

2022 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010006

參展科別 數學

作品名稱 Lill Path 之立體圖形應用

得獎獎項

就讀學校 臺中市立臺中女子高級中等學校

指導教師 賴信志

作者姓名 王郁淇、周羿辰

關鍵詞 Lill Path、立體圖形、直角坐標系

作者簡介



我是王郁淇，出生於南投縣，目前就讀臺中女中二年級的數理資優班。

我從小就很喜歡數字，數學也是我最拿手的科目。之所以會選擇數學專題的原因也是因為對數學的著迷與執著。雖然一開始的研究經常碰壁，但解決問題後迎接而來的成就感都讓我們非常振奮，給了我們持續下去的動力。希望能透過這次的科展接觸到不同的人事物，並在相互交流中開闊眼界，與不同的思維激盪出新的火花。

摘要

本文主要在探討如何將二維 Lill Path 的性質推廣至三維。和二維 Lill Path 的結論相同，我們證明若有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 進行反射（依三維 Lill Path 反射規則），且此射線通過三維 Lill Path 終點，則其充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ ，其中 θ 為射線與三維 Lill Path 圖形所夾的角度。我們仿照參考資料[2]的方式，證明了若多項式所對應之三維 Lill Path 圖形是封閉的，則其充要條件為此多項式有一因式為 $(x^3 + 1)$ ；同時，我們解決了參考資料[2]中教授所提到的一個問題：當路徑夾角不為 $\frac{\pi}{2}$ ，且其三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的，則其充要條件為多項式有一因式為 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。

Abstract

This essay aims to discuss how to extend the properties of 2D Lill Path to 3D. As with the conclusion of the 2D Lill Path, we proved that if a line from the origin is reflected in the 3D Lill Path of the polynomial function $f(x)$ (according to the 3D Lill Path reflection rule), and this line passes through the end of it, then the necessary and sufficient condition is that $f(x) = 0$ has a real root $(-\tan \theta)$, and θ is the angle between the line and the 3D Lill Path. We based on reference [2] and proved that if the 3D Lill Path which corresponds to the polynomial is closed, the necessary and sufficient condition is that the polynomial has a factor $(x^3 + 1)$. At the same time, we solved a problem in reference [2]: When the angle of the 3D ϕ -Lill Path is not $\frac{\pi}{2}$ and the 3D ϕ -Lill Path is closed, the necessary and sufficient condition is that one factor of the polynomial is $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$.

壹、前言

一、研究動機

Lill 定理是一種以圖像的方式，找出一多項方程式的實根的方法，它是由奧地利工程師愛德華·里爾（Eduard Lill）在 1867 年發現的。在 Lill 定理及所有相關資料（包括參考資料[1]、[2]、[3]）中，我們發現學者們討論的 Lill Path 皆是在二維空間中加深加廣。基於此，我們思考 Lill 定理是否能在三維空間中成立，並找出其特性。且進一步探討當三維 Lill Path 的行進路線夾角不為 $\frac{\pi}{2}$ 時（三維 ϕ -Lill Path），此多項式與其三維 ϕ -Lill Path 圖形的關係。

二、研究目的

- (一) 將二維 Lill Path 圖形延伸至三維，定義出多項式在三維空間中的 Lill Path 圖形。
- (二) 證明若有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 進行反射，則此射線通過三維 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
- (三) 證明若一實係數多項式函數的三維 Lill Path 圖形是封閉的，則其充要條件為此多項式函數有因式 $(x^3 + 1)$ 。
- (四) 找到一矩陣 R ，並使用其定義三維 ϕ -Lill Path 圖形（路線夾角不為 90 度的 Lill Path 圖形）的路線行走規則。
- (五) 證明若一多項式函數三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的，則其充要條件為此多項式函數有因式 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 。

三、研究設備及器材

紙、筆、筆記型電腦、Word 程式、Geogebra 3D、MathType、網際網路。

貳、研究過程與方法

一、預備定理 Lill Path

由參考資料[1]得知：

(一) 在二維 Lill Path 中，若有一自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的 Lill Path 進行反射，則此射線通過 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。

