# 2022 年臺灣國際科學展覽會
# 優勝作品專輯

作品編號　**010003**

參展科別　數學

作品名稱　坐標平面上的格點多邊形性質

得獎獎項　三等獎


就讀學校　臺北市立永春高級中學

指導教師　蔡春風

作者姓名　劉冠陞



關鍵詞　格點多邊形、坐標平面、方法數

# 作者簡介

我是劉冠陞，就讀臺北市立永春高中二年級數理資優班。學術研究是我的興趣，我從國小就開始參加科展，而探討數學更是能讓我廢寢忘食，尤其是在推導出各種通解的瞬間，覺得非常有成就感。專題研究不但有趣，還能夠精進我的各項能力，尤其是製作報告以及上台發表，還有無數次瓶頸所磨練出的耐心。這次很幸運地能來到國際科展的舞台，除了發表自己的作品外，也希望日後我的研究能夠為學術界做出貢獻。

# 摘要

先前有許多人探討了坐標平面上格點正方形、格點直角三角形的性質，卻沒有人用數學的方式將此主題推廣到各種多邊形，格點多邊形性質便一直被歸類於資訊研究，目標變為預測當邊數很多或範圍很大時的估計值，因此本研究的目的在於用數學化的方式探討在坐標平面上每個頂點坐標皆為整數的多邊形性質，並推導出能算出精確值的通解。

本文探討的多邊形包含了凹多邊形及凸多邊形，研究者提出繪製格點多邊形的「迂迴作圖法」並成功推導出格點多邊形的範圍條件、範圍內最多邊的格點多邊形邊數、面積極值、周長極值的通解，並找出了部分多邊形的周長極大值與個數。運用本研究的結果，將有助於在有限區域或空間中依照特定規律設計最大路徑，例如遊樂場的迷宮與雲霄飛車軌道。

# Abstract

In previous research, grid squares and grid rectangular triangles on Cartesian coordinate plane had been discussed, but few had used mathematical methods to extend this topic to various polygons. Properties of grid polygons have always been classified into computer information study, and the purpose turns to estimate the approximation value of different shapes or largest area which contain. The purpose of this study is to calculate the number of grid polygons in a mathematical way. Since each vertex has integer coordinates on the plane, deriving a solution calculating accurate values seemed to be possible.

The polygons discussed in this study contain concave and convex ones. The researcher has successfully developed a specific sketching way named “inside-out method” in order to obtain maximum grid polygons. Furthermore, the researcher derived the range conditions of grid polygons, the number of grid polygon edges with the largest edge amount in that range, the maximum and minimum values of area, the minimum value of the circumference, and the maximum circumference in parts of the polygons. We can apply our results into the design of longest traveling route in limited space such as mazes or roller coasters.

# 壹、研究動機

在國中的資優班的複選中，有一道題是判斷「在特定的矩形範圍內共有多少格點直角三角形（所有頂點皆落在格子點上）」，當時我就想著能否導出一個通解，可以利用範圍及多邊形邊數，求出三角形的各項性質，但以失敗告終。之後我查到，有許多科展主題皆是探討格點正方形[1][2][3]或直角三角形[4]在特定範圍內的種類與個數，但是沒有人推廣到其他的多邊形，還有學者用程式去預測當多邊形邊數很多（或範圍很大時）的估計值[5]，我認為這些工作應該存在更數學化的方法，以函式簡潔且精確地表示。因此本研究將會研究坐標平面上的各種凹多邊形及凸多邊形，也就是簡單多邊形[6]的性質，並嘗試推導出下列通解。

# 貳、研究目的

一、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之邊數極值。

二、求坐標平面上特定矩形範圍內有足夠格點連成格點多邊形的條件式。

三、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之面積極值。

四、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之周長極值。

五、求坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之個數極值。

# 參、研究方法

## 一、名詞定義

（一）邊數$k$：格點多邊形（每個頂點皆為格子點，含凸$k$邊形與凹$k$邊形）的邊數。

（二）範圍$(n,m)$：由$x=n$、$y=m$、$x$軸、$y$軸圍成的$n\times m$矩形範圍($(n,m)\in\mathbb{N}$)。

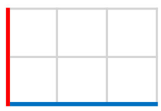

圖 1：(3,2)示意圖

（三）$max(a,b)$：$a$與$b$之間較大者($(a,b)\in\mathbb{N}$)。

（四）$min(a,b)$：$a$與$b$之間較小者($(a,b)\in\mathbb{N}$)。

（五）線段$l(a,b)$：坐標平面上斜率為$\pm a$或$\pm\frac{1}{a}$，且長$b$單位的線段$(a \in \mathbb{Z}, b \in R, b > 0)$。

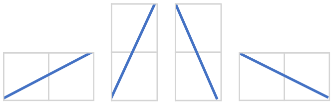

圖 2：$l(2,\sqrt{5})$示意圖

（六）函式$LED(n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點多邊形的邊數極大值。

（七）函式$SED(n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點多邊形的邊數極小值。

（八）函式$JM(k,n,m)$：有足夠格點連成格點$k$邊形的$(n,m)$條件判斷式。

（九）函式$LAR(k,n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點$k$邊形的面積極大值。

（十）函式$SAR(k,n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點$k$邊形的面積極小值。

（十一）函式$LPM(k,n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點$k$邊形的周長極大值。

（十二）函式$SPM(k,n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點$k$邊形的周長極小值。

（十三）函式$LAM(k,n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點$k$邊形的個數極大值。

（十四）函式$SAM(k,n,m)$：$(n,m)$範圍內，格點$k$邊形的個數極小值。

**二、研究架構與流程**

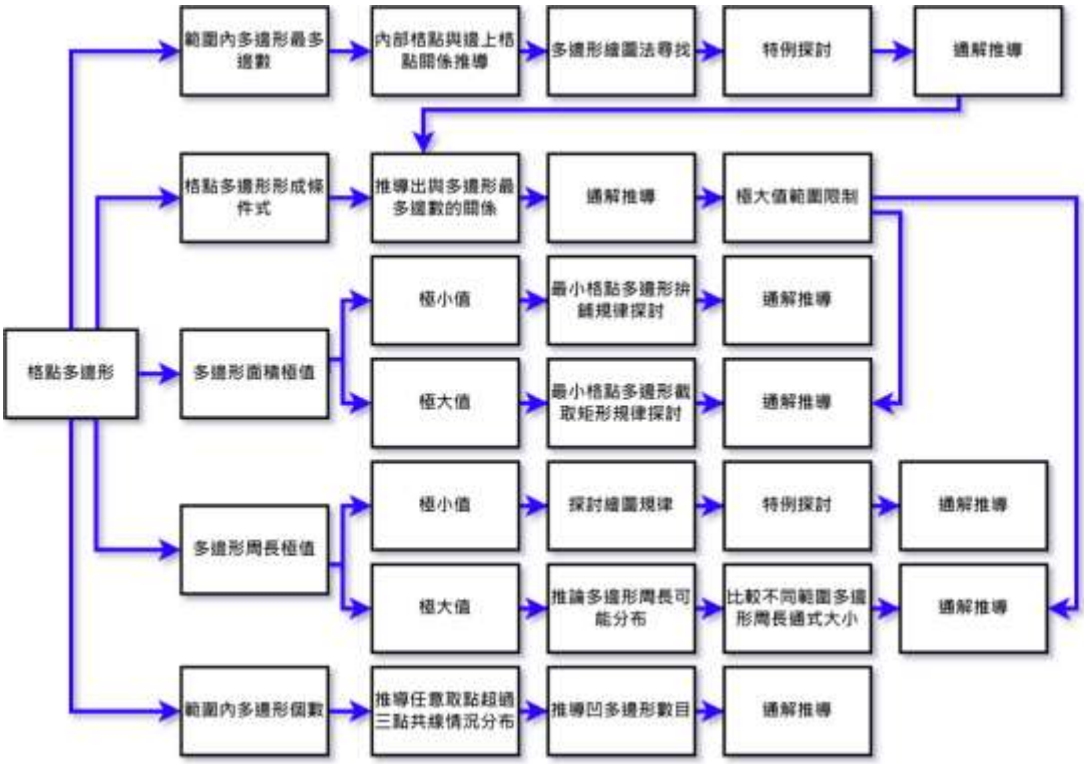


圖 3：研究流程圖

**三、研究設備與器材**

筆電、GeoGebra、Geometer’s Sketchpad、Excel、Wolfram Alpha。

# 肆、研究結果

## 一、坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之邊數極值

### （一）極大值

基於研究需求，本文所有算式的中括號$[x]$除非特別註記，否則皆為高斯記號，表示不大於$x$的最大整數。為確保範圍內多邊形的邊數最多，所以不能讓任意兩條邊共線且相連，因此先計算矩形範圍每邊上的格點數，若一邊上有$x$個點$\{x>2, x\in\mathbb{N}\}$，則矩形內部至少要有$\left[\frac{x-1}{2}\right]$個格點，以便若只取邊上的格點會產生兩條邊共線且相連時，將其中一條邊改連內部的格點，因此當矩形範圍為$(n,m)$時，內部至少需要$2\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{m}{2}\right]$個格點。矩形內部格點數為總格點數扣除邊上格點數，也就是$(n+1)(m+1)-2n-2m$。

