2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010051

參展科別　數學

作品名稱　「馬道」成功

得獎獎項　大會獎 三等獎

就讀學校　國立彰化女子高級中學

指導教師　游竣博

作者姓名　徐翊芹、李采軒、魏郡儀

關鍵詞　馬步、最少步數

作者簡介

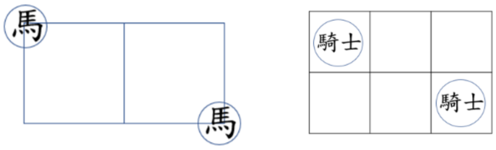
我是徐翊芹(右)，就讀彰化女中三年級。對於數學於生活中的應用有興趣，平時會自己演算許多不同數學題，培養自己對數字的敏銳度。也對於資訊科技領域感興趣，希望往後能在其領域發揮長才。高一時參加棋藝社認識志同道合的朋友，一起研究數學並參加科展，是一個很難忘的經驗，透過此次研究不僅增進我們之間的感情，也對數學更有興趣。

我是魏郡儀(中)，就讀彰化女中三年級。原本對於數學其實沒有很深的熱忱，一次在棋藝社社課下棋時與朋友討論象棋走法，開始了對數學與棋子走法的研究，並對此做深入的探討，在思考當中激發出了不少的想法，從中學到了許多知識和樂趣，也成了我在數學這條路上的動力。

我是李采軒(左)，就讀彰化女中三年級。一直以來，數學一科對我來說是一個很難克服的關卡，面對有關數學的領域常常是避之不及。很感謝此次機會，讓我在與夥伴們交流中，獲得對數學更進一步的認識，不再害怕面對數學的問題，懂得自己思辨並解開問題，也在過程中與朋友們培養好默契。

摘要

象棋的馬與西洋棋的騎士走法有異曲同工之妙且棋子的走法似乎有些特殊的規律，兩者的走法我們稱為同構，因此我們針對這個現象進行研究。



(圖一) 馬步與騎士

我們得到下面四個結論：

一、定理甲：動點P可經由馬步從原點(0,0)走到棋盤上的任意格子點。

二、定理乙：平面棋盤的馬步路徑皆可找到起點、終點在同一象限(含軸)，且步數相同的路徑。

三、定理丙：每一個最少步數$K \geq 5$，K所對應的總格子數$f(K)$，數列$< f(K) >$為公差7的等差數列。

四、定理丁：給定第一象限(含軸)任意點$P(X,Y)$，可求得最少步數K。

Abstract

Horse of chinese chess and Knight of chess are similar, and there seem to be some special rules behind it. What is mentioned above has the same structure, so we conduct research on this phenomenon. We get four conclusions from the research:

Theorem One: Moving point can reach any lattice point on the chessboard from the original of coordinates through Horse.

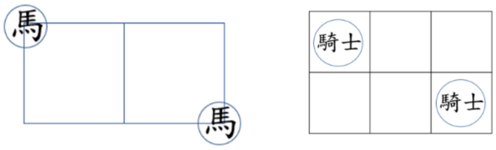
Theorem Two: All of Horse's routes on the chessboard can find the corresponding route that starting and ending point in the same quadrant (including axis) and have the same step.

Theorem Three: Each minimum steps $K \geq 5$, K corresponds to total lattice quantity $f(K)$, sequence $< f(K) >$ is an arithmetic sequence whose common difference is 7.

Theorem Four: Suppose any point $P(X,Y)$ in the first quadrant (including axis). We can find the minimum steps K.

壹、前言

我們參加了學校的棋藝社，某次老師講解棋子的走法時，發現象棋的馬與西洋棋的騎士走法有異曲同工之妙，如(圖二)，並發現棋子的走法似乎有些特殊的規律，兩者的走法我們稱為同構。為了書寫作業方便，我們採用騎士的走法來完成我們的研究之旅。



(圖二) 馬步與騎士

一、研究目的

(一) 探討馬步以原點為起點可否到達平面棋盤上的任意格子點。

(二) 探討任意馬步路徑可否在第一象限(含軸)內找到等長的對應路徑。

(三) 探討每一個最少步數K所對應的總格子數$f(K)$，數列$< f(K) >$是否有規律性。

(四) 探討由原點到任意點的最少步數。

貳、研究方法或過程

一、研究設備與器材

(一) 電腦(包括輔助程式)

(二) 紙、筆

二、研究過程

1. 定義$P(X,Y)=K$，表示以原點$O(0,0)$為起點，到達終點為$P(X,Y)$時，所需馬步之最少步數為K。

2. 推導出各K值並列成圖表。在原點可以一步到達的格子填入1，接著再從填入1的格子，尋找可以到達的格子填入2，以同樣方法填入3、4、5、⋯，如(圖三)(如遇到已填過的格子則不可再填，因為後填的數字必定比原先的數字大，這樣就不符合馬步之最少步數。)

	H		A	
G				B
		O		
F				C
	E		D	

騎士走法：由起點$O(0,0)$出發，有八種走法如下：$A(1,2)$、$B(2,1)$、$C(2,-1)$、$D(1,-2)$、$E(-1,-2)$、$F(-2,-1)$、$G(-2,1)$、$H(-1,-2)$。
(本文探討的所有點均為格子點)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8
10	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9
11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10
12	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9
13	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10
14	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11
15	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10

(圖三) 15×15中馬步之最少步數

3. 觀看圖形，發現它是有規律的。但我們發現幾個例外的座標點，如(圖四)：(若可跨象限則$P(1,1) = 2$，其餘不受影響，故本文不論及此區域規律)

	0	1	2
0	0	3	2
1	3	4	1
2	2	1	4

(圖四) 例外的座標點

參、研究結果與討論

(一)座標軸公式

以(0,0)為起點，橫軸為X軸，縱軸為Y軸。因X軸和Y軸數字相同，以下以X軸來討論。

觀察X軸如(圖五)所示。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9

(圖五) X軸上馬步之最少步數的情況

當K(馬步之最少步數)為偶數時則其座標為偶數，當K為奇數時則其座標為奇數。每個數字依序都會出現兩次，在(1,0)的3不算。我們定義給定K值時X軸上出現的點座標依序為$A(S_1,0)$、$B(S_2,0)$。

當K為偶數其兩點座標為$A(2K-2,0)$、$B(2K,0)$，其中

$$S_1=2K-2, S_2=2K$$

$$[S-(2K-2)][S-2K]=0$$

$$(S-2K+2)(S-2K)=0$$

得方程式：

$$S^2-(4K-2)S+4K^2-4K=0 \text{------------------------------} \quad (1)$$

當K為奇數其兩點座標為$A(2K-3,0)$、$B(2K-1,0)$

$$S_1=2K-3, S_2=2K-1$$

$$[S-(2K-3)][S-(2K-1)]=0$$

$$(S-2K+3)(S-2K+1)=0$$

得方程式：

$$S^2-4(K-1)S+4K^2-8K+3=0 \text{-----------------------------} \quad (2)$$

當K為偶數帶入(1)：$S^2-(4K-2)S+4K^2-4K=0$解S

當K為奇數帶入(2)：$S^2-4(K-1)S+4K^2-8K+3=0$解S

我們稱(1)(2)式為坐標軸公式

(二)馬步以原點為起點可否到達平面棋盤上的任意格子點

1. 定理甲：給定xy-平面棋盤，無範圍限制，以原點(0,0)為起始點。動點P每次移動向量(a,b)，則動點P可到達棋盤上的任意格子點的充要條件為：$\gcd(a,b)=1$且a、b為一奇一偶。