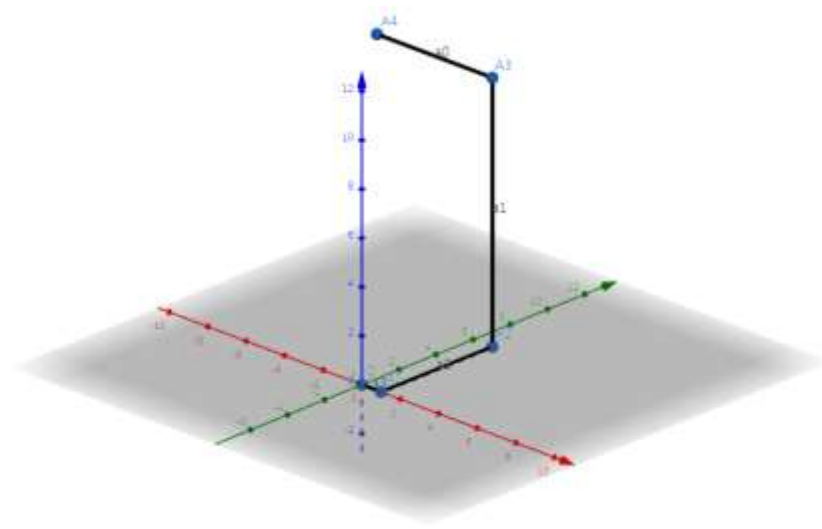
由參考資料[2]得知：

(二) 若一多項式函數的 Lill Path 圖形是封閉的，則其充要條件為此多項式函數有因式 $(x^2 + 1)$ 。

二、三維 Lill Path 圖形

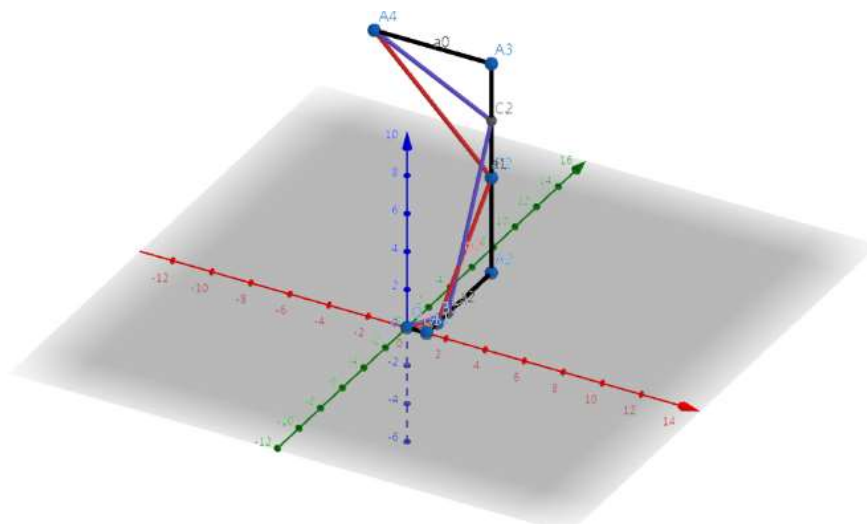
(一) 定義

假設有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 。由原點 O 作為起點，依序以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \dots$ 的方向，分別畫出 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，即為此多項式 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形，其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 為 x 軸、 y 軸、 z 軸正向上的單位向量。如圖(一)所示，此圖為函數 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 的 Lill Path 立體圖形。

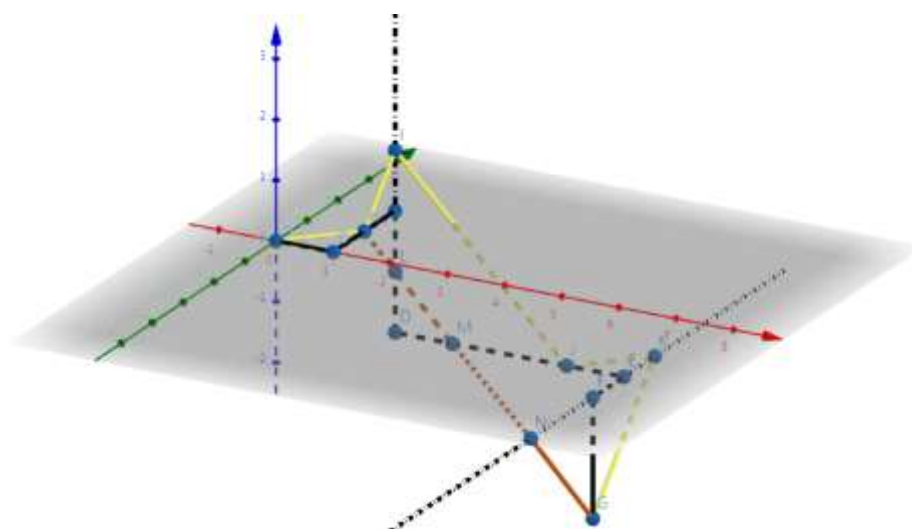


圖(一)

從原點作一射線，依下列規則在三維 Lill Path 各邊反射：首先在第一、二段 Lill Path 所在平面與第一段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角($0^\circ < \theta < 90^\circ$)畫出射線並在碰到第二段 Lill Path 所在之直線後反射；反射後的射線在第二、三段 Lill Path 所在平面與第二段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第三段 Lill Path 所在之直線後反射；反射後的射線在第三、四段 Lill Path 所在平面與第三段 Lill Path 行走之向量夾 θ 角再進行一次反射，並在碰到第四段 Lill Path 所在之直線後反射；.....，以此類推。如圖(二)及圖(三)所示，其分別為多項式函數 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 和 $p(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$ 加上射線的三維 Lill Path 圖形。



圖(二)



圖(三)

Theorem 1 自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 進行反射，則此射線通過三維 Lill Path 終點，則其充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。

〈 Proof 〉

若已知反射後的射線會與三維 Lill Path 的終點相交，我們想證明 $(-\tan \theta)$ 是 $f(x)$ 的一實根。

如圖(二)，假設 L_n, L_{n-1}, \dots, L_1 為角 θ 的對邊且令 $x = -\tan \theta$ 。我們可得出：

$$\begin{aligned} L_n &= (\tan \theta)a_n = -xa_n \\ L_{n-1} &= (\tan \theta)(a_{n-1} - (-xa_n)) = -x(a_{n-1} + xa_n) \\ L_{n-2} &= (\tan \theta)(a_{n-2} - (-x(a_{n-1} + xa_n))) \\ &= -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \\ &\vdots \\ L_1 &= -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots)) \end{aligned}$$

又因 $L_1 = a_0$ ，故得

$$\begin{aligned} a_0 &= -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \dots)) \\ \Rightarrow a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