**1. $\boldsymbol{min(n,m)=1}$**

當$n$或$m$為1時，因為沒有內部格點，因此多邊形邊數最多為 4，即：

$$\boldsymbol{LED(1,p)=LED(p,1)=4}$$

**2. $\boldsymbol{min(n,m)=2}$**

矩形內部格點數為總格點數減去邊上格點數，也就是$(n+1)(m+1)-2n-2m$。若$min(n,m)=2$、$max(n,m)=p\{p\geq 2, p\in\mathbb{N}\}$則內部格點數為$3p+3-4-2p=p-1$，而內部所需的點為$2+2\left[\frac{p}{2}\right]=2+p\vee 1+p$。

當$p$為奇數時，$p-1-1-p=-2$。

當$p$為偶數時，$p-1-2-p=-3$。

因為$2+p>1+p>p-1$，所以內部格點數恆少於所需格點數，差2或3個格點。倘若從$(0,0),(n,0),(0,m),(n,m)$中任選2點不連接，則所需格點數會減少。當選擇的點位於對角時，則每邊格點數各減1，若$p$為奇數，則所需格點數減2，若$p$為偶數，則所需格點數減4。當選擇的點共線時，則共邊格點數減2，另一組對邊格點數各減1，若$p$為奇數，則所需格點數減2，若$p$為偶數，則所需格點數減3。由此可知：

$$\boldsymbol{LED(2,p)=LED(p,2)=3(p+1)-2}$$

且$p>2$時的偶數邊數多邊形，皆可從$p=2$時的情況有規律地推得（圖 4）。

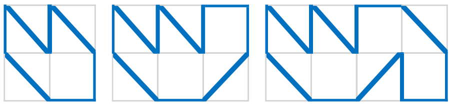

圖 4：$(n,m)=(2,p)$時的最多邊數多邊形規律

### 3. $\boldsymbol{min(n,m)=3}$

若$min(n,m)=3$、$max(n,m)=p\{p\geq 3,p\in\mathbb{N}\}$則內部格點數為$4p+4-6-2p=2p-2$，而內部所需的點為$2+2\left[\frac{p}{2}\right]=2+p\vee 1+p$。

當$p$為奇數時，$2p-2-1-p=p-3$，因為$p\geq 3\Rightarrow p-3\geq 0$。

當$p$為偶數時，$2p-2-2-p=p-4$，因為$p\geq 3$且3不是偶數，故$p\geq 4\Rightarrow p-4\geq 0$。

所以內部格點數恆多於所需格點數，由此可知$(n,m)=(3,p)$或$(p,3)$的多邊形最多邊數為$4(p+1)$，即：

$$\boldsymbol{LED(3,p)=LED(p,3)=4(p+1)}$$

且$p>3$時的奇數邊數多邊形，皆可從$p=3$時的情狀有規律地推得（圖 5）。

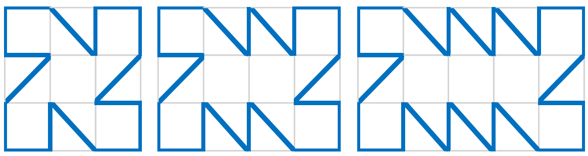

圖 5：$(n,m)=(3,p)$時的最多邊數多邊形規律

### 4. $\boldsymbol{min(n,m)\geq 4}$

因為即將要推廣至所有正整數$(n,m)$，我們必須先確定格點多邊形的存在性。

當$n$為奇數且$m$為奇數時，$(n+1)(m+1)-2n-2m-2\left[\frac{n}{2}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]=nm+n+m+1-2n-2m-n+1-m+1=nm-2n-2m+3$。

當$n$為奇數且$m$為偶數時，$(n+1)(m+1)-2n-2m-2\left[\frac{n}{2}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]=nm+n+m+1-2n-2m-n+1-m=nm-2n-2m+2$。

當$n$為偶數且$m$為奇數時，$(n+1)(m+1)-2n-2m-2\left[\frac{n}{2}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]=nm+n+m+1-2n-2m-n-m+1=nm-2n-2m+2$。

當$n$為偶數且$m$為偶數時，$(n+1)(m+1)-2n-2m-2\left[\frac{n}{2}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]=nm+n+m+1-2n-2m-n-m=nm-2n-2m+1$。

所以當$min(n,m)\geq 4$時，$nm-2n-2m+3>nm-2n-2m+2>nm-2n-2m+1\geq 1$，這代表內部格點數恆多於所需格點數。在研究的過程中，我們發現當$min(n,m)\geq 4$且$max(n,m)\geq 5$時，有一種作圖法能有效避免三點共線，同時避免遺漏掉可連到的格點，我們將它稱為格點多邊形的「**迂迴作圖法**」，以下說明：

步驟 1：設$\vec{I}=(1,0)$、$\vec{J}=(0,1)$，固定從點$(0,1)$開始，先沿著$-\vec{J}$畫線（圖 6）。



圖 6：$(0,1)$開始沿著$-\vec{J}$畫線

步驟 2：依序沿著$\vec{I}$、$\vec{J}$、$\vec{I}-\vec{J}$、$\vec{I}$畫線，畫到第$a$個$\vec{I}$後，接著沿著$-(a-1)\vec{I}+\vec{J}$和$a\vec{I}-\vec{J}$畫線，再換下一個$\vec{I}$，直到畫到$(n,0)$為止（圖 7）。

圖 7：$n=5$時的示意圖

步驟 3：作圖規律改成畫$\vec{J}$、$-\vec{I}$、$\vec{I}+\vec{J}$、$\vec{J}$，往後畫到第$b$個$\vec{J}$就接著沿著$-(b-1)\vec{J}-\vec{I}$和$b\vec{J}+\vec{I}$畫線，直到畫到$(n,m)$（圖 8）。

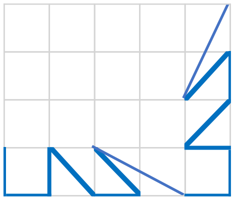

圖 8：$n=5$、$m=4$時的示意圖

步驟 4：作圖規律改成畫$-\vec{I}$、$-\vec{J}$、$-\vec{I}+\vec{J}$、$-\vec{I}$，往後畫到第$c$個$-\vec{I}$就接著沿著$(c-1)\vec{I}-\vec{J}$和$-c\vec{I}+\vec{J}$畫線，再畫下一個$-\vec{I}$，直到畫到$(0,m)$（圖 9）。

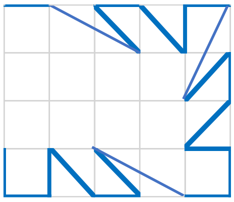

圖 9：$n=5$、$m=4$時的示意圖

步驟 5：作圖規律改成畫$-\vec{J}$、$+\vec{I}$、$-\vec{I}+\vec{J}$、$-\vec{J}$，往後畫到第$d$個$-\vec{J}$就接著沿著$(d-1)\vec{J}+\vec{I}$和$-d\vec{J}-\vec{I}$畫線，再畫下一個$-\vec{J}$，直到畫到$(0,2)$（圖 10）。

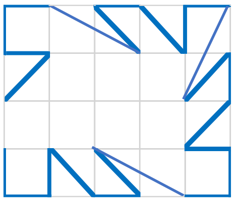

圖 10：$n=5$、$m=4$時的示意圖

步驟 6：接下來最外層的點會優先選擇，並且取點方向從剛開始的逆時針變為順時針，往後每碰到最下方的點，取點方向便改變（圖 11）。每當取到某一點會三點共線時，則如同最外圈的畫法，向內一層，先取離那一點最遠，但$x$坐標和$y$坐標至少一個為1的格點連線，再連接那一點（圖 12），重複步驟 2 至 5，由外而內迂迴延伸，可得最多邊數的格點多邊形。