證明過程如下：

移動向量(a,b)包括$(\pm a,\pm b)$、$(\pm b,\pm a)$共8種移動方向

設移動　$(a,b){:}\,m_1$次，$(a,-b){:}\,m_2$次，$(b,a){:}\,m_3$次，$(b,-a){:}\,m_4$次

$(-a,-b){:}\,m_5$次，$(-a,b){:}\,m_6$次，$(-b,-a){:}\,m_7$次，$(-b,a){:}\,m_8$次

設經過總次數i次時到達座標為$P(X_i,Y_i)$

$$\begin{aligned}P(X_i,Y_i)&=m_1(a,b)+m_2(a,-b)+m_3(b,a)+m_4(b,-a)\\&\quad+m_5(-a,-b)+m_6(-a,b)+m_7(-b,-a)+m_8(-b,a)\\&=((m_1-m_5+m_2-m_6)a+(m_3-m_7+m_4-m_8)b\\&\quad,(m_3-m_7-m_4+m_8)a+(m_1-m_5-m_2+m_6)b)\end{aligned}$$

令$m_1-m_5=n_1$，$m_2-m_6=n_2$，$m_3-m_7=n_3$，$m_4-m_8=n_4$

$$P(X_i,Y_i)=\big((n_1+n_2)a+(n_3+n_4)b,(n_3-n_4)a+(n_1-n_2)b\big)$$

$$X_i=(n_1+n_2)a+(n_3+n_4)b$$

$$Y_i=(n_1-n_2)b+(n_3-n_4)a$$

推論 1：若要到達棋盤上任意格子點，則$\gcd(a,b)=1$

說明：

假設$\gcd(a,b)=l>1$，$l|a$且$l|b$，則$l|(n_1+n_2)a+(n_3+n_4)b$。

因此，$l|X_i$，同理$l|Y_i$。

若要到達棋盤上任意格子點，如$P(X_i,Y_i)=(l-1,l)$，

此時$l|l-1$且$l|l$，則$l|-1$，所以$l=1$，產生矛盾，即$\gcd(a,b)=1$

推論 2：若要到達棋盤上任意格子點則：a、b必為一奇一偶

說明：

首先考慮座標和$X_i+Y_i=[(n_1+n_2)+(n_3-n_4)]a+[(n_1-n_2)+(n_3+n_4)]b$

令$n_1+n_3=\alpha$，$n_2-n_4=\beta$

$$X_i+Y_i=(\alpha+\beta)a+(\alpha-\beta)b=(a+b)\alpha+(a-b)\beta$$

若a、b同奇(或同偶)則$a+b$，$a-b$都是偶數，因此座標和X_i+Y_i恆為偶數，

到不了座標和為奇數的點，例如點(1,2)，故a、b為一奇一偶。

由推論 1、推論 2 得知要到達棋盤上任意格子點，則$\gcd(a,b)=1$且a、b為一奇一偶

引理 1：若$\gcd(a,b)=d$則存在m、n為整數，使得$ma+nb=d$

不失一般性，假設$|a|\geq|b|>0$

$$a=bq_1+r_1\text{，}|b|>r_1>0$$

$$b=r_1q_2+r_2\text{，}r_1>r_2>0$$

$$r_1=r_2q_3+r_3\text{，}r_2>r_3>0$$

$$\vdots$$

因為$|b|>r_1>r_2>\cdots\geq0$

存在N_0為正整數，使得$r_{N_0+1}=0$

$$r_{N_0-2}=r_{N_0-1}q_{N_0}+r_{N_0}\text{，}r_{N_0-2}>r_{N_0-1}>0$$

$$\begin{aligned}r_{N_0-1}&=r_{N_0}q_{N_0+1}+r_{N_0+1}\\&=r_{N_0}q_{N_0+1}+0\end{aligned}$$

由輾轉相除法原理

$$\begin{aligned}\gcd(a,b)&=\gcd(b,r_1)\\&=\gcd(r_1,r_2)\\&=\cdots\\&=\gcd\left(r_{N_0-1},r_{N_0}\right)\end{aligned}$$

$$= \gcd(r_{N_0}, r_{N_0+1})$$

$$= r_{\mathrm{N}_0} = \mathrm{d}$$

依序代入

$$r_1 = a - bq_1 = a - q_1 b$$

$$r_2 = b - r_1 q_2 = b - (a - bq_1)q_2 = -1a + (1 + q_1 q_2)b$$

$$r_3 = r_1 - r_2 q_3 = (a - bq_1) - (-1a + (1 + q_1 q_2)b)q_3$$

$$= (1 + q_3)a - (q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3)b$$

$$\vdots$$

必得$r_{\mathrm{N}_0} = \mathrm{d} = r_{N_0-2} - r_{N_0-1}q_{N_0} = \cdots = ma + nb$之形式，其中$m$、$n$為整數

推論 3：若$\gcd(a, b) = 1$且a、b為一奇一偶，則動點P可到達棋盤上的任一點

證明：

若動點P可移動到$(1,0)$或$(0,1)$，則可到達任意點。

以下證明動點P可移動到$(1,0)$，

由引理 1，$\gcd(a, b) = 1$得到存在m、n為整數，使$ma + nb = 1$。

不失一般性假設a為奇，b為偶，則m為奇，n取偶

令$m_1 = \frac{m-a}{2}$，$m_2 = \frac{m+a}{2}$，$m_3 = \frac{n+b}{2}$，$m_4 = \frac{n-b}{2}$，$m_5 = 0$，$m_6 = 0$，$m_7 = 0$，$m_8 = 0$

(若$m_1 = \frac{m-a}{2} < 0$，則$m_1(a, b)$視為$-m_1(-a, -b)$，其餘同理)

$$(X_i, Y_i) = m_1(a, b) + m_2(a, -b) + m_3(b, a) + m_4(b, -a)$$

$$+ m_5(-a, -b) + m_6(-a, b) + m_7(-b, -a) + m_8(-b, a)$$

$$= \frac{m-a}{2}(a, b) + \frac{m+a}{2}(a, -b) + \frac{n+b}{2}(b, a) + \frac{n-b}{2}(b, -a)$$

$$= (ma + nb, -ab + ab) = (1,0)$$

故動點P可到達棋盤上的任一點

推論 4：馬步走法為$(a, b) = (\pm 1, \pm 2)$或$(\pm 2, \pm 1)$，由推論 3 知動點P可經由馬步從原點$(0,0)$走到棋盤上的任一格子點。

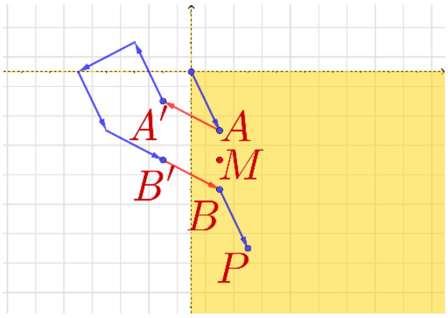
(三)任意馬步路徑可否在第一象限(含軸)內找到等長的對應路徑

1. 定理乙：平面棋盤的任意馬步路徑皆可找到起點、終點在同一象限(含軸)，且步數相同的路徑。設平面棋盤上O為原點，P為終點且在第一象限(含軸)，則平面棋盤上最少步數為K且由O到P的任意路徑，在第一象限(含軸)內必可找到由O到P相對應的路徑且最少步數仍為K。

說明：

步驟一

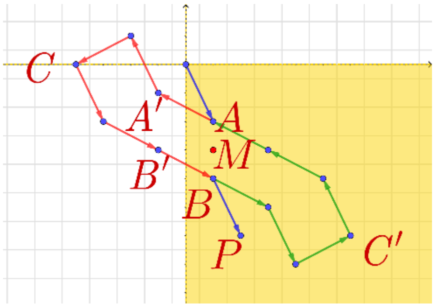
如(圖六)所示，由原點出發的一個路徑若跨象限到達終點P，則路徑中每次超出終點P所在象限，必有一個剛出第一象限(含軸)的線段$\overrightarrow{AA'}$，一個剛入第一象限(含軸)的線段$\overrightarrow{B'B}$。



