

# 2022 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010011

參展科別 數學

作品名稱 半正鑲嵌圖形中的捷徑問題

得獎獎項

就讀學校 臺北市立永春高級中學

指導教師 蔡春風

作者姓名 蘇靖洋、鄭富中

關鍵詞 半正鑲嵌、捷徑問題、方法數

## 作者簡介



我是蘇靖洋（右），目前就讀臺北市立永春高中二年級數理資優班。我從小就對數學有極大興趣，國中的時候加入資優班，第一次接觸專題，並且在當中學習到了許多東西。上高中後延續國中的基礎，學會了更多數學解題技巧、並思考更多數學的難題。我從高一就開始進行研究，在過程中學到了如何尋找文獻，也因此觸及到許多自己不曾接觸過的領域，了解前人做過的研究，並且沉浸在其中，未來會繼續朝向數學研究的道路發展。

我是鄭富中（左），目前就讀臺北市立永春高中二年級數理資優班。我很喜歡計算、思考並解決數學題目，升上高中後很幸運能夠進入數理資優班，讓我有更多時間可以專注於學習數學。在專題方面，我從高一就開始進行研究，學到了許多以前不會的新事物，在看別人的研究過程中，同時了解了自已哪方面還需要再精進，這次很高興在和同學的相互合作下入選國際科展，相信未來的研究之路會一直延續下去。

## 摘要

本研究從在方格棋盤中走捷徑的問題出發，推廣至由多個相異正多邊形所組成的半正鑲嵌圖形棋盤，其沿格線走捷徑的方法數與最短路徑。研究中，我們針對所有 8 種 1 律半正鑲嵌圖形進行分類探討，包括截半六邊形、截角六邊形、扭稜六邊形、小斜方截半六邊形、大斜方截半六邊形、扭稜正方形、異扭稜正方形、截角正方形圖形。我們將每種棋盤進行「轉正」，使它對應於唯一的矩形棋盤，達到「捷徑同構」，因而原本半正鑲嵌圖中的捷徑問題就等價於方格棋盤的捷徑問題。我們將走捷徑方法數的通解分類，發現有組合數類、以及階差與指數混合兩大類，並分析康威表示法與通解的關係。

## Abstract

This study originated from the problem of number calculation of minimum trails in square grid region, into Archimedean tilings, which is composed of several regular polygons. All 8 kinds of Archimedean tilings are included, namely, the Trihexagonal Tiling, the Truncated Hexagonal Tiling, the Snub Trihexagonal Tiling, the Rhombi Trihexagonal Tiling, the Truncated Trihexagonal Tiling, the Snub Square Tiling, the Elongated Square Tiling, and the Truncated Square Tiling.

In this study, we found that we can convert the shortcut problem in the Archimedean tilings to which in the rectangular checkerboard through appropriate transformation. We called it “shortcut isomorphic” since the both graphs have the same number of shortcuts. We derived all the general solutions, and also classified the form of the general solutions into two major types, then analyzed relation between Conway Notation and these types of general solutions.

## 壹、研究動機

在學排列組合的時候有學到走捷徑的方法數的問題，其中走捷徑方法數的計算方式令我們印象深刻。某次去餐廳吃飯時，無意間發現地板是由正方形與正八邊形所組成的，這些由兩種相異正多邊形所組成的鑲嵌圖形中，每個邊皆等長，因此我們認為這類的圖形也一樣可以算出最短路徑的方法數及最短路徑的步數，所以進一步去做這個研究。

## 貳、研究目的

- 一、定義並分類各種鑲嵌圖形及棋盤。
- 二、探討所有半正鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走到 B 點的最少步數。
- 三、探討所有半正鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數。
- 四、將通解的形式分類，分析康威表示法與通解的關係。

## 參、研究設計

### 一、文獻探討

平面上，有許多正多邊形可以互相拼鋪，無縫填滿整個平面，稱為鑲嵌 (Dangelo & West, 2000)。首先，我們要探討所有由兩種不同的正多邊形進行平面鑲嵌的半正鑲嵌圖形種類。我們從文獻當中得知，半正鑲嵌圖形是指由多個正多邊形鑲嵌組成並且可密鋪於無限延伸平面的圖形，並且其中對於每個頂點，周遭的圖形規律總共只有一種 (張玉琪, 2009)，而有  $k$  種規律的圖形我們稱為  $k$  律鑲嵌 (Wikipedia, 2022)，所以本文探討的是 1 律鑲嵌。

我們在半正鑲嵌圖形的命名中，參考了康威所提出的康威多面體表示法 (Wikipedia,

2022)，當中類似幾何變換的名稱例如：截角、截半、小斜方、大斜方、扭稜，這些都是用來說明圖形是從哪個正多邊形經過哪個操作得來的。康威表示法將 1 律鑲嵌圖形分為 8 大類，本研究窮舉這 8 大類圖形，進行細部分類討論，並計算研究目的中的通解。

## 二、研究設備與器材

紙、筆、電腦、印表機、The Geometer's Sketchpad、GeoGebra。

## 三、研究流程與架構

本研究按照以下流程進行。

- (一) 定義各種類圖形的一單位。
- (二) 利用 The Geometer's Sketchpad 作圖，列印並裁剪。
- (三) 定義 A 點與 B 點的位置。
- (四) 實際拼湊圖形，並嘗試進行轉正的動作。
- (五) 藉由轉正後的圖形，求出最少步數與方法數的通解。
- (六) 將無法轉正的圖形，手動進行計算並從數值中分析規律。
- (七) 求出無法轉正的圖形的最少步數與方法數的通解。

本研究參考康威表示法，將所有 8 種 1 律半正鑲嵌圖形分類並取縮寫如下圖 1。



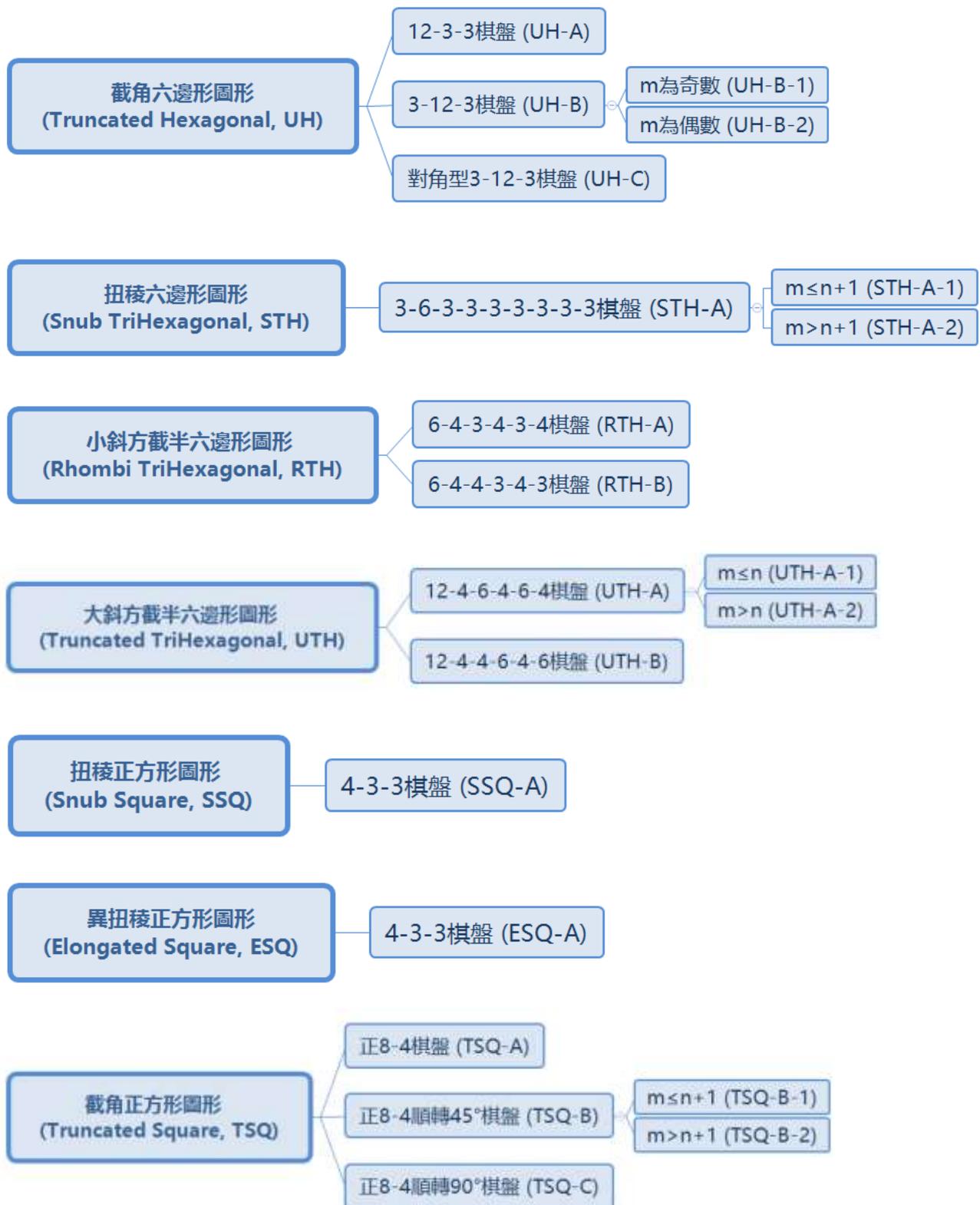


圖 1：研究架構與棋盤名稱定義圖

#### 四、名詞定義

(一) 棋盤大小  $m \times n$ ：我們定義一個，往右  $m$  個單位圖形往上  $n$  個單位圖形的棋盤為  $m \times n$  的圖形棋盤，如下圖 2 即為  $4 \times 2$  的圖形棋盤。

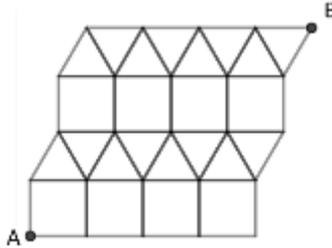


圖 2：一個  $4 \times 2$  的圖形棋盤

(二) 各圖形的 A、B 點：各圖形當中 A 點的位置都為先找最下面的邊，在從這些邊上在找最左邊的點。而 B 點的位置都為先找最上面的邊，在從這些邊上找最右邊的點，但當中有六個例外分別是 UH-A、UH-B、UH-C、UTH-A、ESQ-A、TSQ-C 我們定義它的 A、B 點如下圖 3、4、5、6、7、8 所示。