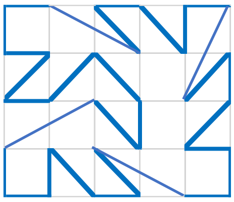

圖 11：$n=5$、$m=4$時的示意圖

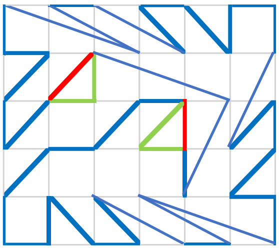

圖 12：$n=6$、$m=5$時的示意圖（紅線為原本應畫的線段、綠線為避免三點共線的線段）

最後討論唯一的特例：當$min(n,m)=max(n,m)=4$時，雖然內部格點比所需格點多一個，但正因為只多了一個，因此在連線時無法避免三點共線，所以必有：

$$\boldsymbol{LED(4,4)=24}$$

而當$min(n,m)\geq 4$且$max(n,m)\geq 5$時，由迂迴作圖法可知：

$$\boldsymbol{LED(n,m)=4+\left[\frac{2\,min(n,m)}{min(n,m)+2}\right]\left((n+1)(m+1)-4-2\left[\frac{4}{min(n,m)+2}\right]-\left[\frac{8}{min(n,m)+4}\right]\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+4}\right]\right)}$$

**（二）極小值**

因為最小格點多邊形為三邊長$1-1-\sqrt{2}$的三角形，且$(n,m)=(1,1)$的範圍即可畫出，因此與$(n,m)$並不相關，無討論必要。意即：

$$\boldsymbol{SED(n,m)=3}$$

**二、坐標平面上特定矩形範圍內有足夠格點連成格點多邊形的條件式**

由上論述可知，當$k>LED(n,m)$時，$(n,m)$範圍內便畫不出格點$k$邊形，因此我們可利用高斯記號建構一個非0即1的函數$JM(k,n,m)$，當$JM(k,n,m)=1$就表示$(n,m)$範圍可畫出格點

$k$邊形；而當$JM(k,n,m)=0$就表示$(n,m)$範圍內畫不出格點$k$邊形。此即：

$$JM(k,n,m)=\left\lfloor\frac{2k}{LED(n,m)+k}\right\rfloor$$

### 三、坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之面積極值

#### （一）極大值

由於本研究探討的範圍包括凹多邊形，且並未分別計算各頂點的坐標，因此常用來計算多邊形面積的「測量師公式」或「Pick 定理」[7]在此並不適用。不難得知$LAR(3,n,m)=\frac{nm}{2}$、$LAR(4,n,m)=nm$。往後$k$每增加1，$LAR(k,n,m)$便減$\frac{1}{2}$( 圖 13 )，因此當$k\geq 4$時，$LAR(k,n,m)=nm-\frac{k-4}{2}$，又當$k=3$時，$LAR(3,n,m)=nm-\frac{k-4}{2}-\frac{nm}{2}+\frac{k-4}{2}$，加上最小範圍限制可得：

$$LAR(k,n,m)=\left(nm-\frac{k-4}{2}-\left(\frac{nm-k+4}{2}\right)\left\lfloor\frac{6}{k+3}\right\rfloor\right)\times JM(k,n,m)$$

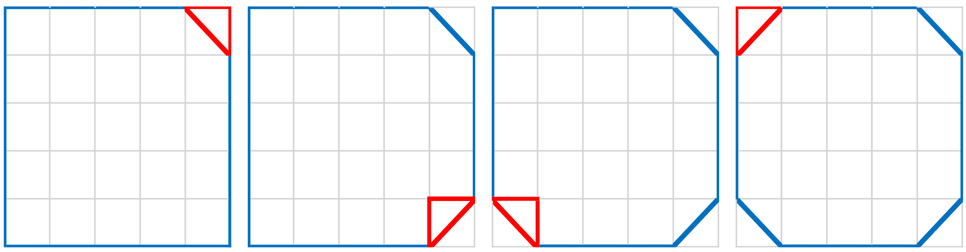

圖 13：$k=5$至$8$的$LAR$示意圖（紅色三角形為被刪除的部分）

#### （二）極小值

最小的格點多邊形是三邊長為$1-1-\sqrt{2}$的三角形，我們發現此增加方式能有規律的在增加一個三角形時增加一個邊（圖 14），由此可知當$k$每增加1時，$SAR(k)$便會增加$\frac{1}{2}$，且$SAR(3)=\frac{1}{2}$，這與$(n,m)$之值無關，因此可得：

$$SAR(k,n,m)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(k-3)=\frac{k-2}{2}$$

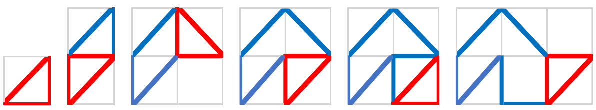

圖 14：最小格點三～八邊形（紅色三角形為新增的部分）

## 四、坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之周長極值

### （一）極大值

#### 1. $k=3$的情況

因為不存在凹三角形，且周長最長的三角形（圖 15），任兩頂點的曼哈頓距離和[8]（維基百科，2019）與方形任兩相鄰頂點的曼哈頓距離和必相等，因此必至少一頂點位於方形區域的頂點上，另外兩頂點則在方形區域對頂點的鄰邊上，如圖，若固定$\overline{EC}$，則當點$F$越接近點$B$時，$\angle EFC$就越小，$\overline{EF}+\overline{FC}$就越大，因此點$F$與點$B$重合時，$\overline{EF}+\overline{FC}$有極大值，參考「**等底等高的三角形中，等腰三角形的周長最短的證明法**」[9]的推導方式（圖 16），可知當點$E$與點$A$重合時，$\overline{EC}+\overline{EF}$有極大值，因此可得：

$$\boldsymbol{LPM(3,n,m)=\left(n+m+\sqrt{n^2+m^2}\right)\times JM(k,n,m)}$$

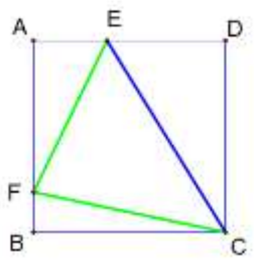


圖 15：證明示意圖

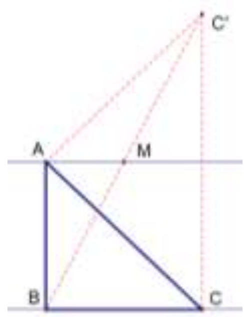


圖 16：證明示意圖

#### 2. $k=4$的情況

四邊形的最大周長是整個研究中討論最複雜的情況。當$min(n,m)=1$時，$LPM(4,n,m)=$

$2n+2m$，但是考慮到凹四邊形周長有可能比矩形範圍的周長更長。為了維持凹四邊形的曼哈頓距離及周長最長，根據$LPM(3,n,m)$的推導過程可知，周長最長凹四邊形的一邊必為矩形範圍的對角線，一頂點位於短邊上，剩餘一頂點則必須位於另外三頂點圍成的三角形內部。以(3,2)為例，我們發現共有二種凹四邊形周長可能最長（圖 17）。

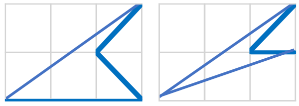

圖 17：(3,2)範圍內的凹四邊形示意圖

我們將上述第一種凹四邊形命名為$D_1$，其周長$D_1(n,m)$為：

$$max(n,m)+\sqrt{n^2+m^2}+\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+(min(n,m)-1)^2}$$

再將第二種凹四邊形命名為$D_2$，其周長$D_2(n,m)$為：

$$\sqrt{n^2+m^2}+\sqrt{max(n,m)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+(min(n,m)-1)^2}+\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-2\right)^2}$$

首先探討$n=m$的情況。不失一般性設$n=m=a(a\in N$且$a\geq 2)$，由於

$$\begin{aligned}D_1(n,m)-2n-2m &= a+\sqrt{2a^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{a}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{a}\right]-1\right)^2+(a-1)^2}-2a-2a\\ &= a\sqrt{2}-3a+\sqrt{(a-2)^2+1}+\sqrt{(a-2)^2+(a-1)^2}\end{aligned}$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(a\sqrt{2}+\sqrt{(a-2)^2+1}+\sqrt{(a-2)^2+(a-1)^2}-3a\right)$$

$$=\frac{a-2}{\sqrt{a(a-4)+5}}+\frac{2a-3}{\sqrt{2(a-3)+5}}+\sqrt{2}-3$$

$$=\frac{a-2+(\sqrt{2}-1)\sqrt{a(a-4)+10}}{\sqrt{a(a-4)+5}}+\frac{2a-3-2\sqrt{2(a-3)+5}}{\sqrt{2(a-3)+5}}$$