(圖六) 原馬步路徑

步驟二

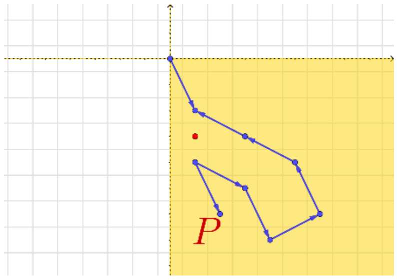
如(圖七)所示，出線段起點A，入線段終點B以$\overline{AB}$中點M為對稱中心將該超出第一象限(含軸)路徑(紅色段)利用點對稱到P所在象限，如(圖七)所示C對M對稱到C'，A對稱到B，B對稱到A，如此重複做對稱點，整個紅色段將對稱到綠色段(其中格子點對M的對稱點必為格子點)，以此路徑取代原路徑。



(圖七) 原馬步路徑映射至第一象限(含軸)

步驟三

若仍超出則反覆進行(回到步驟一)，過程中不在P所在象限的線段將持續減少，直到得到相同路徑長且由原點出發到終點P皆在同一個象限之馬步路徑。如(圖八)。



(圖八) 原馬步路徑映射至第一象限(含軸)

推論 1：相鄰格子點必經奇數個馬步步數到達

證明：

假設相鄰格子點可偶數馬步步數到達，不失一般性可考慮

$$(1,0) = m_1(1,2) + m_2(1,-2) + m_3(2,1) + m_4(2,-1)$$
$$+m_5(-1,-2) + m_6(-1,2) + m_7(-2,-1) + m_8(-2,1)$$
$$= (m_1 + m_2 + 2m_3 + 2m_4 - m_5 - m_6 - 2m_7 - 2m_8$$
$$,2m_1 - 2m_2 + m_3 - m_4 - 2m_5 + 2m_6 - m_7 + m_8)$$

假設其中$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8$為偶數，

由此$(m_1 + m_2 + m_5 + m_6)$、$(m_3 + m_4 + m_7 + m_8)$同奇同偶

(1) 若$m_1 + m_2 + m_5 + m_6$為偶數，則$m_1 + m_2$、$m_5 + m_6$同奇同偶，

X分量為$(m_1 + m_2) \times 1 + (m_5 + m_6) \times (-1) + 2(m_3 + m_4 - m_7 - m_8)$

必為偶數，但X分量為1，矛盾

(2) 若$m_1 + m_2 + m_5 + m_6$為奇數，則$m_3 + m_4 + m_7 + m_8$為奇數，

即m_3+m_8、m_4+m_7一奇一偶，

Y分量為$(m_3+m_8)\times 1+(m_4+m_7)\times(-1)+2(m_1+m_6-m_2-m_5)$必為奇數，但已知$Y$分量為0，矛盾，故推論 1：相鄰格子點必經奇數個馬步步數到達必成立。

推論 2：座標和W與最小步數K同奇同偶

$P(X,Y)=K$、$W=X+Y$，座標和W與最少步數K必同奇同偶。如(圖九)。

證明：

若$P(X,Y)=K$，由推論 1：相鄰格子點必經奇數個馬步步數到達

故$P(X+1,Y)=K'=K+$奇數。$\because P(0,0)=0$，$W=0+0$與$K=0$同偶

若$W=X+Y$與K同偶，則$W'=(X+1)+Y$與K'則同奇

若$W=X+Y$與K同奇，則$W'=(X+1)+Y$與K'則同偶

座標(0,0)時W與K同偶，到(1,0)時W與K同奇，到(2,0)時W與K同偶，…

由數學歸納法知道任意點P時座標和W與最少步數K必同奇同偶

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

	0	1	2	3
0	偶	奇	偶	奇
1	奇	偶	奇	偶
2	偶	奇	偶	奇
3	奇	偶	奇	偶

(圖九) 最少步數K與座標和W同奇同偶

※由定理乙往後內容皆針對第一象限(含軸)做討論

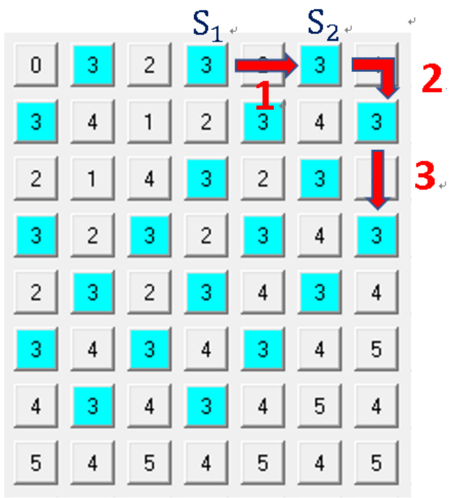
(四)每一個最少步數K所對應的總格子數，數列$<f(K)>$是否有規律性

1. 最少步數K所對應的間隔數P之求法

(1)當$K=3$時，由S_1沿著淺藍的格子走會經過3個3，恰可到最底端的3。如(圖十)。

若由S_1經過S_2往下走也會經過3個3到最底端的3。如(圖十一)。

(圖十)

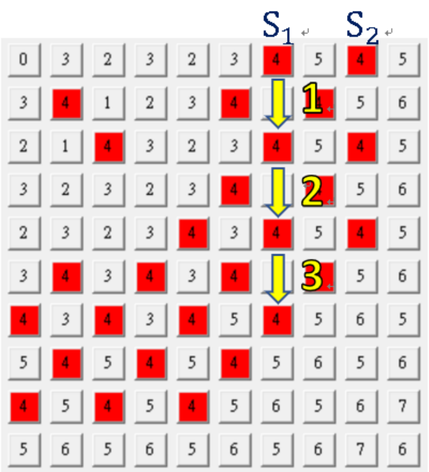


(圖十一)

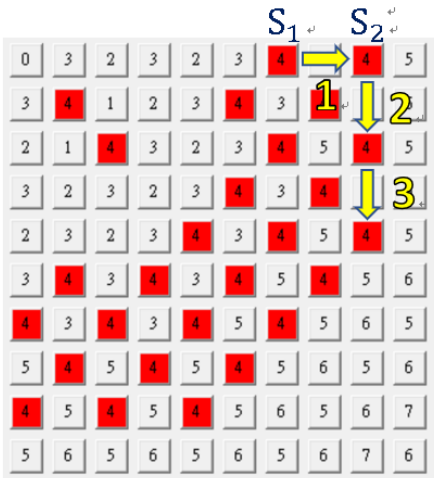
定義P為間隔數：最少步數$K = 3$所對應的間隔數$P = 3$

(2)當$K = 4$時，由S_1沿著紅色的格子走會經過3個4。恰可到最底端的4。如(圖十二)。

若由S_1經過S_2往下走也會過3個4到最底端的4。如(圖十三)。



(圖十二)



(圖十三)