得證 $(-\tan \theta)$ 為 $f(x) = 0$ 之一根。

相反地，若已知 $f(x) = 0$ 有一有實根 $(-\tan \theta) = -x_1$ 且令

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_{n-1})(x + x_n)$$

則我們可知：

$$\begin{cases} a_0 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n \\ a_1 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n \\ a_2 &= (x_1 x_2 \dots x_{n-2} + x_1 x_2 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_3 \dots x_{n-1} x_n) a_n \dots \dots (*) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) a_n \\ a_n &= a_n \end{cases}$$

若我們由原點作一條與 $f(x)$ 三維 Lill Path 長 a_n 邊夾 θ 角的射線，則依前述的規則作反射及(*)可得：

$$L_n = a_n \tan \theta = a_n x_1$$

$$L_{n-1} = (a_{n-1} - L_n) \tan \theta = (x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) a_n x_1$$

$$L_{n-2} = (a_{n-2} - L_{n-1}) \tan \theta$$

$$= [x_2(x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n) + x_3(x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n) + \dots + x_{n-1}x_n] a_n x_1$$

⋮

$$L_1 = (a_1 - L_2) \tan \theta = (x_2 \dots x_{n-1} x_n) a_n x_1 = a_0$$

由此可知若 $x = -\tan \theta$ 為 $f(x) = 0$ 之一實根時，由 θ 角度畫出的射線經過反射後會射到三維 Lill Path 圖形的終點。



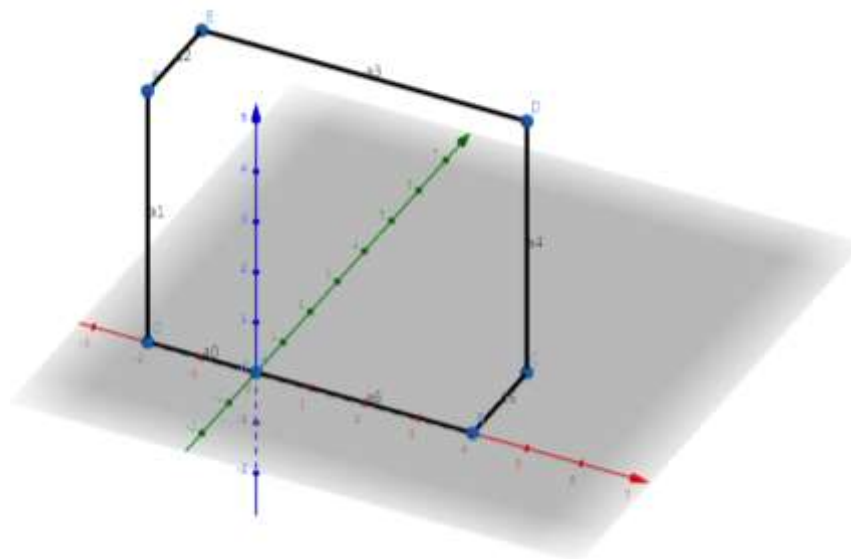
三、封閉的三維 Lill Path 圖形

(一) 定義

假設有一多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形之起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的三維 Lill Path 圖形。如圖(四)，此圖為多項式函數

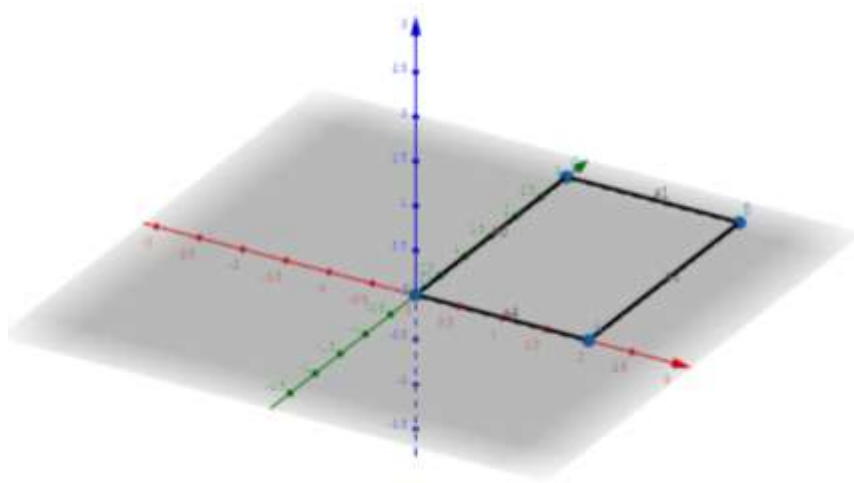
$$f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 2$$

的封閉的三維 Lill Path 圖形。



圖(四)

如圖(五)所示，顯然當此封閉的三維 Lill Path 圖形為一小於五次的函數，則其必有一項係數為 0。



圖(五)

在上述二個封閉的三維 Lill Path 的例子中，我們發現它們所對應的多項式函數似乎都有 $(x^3 + 1)$ 的因式。以圖(四)為例，

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 2 \\ &= (x^3 + 1)(4x^3 + 2x^2 + 5x + 2) \end{aligned}$$