若 $2a-3-2\sqrt{2(a-3)+5}\geq 0$ ， 則 $4a^2-12a+9\geq 8a-4\Rightarrow a\geq\frac{5+\sqrt{3}}{2}>4\vee 2>\frac{5-\sqrt{3}}{2}\geq a$（不合）。因為當$a=5$時，$a\sqrt{2}-3a+\sqrt{(a-2)^2+1}+\sqrt{(a-2)^2+(a-1)^2}>0$；且當$a\geq 5$時，$a-3>a-4>0$，又$a>\frac{5+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{a-2}{\sqrt{a(a-4)+5}}+\frac{2a-3}{\sqrt{2(a-3)+5}}+\sqrt{2}-3>0$，所以當$min(n,m)\geq 5$，周長最大的格點四邊形周長必不為$2n+2m$。

接著分別討論$min(n,m)=2$或$3$或$4$的情況。

不失一般性設$m=2$、$n=a(a\in N$且$a\geq 2)$，則

$$D_1(n,m)-2n-2m=a+\sqrt{a^2+4}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}-4-2a$$

$$=\sqrt{a^2+4}+2\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}-4-a$$

$$\geq\sqrt{a^2+4}+2\sqrt{\left(\frac{a}{2}-1\right)^2+1}-4-a$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(\sqrt{a^2+4}+2\sqrt{\left(\frac{a}{2}-1\right)^2+1}-4-a\right)=\frac{a-2}{\sqrt{a^2-4a+8}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}-1$$

$$=\frac{a-2-\frac{\sqrt{a(a-4)+8}}{2}}{\sqrt{a(a-4)+8}}+\frac{a-\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}}{\sqrt{a^2+4}}$$

若$a-\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\geq 0$，則$a^2\geq\frac{a^2}{4}+1\Rightarrow a^2\geq 3\Rightarrow a\geq\sqrt{3}>1\vee 0>-\sqrt{3}\geq a$（不合）。若$a-2-\frac{\sqrt{a(a-4)+8}}{2}\geq 0$，則$a^2-4a+4\geq\frac{a^2}{4}-a+2\Rightarrow 3a^2-12a-8\geq 0\Rightarrow a\geq\frac{6-2\sqrt{15}}{3}>4\vee 0>$

$\frac{6-2\sqrt{15}}{3} \geq a$（不合）。因為當$a=5$，則$\sqrt{a^2+4}+2\sqrt{\left(\frac{a}{2}-1\right)^2+1}-4-a>0$；且當 $a \geq 5$時，$a>\sqrt{3}$ 且 $a>\frac{6+2\sqrt{15}}{3}$ 且 $a-4>0 \Rightarrow \frac{a-2}{\sqrt{a^2-4a+8}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}-1>0$ ，所以當 $min(n,m)=2$ 且 $max(n,m) \geq 5$時，周長最大的格點四邊形周長必不為$2n+2m$。

不失一般性設$m=3$、$n=a(a \in N$且$a \geq 3)$，則

$$D_1(n,m)-2n-2m=a+\sqrt{a^2+9}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+4}-6-2a$$

$$=\sqrt{a^2+9}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+4}-6-a$$

$$\geq \sqrt{a^2+9}+\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+4}-6-a$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(\sqrt{a^2+9}+\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+4}-6-a\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}+\frac{4a-6}{3\sqrt{4a(a-3)+18}}+\frac{4a-6}{3\sqrt{4(a-3)a+45}}-1$$

$$=\frac{a-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+9}}{\sqrt{a^2+9}}+\frac{4a-6-\sqrt{4a(a-3)+18}}{3\sqrt{4a(a-3)+18}}+\frac{2(2a-3)}{3\sqrt{4(a-3)a+45}}$$

若$a-\frac{2}{3}\sqrt{a^2+9} \geq 0$，則$a^2 \geq \frac{4a^2}{9}+4 \Rightarrow \frac{5a^2}{9} \geq 4 \Rightarrow a^2 \geq \frac{36}{5} \Rightarrow a \geq \frac{6}{\sqrt{5}}>2 \vee 0>-\frac{6}{\sqrt{5}} \geq a$（不合）。若$4a-6-\sqrt{4a(a-3)+18} \geq 0 \Rightarrow 16a^2-48a+36 \geq 4a^2-12a+18 \Rightarrow 6a^2-18a+9 \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{18+7\sqrt{2}}{12}>2 \vee 1>\frac{18-7\sqrt{2}}{12} \geq a$（不合）。因為當$a=5$時，$\sqrt{a^2+9}+\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+4}-6-a>0$，且當$a \geq 5$時，$a>\frac{6}{\sqrt{5}}$且$a>\frac{18\pm7\sqrt{2}}{12}$且$2a-3>a-3>0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+9}}+\frac{4a-6}{3\sqrt{4a(a-3)+18}}+\frac{4a-6}{3\sqrt{4(a-3)a+45}}-1>0$，所以若 $min(n,m)=3$ 且 $max(n,m) \geq 5$時，周長最大的格點四邊形周長必不為$2n+2m$。

不失一般性設$m=4$、$n=a(a \in N$且$a \geq 4)$，則

$$D_1(n,m)-2n-2m=a+\sqrt{a^2+16}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+9}-8-2a$$

$$=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2-1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+9}-8-a$$

$$>\sqrt{a^2+16}+\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2-1}+\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2+9}-8-a$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(\sqrt{a^2+16}+\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2-1}+\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2+9}-8-a\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+16}}+\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{3(3a-8\,)+160}}+\frac{\sqrt{3}(3a-4)}{4\sqrt{a(3a-8)}}-1$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+16}}+\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{3(3a-8)+160}}+\frac{\sqrt{3}(3a-4)}{4\sqrt{a(3a-8)}}$$

$$=\frac{a-\frac{3\sqrt{a^2+16}}{4}}{\sqrt{a^2\;+\;16}}+\frac{9a-12-\sqrt{3(3a-8)+160}}{4\sqrt{3(3a-8)+160}}+\frac{\sqrt{3}(3a-4)}{4\sqrt{a(3a-8)}}$$

若$a-\frac{3\sqrt{a^2+16}}{4}\geq 0$，則$16a^2\geq 9a^2+144\Rightarrow a^2\geq\frac{144}{7}\Rightarrow a\geq\frac{12}{\sqrt{7}}>4\vee 0>-\frac{12}{\sqrt{7}}\geq a$(不合)。若 $9a-12-\sqrt{3(3a-8)+160}\geq 0$ ，則 $81a^2-216a+144\geq 9a-24+160\Rightarrow 81a^2-225a+8\geq 0\Rightarrow a\geq\frac{25+\sqrt{593}}{18}>2\vee 1>\frac{25-\sqrt{593}}{18}\geq a$（不合）。因為當$a=5$時，$\sqrt{a^2+16}+\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2-1}+\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2+9}-8-a>0$，且當$a\geq 5$時，$3a-4>3a-8>0$且$a>\frac{12}{\sqrt{7}}$且$a>\frac{25+\sqrt{593}}{18}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+16}}+\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{3(3a-8)+160}}+\frac{\sqrt{3}(3a-4)}{4\sqrt{a(3a-8)}}-1>0$ ，所以若 $min(n,m)=4$ 且 $max(n,m)\geq 5$時，周長最大的格點四邊形周長必不為$2n+2m$。

由上可知，當$max(n,m)\geq 5$，也就是$\left[\frac{2max(n,m)}{max(n,m)+5}\right]=1$時，周長最大的格點四邊形周長必不為$2n+2m$。