最少步數$K = 4$所對應的間隔數$P = 3$

當$K = 3$時它的$P = 3$，當$K = 4$時它的$P = 3$，同理當$K = 5$時$P = 4$。

把K分為奇數和偶數，發現K為奇數或K為偶數，得P都成等差數列，且公差為1。

我們把它寫成間隔數P的公式：

$$K\text{為奇數}：P = (K + 1) \div 2 + 1$$

$$K\text{為偶數}：P = K \div 2 + 1$$

2. 最少步數K的內界限與外界限

當K為奇數時，例$K = 5$時，$S_1 = 7$、$S_2 = 9$、$P = 4$：

(1) 其外界限為$X < S_2 + 2 = 2K + 1$，同理$Y < S_2 + 2 = 2K + 1$，$X + Y < 3K + 1$

外界限：

$$\begin{cases} X < 2 \times 5 + 1 = 11 \\ Y < 2 \times 5 + 1 = 11 \\ X + Y < 3 \times 5 + 1 = 16 \end{cases}$$

，滿足$\begin{cases} X < 2K + 1 \\ Y < 2K + 1 \\ X + Y < 3K + 1 \end{cases}$之區域設為$A$，此不等式稱為外界限公式

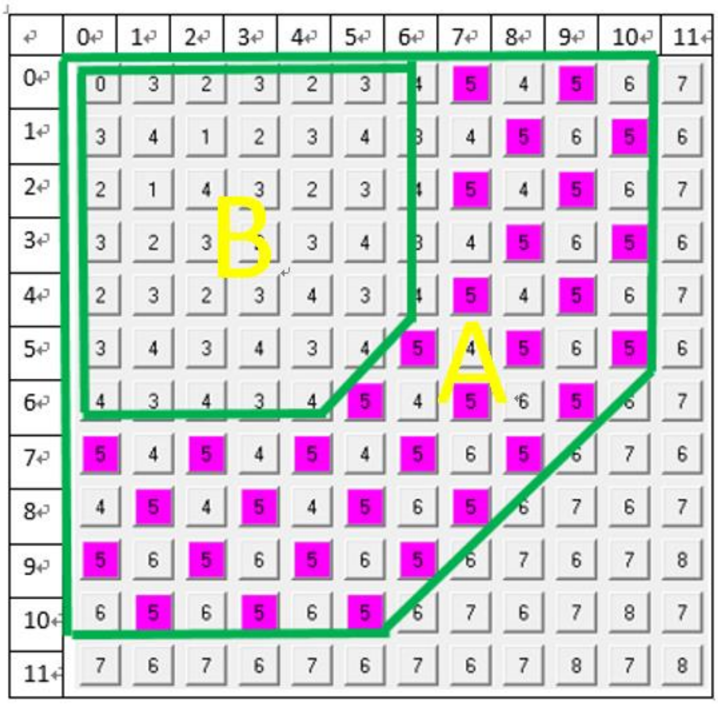
(2) 其內界限為$X < S_1$，同理$Y < S_1$，$X + Y < S_1 + 2P - 4$

內界限：

$$\begin{cases} X < 7 \\ Y < 7 \\ X + Y < 7 + 2 \times 4 - 4 = 11 \end{cases}$$

，滿足$\begin{cases} X < S_1 \\ Y < S_1 \\ X + Y < S_1 + 2P - 4 \end{cases}$之區域設為$B$，此不等式稱為內界限公式

最少步數$K = 5$必在$A - B$區內，如(圖十四)



(圖十四) $K=5$的外界限A與內界限B

當K為偶數時，例$K=4$時，$S_1=6$、$S_2=8$、$P=3$：

(1) 其外界限為$X<S_2+1=2K+1$，同理$Y<S_2+1=2K+1$，$X+Y<3K+1$

外界限：

$$\begin{cases} X<S_2+1=8+1=9 \\ Y<S_2+1=8+1=9 \\ X+Y<3K+1=3\times 4+1=13 \end{cases}$$

，滿足$\begin{cases} X<2K+1 \\ Y<2K+1 \\ X+Y<3K+1 \end{cases}$之區域設為$A$，此不等式稱為外界限公式

(2) 其內界限為$X<S_1-1$，同理$Y<S_1-1$，$X+Y<S_1+2P-4$

內界限：

$$\begin{cases} X<5 \\ Y<5 \\ X+Y<6+2\times 3-4=8 \end{cases}$$

，滿足$\begin{cases} X<S_1-1 \\ Y<S_1-1 \\ X+Y<S_1+2P-4 \end{cases}$之區域設為$B$，此不等式稱為內界限公式

最少步數$K=4$必在$A-B$區內，如(圖十五)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6

(圖十五) $K=4$的外界限A與內界限B

3. 定理丙：每一個最少步數$K \geq 5$，K所對應的總格子數$f(K)$，數列$< f(K) >$為公差7的等差數列

列數 \ 最少步數	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	4	2	2	2	2	2	2	2
4	3	3	2	2	2	2	2	2
5	3	4	3	2	2	2	2	2
6	2	4	3	3	2	2	2	2
7		3	5	3	3	2	2	2
8		3	4	3	3	3	2	2
9			4	5	3	3	3	2
10			3	5	3	3	3	3
11				4	6	3	3	3
12				4	5	3	3	3
13					5	6	3	3
14					4	6	3	3
15						5	7	3
16						5	6	3
17							6	7
18							5	7
19								6
20								6

f(7) −f(6)=2+3+2=7

(圖十六) 最少步數K在每一列出現次數的分布表(除了(0,0)到(2,2)這3×3以外)

說明：

(1) 在第0列表中最少步數3有2個、最少步數4有2個、最少步數5有2個，依此類推

(2) 設$f(K)$為最少步數K所分佈的總格子數，如(圖十六)，$f(6)$為第四行(步數6)之直行加總，$f(7)$亦同，$f(7)$比$f(6)$多一個2、一個3，且多一個2(由4

增為6)，故$f(7)-f(6)=2+3+2=7$為定數

4. 設S_K表最小步數小於或等於K之總格子數，求S_K

   (1) 先以S_6為例，如(圖十七)分為四個區域 I、II、III、IV

   在 I 區中，有6^2個小於或等於K的格子數，

   在 II 區中有6×7個格子數，其中有6個最少步數$K=7$，故小於或等於6的格子數為$6\times7-6$

   在 III 區中，如同 II 區，小於或等於6的格子數為$6\times7-6$

   在 IV 區中共有$1+2+3+\cdots+7$的格子數，其中有6個最少步數$K=7$，故小於或等於的格子數為$1+2+3+\cdots+7-6$

   因此，

$$\begin{aligned} S_6 &= 6^2+(6\times7-6)+(6\times7-6)+(1+2+\cdots+7)-6 \\ &= 6^2+2\times6\times7+(1+2+\cdots+7)-3\times6 \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8
10	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9
11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10
12	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9
13	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10
14	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11
15	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10

(圖十七) S_6的總格子數

(2) 再以S_7為例，分為如(圖十八)四個區域 I、II、III、IV

在 I 區中，有7^2個小於或等於K的格子數，

在 II 區中有7×8個格子數，其中有7個最少步數$K = 8$，故小於或等於7的格子數為$7 \times 8 - 7$

在 III 區中，如同 II 區，小於或等於7的格子數為$7 \times 8 - 7$

在 IV 區中共有$1 + 2 + 3 + \cdots + 8$的格子數，其中有7個最少步數$K = 8$，故小於或等於7的格子數為$1 + 2 + 3 + \cdots + 8 - 7$

因此，

$$S_7 = 7^2 + (7 \times 8 - 7) + (7 \times 8 - 7) + (1 + 2 + \cdots + 8) - 7$$

$$= 7^2 + 2 \times 7 \times 8 + (1 + 2 + \cdots + 8) - 3 \times 7$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8
10	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9
11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10
12	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9
13	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10
14	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11
15	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10

