2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010050**

參展科別　數學

作品名稱　婆羅摩笈多定理推廣至圓錐曲線內接多邊形中之探討

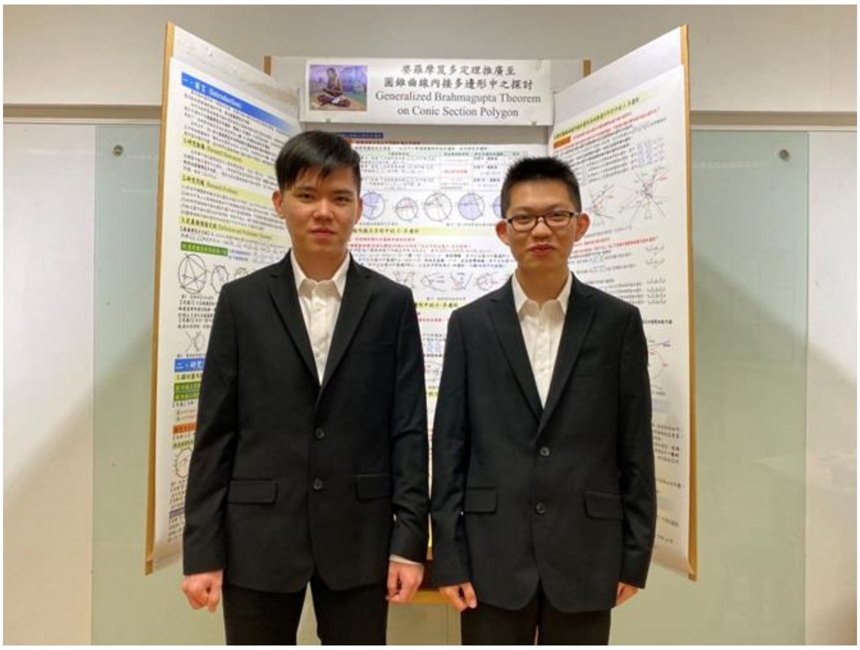
就讀學校　臺北市立內湖國民中學

指導教師　林鳳美、鄭忠興

作者姓名　林士哲、彭士鳴

關鍵詞　<u>婆羅摩笈多定理、圓錐曲線內接四邊形、拋物線作圖</u>

作者簡介



我是林士哲，目前就讀臺北市立內湖國中九年級。

數學是我最感興趣的科目，從國七就開始探索及研究數學，至今已經發展好幾篇數學作品，過程中學習到各種的數學觀點及獨特見解，這是最開心的事。這次難得的盛會中，抱持學習的心態以擴展我的知識與國際視野，十分感謝指導老師以及支持我的師長和家人一路上陪伴與指導。

我是彭士嗚，目前就讀臺北市立內湖國中九年級。

由於喜歡思考數學和挑戰各種問題，所以從國七就開始探索及研究數學，積極參加各項數學競賽。當中雖然遇到無數次的困難，但我們都逐一克服了，知識上的見解也跟隨逐日增強，因而數學成為我最酷愛的科目。這次難得的盛會非常榮幸，特別感謝指導老師以及支持我的師長和家人。

摘要

圓內接四邊形有一個幾何定理：若圓內接四邊形的兩對角線相互垂直，則連接對角線交點與一邊垂足點的連線過對邊的中點，稱為婆羅摩笈多定理。

我們嘗試將圓內接四邊形推廣至圓內接多邊形的情形，定義其多邊形中若滿足對邊建構原則：「連接兩垂直對角線交點與一邊垂足點的連線過對邊的中點，同時連接同一邊中點的連線垂直於對邊」，則稱此多邊形為婆羅摩笈多多邊形，簡稱 $B-$多邊形。另外定義在圓內接多邊形中，兩相互不垂直的對角線交點若滿足對邊建構原則，則稱為特定多邊形。

本作品中，深入探討婆羅摩笈多定理推廣至圓錐曲線內接四邊形的情形，先推導出圓錐曲線內接正方形的建構條件，顯然此正方形必為 $B-$正方形，此曲線包含七種。接著利用直徑性質推導出拋物線內接四邊形作圖，進而推導出圓錐曲線內接四邊形的二種建構條件，此曲線包含十一種。

Abstract

There is a geometric theorem for a cyclic quadrilateral：if a cyclic quadrilateral is orthodiagonal (that is, has perpendicular diagonals), then the perpendicular to a side from the point of intersection of the diagonals always bisects the opposite side, which is called ***Brahmagupta theorem***.

We attempt to generalize this theorem to a cyclic polygon. If a polygon satisfies " the perpendicular to a side from the point of intersection of the diagonals always bisects the opposite side, and the line connecting the midpoint of a side and the point of intersection of the diagonals is always perpendicular to the opposite side.", it is defined as ***Brahmagupta polygon***, or simply $B-$***polygon***. In addition, we consider a cyclic polygon is not orthodiagonal , but a set of opposite sides satisfies the construction principle, it is defined as ***a special polygon***.