接著比較$D_1$與$D_2$兩種凹四邊形周長的大小。

不失一般性設$n=m=a(a\in N$且$a\geq 2)$，則

$$D_2(n,m)-D_1(n,m)$$

$$=\sqrt{max(n,m)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-1\right)^2}$$

$$+\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-2\right)^2}$$

$$-max(n,m)-\sqrt{\left(max(n,m)\ -\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{2}\right]-1\right)^2}+\sqrt{(a-2)^2+\left(-\left[-\frac{a}{2}\right]-2\right)^2}-a-\sqrt{(a-2)^2+1}$$

$$\geq\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}-1\right)^2}+\sqrt{(a-2)^2+\left(\frac{a}{2}-2\right)^2}-a-\sqrt{(a-2)^2+1}$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}-1\right)^2}+\sqrt{(a-2)^2+\left(\frac{a}{2}-2\right)^2}-a-\sqrt{(a-2)^2+1}\right)$$

$$=\frac{2-a}{\sqrt{a^2-4\,a+5}}+\frac{5a-12}{2\sqrt{5a^2-24a+32}}+\frac{5a-2}{2\sqrt{5a^2-4\,a+4}}-1$$

$$=\frac{5a-12-2\sqrt{5a^2-24\,a+32}}{2\sqrt{a(5a-24)+32}}$$

$$+\frac{(5a-2)\sqrt{a^2-4a+5}-2(a-2)\sqrt{5a^2-4a+4}}{2\sqrt{a(a-4)+5}\sqrt{a(5a-4)+4}}$$

若 $5a-12-2\sqrt{5a^2-24a+32}\geq 0$ ， 則 $25a^2-120a+144\geq 20a^2-96a+128\Rightarrow 5a^2-24a+16\geq 0\Rightarrow(5a-4)(a-4)\geq 0\Rightarrow a=a\geq 4\vee 1>\frac{4}{5}\geq a$（不合）。若 $(5a-2)\sqrt{a^2-4a+5}-(a-2)\sqrt{5a^2-4a+4}\geq 0$ ， 則 $\frac{5a-2}{a-2}\geq 2\sqrt{\frac{5a^2-4\,a+4}{a^2-4\,a+5}}\Rightarrow\frac{25a^2-20a+4}{a^2-4a+4}\geq\frac{10a^2-8a+8}{a^2-4\,a+5}\Rightarrow 15a^4-72a^3+129a^2-52a-12\geq 0$。

上 式 中 $\frac{d}{da}(15a^4-72a^3+129a^2-52a-12)=60a^3-216a^2+258a-52$ ， 又 $\frac{d}{da}(60a^3-216a^2+258a-52)=180a^2-432a+258=180\left(a-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{6}{5}$。

當$a>\frac{6}{5}+\frac{1}{5\sqrt{6}}$或$a<\frac{6}{5}-\frac{1}{5\sqrt{6}}$時，$180\left(a-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{6}{5}>0$，故當$a\geq 2$時，$y=60a^3-216a^2+258a-52$的函數圖形切線斜率恆正。

當$a=2$時，$60a^3-216a^2+258a-52=80>0$，且當$a\geq 2$時$y=60a^3-216a^2+258a-52$的函數圖形切線斜率恆正，所以當$a\geq 2$時，$y=60a^3-216a^2+258a-52>0\Rightarrow y=15a^4-72a^3+129a^2-52a-12$的圖形切線斜率恆正。

當$a=2$時，$15a^4-72a^3+129a^2-52a-12=64>0$，且當$a\geq 2$時，$15a^4-72a^3+129a^2-52a-12$的函數圖形切線斜率恆正，所以當$a\geq 2$時，$15a^4-72a^3+129a^2-52a-12>0$。

當$a=5$時$\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}-1\right)^2}+\sqrt{(a-2)^2+\left(\frac{a}{2}-2\right)^2}-a-\sqrt{(a-2)^2+1}\approx 0.09926>0$，且當$a\geq 5$時，$5a-4>5a-24\geq a-4>0$，又$5a-12-2\sqrt{5a^2-24a+32}>0$且$(5a-2)\sqrt{a^2-4a+5}-(a-2)\sqrt{5a^2-4a+4}>0\Rightarrow\frac{2-a}{\sqrt{a^2-4a+5}}+\frac{5a-12}{2\sqrt{5a^2-24a+32}}+\frac{5a-2}{2\sqrt{5a^2-4a+4}}-1>0$，所以當$min(n,m)\geq 5$時，周長最大的格點四邊形必為$D_2$。

接著分別討論$min(n,m)=2$或3或4的情況。

當$min(n,m)=2$時，不失一般性設$m=2$、$n=a(a\in N$且$a\geq 2)$，則

$$D_1(n,m)=a+\sqrt{a^2+4}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}$$

$$D_2(n,m)=\sqrt{a^2+4}+a-\left[\frac{a}{2}\right]-1+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{a+1}$$

$D_2(n,m)-D_1(n,m)$

$$=\sqrt{max(n,m)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-1\right)^2}$$

$$+\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-2\right)^2}$$

$$-max(n,m)-\sqrt{\left(max(n,m)\ -\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{a^2+4}+a-\left[\frac{a}{2}\right]-1+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{a+1}-a-\sqrt{a^2+4}$$

$$-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}$$

$$=-\left[\frac{a}{2}\right]-1+\sqrt{a+1}-\sqrt{\left(a\ -\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}$$

$$\leq-\frac{a+3}{2}+\sqrt{a+1}-\sqrt{\left(\frac{a+3}{2}\right)^2+1}$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(-\frac{a+3}{2}+\sqrt{a+1}-\sqrt{\left(\frac{a+3}{2}\right)^2+1}\right)=\frac{-a-3}{2\sqrt{a^2+6a+13}}+\frac{1}{2\sqrt{a+1}}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-a-3}{2\sqrt{a^2+6a+13}}+\frac{1-\sqrt{a+1}}{2\sqrt{a+1}}$$

若 $1-\sqrt{a+1}\geq 0$ ，則 $a+1\geq 1\Rightarrow a\geq 0$ 。因為當 $a=2$ 時，$-\left[\frac{a}{2}\right]-1+\sqrt{a+1}-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}<0$，且$\frac{-a-3}{2\sqrt{a^2+6a+13}}+\frac{1-\sqrt{a+1}}{2\sqrt{a+1}}<0$，且$1-\sqrt{a+1}<0$。當$a>2$時，$1-\sqrt{a+1}<0\Rightarrow\frac{-a-3}{2\sqrt{a^2+6a+13}}+\frac{1-\sqrt{a+1}}{2\sqrt{a+1}}\Rightarrow-\left[\frac{a}{2}\right]-1+\sqrt{a+1}-\sqrt{\left(a\ -\left[\frac{a}{2}\right]-1\right)^2+1}<0$，所以當$min(n,m)=2$時，周長最大格點四邊形必為$D_1$。

當$min(n,m)=3$時，不失一般性設$m=3$、$n=a(a\in N$且$a\geq 3)$，則

$$D_1(n,m)=a+\sqrt{a^2+9}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+4}$$

$$D_2(n,m)=\sqrt{a^2+9}+\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+4}$$

$$+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-2\right)^2}$$

$D_2(n,m)-D_1(n,m)$

$$=\sqrt{max(n,m)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-1\right)^2}$$

$$+\sqrt{\left(\max(n,m)-\left[\frac{\max(n,m)}{\min(n,m)}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-2\right)^2}$$

$$-max(n,m)-\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{a^2+9}+\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+4}$$

$$+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-2\right)^2}-a-\sqrt{a^2+9}$$

$$-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+1}-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+4}$$

$$=\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-2\right)^2}-a$$

$$-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+1}$$

$$\leq\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{\frac{a}{3}+1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+\left(\frac{a}{\frac{a}{3}+1}-2\right)^2}-a-\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-1\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{a^2+\left(\frac{2a-3}{a+3}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+\left(\frac{a-6}{a+3}\right)^2}-a-\sqrt{\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+1}$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{2a-3}{a+3}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+\left(\frac{a-6}{a+3}\right)^2}-a-\sqrt{\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+1}\right)$$

$$=\frac{81(a-6)+(a+3)^3(4a-6)}{(3a+9)\sqrt{4a^4+12a^3-18a^2-162a+405}}$$

$$+\frac{(a+3)^3a+9\,(2a-3)}{(a+3)\sqrt{a^4+6a^3+13a^2-12a+9}}-\frac{2a-3}{3\sqrt{4a^2-12a+18}}-1$$