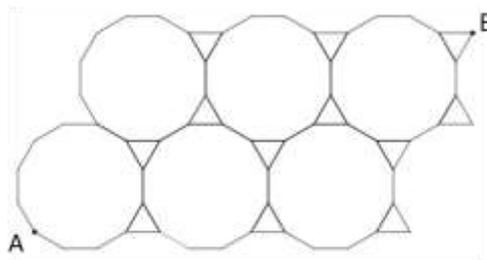


圖 3：UH-A 圖形的 A、B 點

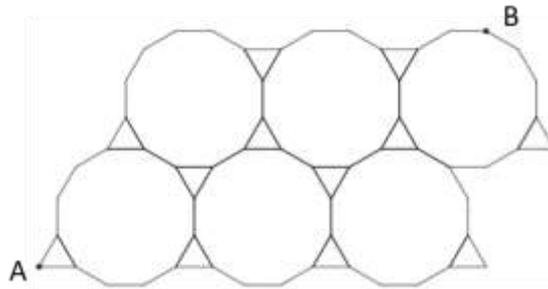


圖 4：UH-B 圖形的 A、B 點

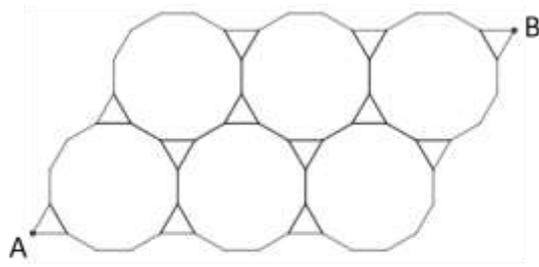


圖 5：UH-C 圖形的 A、B 點

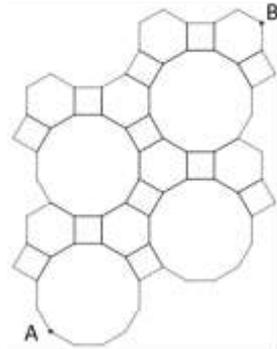


圖 6：UTH-A 圖形的 A、B 點

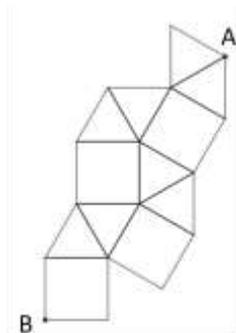


圖 7：ESQ-A 圖形的 A、B 點

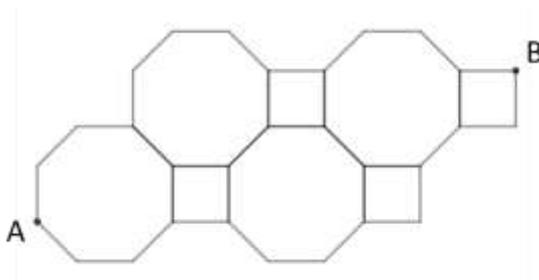


圖 8：TSQ-C 圖形的 A、B 點

- (三) 步數：從 A 點走到 B 點的過程中所經過的邊長數。
- (四) 函數  $S(m, n)$ ：在一圖形的  $m \times n$  棋盤中，從 A 點走到 B 點的最少步數。
- (五) 函數  $M(m, n)$ ：在一圖形的  $m \times n$  棋盤中，從 A 點走捷徑到 B 點的方法數。
- (六) 轉正：將半正鑲嵌棋盤與方格棋盤進行格線的一一對應，使得從 A 到 B 走捷徑的方法數不變（但邊長有可能改變）。
- (七) 捷徑同構：指經過轉正後，此半正鑲嵌棋盤與其對應的方格棋盤之間的關係。

## 肆、研究結果

### 一、定義並分類各種鑲嵌圖形及棋盤

首先，我們依序定義 TH-A、TH-B、TH-C、UH-A、UH-B、UH-C、STH-A、RTH-A、RTH-B、UTH-A、UTH-B、SSQ-A、ESQ-A、TSQ-A、TSQ-B、TSQ-C 的一單位圖形，如下圖 9、10、11、12、13、14、15 所示。

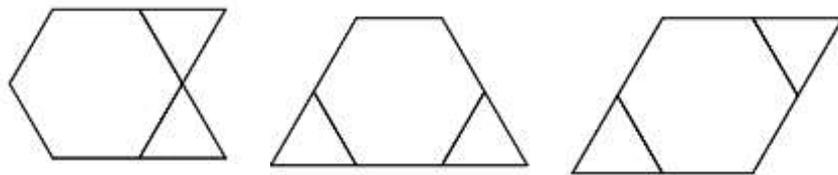


圖 9：TH-A、TH-B、TH-C 棋盤的一單位圖形

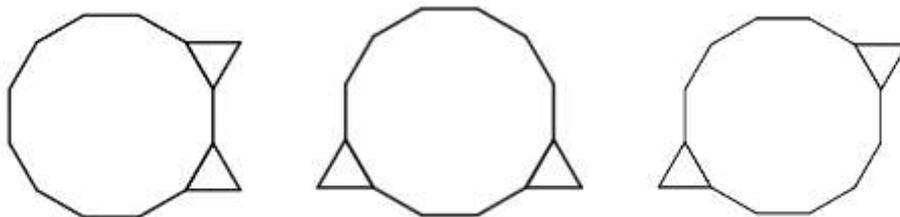


圖 10：UH-A、UH-B、UH-C 棋盤的一單位圖形

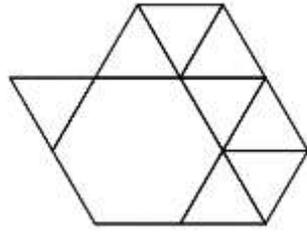


圖 11：STH-A 棋盤的一單位圖形

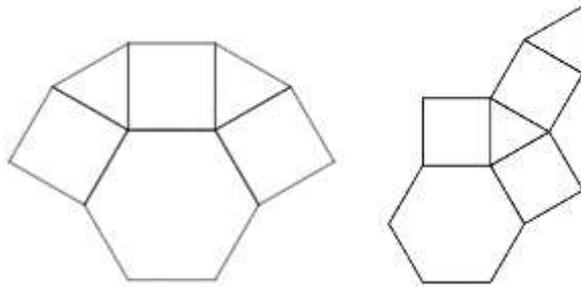


圖 12：RTH-A、RTH-B 棋盤的一單位圖形

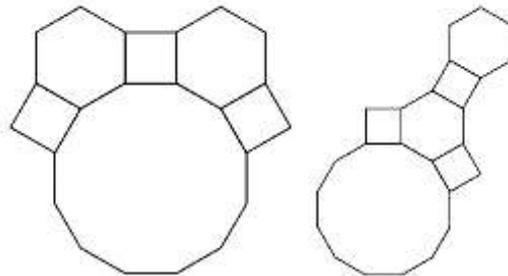


圖 13：UTH-A、UTH-B 棋盤的一單位圖形

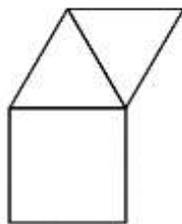


圖 14：SSQ-A、ESQ-A 棋盤的一單位圖形

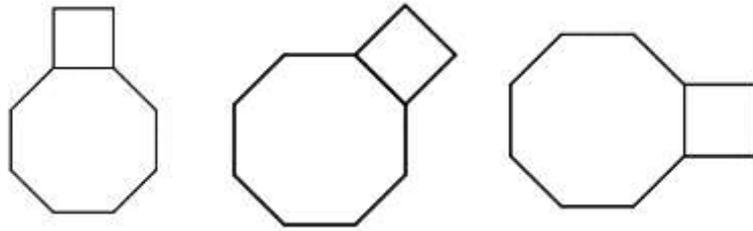


圖 15：TSQ-A、TSQ-B、TSQ-C 棋盤的一單位圖形

接著再定義 TH-A、TH-B、TH-C、UH-A、UH-B、UH-C、STH-A、RTH-A、RTH-B、UTH-A、UTH-B、SSQ-A、ESQ-A、TSQ-A、TSQ-B、TSQ-C 的棋盤，如下圖 16、17、18、19、20、21、22 所示。

