{a} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k}$$

有相異正整數解。 若$\frac{pb}{a} > 1$，則將它寫成帶分數，如下：$m + \frac{r}{a}$，滿足$pb = ma + r$，其中$0 \leq r < a$。 由命題 6 可知，$\frac{r}{a}$可寫成至多r項相異單位分數和，設M_0為真分數$\frac{r}{a}$拆分成單位分數和後，最大的分母。 由引理 3 可知，我們可以將1寫成有限項單位分數和，其中每項的分母都比M_0來的大。 取前述拆分後的最大分母，記作M_1。 重複前一動作，可得m可拆成有限像的單位分數和，且每一項的分母都大於M_0。 因此得證命題 9 。

□

因為我們可以將分數b/a拆成有限項形如pn的單位分數和，因此我們可以較輕易的計算b/a的最短拆分長度。 故我們在底下討論將分數b/a拆成形如pn的單位分數和的問題。

十、計算$\mathrm{len}_p(b/a)$

我們先在此章將前面所定義的len函數擴增討論的範圍：

Definition 6 ($\mathrm{len}_p(b/a)$). 給定一個正整數p，我們定義$\mathrm{len}_p(b/a)$如下：

$$\mathrm{len}_p\left(\frac{b}{a}\right) = \min\left\{m \in \mathbb{N} \middle| \exists\, k_1, \ldots,\ k_m \in \mathbb{N}\ \ni\ \frac{b}{a} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{pk_i}\right\}. \tag{65}$$

Remark 4. 當$p = 1$時，我們把$\mathrm{len}_1(b/a)$簡記為$\mathrm{len}(b/a)$，為了配合前面所定義的$\mathrm{len}(b/a)$。

Remark 5. 對於所有的正整數p，我們都有

$$\mathrm{len}_p(1) = \mathrm{len}(p). \tag{66}$$

因為若$\mathrm{len}_p(1) = l$，則會存在$k_1, \ldots, k_l$使得

$$1 = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{pk_i},$$

因此我們可推得

$$p = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i},$$

於是我們得到

$$\mathrm{len}(p) \leq \mathrm{len}_p(1).$$

反之亦然，因此

$$\mathrm{len}_p(1) = \mathrm{len}(p).$$

廣義來說，我們也有

$$\mathrm{len}_p\left(\frac{b}{a}\right) = \mathrm{len}\left(\frac{pb}{a}\right). \tag{67}$$

(一)　估計$\mathrm{len}(m)$的下界。

Definition 7 ($\tilde{l}(m)$). 正整數$\tilde{l}(m)$定義如下：

$$\sum_{k=1}^{\tilde{l}(m)} \frac{1}{k} \leq m$$

但是

$$\sum_{k=1}^{\tilde{l}(m)+1} \frac{1}{k} > m.$$

Remark 6. 事實上，在$\tilde{l}(m)$的定義中，等號不會成立。

Remark 7. 由$\tilde{l}(m)$的定義可發現，

$$\tilde{l}(m) < \mathrm{len}(m), \tag{68}$$

原因如下：我們反設$\mathrm{len}(m) \leq \tilde{l}(m)$。 由$\mathrm{len}(m)$的定義可知，設$\mathrm{len}(m) = l$，存在$k_1, \ldots, k_l$使得

$$m = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i}.$$

另外，我們不妨設$k_1 < k_2 < \cdots < k_l$，則我們會有$k_i \geq i$，對於所有的$i = 1,2, \ldots, l$。 則

$$m = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{\tilde{l}(m)} \frac{1}{k} \leq m,$$

但是我們已知

$$m > \sum_{k=1}^{\tilde{l}(m)} \frac{1}{k},$$

於是產生矛盾，故$\text{len}(m) > l(m)$。

我們開始計算$l(m)$的值。 我們考慮開區間$(1/2, m+1/2)$的分割如下：

$$P_m = \{1/2, 3/2, \ldots, m+1/2\} = \{k+1/2 | 0 \le k \le m,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