實際上這個性質對所有封閉的三維 Lill Path 都成立，所以我們作了以下定理的證明。

Theorem 2 若一實係數多項式函數的三維 Lill Path 圖形為封閉的，則其充要條件為此多項式函數有因式 $(x^3 + 1)$ 。

〈Proof〉

由三維 Lill Path 的定義我們可以得知：多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 所對應的三維 Lill Path 的終點座標為 (α, β, γ) ，其中

$$\alpha = a_n - a_{n-3} + a_{n-6} - a_{n-9} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} a_{n-3 \cdot \lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$$

$$\beta = a_{n-1} - a_{n-4} + a_{n-7} - a_{n-10} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} a_{n-(3 \cdot \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1)}$$

$$\gamma = a_{n-2} - a_{n-5} + a_{n-8} - a_{n-11} + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} a_{n-(3 \cdot \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2)}$$

因此如果此多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形是封閉的，其充要條件為：

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

若已知多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形為封閉的，欲證明 $(x^3 + 1)$ 整除 $f(x)$ ，

因為

$$(x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

我們只需證明 $\begin{cases} (x + 1)|f(x) \\ (x^2 - x + 1)|f(x) \end{cases}$ 。

$$\text{因為 } f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

$$= (-1)^n (a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0)$$

$$= (-1)^n (\alpha - \beta + \gamma) = 0$$

於是令 ω 為 $x^2 - x + 1 = 0$ 之一虛根 $\Rightarrow \omega^3 = -1$ ，則

$$f(\omega) = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \cdots + a_n\omega^n$$

$$= \omega^n (a_n + a_{n-1}\omega^{-1} + a_{n-2}\omega^{-2} + \cdots + a_0\omega^{-n})$$

$$\therefore \omega^3 = -1 \Rightarrow \omega^6 = 1 \Rightarrow \omega^{-k} = \begin{cases} 1 & , k = 6q \\ -\omega^2 & , k = 6q + 1 \\ -\omega & , k = 6q + 2 \\ -1 & , k = 6q + 3 \\ \omega^2 & , k = 6q + 4 \\ \omega & , k = 6q + 5 \end{cases}, q \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore f(\omega) = \omega^n (a_n - a_{n-1}\omega^2 - a_{n-2}\omega - a_{n-3} + a_{n-4}\omega^2$$

$$+ a_{n-5}\omega + a_{n-6} - a_{n-7}\omega^2 - a_{n-8}\omega - \cdots)$$

$$= \omega^n (\alpha - \beta\omega^2 - \gamma\omega) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - x + 1)|f(x)$$

故得證 $f(x)$ 有一因式為 $(x^3 + 1)$ 。

若此多項式函數 $f(x)$ 有一因式為 $(x^3 + 1)$ ，則

$$f(-1) = \alpha - \beta + \gamma = 0$$

$$f(\omega) = \alpha - \beta\omega^2 - \gamma\omega = 0$$

因為 $\omega^2 = \omega - 1$ ，所以 $f(\omega) = (\beta + \gamma)\omega + (\alpha - \gamma) = 0$ ，又因為 α, β, γ 皆為實數，故

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

將 α, β, γ 聯立求解，亦得 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ 。因此得證多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 圖形為封閉的。



四、三維 ϕ -Lill Path 圖形

(一) 定義

我們將上述三維 Lill Path 稍作修改，使其路線夾角不為 90 度。我們找到一

矩陣 $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$ ，並定義三維 ϕ -Lill Path 之路線規則如下：假設有

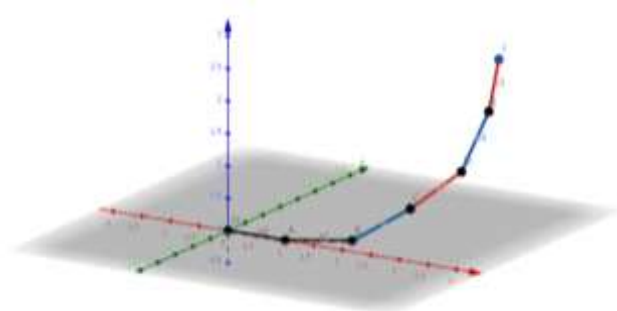
一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ，由原點 O 作為起點，依序以

$\vec{i}, \vec{i}R, \vec{i}R^2, \dots, \vec{i}R^{n-1}, \vec{i}R^n$ 的方向，分別畫出 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ 長度的連續線段，

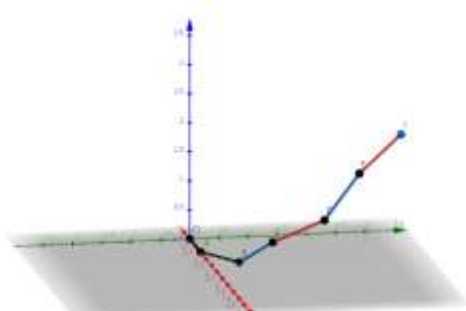
即為 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形，其中 $0 < \phi < \pi$ 、 \vec{i} 為 x 軸正向的單位向量，且在這樣的定義下顯然 ϕ 等於 90 度時，即為三維 Lill Path。

如圖(六)、圖(七)所示，其為 $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 的三維 $\frac{\pi}{6}$ -Lill

Path 圖形。



圖(六)



圖(七)

接著我們在下面的引理中檢驗 \vec{iR}^k 與 \vec{iR}^{k-1} 夾角為 ϕ 且 \vec{iR}^k 與 \vec{iR}^{k-2} 、 \vec{iR}^{k-1} 所張的平面夾角亦為 ϕ 。若 k 為偶數， \vec{iR}^k 與 $(\vec{iR}^{k-2} \times \vec{iR}^{k-1})$ 指向平面同側；若 k 為奇數， \vec{iR}^k 與 $(\vec{iR}^{k-2} \times \vec{iR}^{k-1})$ 指向平面異側，其中 $2 \leq k \leq n$ ，且 k 為整數。