In this research, we further generalize Brahmagupta theorem to a conic quadrilateral. First, we

derive the construction condition of a conic square. Obviously, it is called $B-square$. These curves contain seven types of conics. Next, we use the diameter properties of the conic to obtain the general method for parabola quadrilateral construction. By using the method, we can derive two construction conditions of a conic quadrilateral. These curves contain eleven types of conics.

壹、前言

在參賽中華民國第 60 屆中小學科學展覽會，完成一篇作品：「圓舞曲-婆羅摩笈多定理推廣至圓或橢圓內接多邊形中之探討」，並解決一些問題，主要結果：

一、利用兩圓內離、外切、外離及相交兩點來建構 $B-$四邊形，詳見參考資料[2]。

二、將婆羅摩笈多定理推廣至圓內接正多邊形，由對邊建構原則建構 $B-$多邊形，也進一步將婆羅摩笈多定理推廣至橢圓內接多邊形的情形。本作品特別修正由關鍵角度所建構的多邊形，注意到對角線互不垂直，所以多邊形不是 $B-$多邊形，稱此多邊形為特定多邊形。

研究期間無意間發現不僅僅「橢圓內接四邊形存在婆羅摩笈多定理」，還存在其餘的圓錐曲線內接四邊形(含退化圖形)，為了解決這個問題，就有了這次作品。本作品目的有五：

一、透過圓錐曲線族來探討圓錐曲線(含退化圖形)內接正方形中的 $B-$正方形之建構條件，同時推導有何種圓錐曲線內接正方形中的 $B-$正方形。

二、給定平面上三點與拋物線的平行軸條件下，利用直徑性質建構拋物線內接四邊形(I)。

三、給定圓內接四邊形，探討如何建構拋物線的平行軸並且建構拋物線內接四邊形(II)。

四、先探討橢圓或雙曲線的直徑性質，再利用其直徑性質及拋物線內接四邊形作圖推導出圓錐曲線內接四邊形(含退化圖形)的建構條件及有何種圓錐曲線內接四邊形中的 $B-$四邊形。

五、給定圓內接四邊形的四個頂點，再考慮在平面上哪些區域內的一點可建構圓錐曲線(含退化圖形)內接四邊形，進而推導出有何種圓錐曲線內接四邊形中的 $B-$四邊形。

貳、研究過程或方法

一、文獻探討與名詞定義

印度數學家**婆羅摩笈多** (Brahmagupta，598~660) 在 628 年提出圓內接四邊形的一個幾何定理，稱為**婆羅摩笈多定理** (Brahmagupta Theorem)，詳見參考資料[1]~[4]與[6]：

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且兩對角線 $\overline{A_1A_3}$ 及 $\overline{A_2A_4}$ 垂直相交於 P，過 P 作直線分別與 $\overline{A_1A_2}$ 、$\overline{A_3A_4}$ 相交於 H 、 M ，(i)若 $\overline{PH} \perp \overline{A_1A_2}$ ，則 $\overline{A_3M} = \overline{MA_4}$ 。

(ii)若 $\overline{A_3M} = \overline{MA_4}$ ，則 $\overline{PH} \perp \overline{A_1A_2}$ 。參見圖 1。

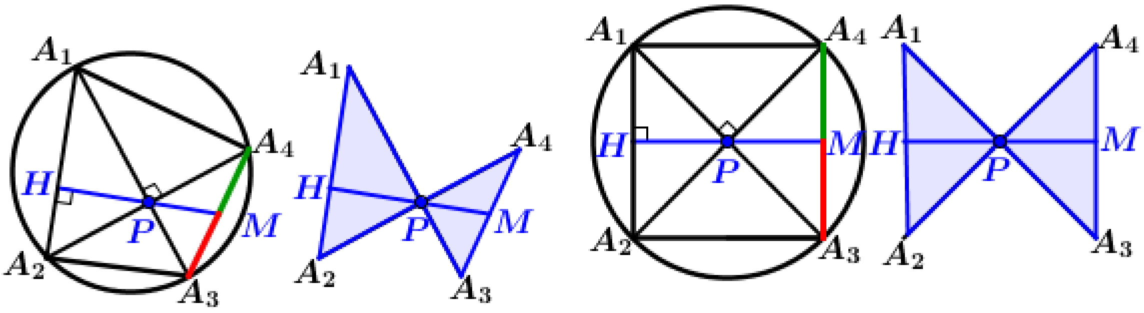


圖 1：婆羅摩笈多定理

【定義 1】(婆羅摩笈多四邊形，沈康身[1]、黃家禮[3]、Coxeter[4]、Honsberger[6])

在圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，設 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$ 相交於 P ，若過 P 作直線分別與 $\overline{A_1A_2}$ 、$\overline{A_3A_4}$ 相交於 H 、 M 且 $\overline{PH} \perp \overline{A_1A_2} \Leftrightarrow \overline{A_3M} = \overline{MA_4}$ ，則稱此四邊形為**婆羅摩笈多四邊形** (Brahmagupta Quadrilateral)，參見圖 1。為了方便，簡稱 $B-$**四邊形**。

【定義 2】(婆羅摩笈多多邊形： $B-$**多邊形**，林○○[2])

圓內接四邊形推廣至圓或橢圓內接多邊形的情形，定義其多邊形中若滿足「**連接兩垂直對角線交點與一邊垂足點的連線過對邊的中點，同時連接同一邊中點的連線垂直於對邊**」，則稱此多邊形為**婆羅摩笈多多邊形** (Brahmagupta Polygon)。為了方便，簡稱 $B-$**多邊形**。

本作品推導出並非所有圓或橢圓內接多邊形均滿足**定義 2**，特別是在圓內接正偶邊多邊形及橢圓內接正方形中可建構 $B-$**多邊形**，其餘情形是遵循建構原則可得出 $B-$**多邊形**。

建構 $B-$多邊形中對邊建構原則由垂直線移動原則及中線移動原則找到符合對邊，但必須保持唯一性(共同的對邊)，以圓內接正八邊形中 $\overline{A_1A_5} \perp \overline{A_2A_8}$ 交於 P 為例：

(i)過 P 向 $\overline{A_1A_2}$ 作垂直線 $\overleftrightarrow{H_1P}$ 分別交對邊 $\overline{A_5A_8}$ 或 $\overline{A_5A_7}$ 於中點 M_1 或 M_3 ，參見圖 2(a)。

(ii)過 P 向 $\overline{A_1A_2}$ 作中線 $\overleftrightarrow{M_2P}$ 分別交對邊 $\overline{A_5A_8}$ 或延長 $\overline{A_6A_7}$ 於垂直點 H_2 或 H_4 ，參見圖 2(b)。

但**建構 $B-$多邊形中對邊必須保持唯一性**，所以取 $\overline{A_5A_8}$ ，即

$$\overline{PH_1} \perp \overline{A_1A_2} \Leftrightarrow \overline{A_5M_1} = \overline{M_1A_8} \quad 且 \quad \overline{A_1M_2} = \overline{M_2A_2} \Leftrightarrow \overline{PH_2} \perp \overline{A_5A_8} 。$$

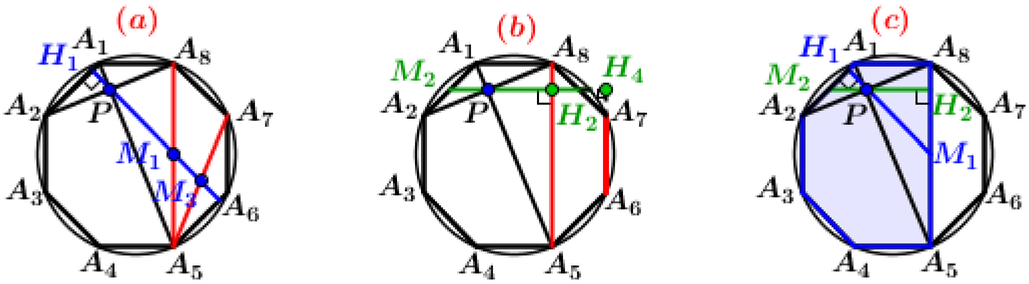


圖 2：定義正八邊形中的 $B-$六邊形

因此，六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_8$ 滿足建構原則，稱此多邊形為 $B-$**六邊形**，參見圖 2(c)。

若 P 為圓或橢圓內接多邊形中兩垂直對角線交點，則簡稱過 P 向各邊作垂直線交對邊中點的移動原則為**垂直線移動原則**及過 P 向各邊作中線交對邊垂足點的移動原則為**中線移動原則**，而同時**滿足垂直線移動原則及中線移動原則的對邊，即符合對邊建構原則。**

【預備定理 1】($B-$**四邊形的八點共圓性質**，沈康身[1]與黃家禮[3])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為異於正方形的圓內接四邊形且兩垂直對角線 $\overline{A_1A_3}$ 及 $\overline{A_2A_4}$ 相交於 P，若過 P 向四邊形各邊作垂直線與中線，其中垂足點為 H_1、H_2、H_3、H_4，中點為 M_1、M_2、M_3、M_4，則 H_1、H_2、H_3、H_4、M_1、M_2、M_3、M_4 等八點共圓，參見圖 3。

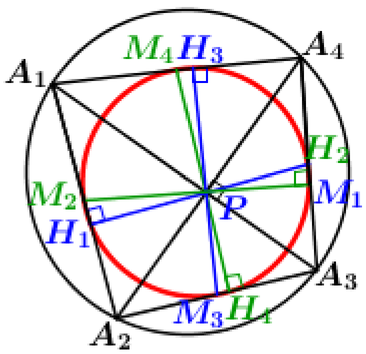


圖 3： $B-$四邊形的八點共圓

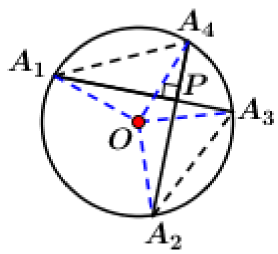


圖 4：圓內兩垂直交弦定理

【預備定理 2】(圓內兩垂直交弦性質，沈康身[1]與黃家禮[3])