若$\frac{81(a-6)+(a+3)^3(4a-6)}{(3a+9)\sqrt{4a^4+12a^3-18a^2-162a+405}}+\frac{(a+3)^3a+9\,(2a-3)}{(a+3)\sqrt{a^4+6a^3+13a^2-12a+9}}-\frac{2a-3}{3\sqrt{4a^2-12a+18}}-1\geq 0$，則$a>1.1>1 \vee -5>-5.82>a$（不合）。因為當$a=5$時，$\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{3}\right]+1}\right]-2\right)^2}-a-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{3}\right]-1\right)^2+1}\approx 0.38517>0$，且$\frac{81(a-6)+(a+3)^3(4a-6)}{(3a+9)\sqrt{4a^4+12a^3-18a^2-162a+405}}+\frac{(a+3)^3a+9\,(2a-3)}{(a+3)\sqrt{a^4+6a^3+13a^2-12a+9}}-\frac{2a-3}{3\sqrt{4a^2-12a+18}}-1\approx 12.03333>0$，且當$a>5$時，$\frac{81(a-6)+(a+3)^3(4a-6)}{(3a+9)\sqrt{4a^4+12a^3-18a^2-162a+405}}+\frac{(a+3)^3a+9\,(2a-3)}{(a+3)\sqrt{a^4+6a^3+13a^2-12a+9}}-\frac{2a-3}{3\sqrt{4a^2-12a+18}}-1>0$，所以當$min(n,m)=3$且$max(n,m)>5$時，周長最大的格點四邊形周長必為$D_2$。

當$min(n,m)=4$時，不失一般性設$m=4$、$n=a(a\in N$且$a\geq 4)$，則

$$D_1(n,m)=a+\sqrt{a^2+16}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+1}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+9}$$

$$D_2(n,m)=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+4}$$

$$+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-2\right)^2}$$

$D_2(n,m)-D_1(n,m)$

$$=\sqrt{max(n,m)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-1\right)^2}$$

$$+\sqrt{\left(max(n,m)-\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{max(n,m)}{\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]+1}\right]-2\right)^2}$$

$$-max(n,m)-\sqrt{\left(max(n,m)\ -\left[\frac{max(n,m)}{min(n,m)}\right]-1\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-2\right)^2}-a$$

$$-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+1}$$

$$\geq\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{\frac{a}{4}+1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2+\left(\frac{a}{\frac{a}{4}+1}-2\right)^2}-a-\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-1\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{a^2+\left(\frac{3a-4}{a+4}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3a-4}{4}\right)^2+\left(\frac{2a-8}{a+4}\right)^2}-a-\sqrt{\left(\frac{3a-4}{4}\right)^2+1}$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{3a-4}{a+4}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3a-4}{4}\right)^2+\left(\frac{2a-8}{a+4}\right)^2}-a-\sqrt{\left(\frac{3a-4}{4}\right)^2+1}\right)$$
$$=\frac{512(a-4)+9a(a+4)^3-12(a+4)^3}{4(a+4)^2\sqrt{9a^4+48a^3+32a^2-768a+1280}}$$
$$+\frac{a(a+4)^3+16(3a-4)}{(a+4)^2\sqrt{a^4+8a^3+25a^2-24a+16}}-\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{9a^2-24a+32}}-1$$

若$\frac{512(a-4)+9a(a+4)^3-12(a+4)^3}{4(a+4)^2\sqrt{9a^4+48a^3+32a^2-768a+1280}}+\frac{a(a+4)^3+16(3a-4)}{(a+4)^2\sqrt{a^4+8a^3+25a^2-24a+16}}-\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{9a^2-24a+32}}-1\geq 0$，則$15>14.27>a>4.38>4 \vee a<-8.27<-8$（不合）。若$a>14.27$，則$\frac{512(a-4)+9a(a+4)^3-12(a+4)^3}{4(a+4)^2\sqrt{9a^4+48a^3+32a^2-768a+1280}}+\frac{a(a+4)^3+16(3a-4)}{(a+4)^2\sqrt{a^4+8a^3+25a^2-24a+16}}-\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{9a^2-24a+32}}-1\approx 0$。又因為當$a=5$時，$\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-2\right)^2}-a-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+1}\approx 0.385>0 \wedge \frac{512(a-4)+9a(a+4)^3-12(a+4)^3}{4(a+4)^2\sqrt{9a^4+48a^3+32a^2-768a+1280}}+\frac{a(a+4)^3+16(3a-4)}{(a+4)^2\sqrt{a^4+8a^3+25a^2-24a+16}}-\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{9a^2-24a+32}}-1\approx 0.077>0$，且當$14.27>a>5$時，$\frac{512(a-4)+9a(a+4)^3-12(a+4)^3}{4(a+4)^2\sqrt{9a^4+48a^3+32a^2-768a+1280}}+\frac{a(a+4)^3+16(3a-4)}{(a+4)^2\sqrt{a^4+8a^3+25a^2-24a+16}}-\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{9a^2-24a+32}}-1>0$，且當$a>14.27$時$\frac{512(a-4)+9a(a+4)^3-12(a+4)^3}{4(a+4)^2\sqrt{9a^4+48a^3+32a^2-768a+1280}}+\frac{a(a+4)^3+16(3a-4)}{(a+4)^2\sqrt{a^4+8a^3+25a^2-24a+16}}-\frac{3(3a-4)}{4\sqrt{9a^2-24a+32}}-1\approx 0\Rightarrow$當$a>5$時$\sqrt{a^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-1\right)^2}+\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+\left(-\left[-\frac{a}{\left[\frac{a}{4}\right]+1}\right]-2\right)^2}-a-\sqrt{\left(a-\left[\frac{a}{4}\right]-1\right)^2+1}>0$，所以當$min(n,m)=4$且$max(n,m)>5$時，周長最大的格點四邊形必為$D_2$。

綜上所述，當$max(n,m)\geq 5$且$min(n,m)\geq 3$，也就是$\left[\frac{2max(n,m)}{max(n,m)+5}\right]\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right]=1$時，周長最大格點四邊形周長為$D_2$。所以有：

$$\boldsymbol{LPM(4,n,m) = \left(2n+2m + \left[\frac{2max(n,m)}{max(n,m)+5}\right]\left(D_1(n,m) + \left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right](D_2(n,m)-D_1(n,m)) - 2n-2m\right)\right) \times JM(n,m)}$$

**3. $\boldsymbol{k=5}$的情況**

周長最長的凸五邊形如圖 18，根據$LPM(4,n,m)$的推導過程可知，凹五邊形的二頂點必與矩形範圍的頂點重合。

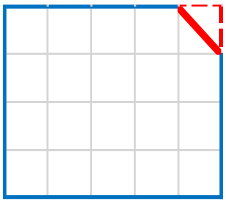

圖 18：周長最長凸五邊形示例（紅色虛線部分必大於實線部分）

由兩種周長最長的凹四邊形推導可知，周長最長的凹五邊形有下列兩種（圖 19）。

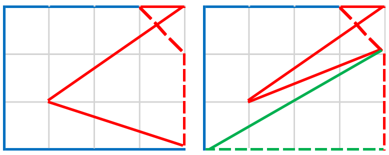

圖 19：周長最長五邊形可能的畫法（同色實線部分必大於虛線部分）

我們將第一種命名為$E_1$，其周長$E_1(n,m)$為：

$$n+m+max(n,m)+\sqrt{(n-1)^2+(m-1)^2}+\sqrt{(max(n,m)-1)^2+1}$$

第二種命名為$E_2$，其周長$E_2(n,m)$為：

$$n+m+\sqrt{(n-1)^2+(m-1)^2}+\sqrt{(max(n,m)-1)^2+(min(n,m)-2)^2} + \sqrt{\left(max(n,m)\right)^2+(min(n,m)-1)^2}$$

由於周長最長的凸五邊形周長為$2n+2m-2+\sqrt{2}$，且兩種凹五邊形周長皆明顯大於最大凹多邊形，因此僅需比較兩種凹多邊形的周長長短。

不失一般性設$n = m = a(a \in N$且$a \geq 2)$，則

$$
\begin{aligned}
&E_2(n,m) - E_1(n,m) \\
&= \sqrt{(max(n,m)-1)^2 + (min(n,m)-2)^2} \\
&+ \sqrt{\left(max(n,m)\right)^2 + (min(n,m)-1)^2} - max(n,m) - \sqrt{(max(n,m)-1)^2 + 1} \\
&= \sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2} + \sqrt{a^2 + (a-1)^2} - a - \sqrt{(a-1)^2 + 1}
\end{aligned}
$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{da}\left(\sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2} + \sqrt{a^2 + (a-1)^2} - a - \sqrt{(a-1)^2 + 1}\right) \\
&= \frac{2a-3}{\sqrt{2a^2 - 6a + 5}} + \frac{2a-1}{\sqrt{2a^2 - a + 1}} - 1 - \frac{a-1}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} \\
&= \frac{2a - 3 - \sqrt{2a^2 - 6a + 5}}{\sqrt{2a^2 - 6a + 5}} + \frac{(2a-1)\sqrt{a^2 - 2a + 2} - (a-1)\sqrt{2a^2 - a + 1}}{\sqrt{2a^2 - a + 1}\sqrt{a^2 - 2a + 2}}
\end{aligned}
$$