Lemma 1 若矩陣 $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$ ，且 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 為空間中三任意向量，

則

(1) $|\vec{a}| = |\vec{aR}|$

(2) $(\vec{aR}) \cdot (\vec{bR}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

(3) $(\vec{aR}) \times (\vec{bR}) = -(\vec{a} \times \vec{b})R$

(4) $[(\vec{aR}) \times (\vec{bR})] \cdot (\vec{cR}) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

〈 Proof 〉

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{aligned} (1) \vec{a}R &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 \cos \phi - a_3 \sin \phi, a_1 \sin \phi + a_3 \cos \phi, a_2) \\ |\vec{a}R| &= \sqrt{(a_1 \cos \phi - a_3 \sin \phi)^2 + (a_1 \sin \phi + a_3 \cos \phi)^2 + a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\vec{a}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (\vec{a}R) \cdot (\vec{b}R) &= (a_1 \cos \phi - a_3 \sin \phi)(b_1 \cos \phi - b_3 \sin \phi) + \\ &\quad (a_1 \sin \phi + a_3 \cos \phi)(b_1 \sin \phi + b_3 \cos \phi) + a_2 b_2 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (\vec{a}R) \times (\vec{b}R) &= ((a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin \phi + (a_3 b_2 - a_2 b_3) \cos \phi, \\ &\quad (a_3 b_2 - a_2 b_3) \sin \phi + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cos \phi, a_1 b_3 - a_3 b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})R &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \\ &= ((a_2 b_1 - a_1 b_2) \sin \phi + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cos \phi, \\ &\quad (a_2 b_3 - a_3 b_2) \sin \phi + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cos \phi, a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ &= -(\vec{a}R) \times (\vec{b}R) \end{aligned}$$

(4) 由(1)、(2)、(3)可知

$$[(\vec{a}R) \times (\vec{b}R)] \cdot (\vec{c}R) = -(\vec{a} \times \vec{b})R \cdot (\vec{c}R) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

■

Lemma 2 若 \vec{i} 為 x 軸正向的單位向量，則

(1) \vec{iR}^k 與 \vec{iR}^{k-1} 夾角為 ϕ ，其中 k 為正整數。

(2) \vec{iR}^k 與 \vec{iR}^{k-2} 、 \vec{iR}^{k-1} 所張之平面夾角為 ϕ ，其中 k 為大於等於 2 的正整數，且

當 k 為偶數時， \vec{iR}^k 與 $(\vec{iR}^{k-2}) \times (\vec{iR}^{k-1})$ 指向平面同側；

當 k 為奇數時， \vec{iR}^k 與 $(\vec{iR}^{k-2}) \times (\vec{iR}^{k-1})$ 指向平面異側。

(1) 由 Lemma1(1)、(2) 知：

$$\begin{aligned} |\vec{iR}^k| &= |\vec{i}| = 1 \text{ 且 } (\vec{iR}^k) \cdot (\vec{iR}^{k-1}) = (\vec{iR}^{k-1}) \cdot (\vec{iR}^{k-2}), \text{ 所以} \\ \frac{(\vec{iR}^k) \cdot (\vec{iR}^{k-1})}{|\vec{iR}^k| |\vec{iR}^{k-1}|} &= \frac{(\vec{iR}^{k-1}) \cdot (\vec{iR}^{k-2})}{|\vec{iR}^{k-1}| |\vec{iR}^{k-2}|} = \cdots = \frac{(\vec{iR}) \cdot \vec{i}}{|\vec{iR}| |\vec{i}|} \\ &= \frac{(\cos \phi, \sin \phi, 0) \cdot (1, 0, 0)}{1 \cdot 1} = \cos \phi \end{aligned}$$

故 (\vec{iR}^k) 與 (\vec{iR}^{k-1}) 的夾角皆為 ϕ ，其中 k 為正整數。

(2) 接著我們利用數學歸納法來證明，

$k = 2$ 時

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{iR}^2) \cdot [\vec{i} \times (\vec{iR})]}{|\vec{iR}^2| |\vec{i} \times (\vec{iR})|} &= \frac{(\cos^2 \phi, \sin \phi \cos \phi, \sin \phi) \cdot (0, 0, \sin \phi)}{1 \cdot |\vec{i}| \cdot |\vec{iR}| \cdot \sin \phi} \\ &= \frac{\sin^2 \phi}{1 \cdot 1 \cdot \sin \phi} = \sin \phi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \end{aligned}$$

故 (\vec{iR}^2) 與 \vec{i} 、 (\vec{iR}) 所張之平面夾 ϕ 角，且 (\vec{iR}^2) 與 $\vec{i} \times (\vec{iR})$ 指向平面的同側。

$k = 3$ 時

$$\begin{aligned} & \frac{(\vec{iR^3}) \cdot [(\vec{iR}) \times (\vec{iR^2})]}{|\vec{iR^3}| |(\vec{iR}) \times (\vec{iR^2})|} \\ &= \frac{(\cos^3 \phi - \sin^2 \phi, \sin \phi \cos^2 \phi + \sin \phi \cos \phi, \sin \phi \cos \phi) \cdot (\sin^2 \phi, -\sin \phi \cos \phi, 0)}{1 \cdot |\vec{iR}| \cdot |\vec{iR^2}| \cdot \sin \phi} \\ &= \frac{-\sin^2 \phi}{1 \cdot 1 \cdot \sin \phi} = -\sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \end{aligned}$$