我們取中點計算函數值，可得底下的黎曼和

$$H_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

故

$$H_m \le \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{x} dx = \ln(2m+1).$$

故我們只需要將

$$m \le H_{\tilde{l}(m)+1} \le \ln(2\tilde{l}(m)+3) \tag{69}$$

解開。 那此方程式並不難解，結論是

$$\tilde{l}(m) \ge \frac{e^m - 3}{2}.$$

因此，我們有一個初步的結果，如下面的命題：

Proposition 10. 對於所有的正整數m，我們都有

$$\tilde{l}(m) \ge \frac{e^m - 3}{2}. \tag{70}$$

另外，我們在證明命題 10 時，有得到

$$H_m \leq \ln(2m+1). \tag{72}$$

因此，當分數$\frac{b}{a} \geq \ln(2m+1)$時，分數$\frac{b}{a}$必然無法寫成$m$項單位分數的和，因為

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leq \ln(2m+1), \tag{73}$$

其中$a_1 < a_2 < \cdots < a_m$。

底下先給m值不大時，所得到的最短拆分長度跟我們計算出來的下界比較表。

表 7：$\mathrm{len}(m)$跟$\frac{e^{x}-3}{2}$的比較

m	$\mathrm{len}(m)$	我們估計出來的下界
2	4	2.1945
3	13	8.5428
4	33	25.7991

另外，我們還有一個估計$\mathrm{len}(m)$的方法，結果跟$\mathrm{len}(m)$在前面幾個數值極其相近，方法如下： 我們同樣考慮$f(x) = 1/x$在$[1/2, m+1/2]$的積分，以及取相同的分割：

$$P_n = \left\{ k + \frac{1}{2} \middle| k = 0, 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

已知

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{k+1}{k}.$$

因此，我們有

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \geq \ln m.$$

故我們有

$$\ln \tilde{l}(m) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\tilde{l}(m)} \le \sum_{k=1}^{\tilde{l}(m)} \frac{1}{k} < m.$$

則我們只要將以下的方程式解開，便可得$l(m)$的上界，而這個上界在與len(m)的比較中，似乎存在一種關係。

首先，我們先介紹一個函數，名為 Lambert W函數，定義如下：

Definition 8 (Lambert W function). 假設$x \ge -1/e$，我們定義

$$y = W(x) \iff x = ye^{y}. \tag{74}$$

在此，我們先簡計$\tilde{l}(m)$為x，於是我們要解

$$\ln x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} < m.$$

首先，我們有

$$\begin{aligned}
&\ln x + \frac{1}{2x} < m - \frac{1}{2} \\
&\implies xe^{\frac{1}{2x}} < e^{m-\frac{1}{2}} \\
&\implies \frac{1}{2x}e^{-\frac{1}{2x}} > \frac{1}{2}e^{-m+\frac{1}{2}} \\
&\implies \frac{-1}{2x}e^{-\frac{1}{2x}} < -\frac{1}{2}e^{-m+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

於是由 Lambert W函數的定義可知，因為xe^{x}在$x \ge -1/e$時是個遞增函數，則$W(x)$在$x \ge -1$時，也是遞增函數。 另外，當$m > 1$時，$-e^{-m+1/2} \ge -e^{-3/2} > -1/e$。 因此，我們有

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2x} < W\left(-e^{-m+1/2}\right). \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{2x} > -W\left(-\frac{1}{2}e^{-m+\frac{1}{2}}\right) \\
\Longrightarrow\ & x < -\frac{1}{2W\left(-\frac{1}{2}e^{-m+\frac{1}{2}}\right)}.
\end{aligned}
$$

則我們得到

$$
\tilde{l}(m) < -\frac{1}{2W\left(-\frac{1}{2}e^{-m+\frac{1}{2}}\right)} \tag{75}
$$