(圖十八) S_7的總格子數

由上述討論知，

從$S_6 = 6^2 + 2 \times 6 \times 7 + (1 + 2 + \cdots + 7) - 3 \times 6$

可推到$S_7 = 7^2 + 2 \times 7 \times 8 + (1 + 2 + \cdots + 8) - 3 \times 7$，具相同規律。

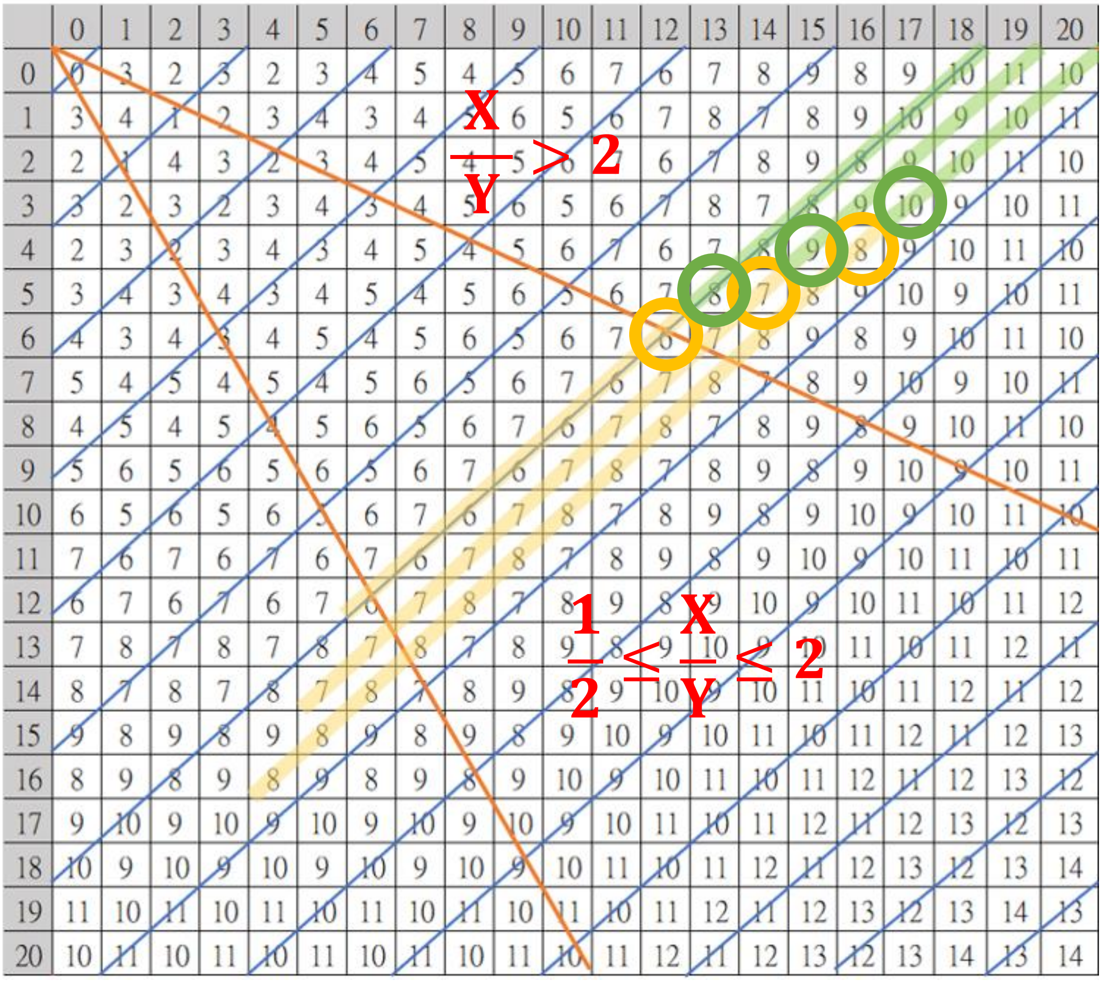
由數學歸納法知，

$$S_K = K^2 + 2K(K+1) + \big(1 + 2 + \cdots + (K+1)\big) - 3K = \frac{7K^2 + K + 2}{2}$$

故$f(K) = S_K - S_{K-1} = \frac{[7K^2+K+2]-[7(K-1)^2+(K-1)+2]}{2} = \frac{14K-6}{2} = 7K - 3$

故數列$< f(K) >$為公差7的等差數列，定理丙得證。

(五) 由原點到第一象限(含軸)任意格子點$P(X,Y)$求點P的最少步數



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	11	10
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11
10	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10
11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11
12	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12
13	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11
14	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12
15	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13
16	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12
17	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13
18	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14
19	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13
20	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14

(圖十九) 最少步數K與座標和W之關係圖

(圖十九)中，平面區域可以分為三部分分別為，$\frac{X}{Y}>2$、$\frac{X}{Y}<\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}\leq\frac{X}{Y}\leq 2$

1. 在$\frac{1}{2}\leq\frac{X}{Y}\leq 2$的區域中，求點$P(X,Y)$的座標和$W$與最少步數$K$之關係

區域$\frac{1}{2}\leq\frac{X}{Y}\leq 2$，坐標和$W$為定值時，點$P(X,Y)$在$L_W$：$X+Y=W$的直線上，所對應之最小步數$K$恆為定數，如(圖十九)中

$$\left.\begin{array}{l} L_6\text{對應}K=2，L_9\text{對應}K=3，\text{當}W=3q+0\text{時，則}K=q+0。\\ L_7\text{對應}K=3，L_{10}\text{對應}K=4，\text{當}W=3q+1\text{時，則}K=q+1。\\ L_8\text{對應}K=4，L_{11}\text{對應}K=5，\text{當}W=3q+2\text{時，則}K=q+2。\end{array}\right\}\text{-----}\quad(3)$$

因上式(3)中，$\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor=q$，(下高斯$\lfloor x\rfloor$：表不大於$x$之最大整數)

$$所以，當W = 3q + 0 時，W - 3\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor = W - 3q = 0$$

$$當W = 3q + 1 時，W - 3\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor = W - 3q = 1$$

$$當W = 3q + 2 時，W - 3\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor = W - 3q = 2$$

所以在$\frac{1}{2} \le \frac{X}{Y} \le 2$的區域中，由上式(3)，點$P$的最少步數$K = q + (W - 3q)$

$$= \left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor + W - 3\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor \text{ 恆成立}$$

反之，由上式(3)，

$W = 3q + 0$ 時，若$K = l$，則$W = 3l$

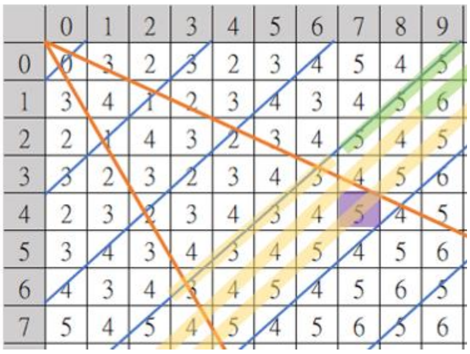
$W = 3q + 1$ 時，若$K = l$，則$W = 3(l - 1) + 1 = 3l - 2$

$W = 3q + 2$ 時，若$K = l$，則$W = 3(l - 2) + 2 = 3l - 4$

故當$K = l$時，K分布在$W = 3l$、$3l - 2$、$3l - 4$之三條線上。

例：點$P(7,4)$之最少步數為何?