所以 $(\vec{iR^3})$ 與 $(\vec{iR}), (\vec{iR^2})$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 $(\vec{iR^3})$ 與 $(\vec{iR}) \times (\vec{iR^2})$ 指向平面的異側。

設 $k = n$ 時， $(\vec{iR^n})$ 與 $(\vec{iR^{n-2}}) \times (\vec{iR^{n-1}})$ 指向平面的同側，其中 n 為偶數，即

$$\frac{(\vec{iR^n}) \cdot [(\vec{iR^{n-2}}) \times (\vec{iR^{n-1}})]}{|\vec{iR^n}| |(\vec{iR^{n-2}}) \times (\vec{iR^{n-1}})|} = \sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$k = n + 1$ 時，由 Lemma 1 可知

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{iR^{n+1}}) \cdot [(\vec{iR^{n-1}}) \times (\vec{iR^n})]}{|\vec{iR^{n+1}}| |(\vec{iR^{n-1}}) \times (\vec{iR^n})|} &= \frac{[(\vec{iR^n})_R] \cdot \{[(\vec{iR^{n-2}})_R] \times [(\vec{iR^{n-1}})_R]\}}{|\vec{iR^{n+1}}| \cdot |\vec{iR^{n-1}}| \cdot |\vec{iR^n}| \cdot \sin \phi} \\ &= \frac{-(\vec{iR^n}) \cdot [(\vec{iR^{n-2}}) \times (\vec{iR^{n-1}})]}{|\vec{iR^n}| |(\vec{iR^{n-2}}) \times (\vec{iR^{n-1}})|} = -\sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \end{aligned}$$

所以 $(\vec{iR^{n+1}})$ 與 $(\vec{iR^{n-1}}), (\vec{iR^n})$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 $(\vec{iR^{n+1}})$ 與 $(\vec{iR^{n-1}}) \times (\vec{iR^n})$ 指向平面的異側。

同理，設 $k = n$ 時， $\vec{iR^n}$ 與 $\vec{iR^{n-2}}, \vec{iR^{n-1}}$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 $\vec{iR^n}$ 與 $(\vec{iR^{n-2}}) \times (\vec{iR^{n-1}})$ 指向平面的異側，其中 n 為奇數，即

$$\frac{(\vec{i}R^n) \cdot [(\vec{i}R^{n-2}) \times (\vec{i}R^{n-1})]}{|\vec{i}R^n| |(\vec{i}R^{n-2}) \times (\vec{i}R^{n-1})|} = -\sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$$

$k = n + 1$ 時，

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{i}R^{n+1}) \cdot [(\vec{i}R^{n-1}) \times (\vec{i}R^n)]}{|\vec{i}R^{n+1}| |(\vec{i}R^{n-1}) \times (\vec{i}R^n)|} &= \frac{[(\vec{i}R^n)_R] \cdot \{[(\vec{i}R^{n-2})_R] \times [(\vec{i}R^{n-1})_R]\}}{|\vec{i}R^{n+1}| |\vec{i}R^{n-1}| |\vec{i}R^n| \sin \phi} \\ &= \frac{-(\vec{i}R^n) \cdot [(\vec{i}R^{n-2}) \times (\vec{i}R^{n-1})]}{|\vec{i}R^n| |(\vec{i}R^{n-2}) \times (\vec{i}R^{n-1})|} = \sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \end{aligned}$$

故 $(\vec{i}R^{n+1})$ 與 $(\vec{i}R^{n-1}), (\vec{i}R^n)$ 所張之平面夾 ϕ 角，且 $(\vec{i}R^{n+1})$ 與

$[(\vec{i}R^{n-1}) \times (\vec{i}R^n)]$ 指向平面的同側。



由上面的引理，可知三維 ϕ -Lill Path 的行走方式有一固定的規則。反之，顯然按照這個行走規則所構成的連續線段也會是三維 ϕ -Lill Path。

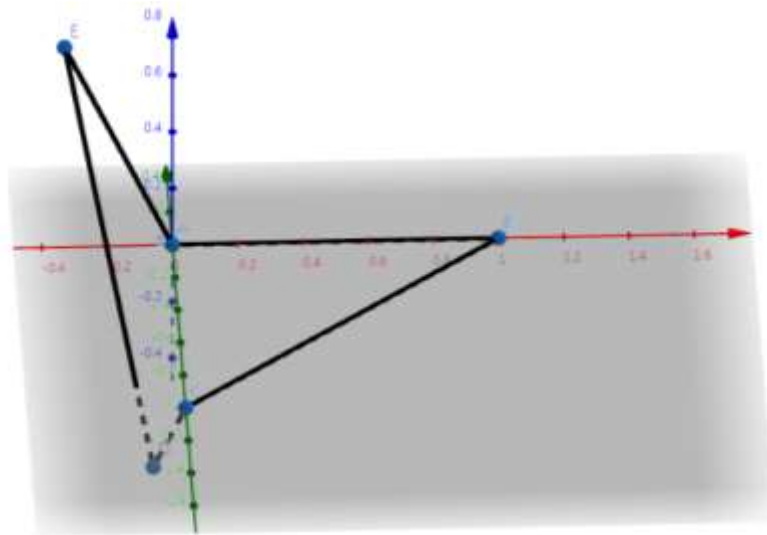
五、封閉的三維 ϕ -Lill Path 圖形

(一) 定義

假設有一多項式函數 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形起點與終點為同一點，則我們稱此為封閉的三維 ϕ -Lill Path 圖形。如圖(八)，此圖為多項式函數

$$f(x) = x^4 - \sqrt{2}x^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

的封閉的三維 $\frac{\pi}{4}$ -Lill Path 圖形。



圖(八)