而這$\tilde{l}(m)$的上界與$\mathrm{len}(m)$的比較如下表：

$-\frac{1}{2W\left(-\frac{1}{2}e^{-m+\frac{1}{2}}\right)}$與$\mathrm{len}(m)$的比較

m	$\mathrm{len}(m)$	$l(m)$的一個上界
2	4	3.9487
3	13	11.6716
4	33	32.6116

由表 7 發現，$\mathrm{len}(m)$跟$-\frac{1}{2W\left(-\frac{1}{2}e^{-m+\frac{1}{2}}\right)}$很接近。

(二) 估計$\mathrm{len}(m)$的上界。

在前面，估計完$\mathrm{len}(m)$的下界之後，我們便要找出一個可行的方法計算$\mathrm{len}(m)$的上界。計算的概念如下：

1. 將整數m寫成m個不同分母的單位分數和，如下：

$$m = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{a_k}.$$

2. 檢查步驟 1(或是前一次拆分後)的每個分數，若分子大於1，則應用 Stewart 法。 舉例而言，我們在步驟 1 的時候，會看到形如$\frac{k}{k}$的分數，我們就使用下面的公式：

$$\frac{k}{k} = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k+1} + \frac{k-1}{k(k+1)}.$$

3. 步驟 2 拆完之後，會得到一串分數的級數，我們不要做約分或擴分這些分數的動作。我們檢查這個分數級數中的每個分數，若有相同分母的幾項，就將它合併，合併完之後，以分母的大小呈遞增排列。 例如：我們在拆分4時，會得到

$$4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{12} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{20},$$

其中分母為3的有 2 個，便將它們合併，其他的也同理，因此可得到

$$4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{12} + \frac{3}{20}$$

4. 重複到步驟 2 與步驟 3，直到拆分為相異的單位分數和為止。

5. 若拆分成全為相異的單位分數和之後，我們計算拆分後的項數，便是$\mathrm{len}(m)$的一個上界。

我們就稱這個演算法為 Stewart m-algorithm。 在開始計算之前，我們先給個例子：

Example 1. 我們考慮3用 Stewart m-algorithm 的方法拆分。

1. 我們先將3寫成

$$3 = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3}.$$

2. 使用 Stewart 法拆分，可得

$$3 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{12}\right)$$

3. 將同分母的分數合併，可得

$$3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{12}$$

經整理之後，可得到

$$3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{12}$$

4. 重複步驟 2 跟 3。

(1). 我們得到另一個3的分數級數表示法，如下：

$$3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{12}$$

(2). 利用 Stewart 法拆分，可得

$$3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{156}\right)$$

(3). 將同分母的分數合併之後，可得

$$3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} + \frac{1}{156}.$$

繼續將這個結果拆分。

(1). 我們又在得到一個3的分數級數表達法，

$$3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{20}+\frac{1}{156}.$$

(2). 應用 Stewart 法，可得

$$3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{156}\right)+\frac{1}{13}+\frac{1}{20}+\frac{1}{156}.$$

(3). 經由化簡整理之後，可得

$$3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{2}{13}+\frac{2}{20}+\frac{2}{156}.$$

繼續將這個結果拆分。

(1). 我們得到另一個3的分數級數表達法，

$$3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{2}{13}+\frac{2}{20}+\frac{2}{156}.$$

(2). 應用 Stewart 法，可得

$$3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{182}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{420}\right)+\left(\frac{1}{156}+\frac{1}{157}+\frac{1}{24492}\right).$$

(3). 將相同分母合併之後，我們可得

$$3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{30}+\frac{1}{156}+\frac{1}{157}+\frac{1}{182}+\frac{1}{420}+\frac{1}{24492}.$$

接下來，這是最後一次的拆分了。

(1). 我們要將

$$3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{30}+\frac{1}{156}+\frac{1}{157}+\frac{1}{182}+\frac{1}{420}+\frac{1}{24492}.$$

拆成單位分數和。

(2). 應用 Stewart 法，可得

$$3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right)+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{30}$$
$$+\frac{1}{156}+\frac{1}{157}+\frac{1}{182}+\frac{1}{420}+\frac{1}{24492}.$$