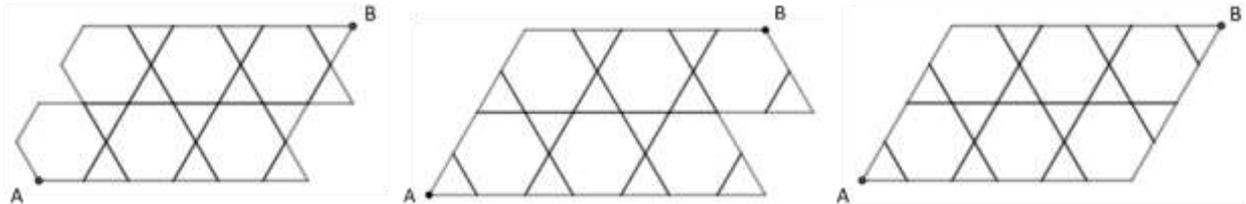


圖 16：TH-A、TH-B、TH-C 棋盤

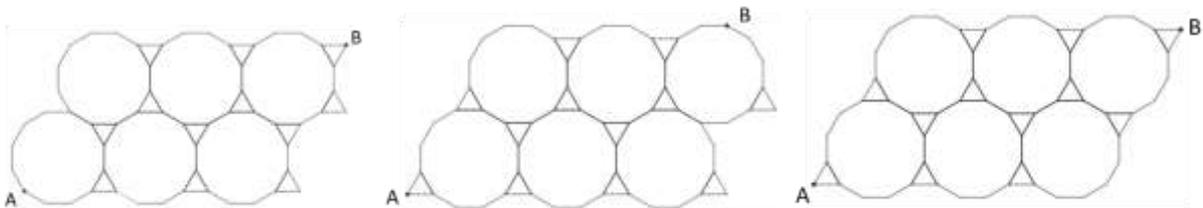


圖 17：UH-A、UH-B、UH-C 棋盤

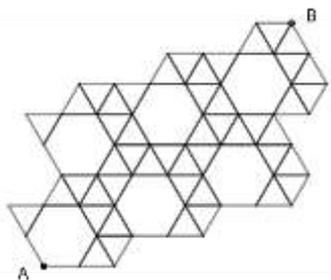


圖 18：STH-A 棋盤

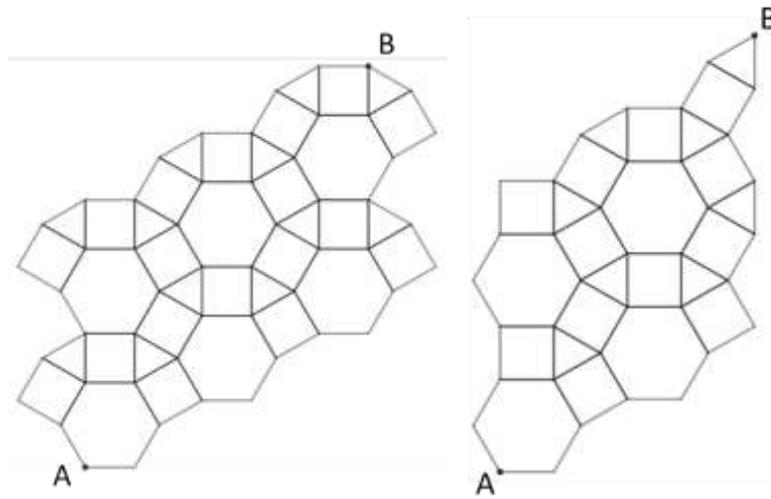


圖 19：RTH-A、RTH-B 棋盤

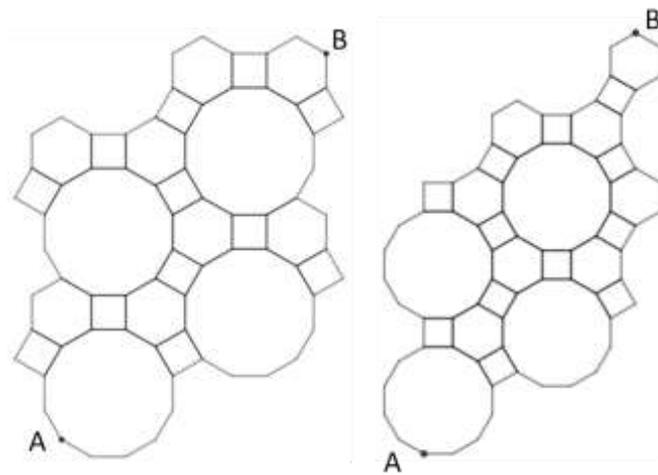


圖 20：UTH-A、UTH-B 棋盤

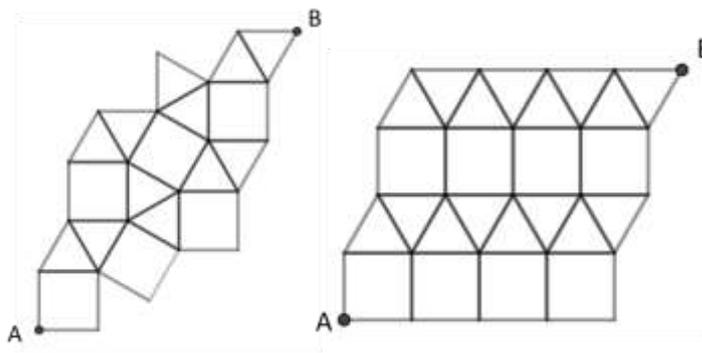


圖 21：SSQ-A、ESQ-B 棋盤

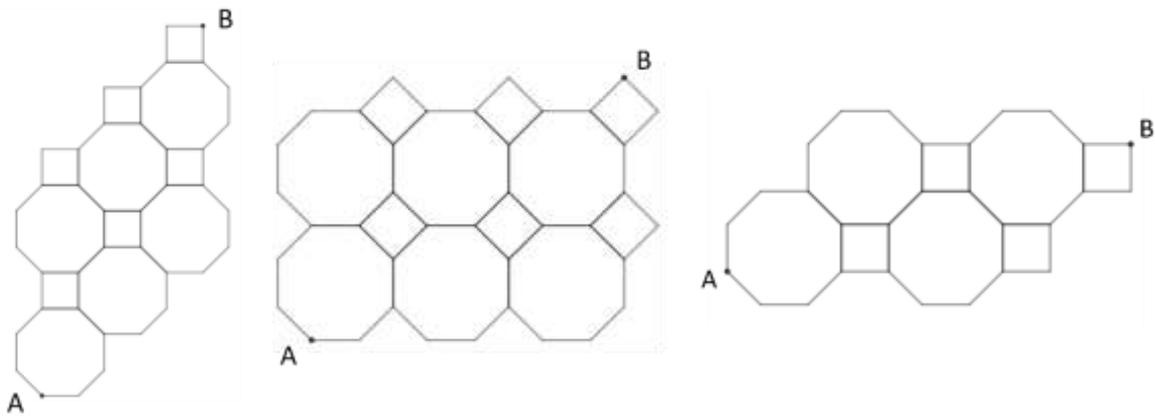


圖 22：TSQ-A、TSQ-B、TSQ-C 棋盤

## 二、探討半正鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走到 B 點的最少步數

### (一) TH-A 棋盤

TH-A 棋盤在  $m$  跟  $n$  加一時，其最少步數都會跟著 +2，且  $S(1,1) = 3$ ，所以得到  $S(m,n) = 2m + 2n - 1$ 。

### (二) TH-B-1 棋盤

TH-B-1 棋盤在  $m$  為奇數時棋盤右邊會不完整，而我們實際嘗試後知道， $m$  跟  $n$  加一時，其最少步數都會跟著 +2，且  $S(1,1) = 3$ ，所以得到  $S(m,n) = 2m + 2n - 1$ 。

### (三) TH-B-2 棋盤

TH-B-2 棋盤在  $m$  為偶數時棋盤右邊是完整的，並且  $m$  跟  $n$  加一時，其最少步數都會跟著 +2，且  $S(2,1) = 6$ ，所以其通解為  $S(m,n) = 2m + 2n$ 。

(四) TH-C 棋盤

TH-C 棋盤在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+2，且 $S(1,1) = 4$ ，所以得到 $S(m,n) = 2m + 2n$ 。

(五) UH-A 棋盤

UH-A 棋盤在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(1,1) = 6$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 2$ 。

(六) UH-B-1 棋盤

UH-B-1 棋盤在 $m$ 為奇數時棋盤右邊的樣貌不完整，而我們實際嘗試後知道， $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(1,1) = 5$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 3$ 。

(七) UH-B-2 棋盤

UH-B-2 棋盤在 $m$ 為偶數時棋盤右邊是完整，並且 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(2,1) = 11$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 1$ 。

(八) UH-C 棋盤

UH-C 棋盤在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(1,1) = 7$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 1$ 。

### (九) STH-A-1 棋盤

透過實際操作可以發現 STH-A 棋盤在  $m = n + 1$  會出現一個分界線，而  $m < n + 1$  跟  $m = n + 1$  時，當  $m$  加一時，最短路徑的步數會+2，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+3，且  $S(1,1) = 4$ ，所以得到  $S(m,n) = 2m + 3n - 1$ 。

### (十) STH-A-2 棋盤

同上 STH-A 棋盤在  $m = n + 1$  會出現一個分界線，而  $m > n + 1$  時，當  $m$  加一時，最短路徑的步數會+3，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+2，且  $S(3,1) = 9$ ，所以得到  $S(m,n) = 3m + 2n - 2$ 。

### (十一) RTH-A 棋盤

RTH-A 棋盤的最少步數在  $m$  跟  $n$  加一時，其最少步數都會跟著+3，且  $S(1,1) = 4$ ，所以得到  $S(m,n) = 3m + 3n - 2$ 。

### (十二) RTH-B 棋盤

RTH-A 棋盤的最少步數在  $m$  跟  $n$  加一時，其最少步數都會跟著+3，且  $S(1,1) = 6$ ，所以得到  $S(m,n) = 3m + 3n$ 。

### (十三) UTH-A-1 棋盤

透過實際操作可以發現 UTH-A 棋盤在  $m = n$  會出現一個分界線，而  $m < n$  跟  $m = n$  時，當  $m$  加一時，最短路徑的步數會+4，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+6，且  $S(1,1) = 8$ ，所以

得到 $S(m, n) = 4m + 6n - 2$ 。

(十四) UTH-A-2 棋盤

同上 UTH-A 棋盤在 $m = n$ 會出現一個分界線，而 $m > n$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+6，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+4，且 $S(2,1) = 14$ ，所以得到 $S(m, n) = 6m + 4n - 2$ 。

(十五) UTH-B 棋盤

此棋盤的遞回規律尚未確定。

(十六) SSQ-A 棋盤

SSQ-A 棋盤在 $m$ 為奇數和偶數時棋盤右邊的樣貌會不一樣，所以經由研究後得到下表 1，觀察下表 1 可知，當 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+2，而 $m$ 加一時，會呈現+1跟+2的情況輪流出現，所以我們決定將 $m$ 為奇數和 $m$ 為偶數時的情況分別討論，所以可得 $m$ 為奇數時其通解為 $S(m, n) = \frac{3}{2}m + 2n - \frac{1}{2}$ ，而 $m$ 為偶數時其通解為 $S(m, n) = \frac{3}{2}m + 2n - 1$ 。

表 1：SSQ-A 棋盤研究數據

$m \times n$ 棋盤	$S(m, n)$						
1 × 1	3	2 × 1	4	3 × 1	6	4 × 1	7
1 × 2	5	2 × 2	6	3 × 2	8	4 × 2	9
1 × 3	7	2 × 3	8	3 × 3	10	4 × 3	11

(十七) ESQ-A 棋盤

ESQ-A 棋盤當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+1，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+2，且 $S(1,1) = 3$ ，所以其最少步數通解為 $S(m,n) = m + 2n$

(十八) TSQ-A 棋盤

TSQ-A 棋盤當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+3，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+4，且 $S(1,1) = 5$ ，所以得到 $S(m,n) = 3m + 4n - 2$ 。

(十九) TSQ-B-1 棋盤

透過實際操作可以發現 TSQ-B 棋盤在 $m = n + 1$ 會出現一個分界線，而 $m < n + 1$ 跟 $m = n + 1$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+1，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+3，且 $S(1,1) = 5$ ，所以得到 $S(m,n) = m + 3n + 1$ 。

(二十) TSQ-B-2 棋盤

同上 TSQ-B 棋盤在 $m = n + 1$ 會出現一個分界線，而 $m > n + 1$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+3，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+1，且 $S(3,1) = 9$ ，所以得到 $S(m,n) = 3m + n - 1$ 。

(二十一) TSQ-C 棋盤

TSQ-C 棋盤當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+4，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+3，且 $S(1,1) = 5$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 3n - 2$ 。

### 三、探討半正鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數

#### (一) TH-A 棋盤

TH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 23 所示，而由於當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我們可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 24 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤的走捷徑的方法數算法，就等價於方格棋盤的方法數算法了，接著我們觀察  $m$ 、 $n$  方向每加一單位的圖形規律，得出通解  $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

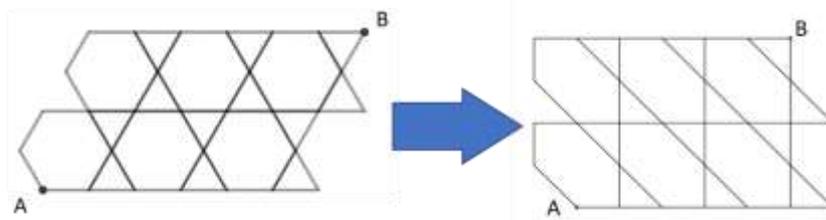


圖 23：TH-A 棋盤的轉正過程

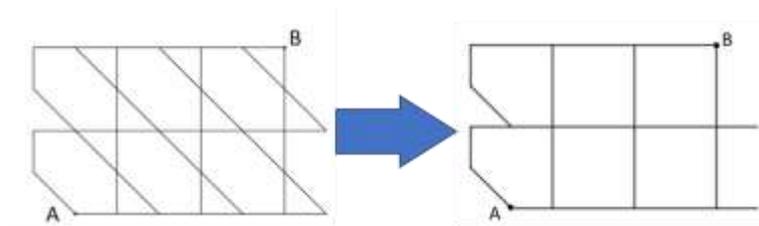


圖 24：TH-A 棋盤的轉正過程

#### (二) TH-B-1 棋盤

同樣的 TH-B-1 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 25 所示，而當中某些斜線的有無不影響方法數，且  $m$  為奇數時棋盤右邊會不完整，導致走捷徑時完全不會經過右邊的圖形，所以我們將右邊的棋盤全部去掉，則可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 26 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤的走捷徑的方法數算法，就等價於方格棋盤的方法數算法了，接著我們觀察  $m$ 、 $n$  方向每加一單位的圖形規律，得出通解  $M(m, n) =$

$$C_n^{m+n-1}。$$

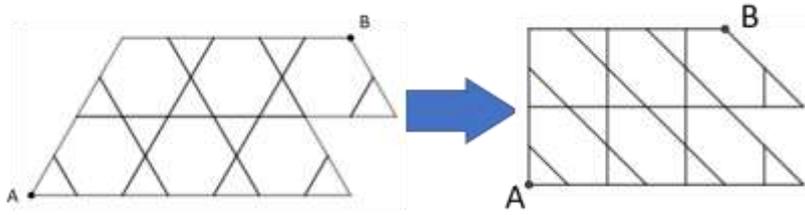


圖 25：TH-B-1 棋盤的轉正過程

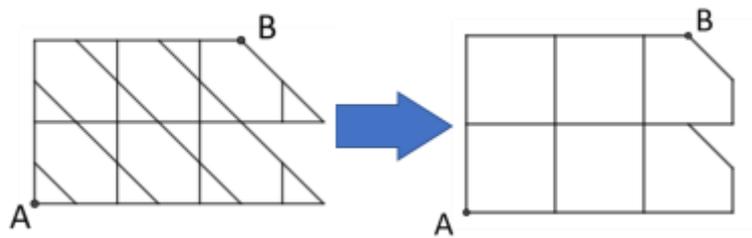


圖 26：TH-B-1 棋盤的轉正過程

### (三) TH-B-2 棋盤

同樣的 TH-B-2 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 27 所示，而當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我們可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 28 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤在  $m$  為偶數時，實際上就是一個完整的方格棋盤，得出通解  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