若 $2a - 3 - \sqrt{2a^2 - 6a + 5} \geq 0$ ，則 $2a - 3 \geq \sqrt{2a^2 - 6a + 5} \Rightarrow 4a^2 - 12a + 9 \geq 2a^2 - 6a + 5 \Rightarrow 2a^2 - 6a + 4 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 \geq 0 \Rightarrow (a-1)(a-2) \geq 0 \Rightarrow a \geq 2 \vee a \leq 1$ （不合）。若$(2a-1)\sqrt{a^2 - 2a + 2} - (a-1)\sqrt{2a^2 - a + 1} \geq 0$，則$(2a-1)\sqrt{a^2 - 2a + 2} \geq (a-1)\sqrt{2a^2 - a + 1} \Rightarrow (4a^2 - 4a + 1)(a^2 - 2a + 2) \geq (a-1)(2a^2 - a + 1) \Rightarrow 4a^4 - 12a^3 + 17a^2 - 10a + 2 \geq 2a^3 - 3a^2 + 2a - 1 \Rightarrow 4a^4 - 14a^3 + 20a^2 - 12a + 3 \geq 0$。

上式中$\frac{d}{da}(4a^4 - 14a^3 + 20a^2 - 12a + 3) = 16a^3 - 42a^2 + 40a - 12$，

又$\frac{d}{da}(16a^3 - 42a^2 + 40a - 12) = 48a^2 - 84a + 40 = 48\left(a - \frac{7}{8}\right)^2 + \frac{13}{4}$。

因為當$a > 1$時，$48\left(a - \frac{7}{8}\right)^2 + \frac{13}{4} > 4 > 0$，所以當$a \geq 2$時，$y = 16a^3 - 42a^2 + 40a - 12$的圖形切線斜率恆正。

因為當$a = 2$時，$16a^3 - 42a^2 + 40a - 12 = 28 > 0$且當$a \geq 2$時$y = 16a^3 - 42a^2 + 40a - 12$的圖形切線斜率恆正，所以當$a \geq 2$時，$y = 16a^3 - 42a^2 + 40a - 12 > 0 \Rightarrow 4a^4 - 14a^3 + 20a^2 - 12a + 3$的圖形切線斜率恆正。

因為當$a=2$時$4a^4-14a^3+20a^2-12a+3=11>0$，且當$a\geq 2$時，$y=4a^4-14a^3+20a^2-12a+3$的圖形切線斜率恆正，所以當$a\geq 2$時，$4a^4-14a^3+20a^2-12a+3>0$。

因為當$a=3$時，$\sqrt{(a-1)^2+(a-2)^2}+\sqrt{a^2+(a-1)^2}-a-\sqrt{(a-1)^2+1}$，且當$a\geq 3$時$2a-3-\sqrt{2a^2-6a+5}\geq 0$ 且 $(2a-1)\sqrt{a^2-2a+2}-(a-1)\sqrt{2a^2-a+1}\geq 0\Rightarrow \frac{2a-3}{\sqrt{2a^2-6a+5}}+\frac{2a-1}{\sqrt{2a^2-a+1}}-1-\frac{a-1}{\sqrt{a^2-2a+2}}>0$，所以當$a\geq 3$，也就是$\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right]=1$時，周長最大的五邊形必為$E_2$。

接著討論$min(n,m)=2$的情況。

當$min(n,m)=2$時，不失一般性設$m=2$、$n=a(a\in N$且$a\geq 2)$，則

$$
\begin{aligned}
&E_2(n,m)-E_1(n,m)\\
&=\sqrt{(max(n,m)-1)^2+(min(n,m)-2)^2}\\
&+\sqrt{(max(n,m))^2+(min(n,m)-1)^2}-max(n,m)-\sqrt{(max(n,m)-1)^2+1}\\
&=a-1+\sqrt{a^2+1}-a-\sqrt{(a-1)^2+1}\\
&=\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-2a+2}-1
\end{aligned}
$$

將其對$a$取導數微分後可得

$$\frac{d}{da}\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-2a+2}-1\right)=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{a-1}{\sqrt{a^2-2a+2}}$$

因為$\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{a-1}{\sqrt{a^2-2a+2}}=0$，且當$a=2$時，$\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-2a+2}-1=\sqrt{5}-\sqrt{2}-1\approx -0.178<0$，所以當$min(n,m)=2$，也就是$\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+2}\right]=1$時，周長最大的五邊形必為$E_1$。綜上可得：

$$\boldsymbol{LPM(5,n,m)=\left(\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+2}\right]E_1(n,m)+\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right]\left(E_2(n,m)-E_1(n,m)\right)\right)\times JM(k,n,m)}$$

由於上述討論方法太過複雜，六邊形以上以周長極值在此暫不討論，留待未來研究其簡化方式。

### （二）極小值

通過觀察可發現，周長最小的多邊形之間有特定規律（圖 20），$l(1,\sqrt{2})$的數目每四個多邊形一循環，循環節為$3 \to 2 \to 1 \to 0$，在八邊形特例之前的7項均符合規律（圖 21），$l(1,\sqrt{2})$的數量為$4+4\left\lceil\frac{k-1}{4}\right\rceil-k$，除了八邊形為特例，因為若依照規律，最小周長的八邊形只能畫成複雜多邊形[6]（圖 22），而$l(0,1)$的數量為$k-l(1,\sqrt{2})$的數量，由此可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{SPM(k)} &= \boldsymbol{k-\left(4+4\left\lceil\frac{k-1}{4}\right\rceil-k\right)+\left(4+4\left\lceil\frac{k-1}{4}\right\rceil-k\right)\sqrt{2}+\left\lfloor\frac{2k}{k+8}\right\rfloor\left\lfloor\frac{16}{k+8}\right\rfloor(2\sqrt{2}-2)} \\ &= \boldsymbol{2k-4-4\left\lceil\frac{k-1}{4}\right\rceil+\left(4+4\left\lceil\frac{k-1}{4}\right\rceil-k\right)\sqrt{2}+\left\lfloor\frac{2k}{k+8}\right\rfloor\left\lfloor\frac{16}{k+8}\right\rfloor(2\sqrt{2}-2)} \end{aligned}$$

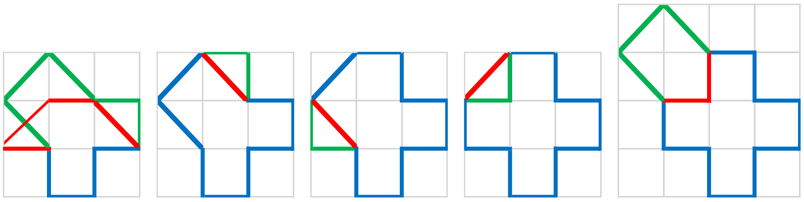

圖 20：最小周長格點9至13邊形示意圖（紅線為前圖刪除部分、綠線為新增部分）

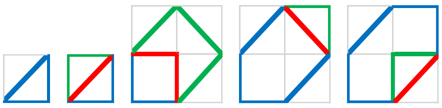

圖 21：最小周長格點3至7邊形示意圖（紅線為前圖刪除部分、綠線為新增部分）

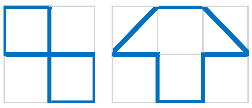

圖 22：最小周長格點8邊形示意圖（左為複雜多邊形、右為簡單多邊形）

## 五、坐標平面上特定矩形範圍內的格點多邊形之個數極值

### （一）極大值

這裡我們採用反面扣除法來計算。在$(n,m)$範圍中，任取三點方法數為$C_3^{(n+1)(m+1)}$，鉛直方向三點共線取法數為$C_1^{(n+1)}C_3^{(m+1)}=(n+1)C_3^{(m+1)}$，水平方向三點共線取法數為$C_1^{(m+1)}C_3^{(n+1)}=(m+1)C_3^{(n+1)}$，斜向三點共線取法數為任意線段上扣除端點後的格點總數$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_1^{gcd(i,j)-1}C_1^{(n+1-i)}C_1^{(m+1-j)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(gcd(n,m)-1)(n+1-i)(m+1-j)$，因