(3). 將相同分母合併，再將分母大小遞增排列，可得

$$3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$
$$+\frac{1}{156}+\frac{1}{157}+\frac{1}{182}+\frac{1}{420}+\frac{1}{24492}.$$

已經拆成單位分數和。

5. 計算級數的項數。 我們拆完之後，計算出總共有19項。

(三) 程式的運算。

我們利用 python 去求解

$$m = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{x_k}.$$

演算法有兩種，第一種是直接去找$\mathrm{len}(m)$的值，而做法跟之前的類似，第二種是在檢驗我找$\mathrm{len}(m)$上界的演算法。 在此，我只講找$\mathrm{len}(m)$上界的演算法。

1. 首先，先輸入正整數m。
2. 生成陣列A蒐集所有數對$(\alpha_{1,k}, \beta_{1,k})$。
3. 定義函數T，如下：

(1) 輸入一個集合$A=\{(\alpha_{n,k},\beta_{n,k})\}$

(2) 由T的定義可知，$T(A)$需要包含$(1,\beta_{n,k})$, $(\alpha_{n,k}-1,\beta_{n,k}+1)$, $(\alpha_{n,k}-1,\beta_{n,k}(\beta_{n,k}+1))$。

(3) 輸出結果，令為$T(A)$。

4. 定義函數 merge，如下：

(1) 輸入$T(A)$。

(2) 令一個集合S蒐集所有的$\beta_{n,k}\in T(A)$，並將S由小到大排序。

(3) 在進入一個迴圈： 將集合S的所有元素都跑過一遍，再經由以下幾點的運算：

a. 給定一個$s\in S$。

b. 若$(\alpha_{n+1,k},\beta_{n+1,k})\in T(A)$滿足$\beta_{n+1,k}=s$，將他蒐集到一個集合$S'$中。

(4) 假設$S'=\{(s_{1k},s_{2k})|k=1,2,\dots,m\}$，則將$(s_{11}+\cdots+s_{1m},s)$存到另一個集合$A'$。

(5) 做完這些運算之後，回傳A'。

5. 底下會是一個迴圈： 離開迴圈的條件是當$\alpha_{n,k}$皆為1時。 在此迴圈中，不斷地用$T(A)$再用 merge 函數將他整理、合併。

6. 輸出最後陣列的長度，即是$\mathrm{len}(m)$的一個上界。

參、研究結果與討論

在我們討論 Erdös-Straus 猜想以及 Serpiǹski 猜想的過程中， 試著將分母模一個適當的整數，依照同餘類做區分，討論那些正整數n可以寫成$\frac{l}{n}=\frac{1}{q+t}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的形式，其中$q=\lfloor\frac{n}{l}\rfloor$。

在討論的過程中，如果模該數只剩少許幾種情況需要討論，則我們將會再進一步模該數的倍數。並且繼續討論剩下的情況，然而我們在使用此方法時發現，最後總是會剩下一些情況無法處理。雖然我們無法使用此方法證明出兩猜想，但隨著模的數越討論越大，對於使用程式檢驗將會有大幅度的優化。

此外，有關 Schinzel 猜想的驗證，我們使用廣度優先演算法，並且不斷優化程式， 目前已將$\frac{8}{n}$、$\frac{9}{n}$， $n<10^7$的情況驗證完，並且給出$N(8)$與$N(9)$的下界。

另外，我們將森棚教官數學題的問題延伸，除了檢查1是否能拆成形如$2n$為分母或$3n+2$為分母的單位分數和，我們將$2n$或$3n+2$推廣，推廣成$pn+q$的形式，即分母皆同餘q模p。 然而$pn+q$的形式較難討論，因此我們目前只有討論形如pn的單位分數和。

此外，我們在討論形如pn的單位分數和問題中，我們估算$\operatorname{len}(m)$的上界所用的演算法：Stewart m-algorithm 較不如預期，因為他估計出來的結果較實際的結果大了許多。 因此，我們要去找另一個演算法，去得到比較接近$\operatorname{len}(m)$的上界。