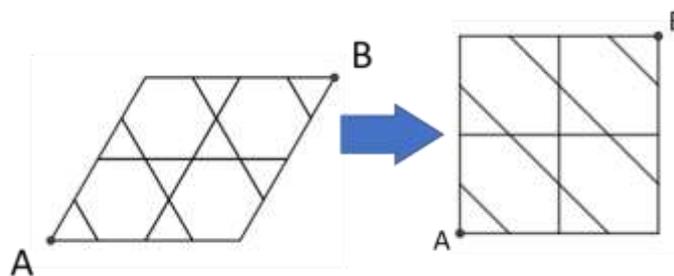


圖 27：TH-B-2 棋盤的轉正過程

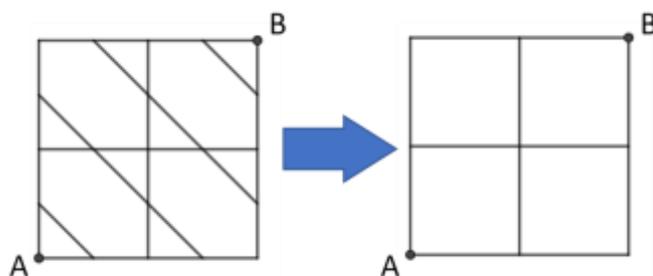


圖 28：TH-B-2 棋盤的轉正過程

#### (四) TH-C 棋盤

同樣的 TH-C 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 29 所示，而當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我們可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 30 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

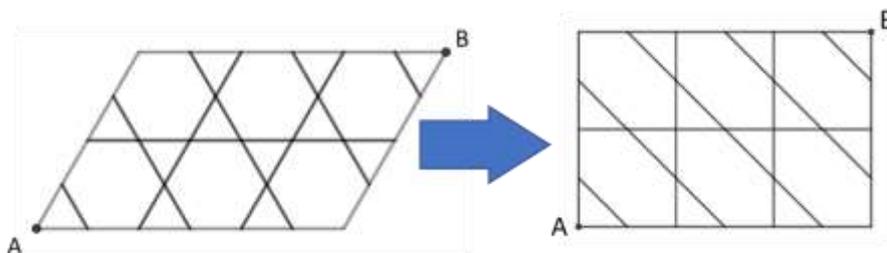


圖 29：TH-C 棋盤的轉正過程

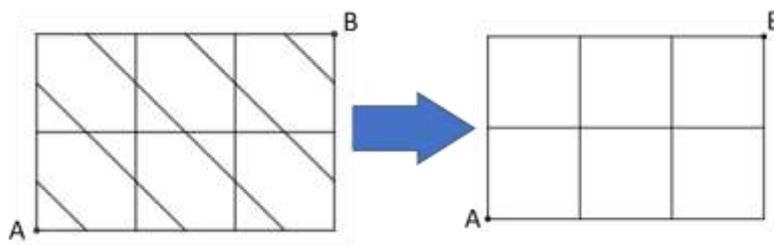


圖 30：TH-C 棋盤的轉正過程

### (五) UH-A 棋盤

經由研究後我們發現 UH-A 棋盤的方法數問題與 TH-A 棋盤的方法數問題相似，因為兩棋盤的差異只有正六邊形和正十二邊形而已，且三角形擺放方式遵從一樣的規則，所以 UH-A 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤如下圖 31 所示，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 32 所示，與 TH-A 棋盤經由轉正後的棋盤實際上只有長度不同，但棋盤的結構是相同的，所以 UH-A 棋盤的方法數通解就跟 TH-A 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

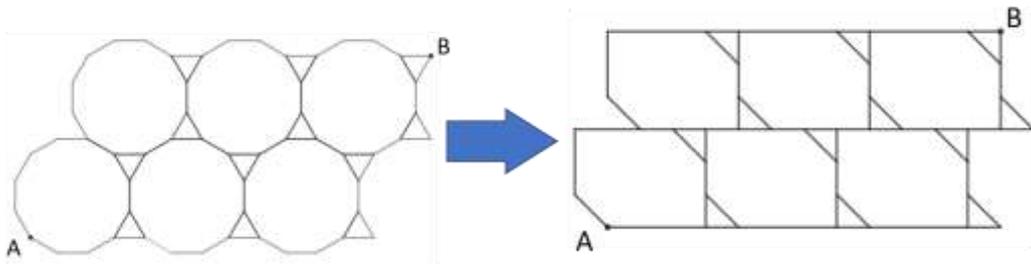


圖 31：UH-A 棋盤的轉正過程

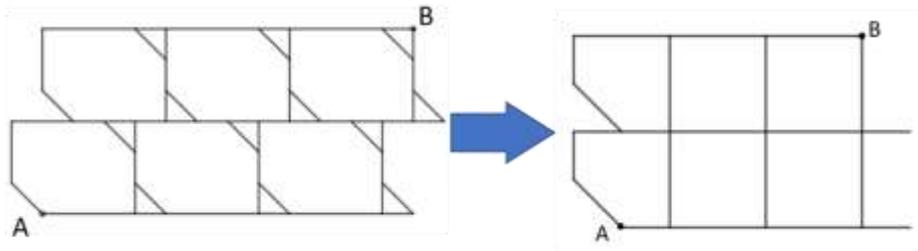


圖 32：UH-A 棋盤的轉正過程

### (六) UH-B-1 棋盤

同上我們發現 UH-B-1 棋盤的方法數問題與 TH-B-1 棋盤的方法數問題相似，UH-B-1 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤如下圖 33 所示，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 34 所示，與 TH-B-1

棋盤經由轉正後的棋盤實際上只有長度不同，但棋盤的結構是相同的，所以 UH-B-1 棋盤的方法數通解就跟 TH-B-1 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

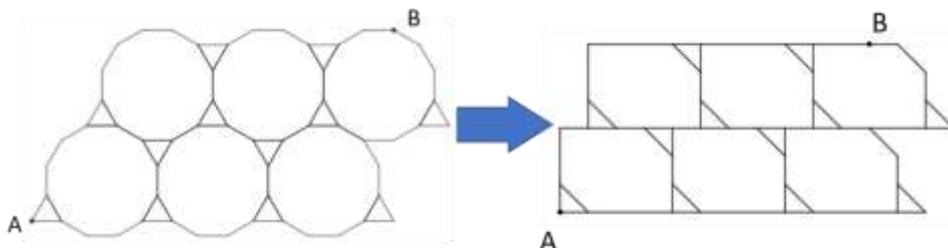


圖 33：UH-B-1 棋盤的轉正過程

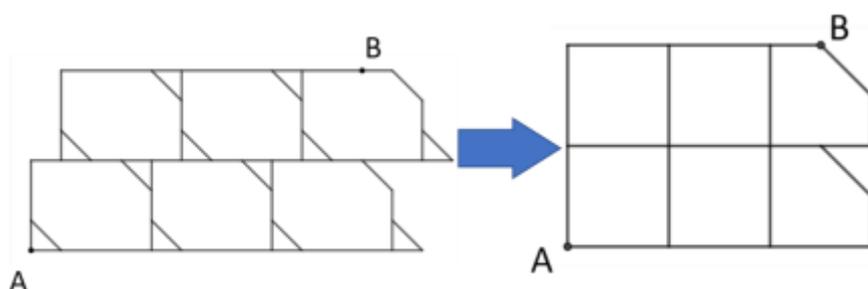


圖 34：UH-B-1 棋盤的轉正過程

### (七) UH-B-2 棋盤

同上 UH-B-2 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤如下圖 35 所示，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 36 所示，UH-B-2 棋盤的方法數通解就跟 TH-B-2 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

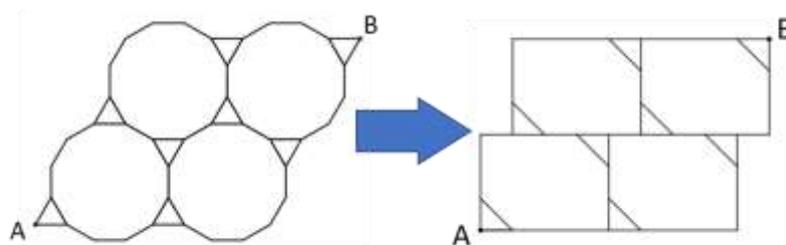


圖 35：UH-B-2 棋盤的轉正過程

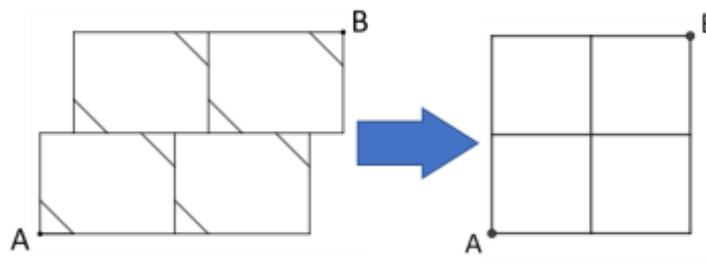


圖 36：UH-B-2 棋盤的轉正過程

(八) UH-C 棋盤

同上 UH-C 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤如下圖 37 所示，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 38 所示，UH-C 棋盤的方法數通解就跟 TH-C 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

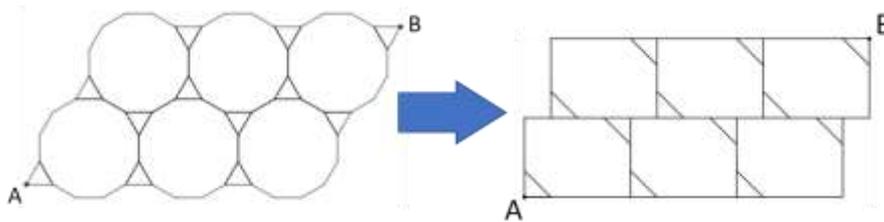


圖 37：UH-C 棋盤的轉正過程

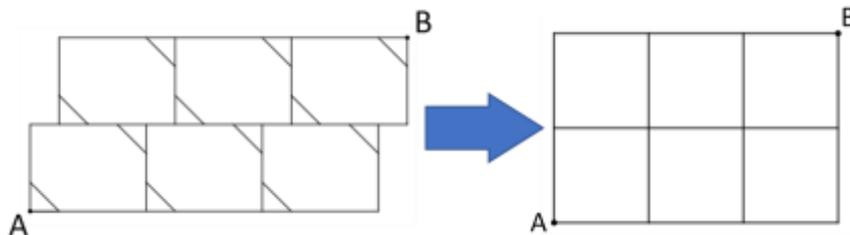


圖 38：UH-C 棋盤的轉正過程

(九) STH-A-1 棋盤

STH-A-1 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤如下圖 39 所示，以及因當中某些斜線的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 40 所示，而可以發現當中會有走斜線的情況，所以我們在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我們實際去進行計算得到數據如下表 2、3、4 所示。

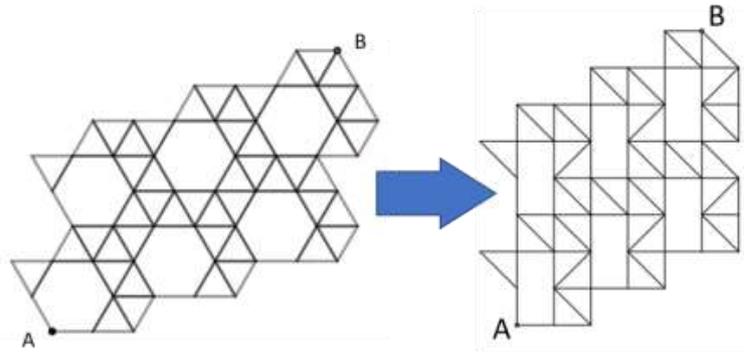


圖 39：STH-A-1 棋盤的轉正過程

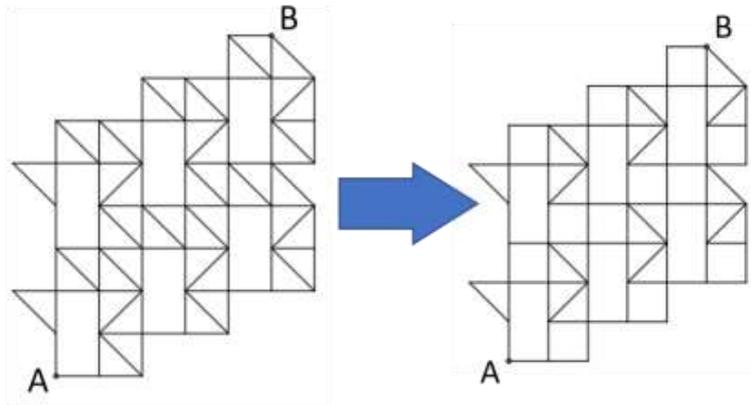


圖 40：STH-A-1 棋盤的轉正過程

表 2： $m = 1$  的方法數研究數據

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$M(1, n)$	4	10	22	46	94	190	382	766	1534