如(圖二十)，$P(7,4) = 5$，算法如下:



(圖二十)

(1) 因為$\frac{1}{2} \le \frac{7}{4} \le 2$，其中$W = 7 + 4 = 11$，得$K = \left\lfloor\frac{11}{3}\right\rfloor + 11 - 3\left\lfloor\frac{11}{3}\right\rfloor = 3 + 11 - 3 \times 3 = 5$為最少步數

2. 第一象限(含軸)內，我們定義：

(1) 座標和公式：當$W = 3K$或$3K - 2$或$3K - 4$時，稱點$P(X, Y)$符合座標和公式，如$\frac{1}{2} \le \frac{X}{Y} \le 2$中任一點皆符合座標和公式，而不符合座標和公式的點皆在$\frac{X}{Y} > 2$或$\frac{X}{Y} < \frac{1}{2}$區域內。

在每一條斜線L_W中我們定義：

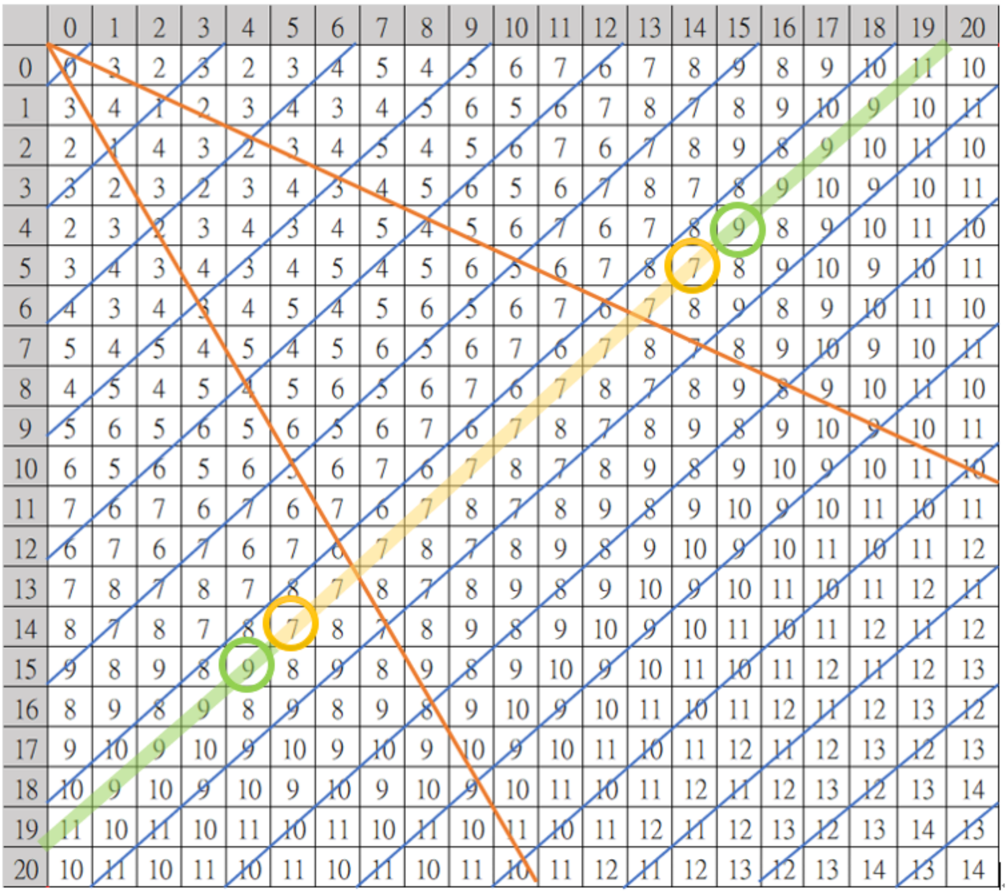
(2)　普通點：符合座標和公式的點(橘色)

每條斜線L_W上普通點所構成的線段，如(圖二十一)，斜線L_{19}中$K = 7$所連成的橘色線段。

(3)　特殊點：不符合座標和公式的點(綠色)

每條斜線L_W上特殊點所構成的射線，如(圖二十一)，斜線L_{19}中$K = 9$、11、13 ...

所連成的綠色射線。



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	11	10
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11
10	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10
11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11
12	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12
13	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11
14	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12
15	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13
16	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12
17	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13
18	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14
19	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13
20	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14

(圖二十一) 邊界普通點，邊界特殊點

(4)　邊界普通點：每條斜線中的橘色線段最外側的普通點(橘線邊界如(圖十九)標示)

例：(12,6), (14,5), (16,4)

(5)　邊界特殊點：每條斜線中的綠色射線最內側的特殊點(綠線邊界如(圖十九)標示)

例：(13,5), (15,4), (17,3)

(6) 變量：

K'：邊界普通點的最少步數

A ：每一條斜線上某特殊點和邊界普通點的X座標差

A'：每一條斜線上某特殊點和邊界普通點的K差值

由於(圖十九)對稱直線$Y = X$，所以規定：給定特殊點(X_0, Y_0)，若$X_0 \geq Y_0$，則取$X = X_0$，$Y = Y_0$，若$X_0 < Y_0$，取$X = Y_0$，$Y = X_0$

例如：

座標P(X,Y)位置 / 最少步數 / 座標和的關係	$\frac{1}{2} \leq \frac{X}{Y} \leq 2$	$\frac{X}{Y} > 2$
L_{18}	6	( )(8,8,8,8)(10,10)
L_{19}	7	(7,7)(9,9,9,9)(11)
L_{20}	8	(8,8,8)(10,10,10,10)

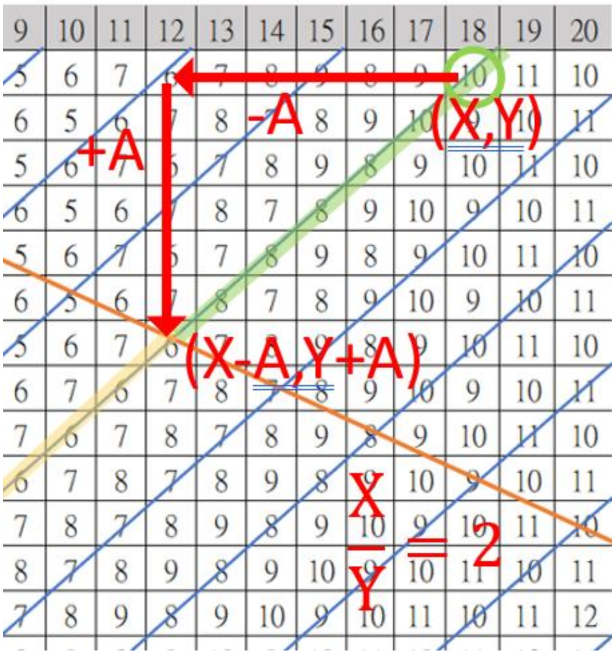
3. $\frac{X}{Y} > 2$時所對應的K值與$\frac{1}{2} \leq \frac{X}{Y} \leq 2$中對應的$K$值，關係如下：

在L_w斜線上，

當$W = 3q + 0$時，邊界特殊點與邊界普通點的K值差2，如L_{18}斜線上$8 - 6 = 2$

當$W = 3q + 1$時，$\frac{X}{Y} > 2$之首二項與$\frac{1}{2} \leq \frac{X}{Y} \leq 2$的$K$值相同，如$L_{19}$斜線上$7 = 7$，邊界特殊點與邊界普通點的$K$值差2，如$L_{18}$斜線上$9 - 7 = 2$

當$W = 3q + 2$時，$\frac{X}{Y} > 2$之首三項與$\frac{1}{2} \leq \frac{X}{Y} \leq 2$的$K$值相同，如$L_{20}$斜線上$8 = 8$，邊界特殊點與邊界普通點的$K$值差2，如$L_{18}$斜線上$10 - 8 = 2$



(圖二十二)

(1) $W=3q+0$，$\frac{X}{Y}>2$時，如(圖二十二)由特殊點(X,Y)往左移動A單位，往下移動A單位到達邊界普通點$(X-A,Y+A)$，該點落在$\frac{X}{Y}=2$的線上，所以得$\frac{X-A}{Y+A}=2$，求得A

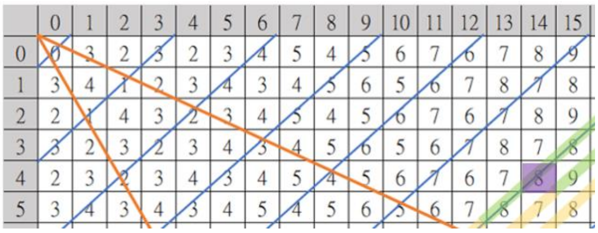
$$A'=2\left\lceil\frac{A}{4}\right\rceil，K'=\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor+W-3\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor，K=K'+A'$$

(上高斯$\lceil x\rceil$：表不小於x之最小整數)

$(3|W \Leftrightarrow K'=\frac{W}{3})$

例：點$P(14,4)$之最少步數為何?