給定一圓的圓心為 O 且半徑為 r，設 $\overline{A_1A_3}$ 與 $\overline{A_2A_4}$ 為圓內兩交弦，相交於 P，若

$\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = 4r^2$，則 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$，且四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$**四邊形**，參見圖 4。

【定義 3】(圓錐曲線內接四邊形中的 $B-$**多邊形)**

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = 4r^2$，設一圓錐曲線包含非退化圖形與退

化圖形通過四個頂點 A_1, A_2, A_3, A_4，則稱此四邊形為**圓錐曲線內接四邊形中的 $B-$多邊形**，其中雙曲線情形特別分二種定義：**雙曲線單接四邊形**(四邊形的頂點接在雙曲線一支上，參見圖 5)及**雙曲線雙接四邊形**(四邊形的頂點接在雙曲線二支上，參見圖 6)。另外雙曲線的退化圖形-兩相交直線也有單接與雙接情形，圖 7 為**兩相交直線雙接四邊形**。

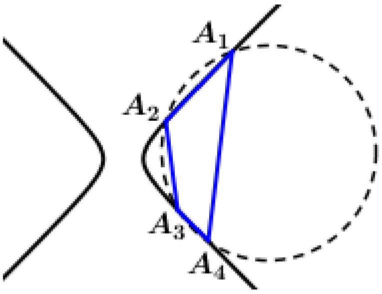


圖 5：雙曲線單接四邊形

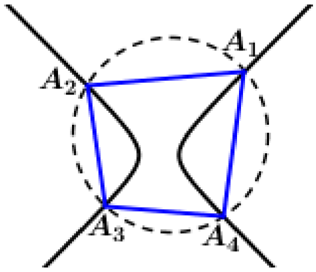


圖 6：雙曲線雙接四邊形

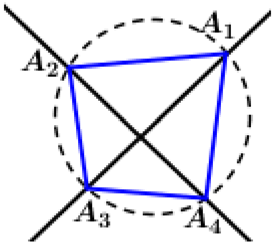


圖 7：兩相交直線雙接四邊形

為了區分橢圓與雙曲線的形狀，將長軸為平行 x 軸的橢圓與貫軸為平行 x 軸的雙曲線分別稱為**扁型橢圓與左右型雙曲線**，其中**扁型橢圓與左右型雙曲線**方程式分別為 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, a>b>0$ 及 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, a,b>0$；長軸為平行 y 軸的橢圓與貫軸為平行 y 軸的雙曲線分別稱為**直立型橢圓與上下型雙曲線**，其中**直立型橢圓與上下型雙曲線**方程式分別為 $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ 及 $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$。

二、探討參賽全國科展的重要定理及其修正

(一)探討圓內接正 n 邊形中的 $B-$多邊形

將**婆羅摩笈多定理**推廣至正 n 邊形，令 O 為正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，分成奇數邊及偶數邊來探討，底下僅列出結果，詳見參考資料[2]。

【定理 1】設 $A_1A_2\cdots A_n$ 為圓內接正奇數邊 n 邊形($n\geq 5$)，則(i)其任兩對角線相互不垂直。(ii) n 邊形中無法建構 $B-$多邊形。

圓內接正偶數邊 n 邊形為線對稱圖形，所以考慮以對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 為基準，與 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 垂直的直線稱為**水平分線**，與 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 平行的直線稱為**垂直分線**。定義兩垂直對角線的**交點 P_{cr} 為由上而下的第 c 條水平分線與在第 c 條水平分線上由左而右的第 r 條垂直分線的交點**，其中 $1\leq c,r\leq\left[\frac{n}{4}\right]$，參見圖 10。兩垂直對角線交點可分可歸納簡化為二種：過對稱軸 $\overline{A_1A_{1+n/2}}$ 上的

點：中心O及點P_{ii}，結果參見表 1。與不過對稱軸$\overline{A_1A_{1+n/2}}$上的點：點P_{i1}及P_{ij}，其中

$i>j, 1\le i\le\left[\frac{n}{4}\right], 2\le j<\left[\frac{n}{4}\right]$。

【定理 2】(過P_{ii}向邊作垂直線交對邊中點的移動原則，簡稱垂直線移動原則)

設P_{ii}為圓內接正偶數邊n邊形$A_1A_2\cdots A_n$中兩垂直對角線的交點，若過P_{ii}向邊$\overline{A_jA_{j+1}}$作垂直線