肆、結論與應用

一、結論

(一)　找出$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right)$的上界

首先，我們從若不定方程

$$\frac{b}{a}=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{x_k}$$

有解推得

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq l$$

並且我們用 Erdös-Straus 猜想與系理 1 、定理 2 找出了

$$\operatorname{len}\left(\frac{b}{a}\right) \leq b - 3\left\lfloor\frac{b}{7}\right\rfloor$$

(二) 解出了森棚教官的數學題

兩題的結果分別如下：

1. 第 1 題的解：(2,4,6,12)，即

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}.$$

2. 第 2 題的解：(2,5,8,14,20,44,56,77)，即

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20} + \frac{1}{44} + \frac{1}{56} + \frac{1}{77}.$$

(三) 延續討論與 Erdös-Straus 猜想相關的內容

我們將原本的 Erdös-Straus 猜想的討論方式去討論 Sierpiński 猜想與 Kiss 猜想，分別去討論哪些n值可以寫成

$$\frac{l}{n} = \frac{1}{q+t} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

其中$l = 5,6,7$以及$t = 1,2,3$等。

(四) 延續探討 Schinzel 猜想

將 Schinzel 猜想中，$N(l)$的下界的尋找的資料測試量增加(從原本的 10000 筆改成 100 萬筆)。 我們用了命題 5 去寫了程式，將原本的耗時間的算法省下不少時間。

(五)　計算$\mathrm{len}(m)$的一個下界。

我們運用數值積分法(tangent rule)去計算$\mathrm{len}(m)$的一個下界，而他的下界為

$$\mathrm{len}(m) \geq \frac{e^m - 3}{2}.$$

(六)　找出判斷

$$\frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{px_k + q}$$

是否有解的必要條件。

我們發現給定五個正整數a, b, p, q, m，只要

$$bq \not\equiv ma \pmod{p},$$

方程式

$$\frac{b}{a} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{px_k + q}$$

必然無解。

二、未來展望

我們目前的研究較大部分是討論$\frac{b}{a}$拆成$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$，其中$k \in \mathbb{N}$的狀況，未來會研究$\langle x_k \rangle$是其他數列，例如等差數列、費氏數列等狀況。

關於 Erdös-Straus 猜想，我們也希望能找到一個方法推進他的證明，也當然會希望能有辦法證明出來，但在有限的工具下，要完整證明的路程仍相當遙遠。 所以我們會繼續探討 Erdös-Straus 猜想的內容。此外，Schinzel 猜想也是我們想繼續討論的，因為如果 Schinzel 猜想證明出來，我們就可以把我們的單位分數問題解決大部分。

最後，我們也希望能找到一個好的估算方法估計$\mathrm{len}(m)=\mathrm{len}_m(1)$，並且將它證明。 剛開始，我們用 Stewart m-algorithm 去估算，得到的上界跟實際值差的比較多，後來我們有想到另一個演算法，也還在測試中，但是在我們目前的計算下，認為這個演算法會是一個比較貼近$\mathrm{len}(m)$的實際值的演算法。

三、應用

可以將這個結果延伸到函數的數值分析上： 因為在數值分析中，單位分數的運算相對無理數來說，是比較好計算的。 因此，我們可以將他的一些性質，運用到函數的估計，例如可以在泰勒展開式中，運用單位分數的估算，得到要估算的函數值。

舉例而言，如果我們要計算$e^{2/5}$，我們知道e^x的 Taylor' s expansion 是

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

另外，$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$，假設我們將他估計到誤差值小於$10^{-3}$，則我們取前 4 項的 Taylor series，

$$e^{2/5} = 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)^4 + o\left(\frac{2}{5}\right)^4$$

於是我們得到一個$e^{2/5}$的一個單位分數和的逼近，如下：

$$\begin{aligned} e^{\frac{2}{5}} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{45} + \frac{1}{450} + \frac{1}{162} + \frac{1}{270} + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1944} + \frac{1}{2430} + \frac{1}{8100} \\ &\quad + \frac{1}{60750} + \frac{1}{121500} + o\left(\frac{2}{5}\right)^4. \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{45} + \frac{1}{450} + \frac{1}{162} + \frac{1}{270} + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1944} \pm 0.001. \end{aligned}$$