觀察上表發現遞迴式 $M(1, n) = 2M(1, n - 1) + 2, (n \geq 2)$ 則經由計算得到通解 $M(1, n) = 2^n \times 3 - 2$  :

$$M(1,2) + 2 = 2(M(1,1) + 2) = 2 \times 6$$

$$M(1,3) + 2 = 2(M(1,2) + 2)$$

$$M(1,4) + 2 = 2(M(1,3) + 2)$$

⋮

$$M(1, n) + 2 = 2(M(1, n - 1) + 2)$$

×

---

$$M(1, n) + 2 = 2^{n-1} \times 6$$

$$\Rightarrow M(1, n) = 2^n \times 3 - 2$$

表 3 :  $m = n + 1$  的方法數研究數據

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$M(n + 1, n)$	2	4	8	16	32	64	128	256	512

由上表發現通解為 $M(n + 1, n) = 2^n$ 。

表 4 :  $m = n$  的方法數研究數據

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$M(n, n)$	4	14	40	104	256

觀察上表發現遞迴式 $M(n, n) = (n + 1) \times M(n + 1, n) + (n - 1) \times M(n, n - 1) (n \geq 1, n \in N)$ ，而因為 $M(n + 1, n) = 2^n$ ，則通解為 $M(n, n) = (n + 1) \times 2^n + (n - 1) \times 2^{n-1}$ 。

(十) STH-A-2 棋盤

同上 STH-A-1 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤如下圖 41 所示，以及因當中某些斜線的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 42 所示，發現當中會有走斜線的情況，所以我們再算方法數的時候，無法仿照方格棋盤的方式，所以我們實際去進行計算得到數據如下表 5 所示。

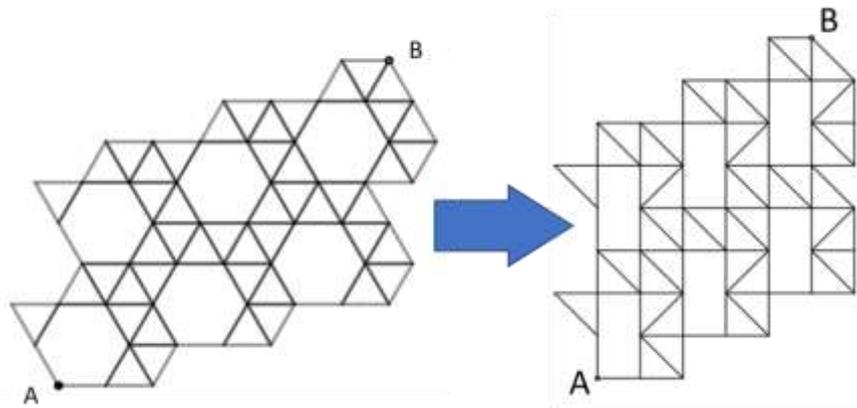


圖 41：STH-A-2 棋盤的轉正過程

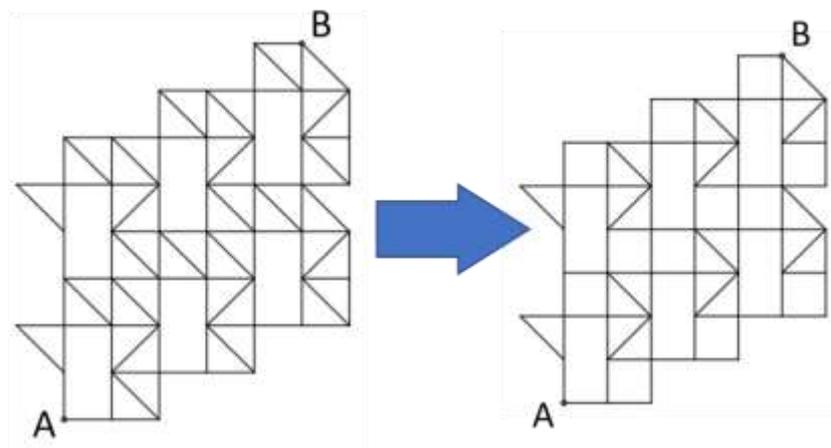


圖 42：STH-A-2 棋盤的轉正過程

表 5：n = 1 的方法數研究數據

	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 9
M(m, 1)	2	10	38	130	422	1330	4118	12610

觀察上表發現遞迴式  $M(m+2, 1) = 5M(m+1, 1) - 6M(m, 1)$ , ( $m \geq 2$ )，可用特徵方程式求解（葉東進，2013）得到通解  $M(m, 1) = 2(3^{m-1} - 2^{m-1})$ , ( $m \geq 2$ )：

$$x^2 = 5x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \vee 2$$

$$\Rightarrow M(m+2, 1) = b_1 \times 3^m + b_2 \times 2^m$$

$$m = 2, m = 3 \text{ 代入 } M(m+2, 1) = b_1 \times 3^m + b_2 \times 2^m \text{ 得}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(4, 1) = 9b_1 + 4b_2 = 38 \\ M(5, 1) = 27b_1 + 8b_2 = 130 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 6 \\ b_2 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(m+2, 1) = 6 \times 3^m - 4 \times 2^m$$

$$\Rightarrow M(m, 1) = 6 \times 3^{m-2} - 4 \times 2^{m-2}$$

$$\Rightarrow M(m, 1) = 2 \times 3^{m-1} - 2^m$$

$$\Rightarrow M(m, 1) = 2(3^{m-1} - 2^{m-1}), (m \geq 2)$$

#### (十一) RTH-A 棋盤

RTH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 43 所示，而由於當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我們可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 44 所示，而當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我們可以將它拉到同一水平線上，並且刪掉旁邊走捷徑不會經過的地方，則再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 45 所

示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解

$$M(m, n) = C_{2n}^{2m+2n-1}。$$

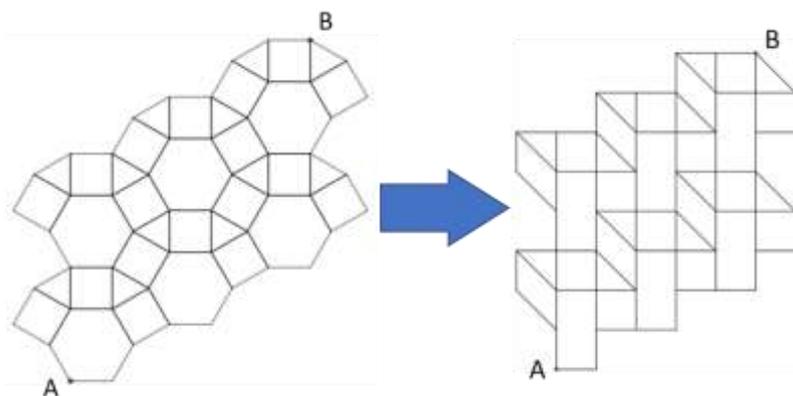


圖 43：RTH-A 棋盤的轉正過程

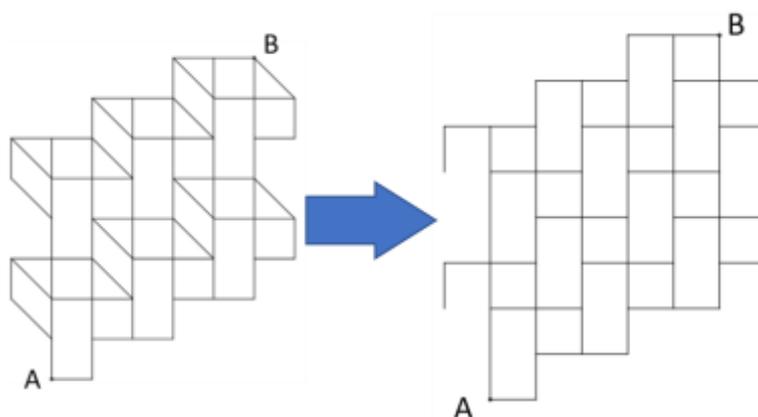


圖 44：RTH-A 棋盤的轉正過程

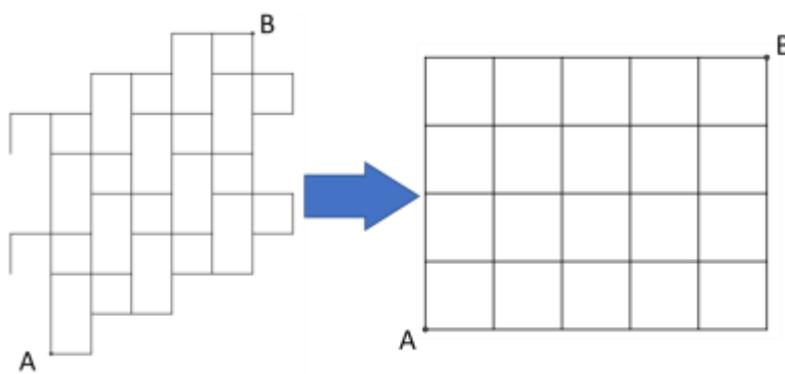


圖 45：RTH-A 棋盤的轉正過程

(十二) RTH-B 棋盤

同上 RTH-B 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 46 所示，而由於當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我們可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 47 所示，而當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我們可以將它拉到同一水平線上，並且刪掉旁邊走捷徑不會經過的地方，則再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 48 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解  $M(m, n) = C_{2n}^{2m+2n}$ 。

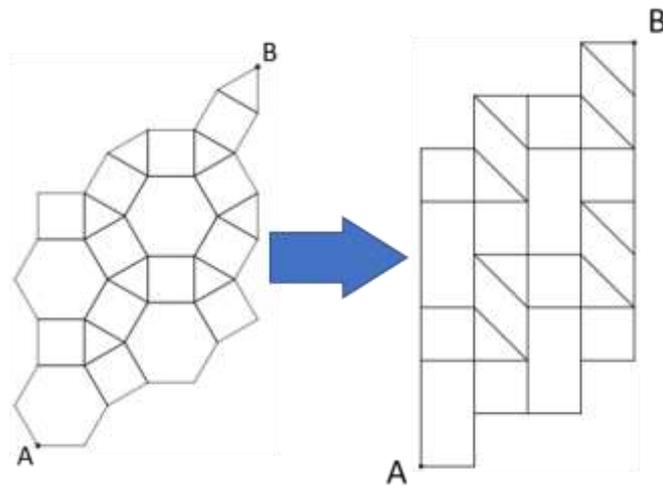


圖 46：RTH-B 棋盤的轉正過程

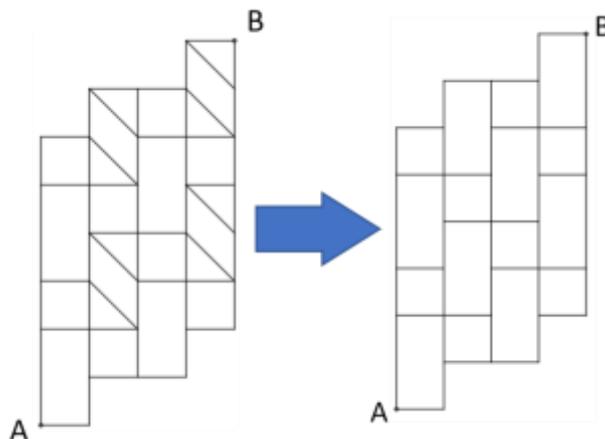


圖 47：RTH-B 棋盤的轉正過程

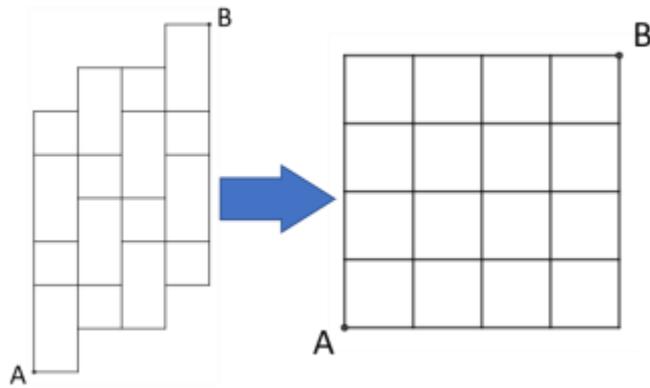


圖 48：RTH-B 棋盤的轉正過程

(十三) UTH-A-1 棋盤

UTH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 49 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我們在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我們發現需要分成  $m \leq n$  及  $m > n$  討論，但目前我們還沒有得到推出通解。