此可得：

$$\boldsymbol{LAM(3,n,m)=C_3^{(n+1)(m+1)}-(n+1)C_3^{(m+1)}-(m+1)C_3^{(n+1)}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(gcd(n,m)-1)(n+1-i)(m+1-j)}$$

四邊形以上的圖形，目前仍在尋找方法中。

**（二）極小值**

若$SAM(k,n,m)\neq 0$，則當$JM(k,n,m)=0$時，$SAM(k,n,m)$無解。若$SAM(k,n,m)=0$，則$SAM(k,n,m)$恆等於0，與範圍不相關，因此無討論必要。即：

$$\boldsymbol{SAM(k,n,m)=0}$$

# 伍、結論

經過長期研究後，我們成功使用數學化的方式推導出了$(n,m)$範圍內的格點多邊形邊數極值通解、有足夠格點連成格點$k$邊形的$(n,m)$條件判斷式、$(n,m)$範圍內格點$k$邊形的面積極值通解，以及$(n,m)$範圍內格點$k$邊形的周長極小值通解，整理羅列如下。

一、$(n,m)$範圍內的格點多邊形之邊數極值通解

（一）極大值

| 條件 | 通解 |
|---|---|
| $min(n,m)=1$ | $LED(1,p)=LED(p,1)=4$ |
| $min(n,m)=2$ | $LED(2,p)=LED(p,2)=3(p+1)-2$ |
| $min(n,m)=3$ | $LED(3,p)=LED(p,3)=4(p+1)$ |
| $min(n,m)\geq 4$ | $LED(n,m)=4+\left[\frac{2\,min(n,m)}{min(n,m)+2}\right]\left((n+1)(m+1)-4-2\left[\frac{4}{min(n,m)+2}\right]-\left[\frac{8}{min(n,m)+4}\right]\left[\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+4}\right]\right)$ |

（二）極小值

$$SED(n,m)=3$$

二、$(n,m)$範圍內有足夠格點連成格點多邊形的條件式

$$JM(k,n,m)=\left\lfloor\frac{2k}{LED(n,m)+k}\right\rfloor$$

三、$(n,m)$範圍內的格點多邊形之面積極值通解

（一）極大值

$$LAR(k,n,m)=\left(nm-\frac{k-4}{2}-\left(\frac{nm-k+4}{2}\right)\left\lfloor\frac{6}{k+3}\right\rfloor\right)\times JM(k,n,m)$$

（二）極小值

$$SAR(k,n,m)=\frac{k-2}{2}$$

四、$(n,m)$範圍內的格點多邊形之周長極值通解

（一）極大值

| 邊數 | 通解 |
|---|---|
| $k=3$ | $LPM(3,n,m)=\left(n+m+\sqrt{n^2+m^2}\right)\times JM(k,n,m)$ |
| $k=4$ | $LPM(4,n,m)=\left(2n+2m+\left\lfloor\frac{2max(n,m)}{max(n,m)+5}\right\rfloor\left(D_1(n,m)+\left\lfloor\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right\rfloor D_2(n,m)-2n-2m\right)\right)\times JM(n,m)$ |
| $k=5$ | $LPM(5,n,m)=\left(\left\lfloor\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+2}\right\rfloor E_1(n,m)+\left\lfloor\frac{2min(n,m)}{min(n,m)+3}\right\rfloor E_2(n,m)\right)\times JM(n,m)$ |

（二）極小值

$$SPM(k)=2k-4-4\left\lfloor\frac{k-1}{4}\right\rfloor+\left(4+4\left\lfloor\frac{k-1}{4}\right\rfloor-k\right)\sqrt{2}+\left\lfloor\frac{2k}{k+8}\right\rfloor\left\lfloor\frac{16}{k+8}\right\rfloor\left(2\sqrt{2}-2\right)$$

五、$(n,m)$範圍內的格點多邊形之個數極值通解

（一）極大值

| 邊數 | 通解 |
| --- | --- |
| $k=3$ | $LAM(3,n,m)=C_3^{(n+1)(m+1)}-(n+1)C_3^{(m+1)}-(m+1)C_3^{(n+1)} -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(gcd(n,m)-1)(n+1-i)(m+1-j)$ |

（二）極小值

$$SAM(k,n,m)=0$$

上述研究結果有助於應用在生活中，當我們必須在有限空間內規劃最大路徑長，例如在遊樂園中，若要設計二維平面的迷宮、以及三維立體空間中的雲霄飛車軌道時，便可用「迂迴作圖法」進行作圖設計，並套用本研究的通解推得路徑總長或轉折數，以求節省佔地面積，達到較經濟的效果。

# 陸、討論與未來研究方向

目前尚沒辦法以一個通解精確算出$(n,m)$範圍內格點$k$邊形的周長極大值，因為除了$min(n,m)=4$、5的周長最長凹多邊形僅需討論兩種情況，其他更多邊數的情況會更複雜，目前正在嘗試。至於$(n,m)$範圍內格點$k$邊形的個數通解，由於當任取四點以上時，相同的數個點又可能組成一個凸多邊形，或$k-1$個凹多邊形，而從所有多邊形中計算出凹多邊形數量的方法目前還在尋找中，故目前尚無很好的結果。

若是之後能將上述兩項通解導出，則本研究預計將可推廣為凹、凸多邊形個別的通解，以及斜角坐標系、三角坐標系、立體坐標系等。以下羅列本研究目前仍在進行或未來研究的目標：

一、找出$(n,m)$範圍內格點$k$邊形的周長極大值通解。

二、找出$(n,m)$範圍內格點$k$邊形的個數通解。

三、找出坐標平面上複雜格點多邊形的性質。

四、找出三角坐標系中格點多邊形的性質。

五、找出立體直角坐標系中格點多邊形的性質。

# 柒、參考文獻


1. 蔡郁茹、鄧欽祥（2004）。中小學科學展覽會作品：正方形的捉迷藏。2021 年 8 月 7 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/c08/080406.pdf。
2. 健賓、林祈詮、鍾昕陽、白竟言、葉心慈：方之律動--方格板上的「斜」正方形。2021 年 8 月 7 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/elementary/080401.pdf。
3. 陳昱廷、陳靖、劉子瑋（2015）。中小學科學展覽會作品：$n \times n$方格中的正方形。2021 年 8 月 7 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/55/pdf/030403.pdf。
4. 廖宥翔、林艾彤、田宜禾、蔡敦尹（2019）。中小學科學展覽會作品：翻滾吧！正方形—探討正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。2021 年 8 月 10 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/59/pdf/NPHSF2019-080403.pdf。
5. Dragan M. Acketa, Jovisa D. Zunic (1995)。語意學者論文作品：On the Maximal Number of Edges of Convex Digital Polygons Included into an m×m-Grid。2021 年 8 月 31 日取自 https://reurl.cc/8227OX。
6. 維基百科（2021）。多邊形。2021 年 9 月 20 日取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E8%BE%B9%E5%BD%A2#%E7%B0%A1%E5%96%AE%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2。
7. 蔡聰明（2000）。**數學的發現趣談**。臺北市：三民出版社。
8. 維基百科（2021）。曼哈頓距離。2021 年 9 月 4 日取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%BC%E5%93%88%E9%A0%93%E8%B7%9D%E9%9B%A2。
9. 胡不歸數學課堂（2018 年 11 月 4 日）。如何證明：「等底等高的三角形中，等腰三角形的周長最短」。每日頭條。2021 年 9 月 5 日取自 https://kknews.cc/news/lqrlnmb.html。

## 【評語】010003

本作品研究平面上格點多邊形邊數、面積極值、周長極小值的通解，並找出了部分多邊形的周長極大值與個數。作者對這個問題做出不少好的觀察，也得到許多非０即１的公式，並以多層次高斯符號來表示，顯示出數學掌握能力不錯。然而，作者對於極值公式的導證，並無法提出一個有力的嚴格證明。至於透過微積分去尋求極值，並非萬無一失的做法，特別是高斯符號不是一個可微函數。這個問題最近文獻上有一些新的進展，建議作者可以多多搜尋閱讀，擷取一些新的想法和技巧，可使數學實力與成熟度提升。