在證明 Theorem 3 之前，我們先定義若有一函數

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ 則}$$

$$\text{rev } f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

Lemma 3 實係數多項式函數 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的之充要條件為 $\text{rev } f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的。

〈Proof〉

從 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 的終點出發，依 $(-a_0 \vec{i} R^n), (-a_1 \vec{i} R^{n-1}), \dots, (-a_n \vec{i})$ 之路徑行走，走回起點，我們檢驗此路徑是否符合三維 ϕ -Lill Path 的行走規則。

$$\frac{(-\vec{i} R^k) \cdot (-\vec{i} R^{k-1})}{|-\vec{i} R^k| |-\vec{i} R^{k-1}|} = \frac{(\vec{i} R) \cdot \vec{i}}{1 \cdot 1} = \cos \phi$$

$\therefore (-\vec{i} R^k)$ 與 $(-\vec{i} R^{k-1})$ 夾 ϕ 角，其中 $k \in \mathbb{N}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{-iR}^{k-2}) \cdot [(\vec{-iR}^k) \times (\vec{-iR}^{k-1})]}{|\vec{-iR}^{k-2}| \cdot |\vec{-iR}^k| \cdot |\vec{-iR}^{k-1}| \cdot \sin \phi} &= \frac{(-1) \cdot (\vec{iR}^{k-3}) [(\vec{iR}^{k-1}) \times (\vec{iR}^{k-2})]}{\sin \phi} \\ &= \frac{(-1)^{k-1} \cdot \vec{i} \cdot [(\vec{iR}^2) \times (\vec{iR})]}{\sin \phi} = \frac{(-1)^k \sin^2 \phi}{\sin \phi} = (-1)^k \sin \phi \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right), k \text{ 為偶數} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right), k \text{ 為奇數} \end{cases}, \text{ 其中 } 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

當 k 為偶數時， $(\vec{-iR}^{k-2})$ 與 $(\vec{-iR}^k), (\vec{-iR}^{k-1})$ 所張之平面夾角為 ϕ ，且 $(\vec{-iR}^{k-2})$ 與 $[(\vec{-iR}^k) \times (\vec{-iR}^{k-1})]$ 指向平面的同側；當 k 為奇數時， $(\vec{-iR}^{k-2})$ 與 $(\vec{-iR}^k), (\vec{-iR}^{k-1})$ 所張之平面夾角為 ϕ ，且 $(\vec{-iR}^{k-2})$ 與 $[(\vec{-iR}^k) \times (\vec{-iR}^{k-1})]$ 指向平面的異側。

所以我們將 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形的終點移到原點，且讓旋轉或翻轉後的 $(-a_0 \vec{iR}^n)$ 與 $(a_0 \vec{i})$ 同向，旋轉或翻轉後的 $(-a_1 \vec{iR}^{n-1})$ 與 $(a_1 \vec{iR})$ 同向。若 n 為偶數，則畫出的圖形符合三維 ϕ -Lill Path 為之行走規則，即 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path；若 n 為奇數，則畫出的圖形與 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 對稱 xy 平面。

由上述可知 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形可由 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形旋轉、翻轉或作對稱得到，故得證 $f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的之充要條件為 $\text{rev } f(x)$ 之三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的。



Theorem 3 實係數多項式函數 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的之充要條件為 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 是 $f(x)$ 的因式。

〈Proof〉

我們將 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形以向量方式表示，可得出其路線向量分別為 $a_n \vec{i}, a_{n-1} \vec{i}R, a_{n-2} \vec{i}R^2, \dots, a_1 \vec{i}R^{n-1}, a_0 \vec{i}R^n$ 。所以此圖形為封閉的充要條件為所有向量和為 $\vec{0}$ 。即

$$\begin{aligned} a_n \vec{i} + a_{n-1} \vec{i}R + a_{n-2} \vec{i}R^2 + \dots + a_1 \vec{i}R^{n-1} + a_0 \vec{i}R^n &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{i} \operatorname{rev} f(R) &= \vec{0} \end{aligned}$$

又因為 R 顯然為可逆方陣，故

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \vec{i} \operatorname{rev} f(R)R &= \vec{i}R \operatorname{rev} f(R) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{i} \operatorname{rev} f(R)R^2 &= \vec{i}R^2 \operatorname{rev} f(R) = \vec{0} \end{aligned}$$

因為 ϕ 不為 π 的整數倍，所以易檢查出 $\vec{i}, \vec{i}R, \vec{i}R^2$ 為三個線性獨立的向量，即三向

量所構成之三階方陣 $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i}R \\ \vec{i}R^2 \end{pmatrix}$ 可逆。又由上述三個等價條件可知

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{i}R \\ \vec{i}R^2 \end{pmatrix} \operatorname{rev} f(R) = \vec{0} \Leftrightarrow \operatorname{rev} f(R) = \vec{0}$$

接著我們令方陣 R 的最小多項式為 $m(x)$ ，即 $m(x)$ 為使得 $m(R) = \mathbf{0}$ （零方陣）且首項係數為 1 的最低次數的多項式。