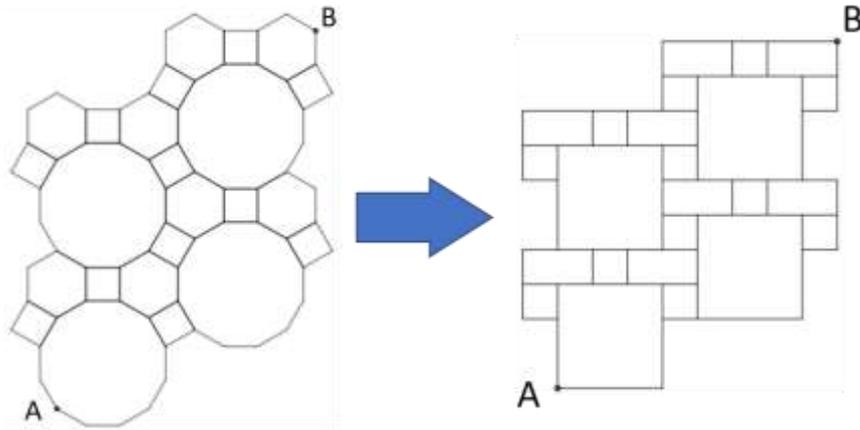


圖 49：UTH-A-1 棋盤的轉正過程

(十四) UTH-A-2 棋盤

同上 UTH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 50 所示，而經過轉正後我

們可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我們在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我們發現需要分成 $m \leq n$ 及 $m > n$ 討論，但目前我們還沒有得到推出通解。

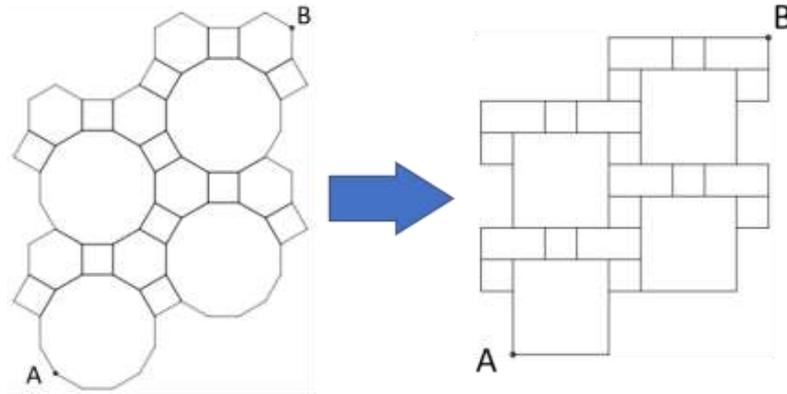


圖 50：UTH-A-2 棋盤的轉正過程

#### (十五) UTH-B 棋盤

UTH-B 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 51 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我們在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，所以我們實際去進行計算得到數據如下表 6 所示，接著再列出前後兩項的差如下表 7 所示。

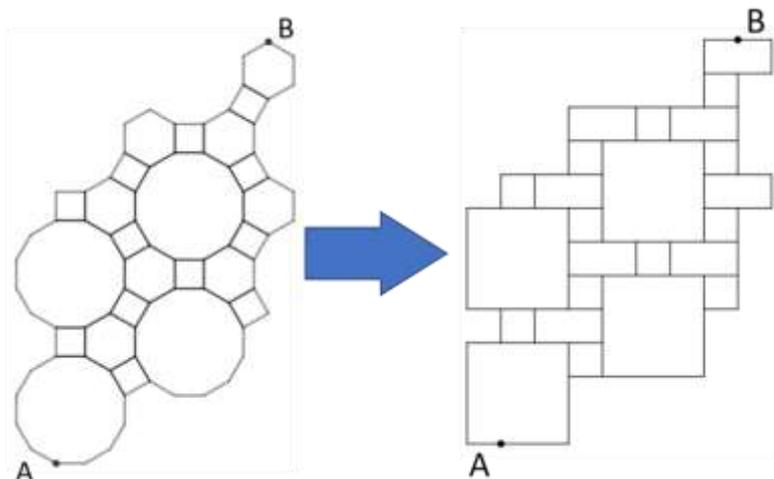


圖 51：UTH-B 棋盤的轉正過程

表 6：UTH-B 棋盤的方法數研究數據

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 1$	9	57	337	1969	11481	66921	390049	2273377	13250217

表 7：UTH-B 棋盤的方法數研究數據

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(m + 1, 1) - M(m, 1)$	48	280	1632	9512	55440	323128	1883328	10976840

觀察上表發現遞迴式  $34(M(m + 3, 1) - M(m + 2, 1)) = (M(m + 5, 1) - M(m + 4, 1)) + (M(m + 1, 1) - M(m, 1))$ , ( $m \geq 1$ )。用特徵方程式求解(葉東進, 2013), 得到通解  $M(m + 1, 1) - M(m, 1) = (4 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{8})^m + (4 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{8})^m$ , ( $m \geq 1$ ) :

$$34(M(m + 3, 1) - M(m + 2, 1)) = (M(m + 5, 1) - M(m + 4, 1)) + (M(m + 1, 1) - M(m, 1))$$

$$\Rightarrow (M(m + 5, 1) - M(m + 4, 1)) = 34(M(m + 3, 1) - M(m + 2, 1)) - (M(m + 1, 1) - M(m, 1))$$

$$x^4 = 34x^2 - 1$$

$$\Rightarrow x^4 - 34x^2 + 1 =$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 4}}{2} = 17 \pm 2\sqrt{72}$$

$$\Rightarrow x = (3 + \sqrt{8})V(3 - \sqrt{8})V(-\sqrt{8} - 3)V(\sqrt{8} - 3)$$

$$\Rightarrow (M(m + 1, 1) - M(m, 1)) = b_1(3 + \sqrt{8})^m + b_2(3 - \sqrt{8})^m + b_3(-\sqrt{8} - 3)^m + b_4(\sqrt{8} - 3)^m$$

$m = 1, m = 2, m = 3, m = 4$  代入上式得

$$\Rightarrow \begin{cases} M(2, 1) - M(1, 1) = b_1(3 + \sqrt{8})^1 + b_2(3 - \sqrt{8})^1 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^1 + b_4(\sqrt{8} - 3)^1 = 48 \\ M(3, 1) - M(2, 1) = b_1(3 + \sqrt{8})^2 + b_2(3 - \sqrt{8})^2 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^2 + b_4(\sqrt{8} - 3)^2 = 280 \\ M(4, 1) - M(3, 1) = b_1(3 + \sqrt{8})^3 + b_2(3 - \sqrt{8})^3 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^3 + b_4(\sqrt{8} - 3)^3 = 1632 \\ M(5, 1) - M(4, 1) = b_1(3 + \sqrt{8})^4 + b_2(3 - \sqrt{8})^4 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^4 + b_4(\sqrt{8} - 3)^4 = 9512 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(b_1+b_2-b_3-b_4) + \sqrt{8}(b_1+b_3-b_2-b_4) = 48 \\ 17(b_1+b_2+b_3+b_4) + 6\sqrt{8}(b_1+b_4-b_2-b_3) = 280 \\ 99(b_1+b_2-b_3-b_4) + 35\sqrt{8}(b_1+b_4-b_2-b_3) = 1632 \\ 577(b_1+b_2+b_3+b_4) + 204\sqrt{8}(b_1+b_3-b_2-b_4) = 9512 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_1+b_2-b_3-b_4) = 8 \\ (b_1+b_2+b_3+b_4) = 8 \\ (b_1+b_4-b_2-b_3) = 6\sqrt{2} \\ (b_1+b_3-b_2-b_4) = 6\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 4 + 3\sqrt{2} \\ b_2 = 4 - 3\sqrt{2} \\ b_3 = 0 \\ b_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(m+1,1) - M(m,1) = (4 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{8})^m + (4 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{8})^m$$

由上我們可以得到 UTH-B 棋盤  $n = 1$  時的通解為  $M(m,1) = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} (4 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{8})^k + (4 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{8})^k$ 。

#### (十六) SSQ-A 棋盤

SSQ-A 棋盤經過捷徑同構的轉正成的類方格棋盤如下圖 52 所示，以及因當中某些斜線和直線的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 53 所示，而可以發現該轉正後的棋盤是不完整的方格棋盤，所以我們在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我們實際去進行計算得到數據如下表 8 所示。

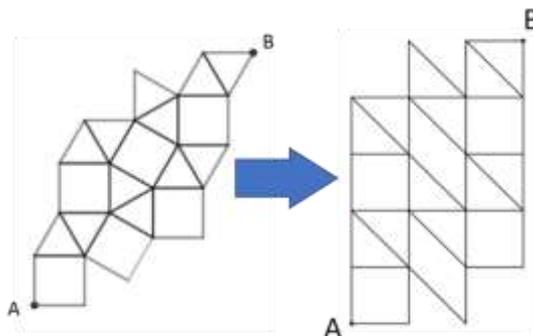


圖 52：SSQ-A 棋盤的轉正過程

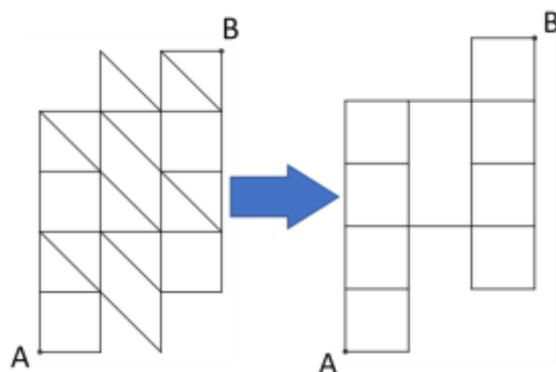


圖 53：SSQ-A 棋盤的轉正過程

表 8：SSQ-A 棋盤的方法數研究數據

$n \backslash m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 1$	3	3	6	6	12	12
$n = 2$	5	8	22	28	68	80
$n = 3$	7	15	52	80	228	308
$n = 4$	9	24	100	180	588	896
$n = 5$	11	35	170	350	1288	2184
$n = 6$	13	48	266	616	2520	4704
$n = 7$	15	63	392	1008	4536	9240
$n = 8$	17	80	552	1560	7656	16896