$\overleftrightarrow{P_{ii}H_1}$交對邊中點$M_1$，其中$1\le j\le\frac{n}{2}$，則$\overline{P_{ii}H_1}\perp\overline{A_jA_{j+1}}\Leftrightarrow\overline{A_mM_1}=\overline{M_1A_{n-i+1}}$，其中

$m=2j+n/2-i$，但$m>n$時，$2j+n/2-i\equiv m \pmod n$。

【定理 3】(過P_{ii}向邊作中線交對邊垂足點的移動原則，簡稱中線移動原則；對邊建構原則)

設P_{ii}為正偶數邊n邊形$A_1A_2\cdots A_n$中兩垂直對角線的交點，則符合建構原則的邊僅有兩組：

$$\overline{A_iA_{i+1}}\text{ 與 }\overline{A_1A_n}\ (i=1), \overline{A_{n-i+1}A_{n-i+2}}\ (i\ne 1)\text{ 、 }\overline{A_{i+1}A_{i+2}}\text{ 與 }\overline{A_{n-i}A_{n-i+1}}\text{ ，其中 }1\le i\le\left[\frac{n}{4}\right]\text{。} \qquad (1)$$

【註】為了方便，將(1)式中前者稱為**第i條水平分線前緊連的邊**且後者稱為**第i條水平分線後緊連的邊**。建構出$B-$**多邊形**及探討出P_{ii}向各邊作垂直線且中線，其所有垂足點

H_1、H_2、…、H_j且其中點M_1、M_2、…、M_j等共圓性質，參見表 1。

表 1：P_{ii}向第i條水平分線前緊連的邊及後緊連的邊建構$B-$多邊形的性質

性質	兩對角線交點	兩種邊	$B-$多邊形	共圓性質
定理 4	中心O	前(後)緊連的邊	$B-$正n**邊形**	n點共圓
定理 5	P_{ii}	前緊連的邊	**兩個**$B-(2i+n/2)$**邊形**	八點共圓
定理 6	P_{ii}	後緊連的邊	**兩個**$B-(2i+2+n/2)$**邊形**，但當 $n=4i+2$時，過P_{ii}時沒有共圓性質。	八點共圓

過P_{i1}向第i條水平分線前緊連的邊可建構$B-$多邊形，原因具有蝴蝶的構形，參見**定理 7**。

【定理 7】(過P_{i1}向第i條水平分線前緊連的邊之$B-$多邊形及其共圓性質)

設P_{i1}為正偶數邊n邊形$A_1A_2\cdots A_n$ ($n\ge 10$)中兩垂直對角線的交點，則(i)過P_{i1}向$\overline{A_iA_{i+1}}$可建構

$B-(2+n/2)$**邊形**。(ii)其$B-(2+n/2)$邊形中邊上垂足點H_1、H_2與中點M_1、M_2四點共圓，但

當$n=8i-4$時，過P_{i1}時，沒有共圓性質。

(二)探討圓內接正n邊形中的特定多邊形

過不過對稱軸上的點不可建構$B-$多邊形的原因是過不過對稱軸上的點的兩對角線相互不垂直，若放寬此條件：**兩對角線相互不垂直，一組邊符合對邊建構原則的多邊形**，稱為**特定多邊形**，特別地有是**關鍵角度**才成立，其結果**定理 8~10**。

表 2： P_{ij} 利用關鍵角度建構**特定多邊形**的性質

性質	對角線交點(關鍵角)	兩種邊	$B-$多邊形	圖形
定理 8	$P_{i1}\,(\angle A_{n-i+1}P_{i1}M=\dfrac{\pi}{6})$	後緊連的邊	當$n=12$時，建構**特定九邊形**	圖 18
定理 9	$P_{i2}\,(\angle A_{n-i}P_{i2}M=\dfrac{\pi}{6})$	前緊連的邊	當$n=6(i-1)$時，過P_{i2}向$\overline{A_iA_{i+1}}$可建構**特定**$(n-6[i/2]+3)$**邊形**，其中i為大於4的奇數。	圖 18
定理 10	$P_{ij}\,(\angle A_{n-i+1}P_{ij}M=\dfrac{2\pi}{n})$	後緊連的邊	當$n=10i-9j+1$時，過P_{ij}向$\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$可建構**特定**$(n-4i+4j+1)$**邊形**，其中$i>j\geq 3$。	

(三)探討橢圓內接正n邊形中的$B-$多邊形

探討橢圓內接多邊形是否存在**婆羅摩笈多定理**呢？參賽全國科展時，我們證明四邊形中僅有**橢圓內接正方形存在婆羅摩笈多定理**，事實上，是不然的，第三~五節會有更詳盡的探討，詳見參考資料[2]。

三、探討圓錐曲線內接正方形中的$B-$正方形

我們欲證明「橢圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$不存在婆羅摩笈多定理」，卻發現四邊形也可存在於圓錐曲線內接四邊形中。首先探討圓錐曲線內接正方形，由於正方形必為圓內接正方形且兩對角線相互垂直，所以正方形為**$B-$正方形**。底下著眼探討何種圓錐曲線(含退化圖形)內接正方形。