若 $m(x) = x + a$

$$\Rightarrow R + aI = \mathbf{0}, R = -aI$$

顯然不成立，故 $\deg m(x) \neq 1$ 。

若 $m(x) = x^2 + ax + b$

$$\Rightarrow R^2 + aR + bI_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi & -\sin^2 \phi & \cos \phi \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \phi = 0 \\ \cos \phi = 1 \\ a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

但因為 ϕ 不為 π 的整數倍，顯然不成立，所以 $\deg m(x) \neq 2$ 。

上述的討論可知 $\deg m(x) \geq 3$ ，由 Cayley-Hamilton 定理：

若

$$\begin{aligned} p(x) = \det(xI - R) &= \det \begin{bmatrix} x - \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & x & -1 \\ \sin \phi & -\cos \phi & x \end{bmatrix} \\ &= x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1 \end{aligned}$$

則 $p(R) = 0$ 。

又 $\deg p(x) = 3$ ，因此

$$m(x) = p(x) = \det(xI - R) = x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1$$

又因為 $\text{rev } f(R) = 0 \Leftrightarrow m(x) | \text{rev } f(R)$ ，所以 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的，其充要條件為 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 是 $\text{rev } f(x)$ 之因式。同理，

$\text{rev } f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的 $\Leftrightarrow m(x) | f(x)$ ，又由 Lemma 3 得知：

$\text{rev } f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的 $\Leftrightarrow f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形為封閉的，

故得證。



參、研究結果與討論

一、研究結果

- (一) **Theorem 1** 自原點出發的射線在多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 進行反射，則此射線通過三維 Lill Path 終點之充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 。
- (二) **Theorem 2** 若一實係數多項式函數三維 Lill Path 圖形是封閉的，則其充要條件為此多項式函數有因式 $(x^3 + 1)$ 。
- (三) **Theorem 3** 實係數多項式函數 $f(x)$ 的三維 ϕ -Lill Path 圖形是封閉的之充要條件為 $[x^3 - (\cos \phi)x^2 - (\cos \phi)x + 1]$ 是 $f(x)$ 的因式。

二、討論

在本篇研究中，我們在 Lemma 1 和 Lemma 2 中利用矩陣

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \text{ 檢驗三維 } \phi\text{-Lill Path 路線行走規則。但我們認為此證明方式}$$

過於冗長，因此我們希望能找到一個更為簡約的證明方法。還有，我們推想三維 ϕ -Lill Path 自原點發射的射線在三維 ϕ -Lill Path 反射後能通過終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $\left(\frac{-\sin \theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)$ ，但目前並未證實此定理是否為正確的。除此之外，我們還希望能將 Lill Path 的性質繼續推廣至 n 維空間中運用。

肆、結論

本篇研究以 Lill 定理為發想核心，再做進一步的延伸。首先，我們將二維的 Lill 定理推廣至三維，利用代數的運算及圖形的觀察，將路徑長度配合其與射線的交點，使用 $(\tan \theta)$ 的形式表述出。最後發現其特性「自原點發射的射線在多項式函數 $f(x)$ 的三維 Lill Path 進行反射，此射線通過三維 Lill Path 終點的充要條件為 $f(x) = 0$ 有一實根 $(-\tan \theta)$ 」和原 Lill 定理如出一轍。接著，我們先推想出若一三維 Lill Path 圖形為封閉的，則其充要條件為此三維 Lill Path 所對應之多項式函數有因式 $(x^3 + 1)$ ，再檢驗是否正確。先利用封閉的 Lill Path 圖

形其「原點與終點為同一點」的性質，觀察出終點座標與路徑長度的關係。並將 $(x^3 + 1)$ 因式分解，分別經代數計算之後，驗證了此推想為正確的。接下來，我們繼續將三維 Lill Path 圖形延伸至路徑夾角不為 90 度的三維 ϕ -Lill Path 圖形。我們找到一矩陣

$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$ ，並使用矩陣 R 定義三維 ϕ -Lill Path 的路線行走規則。最後，我們

想找出決定封閉的三維 ϕ -Lill Path 圖形之充要條件。因其為封閉之圖形，故我們可知所有路徑向量和等於 $\vec{0}$ ，藉由列出向量關係式的方式後得知矩陣 R 的特徵方程式為三維 ϕ -Lill Path 圖形所對應之多項式的因式。

伍、參考資料

1. Thomas C Hull , Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill, *The American Mathematical Monthly* **118(4)**:307-315, April 2011
2. Dan Kalman & Mark Verdi, Polynomials with Closed Lill Paths, *Math Mag.* **88** (2015), 3-10
3. Moti Ben-Ari, The Mathematics of Origami, Version 4 (2020), <https://reurl.cc/dxn2zV>
4. Lill's method, <https://reurl.cc/DZjynj>

【評語】 010006

Lill's method 是一種用圖像在二維平面上找出任意次數多項式實根的方式。作者運用同樣的原理，將 Lill path 畫到三維上，因此，會得到和二維一樣的結果。作者沒有說明，這兩個方式的缺點是在於，當多項式的次數變高時，二維的 Lill path 會自相交，因此會讓反射求根的圖像難以辨認。三維的 Lill path 就比較不會有自相交的問題，但是三維以上在視覺上卻更難操作。利用高維矩陣去做代數運算，應該會讓求根更加困難吧！建議作者可以考慮和求根的其他方式，比如牛頓法、二分法做比較。