觀察上表發現在 $m$ 為奇數時遞迴式 $M(m, n) = 2M(m - 1, n) + M(m, n - 1)$ ， $m$ 為奇數時遞迴式 $M(m, n) = M(m - 1, n) + M(m, n - 1)$ ，並且發現發現在 $m$ 為奇數時隨著 $m$ 變大， $m$ 固定 $n$ 變動的數列會呈現 $m$ 階差為 $2^{\frac{m+1}{2}}$ 的數列，並且發現發現在 $m$ 為偶數時隨著 $m$ 變大， $m$ 固定 $n$ 變動的數列會呈現 $m$ 階差為 $2^{\frac{m}{2}}$ 的數列，綜合上述情況並且參考《藉題發揮，得意忘形》(葉東進，2013)，得到下列遞迴式：

$$\begin{cases} M(1, n) = 2n + 1 \\ M(m, n) = \left(\frac{3}{2} - (-1)^m \times \frac{1}{2}\right) \times \sum_{k=1}^n M(m-1, k) \end{cases}$$

(十七) ESQ-A 棋盤

ESQ-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 54 所示，而當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我們可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 55 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解  $M(m, n) = C_{2n}^{m+2n}$ 。

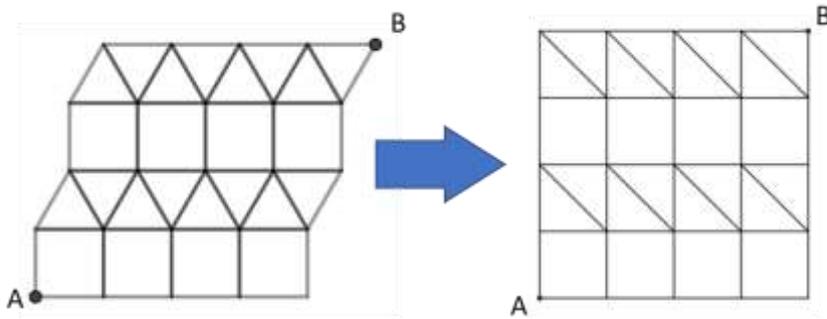


圖 54：ESQ-A 棋盤的轉正過程

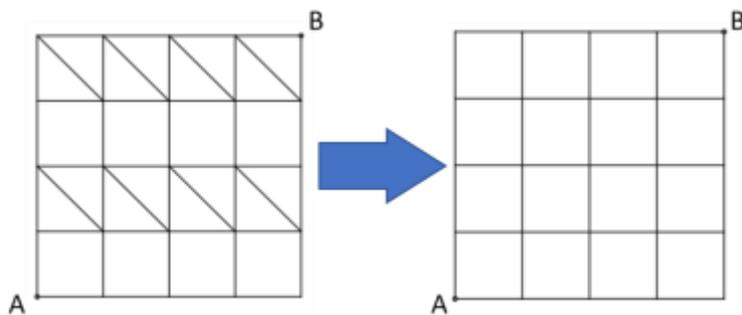


圖 55：ESQ-A 棋盤的轉正過程

(十八) TSQ-A 棋盤

TSQ-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 56 所示，而由於當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我們可以將它拉到同一水平線上，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 57 所示，而經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我們在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我們實際去進行計算得到數據如下表 9 所示。

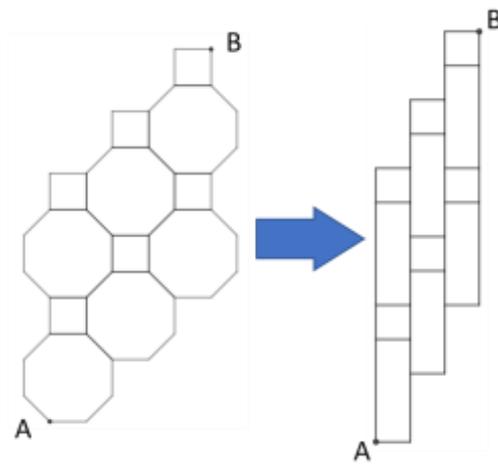


圖 56：TSQ-A 棋盤的轉正過程

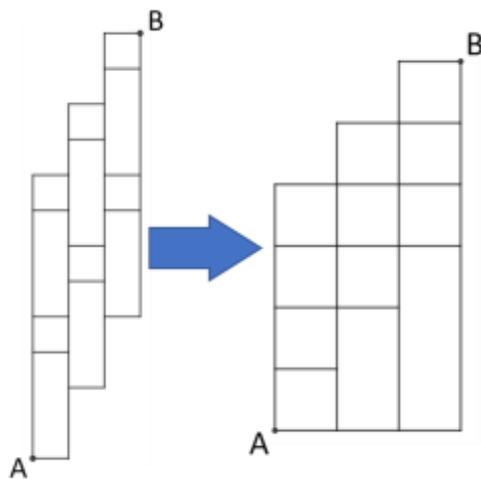


圖 57：TSQ-A 棋盤的轉正過程

表 9：TSQ-A 棋盤的方法數研究數據

$n \backslash m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 1$	3	7	15	31
$n = 2$	5	18	58	179
$n = 3$	7	33	133	497
$n = 4$	9	52	248	968
$n = 5$	11	75	411	1591
$n = 6$	13	102	630	2381

觀察上表發現 $m = 1$ 時 $M(1, n) = 2n + 1$ ，還有 $m = 2$ 時遞迴式 $M(2, n) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + n$ ，也發現 $m$ 固定 $n$ 變動的數列會呈現 $m$ 階差為 $2^m$ 的數列，但目前我們並沒有得到一般式或是遞迴關係，所以並不能求得任意 $m \times n$ 棋盤的方法數。

#### (十九) TSQ-B-1 棋盤

經由研究後我們發現，我們無法藉由適當的方式將 TSQ-B 棋盤轉正成方格棋盤，所以我們實際去進行計算得到數據如下表 10 所示，並且去觀察當中的規律，而在觀察研究數據後我們發現其在 $m、n$ 滿足 $(m = n + p, p \in N)$ 或是 $(n = m + p, p \in N)$ 時，他的方法數會呈現等差數列排列，這就代表只要我們有 $n = 1、n = 2、m = 1、m = 2$ 的通解，就可以藉由相減來獲得公差來得到所求的值。

表 10：TSQ-B 棋盤的方法數研究數據

$n \backslash m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
$n = 1$	3	1	3	7	15	31	63	127
$n = 2$	7	5	1	5	17	49	129	321
$n = 3$	15	17	7	1	7	27	83	227

$n = 4$	31	49	27	9	1	9	37	117
$n = 5$	63	129	83	37	11	1	11	47
$n = 6$	127	321	227	117	47	13	1	13
$n = 7$	255	769	579	325	151	57	15	1

以下是在 $m = 1$ 、 $m = 2$ 、 $m = n + 1$ 其中一值固定情況下 TSQ-B-1 棋盤的方法數的通解，如下表 11 所示。

表 11：TSQ-B-1 棋盤在 $m = 1$ 、 $m = 2$ 、 $m = n + 1$ 時的方法數通解

	通解
$m = 1$	$M(1, n) = 2^{n+1} - 1$
$m = 2$	$M(2, n) = 2^n(n - 1) + 1$
$m = n + 1$	$M(n + 1, n) = 1$

而因為在 $m$ 跟 $n$ 同時+1時，每一次的方法數皆會成等差，其 $n$ 、 $m$ 同時變動的方法數的公差之通解就以 $m = 1$ 、 $m = 2$ 時的通解為基礎，當 $m < n$ ，其 $n$ 、 $m$ 同時變動的方法數的公差之通解就是 $2^{n+1}(n - 1) + 2$ ，( $n \geq 1$ )，為方便理解，我們列出其部分方法數及公差如下表 12 所示。

表 12：TSQ-B-1 部分方法數及公差舉例

	$M(n, n)$	$M(n, n + 1)$	$M(n, n + 2)$
公差	$n = 1$ 代入 $2^{n+1}(n - 1) + 2$ 得公差為 2	$n = 2$ 代入 $2^{n+1}(n - 1) + 2$ 得公差為 10	$n = 3$ 代入 $2^{n+1}(n - 1) + 2$ 得公差為 34

	$n = 1$ 代入	$n = 2$ 代入	$n = 3$ 代入
第一項	$M(1, n) = 2^{n+1} - 1$ 得 第一項為 3	$M(1, n) = 2^{n+1} - 1$ 得 第一項為 7	$M(1, n) = 2^{n+1} - 1$ 得 第一項為 15
$n = 1$	$M(1, 1) = 3$	$M(1, 2) = 7$	$M(1, 3) = 15$
$n = 2$	$M(2, 2) = 5$	$M(2, 3) = 17$	$M(2, 4) = 49$
$n = 3$	$M(3, 3) = 7$	$M(3, 4) = 27$	$M(3, 5) = 83$

(二十) TSQ-B-2 棋盤

同上經由研究後我們發現，我們無法藉由適當的方式將 TSQ-B 棋盤轉正成方格棋盤，所以我們實際去進行計算得到數據如上表 10 所示，並且去觀察當中的規律，而在觀察研究數據後我們發現其在  $m$ 、 $n$  滿足  $(m = n + p, p \in N)$  或是  $(n = m + p, p \in N)$  時，他的方法數會呈現等差數列排列，這就代表只要我們有  $n = 1$ 、 $n = 2$ 、 $m = 1$ 、 $m = 2$  的通解，就可以藉由相減來獲得公差來得到所求的值。

以下是在  $n = 1$ 、 $n = 2$  其中一值固定情況下 TSQ-B-2 棋盤的方法數的通解，如下表 13 所示。

表 13：TSQ-B-2 棋盤在  $n = 1$ 、 $n = 2$  時的方法數通解

	通解
$n = 1$	$M(m, 1) = 2^{m-1} - 1, (m \geq 2)$
$n = 2$	$M(m, 2) = 2^{m-2}(m - 3) + 1, (m \geq 3)$

而因為在  $m$  跟  $n$  同時 +1 時，每一次的方法數皆會成等差，其  $n$ 、 $m$  同時變動的方法數的公差之通解就是以  $n = 1$ 、 $n = 2$  時的通解為基礎當  $m > n$  時，其公差的通解就是  $2^{m-1}(m - 3) + 2, (m \geq 2)$ ，為方便理解，我們列出其部分方法數及公差如下表 14 所示。

表 14：TSQ-B-2 棋盤部分方法數及公差舉例

	$M(m, m)$	$M(m, m + 1)$	$M(m, m + 2)$
公差	$m = 3$ 代入 $2^{m-1}(m - 3) + 2$ 得 公差為 2	$m = 4$ 代入 $2^{m-1}(m - 3) + 2$ 得 公差為 10	$m = 5$ 代入 $2^{m-1}(m - 3) + 2$ 得 公差為 34
第一項	$m = 3$ 代入 $M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$ 得第一項為 3	$m = 4$ 代入 $M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$ 得第一項為 7	$m = 5$ 代入 $M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$ 得第一項為 15
$m = 3$	$M(3,3) = 3$	$M(3,4) = 7$	$M(3,5) = 15$
$m = 4$	$M(4,4) = 5$	$M(4,5) = 17$	$M(4,6) = 49$
$m = 5$	$M(5,5) = 7$	$M(5,6) = 27$	$M(5,7) = 83$

(二十一) TSQ-C 棋盤

TSQ-C 棋盤與 TSQ-A 棋盤實際上只是  $m$  跟  $n$  的方向顛倒過來而已，而 TSQ-C 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 58 所示，而由於當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我們可以將它拉到同一水平線上，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 59 所示，同樣的經過轉正後我們可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我們在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我們實際去進行計算得到數據如下表 15 所示。