是否存在拋物線內接正方形$A_1A_2A_3A_4$呢？是不存在的。設$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2)$在拋物線上且$\overline{A_1A_2}$垂直對稱軸：$x$軸，參見圖 8，則$A_3(x_3,y_2),A_4(x_4,y_1)$，故拋物線無法通過$A_3,A_4$，因此，不存在拋物線內接正方形。

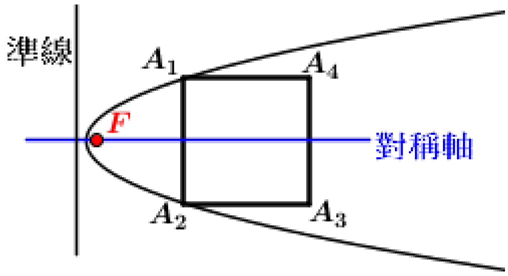


圖 8：不存在拋物線內接正方形

我們知道**五點決定一個圓錐曲線**，若考慮一圓錐曲線必通過正方形的四頂點，那麼在平面上任意取一點Q後會是何種圓錐曲線(含退化圖形)呢？

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為由 $\overleftrightarrow{A_1A_2}: x=0,\ \overleftrightarrow{A_2A_3}: y=0,\ \overleftrightarrow{A_3A_4}: x=1,\ \overleftrightarrow{A_4A_1}: y=1$所圍成的正方形，則由二組平行線$\overleftrightarrow{A_1A_2}//\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{A_1A_4}//\overleftrightarrow{A_2A_3}$、直線$\overleftrightarrow{A_1A_3}: x+y=1$或$\overleftrightarrow{A_2A_4}: x-y=0$及正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圓Ω：$(x-1/2)^2+(x-1/2)^2=1/2$區分成 20 個區域，參見圖 9，Q在區域 I~VII 上可決定何種圓錐曲線(含退化圖形)呢？透過 Geogebra 繪圖得到七種圓錐曲線：

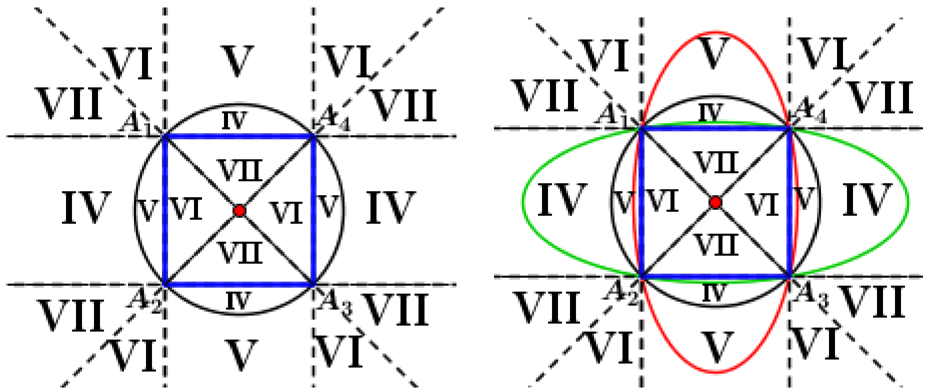


圖 9： Q在區域 I~VII 上可決定七種圓錐曲線(含退化圖形)

(i)Q在正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 的中心或在直線$\overleftrightarrow{A_1A_3}$或$\overleftrightarrow{A_2A_4}$上，圖形為**兩相交直線**。(ii)$Q$在$\overleftrightarrow{A_1A_2},\overleftrightarrow{A_3A_4}$或$\overleftrightarrow{A_1A_4},\overleftrightarrow{A_2A_3}$上，圖形為兩種兩平行直線。(iii)$Q$在圓$\Omega$上，圖形為圓$\Omega$。(iv)$Q$在圖 9 中**區域 IV** 上，圖形為**扁型橢圓**。(v)Q在圖 9 中**區域 V** 上，圖形為**直立型橢圓**。(vi)Q在圖 9 中**區域 VI** 上，圖形為**左右型雙曲線**。(vii)Q在圖 9 中**區域 VII** 上，圖形為**上下型雙曲線**。