如(圖二十三)，$P(14,4)=8$，算法如下:



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8

(圖二十三)

(1) $\frac{14}{4}>2$，座標和$W=18$，若符合座標和公式，$3K'-4\leq 18\leq 3K'$

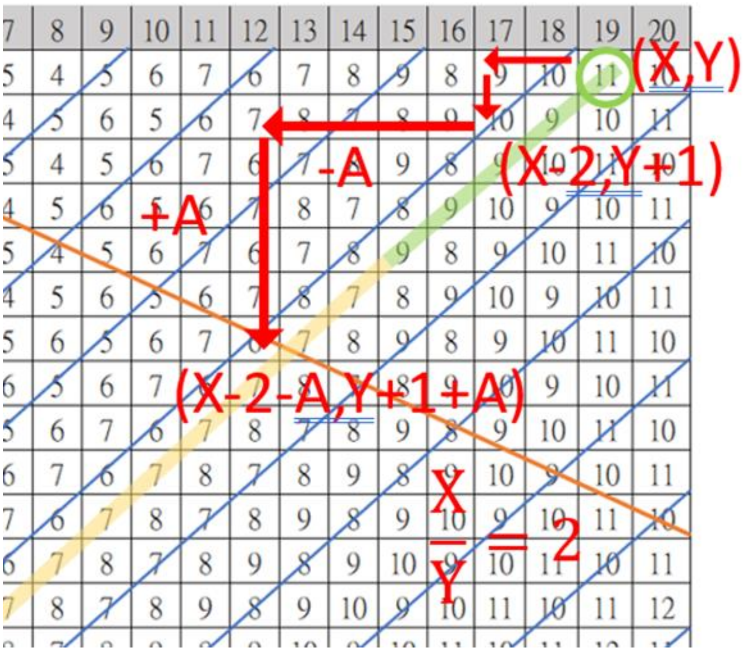
由$\frac{18}{3}\in Z$得$K'=\frac{18}{3}=6$

(2) 另因$W=3\times 6$，$\frac{X}{Y}=\frac{14}{4}>2$故$(14,4)$為特殊點

實際最少步數應調整為$K=K'+A'$

其中$A'=2\left\lceil\frac{A}{4}\right\rceil$，$A$滿足$\frac{14-A}{4+A}=2$即$A=2, A'=2$

最少步數$K=K'+A'=6+2=8$



(圖二十四)

2. $W=3q+1$，$\frac{X-2}{Y+1}>2$時，如(圖二十四)由特殊點(X,Y)往左移動$A+2$單位，往下移動$A+1$單位到達邊界普通點$\big((X-2)-A,(Y+1)+A\big)$，該點落在$\frac{X}{Y}=2$

的線上，所以得$\frac{(X-2)-A}{(Y+1)+A}=2$，求得$A$

$$A'=2\left\lceil\frac{A}{4}\right\rceil\text{，}K'=\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor+W-3\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor\text{，}K=K'+A'$$

$$(3|W+2\Leftrightarrow K'=\frac{W+2}{3})$$

例：點$P(15,4)$之最少步數為何?

如(圖二十五)，$P(15,4)=9$，算法如下:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9

(圖二十五)

(1) $\frac{15}{4}>2$，座標和$W=19$，若符合座標和公式，$3K'-4\leq 19\leq 3K'$

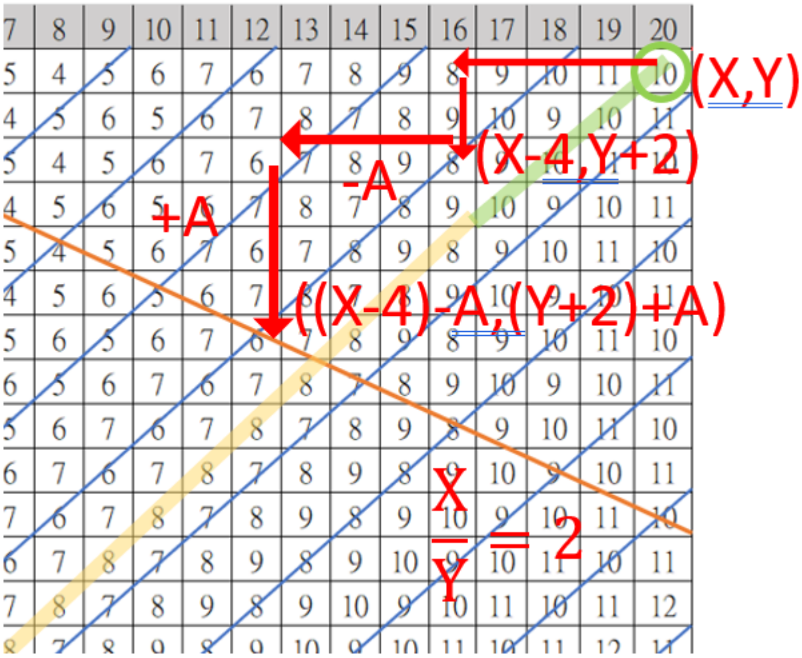
由$\frac{19+2}{3}\in Z$得$K'=\frac{19+2}{3}=7$

(2) 另因$W=3\times 6+1$，$\frac{X-2}{Y+1}=\frac{13}{5}>2$故$(15,4)$為特殊點

實際最少步數應調整為$K=K'+A'$

其中$A'=2\left\lceil\frac{A}{4}\right\rceil$，$A$滿足$\frac{13-A}{5+A}=2$即$A=1,A'=2$

最少步數$K=K'+A'=7+2=9$



(圖二十六)

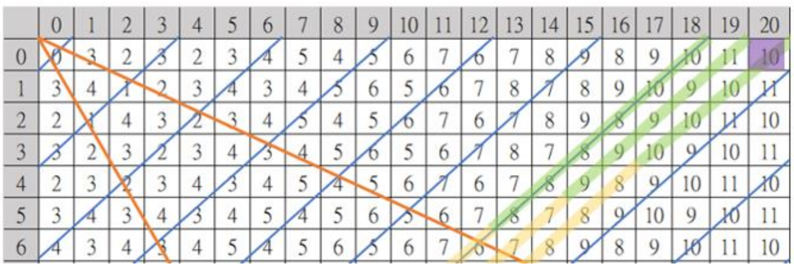
3. $W=3q+2$，$\frac{X-4}{Y+2}>2$ 時，如(圖二十六)由特殊點(X,Y)往左移動$A+4$單位，往下移動$A+2$單位到達邊界普通點$\left((X-4)-A,(Y+2)+A\right)$，該點落在$\frac{X}{Y}=2$的線上，所以得$\frac{(X-4)-A}{(Y+2)+A}=2$，求得$A$

$$A'=\left\lceil\frac{A}{4}\right\rceil\text{，}K'=\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor+W-3\left\lfloor\frac{W}{3}\right\rfloor\text{，}K=K'+A'$$

$$(3|W+4\Leftrightarrow K'=\frac{W+4}{3})$$

例：點$P(20,0)$之最少步數為何?