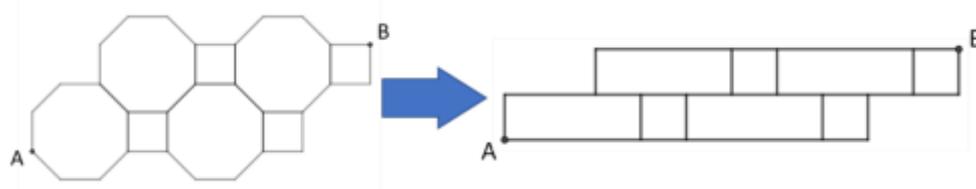


圖 58：TSQ-C 棋盤的轉正過程

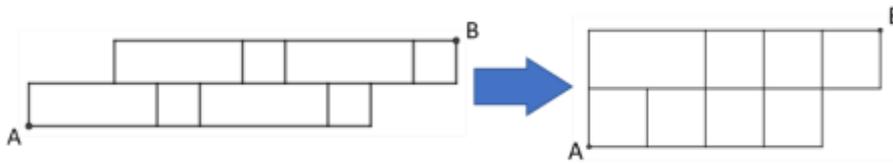


圖 59：TSQ-C 棋盤的轉正過程

表 15：TSQ-C 棋盤的方法數研究數據

$n \backslash m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 1$	3	5	7	9	11	13
$n = 2$	7	18	33	52	75	102
$n = 3$	15	58	133	248	411	630
$n = 4$	31	179	497	968	1591	2381

觀察上表發現 $n = 1$ 時 $M(m, 1) = 2m + 1$ ，還有 $n = 2$ 時遞迴式 $M(m, 2) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + m$ ，也發現 $n$ 固定 $m$ 變動的數列會呈現 $n$ 階差為 $2^n$ 的數列，但目前我們並沒有得到一般式或是遞迴關係，所以並不能求得任意 $m \times n$ 棋盤的方法數。

#### 四、將通解的形式分類，分析康威表示法與通解的關係

各棋盤的通解形式如下表 16 所示，而可以觀察到經過扭稜變換(SSQ, ESQ)的棋盤，在轉正成方格棋盤後都無法以傳統的方法進行方法數計算，所以通解都不是以組合數的方式呈現，而是階差關係。我們推測這是因為有多個正三角形放在一起，導致轉正成方格棋盤後會有可以走斜線的情況。我們也發現在八種半正鑲嵌圖形中唯一有正八邊形的圖形(TSQ)，其通解除了階差加指數外還有純粹的公差加指數的形式，我們猜測這與當中的正八邊形有關，但目前研究資料還不足以判斷，希望在未來研究 $k$ 律鑲嵌時可以弄清楚當中的奧秘。

表 16：各棋盤的方法數通解形式

公差加指數	階差加指數	組合數
TSQ-B	SSQ-A、TSQ-A、 TSQ-C	TH-A、TH-B、TH-C、UH-A、UH-B、 UH-C、RTH-A、RTH-A、ESQ-A

## 伍、結論與討論

本研究探討平面上存在的所有 8 種 1 律半正鑲嵌圖形，其所形成的棋盤中，從 A 到 B 走捷徑的最少步數與方法數通解，並將這些通解分類羅列如下。

### 一、最少步數的通解

- (一) TH-A 棋盤： $S(m, n) = 2m + 2n - 1$ 。
- (二) TH-B-1 棋盤： $S(m, n) = 2m + 2n - 1$ 。
- (三) TH-B-2 棋盤： $S(m, n) = 2m + 2n$ 。
- (四) TH-C 棋盤： $S(m, n) = 2m + 2n$ 。
- (五) UH-A 棋盤： $S(m, n) = 4m + 4n - 2$ 。
- (六) UH-B-1 棋盤： $S(m, n) = 4m + 4n - 3$ 。
- (七) UH-B-2 棋盤： $S(m, n) = 4m + 4n - 1$ 。
- (八) UH-C 棋盤： $S(m, n) = 4m + 4n - 1$ 。
- (九) STH-A-1 棋盤： $S(m, n) = 2m + 3n - 1$ 。
- (十) STH-A-2 棋盤： $S(m, n) = 3m + 2n - 2$ 。
- (十一) RTH-A 棋盤： $S(m, n) = 3m + 3n - 2$ 。
- (十二) RTH-B 棋盤： $S(m, n) = 3m + 3n$ 。
- (十三) UTH-A-1 棋盤： $S(m, n) = 4m + 6n - 2$ 。
- (十四) UTH-A-2 棋盤： $S(m, n) = 6m + 4n - 2$ 。

(十五) UTH-B 棋盤：尚未確定。

(十六) SSQ-A 棋盤：

$$S(m, n) = \frac{3}{2}m + 2n - \frac{1}{2}, (m = 2p - 1, p \in N)$$

$$S(m, n) = \frac{3}{2}m + 2n - 1, (m = 2p, p \in N)$$

(十七) ESQ-A 棋盤： $S(m, n) = m + 2n$ 。

(十八) TSQ-A 棋盤： $S(m, n) = 3m + 4n - 2$ 。

(十九) TSQ-B-1 棋盤： $S(m, n) = m + 3n + 1$ 。

(二十) TSQ-B-2 棋盤： $S(m, n) = 3m + n - 1$ 。

(二十一) TSQ-C 棋盤： $S(m, n) = 4m + 3n - 2$ 。

## 二、方法數的通解

(一) TH-A 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

(二) TH-B-1 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

(三) TH-B-2 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

(四) TH-C 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

(五) UH-A 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

(六) UH-B-1 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

(七) UH-B-2 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

(八) UH-C 棋盤： $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

(九) STH-A-1 棋盤：

$$M(1, n) = 2^n \times 3 - 2$$

$$M(n + 1, n) = 2^n$$

$$M(n, n) = (n + 1) \times 2^n + (n - 1) \times 2^{n-1}$$

(十) STH-A-2 棋盤： $M(m, 1) = 2(3^{m-1} - 2^{m-1}), (m \geq 2)$ 。

(十一) RTH-A 棋盤： $M(m, n) = C_{2n}^{2m+2n-1}$ 。

(十二) RTH-B 棋盤： $M(m, n) = C_{2n}^{2m+2n}$ 。

(十三) UTH-A-1 棋盤：尚未確定。

(十四) UTH-A-2 棋盤：尚未確定。

(十五) UTH-B 棋盤： $M(m, 1) = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} (4 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{8})^k + (4 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{8})^k$ 。

(十六) SSQ-A 棋盤：

$$\begin{cases} M(1, n) = 2n + 1 \\ M(m, n) = \left(\frac{3}{2} - (-1)^m \times \frac{1}{2}\right) \times \sum_{k=1}^n M(m-1, k) \end{cases}$$

(十七) ESQ-A 棋盤： $M(m, n) = C_{2n}^{m+2n}$ 。

(十八) TSQ-A 棋盤：

$$M(1, n) = 2n + 1$$

$$M(2, n) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + n$$

$$M(m, 1) = 2^{m+1} - 1$$

我們發現此棋盤中， $m$ 固定、 $n$ 變動的數列會呈現 $m$ 階差為 $2^m$ 的數列，但目前並沒有得到一般式或是遞迴關係。

(十九) TSQ-B-1 棋盤：

公差通解： $2^{n+1}(n-1) + 2, (n \geq 1)$ ，方法數通解如表 17。

(二十) TSQ-B-2 棋盤：

公差通解： $2^{m-1}(m-3) + 2, (m \geq 2)$ ，方法數通解如表 18。

(二十一) TSQ-C 棋盤：

$$M(m, 1) = 2m + 1$$

$$M(m, 2) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + m$$

$$M(m, 1) = 2^{m+1} - 1$$

我們發現此棋盤中， $n$ 固定 $m$ 變動的數列會呈現 $n$ 階差為 $2^n$ 的數列，但目前並沒有得到一般式

或是遞迴關係。

表 17：TSQ-B-1 棋盤在  $m = 1$ 、 $m = 2$ 、 $m = n + 1$  時的方法數通解

	通解
$m = 1$	$M(1, n) = 2^{n+1} - 1$
$m = 2$	$M(2, n) = 2^n(n - 1) + 1$
$m = n + 1$	$M(n + 1, n) = 1$

表 18：TSQ-B-2 棋盤在  $n = 1$ 、 $n = 2$  時的方法數通解

	通解
$n = 1$	$M(m, 1) = 2^{m-1} - 1, (m \geq 2)$
$n = 2$	$M(m, 2) = 2^{m-2}(m - 3) + 1, (m \geq 3)$

### 三、康威表示法與通解形式的關係

各棋盤的通解形式如上表 16 所示，經過扭稜變換(SSQ, ESQ)的棋盤，轉正後的通解都是階差關係。在八種半正鑲嵌圖形中唯一有正八邊形的圖形(TSQ)，其通解除了階差加指數外還有純粹的公差加指數的形式。

### 四、未來展望

在本研究中我們窮舉了由兩種正多邊形所構成的半正鑲嵌圖形，其走捷徑的方法數及步數，但可惜的是有一些圖形的方法數我們只有得到一部分的通解，未來我們希望能夠成功推出這些棋盤方法數通解，並研究其他的  $k$  律鑲嵌圖形。此外，本研究使得我們未來可以定義一些可以形成棋盤但不能密鋪的圖形，進行更多研究。

## 陸、參考文獻

1. Critchlow, K. (1970). *Order in Space: A Design Source Book*. New York: Viking Press.
2. Dangelo, J. P. & West, D. B. (2000). *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs* (2nd. ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall Press.
3. Wikipedia(2021)。Euclidean Tilings by Convex Regular Polygons。2021 年 9 月 9 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean\\_tilings\\_by\\_convex\\_regular\\_polygons](https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_tilings_by_convex_regular_polygons)。
4. Wikipedia(2021)。List of Euclidean Uniform Tilings。2021 年 9 月 13 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Euclidean\\_uniform\\_tilings](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings)。
5. Wikipedia(2022)。List of Euclidean uniform tilings。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Euclidean\\_uniform\\_tilings](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings)。
6. Wikipedia(2022)。Conway polyhedron notation。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/Conway\\_polyhedron\\_notation](https://en.wikipedia.org/wiki/Conway_polyhedron_notation)。
7. Wikipedia(2022)。Duality (mathematics)。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/Duality\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_(mathematics))。
8. 張玉琪(2009)。虛擬教具對於國中學生學習鑲嵌圖形之影響。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
9. 葉東進 (2013)。藉題發揮，得意忘形 (第一版)。臺北市：三民。
10. 維基百科 (2022)。半正鑲嵌圖。2022 年 1 月 1 日，取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%8A%E6%AD%A3%E9%91%B2%E5%B5%8C%E5%9C%96>。
11. 維基百科 (2022)。不完全正鑲嵌圖。2022 年 1 月 8 日，取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8D%E5%AE%8C%E5%85%A8%E6%AD%A3%E9%91%B2%E5%B5%8C%E5%9C%96>。
12. 維基百科 (2022)。康威多面體表示法。2022 年 1 月 9 日，取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%B7%E5%A8%81%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94%E8%A1%A8%E7%A4%BA%E6%B3%95>。
13. 維基百科 (2022)。截角 (幾何)。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%88%AA%E8%A7%92\\_\(%E5%B9%BE%E4%BD%95\)](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%88%AA%E8%A7%92_(%E5%B9%BE%E4%BD%95))。

## 【評語】 010011

在這個研究半正鑲嵌圖形中的捷徑問題，作者首先定義一個由兩種正多邊形所組成的鑲嵌圖形之起點 A 和終點 B，求出兩點之間步數最少的捷徑，再計算走這些捷徑的方法數。同樣的問題作者也處理了三種相異多邊形所組成的鑲嵌圖形。這是一個很有潛力的問題，但是所考慮的情況中，有許多 pattern 的鑲嵌圖上的最短捷徑及其走法是相當困難的題目，特別是那一些要用到斜線走法的圖形，由於沒辦法 reduce 到最原始的長方格，作者都未能拿到比較好的結果。建議作者聚焦在一些特殊鑲嵌圖形，然後深入探討一些數學性質。