現在證明上述的結果：我們可以考慮二個圓錐曲線方程式為 $x(x-1)=0$ 及 $(x+y-1)(x-y)=0$。由**圓錐曲線族性質**可設通過 A_1,A_2,A_3,A_4 四點的圓錐曲線方程式為

$$\ell_1(x+y-1)(x-y)+\ell_2x(x-1)=0，其中\ \ell_1,\ell_2\in R。\qquad (2)$$

若為退化圓錐曲線時，考慮(2)式，當$\ell_1\neq 0,\ \ell_2=0$時，(2)式化簡得到$(x+y-1)(x-y)=0$，

即 $x+y-1=0, x-y=0$，代表兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 上，正是(i)的情形。當 $\ell_1=0, \ell_2\neq 0$ 時，(2)式化簡得到 $x(x-1)=0$，即 $x=0, x-1=0$，代表兩平行直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{A_3A_4}$，同理也可證明兩平行直線 $\overleftrightarrow{A_1A_4}, \overleftrightarrow{A_2A_3}$，正是(ii)的情形。進一步探討將(2)式兩邊同除以 ℓ_1，可改為

$$(x+y-1)(x-y)+tx(x-1)=0 \text{，其中 } t\in R \tag{3}$$

由用(3)式來討論當 t 為何時，代表何種圓錐曲線呢？**性質 1** 與**定理 14**。

【性質 1】(圓錐曲線內接正方形的特殊情形)

設一圓錐曲線 Γ 內接正方形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $A_1(0,1), A_2(0,0), A_3(1,0), A_4(1,1)$ 且 Γ 的方程式為(3)式，若 Q 在 Γ 上，則(i)當 $t=-2$ 時，Γ 為圓 Ω。(ii)當 $-2<t<-1$ 時，Γ 為一扁型橢圓，其中 Q 在圖 9 中**區域 IV** 上；當 $t<-2$ 時，Γ 為一直立型橢圓，其中 Q 在圖 9 中**區域 V** 上。(iii)當 $t=0$ 時，Γ 為兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$；當 $t>0$ 時，Γ 為一左右型雙曲線，其中 Q 在圖 9 中區域 **VI** 上；當 $-1<t<0$ 時，Γ 為一上下型雙曲線，其中 Q 在圖 9 中區域 **VII** 上。

【證明】將(3)式化簡為一般式為

$$(t+1)x^2-y^2-(t+1)x+y=0 \text{。} \tag{4}$$

(i)當 $t=-2$ 時，代入(4)式得到 $(x-1/2)^2+(x-1/2)^2=1/2$，即圓 Ω。

(ii)若(4)式要滿足橢圓方程式，則 $t+1<0$，故 $t<-1$。

根據橢圓定義再細分成**扁型橢圓**及**直立型橢圓**知

當 $-2<t<-1$ 時，(4)式滿足 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 形式，圖形為**扁型橢圓**，其中 Q 在圖 9 中**區域 IV** 上。當 $t<-2$ 時，(4)式滿足 $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ 形式，圖形為**直立型橢圓**，其中 Q 在圖 9 中**區域 V** 上。

(iii)若(4)式要滿足雙曲線方程式，則 $t+1>0$，故 $t>-1$。

注意到當 $t=0$ 時，(4)式代表圖形為兩相交直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$。

根據雙曲線或定義再細分成**左右型雙曲線**及**上下型雙曲線**知

當 $t>0$ 時，(4)式滿足 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 形式，圖形為**左右型雙曲線**，其中 Q 在圖 9 中**區域 VI** 上。當 $-1<t<0$，(4)式滿足 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ 形式，圖形為**上下型雙曲線**，

其中Q在圖 9 中**區域 VII** 上。 ■

不失一般性考慮由$\overleftrightarrow{A_1A_2}: x=0, \overleftrightarrow{A_2A_3}: y=0, ,\overleftrightarrow{A_3A_4}: x=s, \overleftrightarrow{A_4A_1}: y=s$所圍成邊長為$s$的正方形$A_1A_2A_3A_4$，同樣可得到七種圓錐曲線含退化圖形，$Q$如同**性質 1** 在區域 I~VII 來討論。仿照**性質 1** 的證法，由**圓錐曲線族性質**可設通過A_1, A_2, A_3, A_4四點的圓錐曲線方程式為

$$(x+y-s)(x-y)+tx(x-s)=0 \tag{5}$$

【定理 14】(圓錐曲線內接正方形的一般情形)

設一圓錐曲線Γ內接正方形$A_1A_2A_3A_4$，其中$A_1(0,s), A_2(0,0), A_3(s,0), A_4(s,s)$且$\Gamma$的方程式為(5)式，若$Q$在$\Gamma$上，則(i)當$t=-2$時，$\Gamma$為一圓。(ii)當$-2<t<-1$時，$\Gamma$為一扁型橢圓，其中$Q$在圖 10 中**區域 IV** 上；當$t<-2$時，$\Gamma$為一直立型橢圓，其中$Q$在圖 10 中**區域 V** 上。(iii)當$t=0$時，$\Gamma$為兩相交直線$\overleftrightarrow{A_1A_3}$與$\overleftrightarrow{A_2A_4}$；當$t>0$時，$\Gamma$為一左右型雙曲線，其中$Q$在圖 10 中**區域 VI** 上；當$-1<t<0$時，$\Gamma$為一上下型雙曲線，其中$Q$在圖 10 中**區域 VII** 上。