如(圖二十七)，$P(20,0)=10$，算法如下:



(圖二十七)

(1) $20>2\times 0$，座標和$W=20$，若符合座標和公式，$3K'-4\leq 20\leq 3K'$

由$\frac{20+4}{3}\in Z$得$K'=\frac{20+4}{3}=8$

(2) 另因$W = 3 \times 6 + 2$，$\frac{X-4}{Y+2} = \frac{16}{2} = 8 > 2$故(20,0)為特殊點

實際最少步數應調整為$K = K' + A'$

其中$A' = 2\left[\frac{A}{4}\right]$，$A$滿足$\frac{16-A}{2+A} = 2$即$A = 1, A' = 2$

最少步數$K = K' + A' = 8 + 2 = 10$

例： 點$P(14,5)$之最少步數為何?

如(圖二十八)，$P(14,5) = 7$，算法如下:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9

(圖二十八)

(1) 因為$\frac{14}{5} > 2$，座標和$W = 19$若符合座標和公式，$3K' - 4 \le 19 \le 3K'$

由$\frac{19+2}{3} \in Z$得$K' = \frac{19+2}{3} = 7$

(2) 另因$W = 3 \times 6 + 1$，$\frac{X-2}{Y+1} = \frac{12}{6} = 2$故(14,5)為普通點

(實際上是邊界普通點)，故$K = K' = 7$為最少步數

肆、結論與應用

一、定理甲：給定xy-平面棋盤，無範圍限制，以原點(0,0)為起始點。動點P每次移動向量(a, b)則動點P可到達棋盤上的任何一點的充要條件為：$\gcd(a, b) = 1$且a、b為一奇一偶。而馬步走法為$(a, b) = (\pm 1, \pm 2)$或$(\pm 2, \pm 1)$，知動點P可經由馬步從原點(0,0)走到棋盤上的任意格子點。

二、定理乙：平面棋盤的馬步路徑皆可找到起點、終點在同一象限(含軸)，且步數相同的路徑。設平面棋盤上O為原點，P為終點且在第一象限(含軸)，則平面棋盤上最少步數為K且由O到P的任意路徑，在第一象限(含軸)內必可找到由O到P相對應的路徑且最少步數仍為K。

三、定理丙：每一個最少步數$K \ge 5$，K所對應的總格子數$f(K)$，數列$< f(K) >$為公差7的等

差數列。

四、定理丁：給定第一象限(含軸)任意點$P(X_0, Y_0)$，若$X_0 \geq Y_0$，則取$X = X_0, Y = Y_0$；

若$X_0 < Y_0$則取$X = Y_0$，$Y = X_0$。

(一) 若$\frac{1}{2} \leq \frac{X}{Y} \leq 2$，座標和$W$，則最少步數$K = \left\lfloor \frac{W}{3} \right\rfloor + W - 3\left\lfloor \frac{W}{3} \right\rfloor$。

(二) 若$\frac{X}{Y} > 2$，座標和W，則$K' = \left\lfloor \frac{W}{3} \right\rfloor + W - 3\left\lfloor \frac{W}{3} \right\rfloor$

$W = 3q + 0$，$\frac{X}{Y} > 2$時，由$\frac{X-A}{Y+A} = 2$，求得A

$W = 3q + 1$，$\frac{X-2}{Y+1} > 2$時，由$\frac{(X-2)-A}{(Y+1)+A} = 2$，求得$A$

$W = 3q + 2$，$\frac{X-4}{Y+2} > 2$時，由$\frac{(X-4)-A}{(Y+2)+A} = 2$，求得$A$

$A' = 2\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor$，$K = K' + A'$($P$為特殊點)

否則，$K = K'$(P為普通點)

五、未來展望

針對馬步的研究，我們期望未來可以延伸的方向如下：

(一) 針對第一象限(含軸)走馬步從原點到任一點，最少步數K有幾種走法?

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3	2	3	2	3	4
1	3	4	1	2	3	4	3
2	2	1	4	3	2	3	4
3	3	2	3	2	3	4	3
4	2	3	2	3	4	3	4
5	3	4	3	4	3	4	5

I: 2種

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3	2	3	2	3	4
1	3	4	1	2	3	4	3
2	2	1	4	3	2	3	4
3	3	2	3	2	3	4	3
4	2	3	2	3	4	3	4
5	3	4	3	4	3	4	5

II:2種

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3	2	3	2	3	4
1	3	4	1	2	3	4	3
2	2	1	4	3	2	3	4
3	3	2	3	2	3	4	3
4	2	3	2	3	4	3	4
5	3	4	3	4	3	4	5

III: 3種

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	3	2	3	2	3	4
1	3	4	1	2	3	4	3
2	2	1	4	3	2	3	4
3	3	2	3	2	3	4	3
4	2	3	2	3	4	3	4
5	3	4	3	4	3	4	5

IV: 3種

(圖二十九)

例從原點走馬步到點(6,2)最少步數為4，而前一步最少步數為3的有4個洞口如(圖二十九)之 I、II、III、IV，最少步數為3分別有2、2、3、3種，故從原點到(6,2)最少步數為4的路徑共有$2+2+3+3=10$種。

(二) 如果馬步改為(2,3)，由**定理甲**可知動點P仍可由原點(0,0)走到平面座標上任一點。

1. 最少步數K的總格子數$f(K)$，數列$< f(K) >$是否具有其特性。
2. 從原點到任一點最少步數K是否有規律性解法。

伍、參考文獻

[1] 中華民國第四十五屆中小學科學展覽會，高中組數學科臺北市立麗山高中黃右嫺、潘建融、陳柏諺。棋盤上的馬步。2005。

[2] 胡大同。國際數學奧林匹克大陸隊訓練教材。二版。台北市。九章出版社。378 面。1990/09。

[3] 張良杰、游耿能譯。趣味數學問題集。初版。新竹市。凡異出版社。362 面。1992/04。

本文完

附錄：16 × 16馬步最少步數程式簡介

本程式的功能，為顯示16 × 16棋盤中，在選擇一起點後，到達每一格的最少步數。

分若干區域介紹：

A- 顯示滑鼠游標所在的座標

B- 顯示研究目的(二)中定義的特殊點

C- 鎖定並顯示輸入座標的可以用騎士走法到達位置

D- 顯示顏色選單 I：勾選所要的步數，使該步數的格子轉換顏色，供參考

E- 顯示顏色選單 II：選擇「使用」，並選擇步數。使每點選一次起點，固定轉換選擇步數格子的顏色。

F- 統計表：統計點擊起點後，棋盤內的各步數格子個數，並顯示起點位置。

G- 顯示區：於任意時間點擊起點，並顯示到達棋盤內每一個格子的最少步數。

【評語】010051

象棋規則中，馬走日。本作品探討，若棋盤為第一象限，馬的起始點為原點，證明第一象限任何點均可以被馬走過。作者同時證明，最少需使用 K 步可到達的格子數，與最少需使用 K+1 步可到達的格子數，在 k\ge5 之後，成為公差為 7 的等差數列。最後，作者給出第一象限座標(x,y)使用馬步可以到達的最少步數的一般式。本份作品結論相當完整，而且這些結論只基於適切的觀察即可獲得，令人意外。然而作者應交代，本作品和文獻中第 45 屆的作品之差別。其次，真正的棋盤為 9x10，且起始點並非位於角落，且有雙馬，作者可以試著推廣本研究到真正的象棋棋盤上。