實際上

$$e^{\frac{2}{5}} - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{45} + \frac{1}{450} + \frac{1}{162} + \frac{1}{270} + \frac{1}{1350} + \frac{1}{1944}\right) \approx 0.000693.$$

伍、參考資料

1. 維基百科。深度優先搜尋

   https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B7%B1%E5%BA%A6%E4%BC%98%E5%85%88%E6%90%9C%E7%B4%A2

2. 文耀光(2002)。 古埃及的單位分數問題， 數學傳播，26(4)，52-59。

   https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d264/26405.pdf

3. 游森棚。 森棚教官的數學題——湊成 1

   https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?cat=6842&a=6829&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=14083

4. Ionascu, E. J., & Wilson, A. (2010). On the Erdos-Straus conjecture. *arXiv preprint arXiv:1001.1100.*

   https://arxiv.org/pdf/1001.1100.pdf

5. Vaughan, R. C. (1970). *On a problem of Erdös, Straus and Schinzel. Mathematika, 17*(2), 193-198.

   https://www.cambridge.org/core/journals/mathematika/article/abs/on-a-problem-of-erdos-straus-and-schinzel/6622BF4A083315C30DF1114A6F600223

6. Gong, K. (1992). Egyptian Fractions. *Math 196 Spring, UC Berkeley.*

   http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.368.383&rep=rep1&type=pdf

7. Wikipedia. *The Erdős-Straus conjecture*

   https://en.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s%E2%80%93Straus_conjecture

陸、附錄

一、測資存放的網頁

底下是我們測試資料的網頁：

https://drive.google.com/drive/folders/1EImeBJL2AVt6x1EsvP9d1YFBcff_T2oI?fbclid=IwAR02f6eU9_Wv8WMVRkuqh1NB80EBYHj065lmjjO_gpCWI-Uy-a7-40nVYkc

以及此網頁：

https://sites.google.com/gs.hs.ntnu.edu.tw/schinzel-conjecture/n%E5%88%86%E4%B9%8B18

二、檢驗 Schinzel 猜想的演算法

```
from math import sqrt, log
from time import time, sleep
def factor(n):
    factors = []
    for i in range(1, int(sqrt(n)) + 2):
        if n % i == 0:
            factors.append(i)
            factors.append(int(n/i))
    return factors

l = int(input('l='))
n0 = int(input('n0='))
N = int(input('The upper bound of n='))
path = 'Solution of l over n.txt'
f = open(path, 'w')
t0 = time()
q_max = int(N/l)
S = [[] for i in range(2*q_max)]
nosol = []
#S = []
#print(S)
N0 = n0
nowsol = n0
if n0 < l:
    for n in range(1, l - 1):
        sol = False
        if n == 0:
```

```
            continue
        #print(n)
        if n / l > 3:
            nosol.append(n)
            continue
        if l / n == 3:
            print('n='+str(n), file= f)
            print([1,1,1], file= f)
            continue
        elif l / n == 2:
            print('n=' + str(n), file= f)
            print([1,1], file= f)
            continue
        else:
            for i in range(int(n/l) + 1, int(3*n/l)):
                a = n * i
                b = i * l - n
                fac = factor(a ** 2)
                #print(n)
                for j in fac:
                    if j % b == -a % b:
                        ans = [i, int((a+j)/b), int((a+a**2/j)/b)]
                        print(ans, file= f)
                        sol = True
                        break
            if not sol:
                nosol.append(n)
for n in range(max(n0, l), N):
    if n % l == -1 % l or n % l == 0:
```

```
        nowsol = n
        continue
    q = int(n/l)
    r = n - q*l
    sol = False
    #print(q, r)
    for m in range(1, 2*q+1):
        a = n * (m+q)
        b = l*m - r
        #print(a, b)
        #print(factor(a))
        #print(a % b)
        fac1 = factor(a)
        for i in fac1:
            if i % b == -a % b:
                #S[m-1].append(n)
                #S.append(n)
                ans = [q+m, int((a+i)/b), int((a+a**2/i)/b)]
                print('n='+str(n)+'\n'+str(ans), file=f)
                #print(str(n)+' in the set S_{'+str(l)+','+str(m)+'}')
                sol = True
                break
        if sol:
            nextsol = n
            if nextsol - nowsol > 1:
                N0 = nextsol
            nowsol = nextsol
            break
    if not sol:
```

```
        nosol.append(n)


#print(nosol)
for n in nosol:
    q = int(n/l)
    r = n - q*l
    sol = False
    #print(q, r)
    for m in range(1, 2*q+1):
        a = n * (m+q)
        b = l*m - r
        #print(a, b)
        #print(factor(a))
        #print(a % b)
        fac = factor(a**2)
        for i in fac:
            if i % b == -a % b:
                #S[m-1].append(n)
                #S.append(n)
                ans = [q+m, int((a+i)/b), int((a+a**2/i)/b)]
                print('n='+str(n)+'\n'+str(ans), file=f)
                #print(str(n)+' in the set S_{'+str(l)+','+str(m)+'}')
                sol = True
                nosol.remove(n)
                break



N0 = min(max(nosol) + 1, N0)
```

```
#D = []
'''
for i in range(len(S)-1):
    D.append(S[i+1]-S[i])
#print(D)
for i in range(len(D)):
    if max(D[i:]) == 1:
        print('N('+str(l)+')>='+str(S[i]), file= f)
        break

'''
print('N('+str(l)+')>='+str(N0), file= f)
print('N('+str(l)+')>='+str(N0))
'''
for i in range(len(S)):
    if S[i] != []:
        print('S{'+str(l)+','+str(i+1)+'}='+str(S[i]), file=f)
        if i <= int(log(N, 10))-1:
            Sc = []
            for j in range(i+1, len(S)):
                Sc += S[j]
            Sc.sort()
            print('S{'+str(l)+','+str(i+1)+'}^c='+str(Sc), file= f)
'''

t1 = time()
print(t1-t0, file= f)
f.close()
print('T')
```

三、Stewart *m*-algorithm 的演算法

```
m = int(input('m='))

alpha = [k+1 for k in range(m)]

beta = [k+1 for k in range(m)]

set = [(alpha[k],beta[k]) for k in range(m)]

path = 'Stewart m-algorithm m=' + str(m) + '.txt'

f = open(path, 'w')

print('m=', m, file= f)

def T(set):

    set1 = []

    for i in set:

        set1.append((1,i[1]))

        if i[0] != 1:

            set1.append((i[0] - 1, i[1] + 1))

            set1.append((i[0] - 1, i[1] * (i[1] + 1)))

    return set1


def merge(set):

    set0 = set

    set1 = []

    count = []

    for i in set:
```

```
        if i[1] not in count:
            count.append(i[1])
    count.sort()
    for i in count:
        a = []
        for j in set0:
            if j[1] == i:
                a.append(j[0])
        set1.append((sum(a), i))
    return set1


print('the 0 time', set)
done = False
times = 0
while not done:
    times += 1
    set = merge(T(set))
    done = True
    for i in set:
        if i[0] != 1:
            done = False
            break
```

```
    print('the ', times, 'time', set, file= f)

print('len(m,x)=', len(set), file= f)
```

【評語】010012

作者研究分數的拆分問題，試圖將有理數分解成真分數的和並考慮最短的分解。這類的問題自古以來即是相當具挑戰性的問題，有名的 Erdös 猜想，Straus 猜想等都是這方面懸之已久的有名問題。

作者得到一個最短拆分長度的上界估計，是相當不錯的結果。考量問題本身的難度，建議作者可以再嘗試合適的切入點，應該可以有機會再得到有趣的進展。