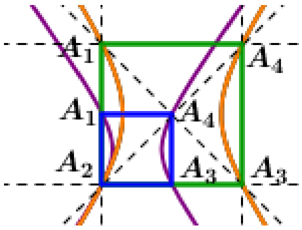


圖 10：以邊長為 1 的正方形頂點A_2為縮收中心，雙曲線放大$s=2$倍

【證明】仿照**性質 1** 的證法，將(5)式化簡為一般式，得到

$$(t+1)x^2-y^2-s(t+1)x+sy=0\text{。} \tag{6}$$

注意到(4)式與(6)式不同之處是x, y一次項的係數增為s倍。

當$t=-2$時，代入(6)式得到$x^2+y^2-sx-sy=0$，圖形為一圓，此圓為**性質 1** 中的圓Ω以原點為縮收中心，圓Ω放大s倍。同樣地，其餘情形皆相同，以原點為縮收中心，圓錐曲線放大s倍，參見圖 21 是以邊長為 1 的正方形頂點A_2為縮收中心，雙曲線放大$s=2$倍，因此，建構的圓錐曲線的t值條件與**性質 1** 中相同且對應的區域也相等。 ■

【定理 15】(圓錐曲線內接正方形中$B-$正方形)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為圓錐曲線Γ內接正方形，若Q為在平面上一點，則由Q, A_1, A_2, A_3, A_4可建

構兩種兩平行直線、兩種橢圓內接正方形、一種兩相交直線及兩種雙曲線雙接正方形等七種圓錐曲線內接正方形，並且這些正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$正方形。

【**證明**】由**定理 14** 知由 Q, A_1, A_2, A_3, A_4 建構兩種兩平行直線、兩種橢圓內接正方形、一種兩相交直線及兩種雙曲線雙接正方形等七種圓錐曲線。由於正方形的兩對角線相互垂直，故上述圓錐曲線內接正方形存在**婆羅摩笈多定理**且正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 為 $B-$正方形。 ■

四、探討拋物線內接四邊形中的 $B-$四邊形

(一)拋物線內接四邊形作圖(I)

由**定理 15** 知無法存在拋物線內接正方形，這令我們感到好奇，但注意到卻有拋物線的退化圖形-兩平行直線，於是進行研究，得到拋物線內接四邊形作圖方式共二種：一是給定三點 A_1, A_2, A_3 與平行對稱軸的直線來決定一拋物線，再以 A_1, A_2, A_3 三點作一圓 Ω 與拋物線交出一點 A_4，四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 即拋物線內接四邊形，稱為**拋物線內接四邊形作圖(I)**。注意四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 也為圓內接四邊形。另外要扣除**性質 2** 的圓內接三角形情形，參見**性質 2**。二是給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 作拋物線內接四邊形，稱為**拋物線內接四邊形作圖(II)**。

【性質 2】(拋物線內接三角形)

設 Γ_1 為一拋物線，且 M 為拋物線上一弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點。若過 M 作對稱軸 L 的垂直線交 Γ_1 於 A_3，且 Ω 為過 A_1, A_2, A_3 的一圓，則 Γ_1 與 Ω 的相交圖形為拋物線內接三角形 $\Delta A_1A_2A_3$。

現在要探討**拋物線內接四邊形作圖(I)**，是利用**拋物線的直徑性質**來作圖。

【性質 3】(拋物線的直徑性質)

給定一拋物線 Γ_1，設 $\overline{A_1A_2}$ 為 Γ_1 中斜率為 m 的弦，若 $M_1(x', y')$ 為 $\overline{A_1A_2}$ 的中點，則所有斜率為 m 的弦的中點形成的軌跡必定平行對稱軸。

【**證明**】(i)不失一般性，以對稱軸為平行 x 軸的拋物線來證明。

設拋物線方程式為 $(y-k')^2 = 4c(x-h')$，若 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$，則

中點 M_1 的坐標為 $(x', y') = \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ 且 $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

又 $(y_1-k')^2 = 4c(x_1-h'), (y_2-k')^2 = 4c(x_2-h')$，兩式相減化簡得 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{4c}{2y'-2k'}$。

所以 $\overline{A_1A_2}$ 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4c}{2y'-2k}$ 且 $y'=\dfrac{2c}{m}+k$。

由於 m、k' 與 c 均為定值，弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點的 y 坐標等於 $\dfrac{2c}{m}+k$ 為定值，故所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定平行對稱軸。同理可推導出當對稱軸平行 y 軸的拋物線時，所有弦 $\overline{A_1A_2}$ 的中點形成的軌跡必定平行對稱軸。 ■

【定理 16】(拋物線中弦的中垂線與軸的交點 N，與弦中點到軸的垂足點 H，$\overline{HN}$ 為定值)

給定一拋物線 Γ_1，設 $M_1(x',y')$ 為 Γ_1 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_1A_2}$ 之中點，且過 M_1 作垂直線交對稱軸於 H 且作 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線與對稱軸交於 N，參見圖 11，則 $\overline{HN}=2|c|$，其中 $|c|$ 為焦距。

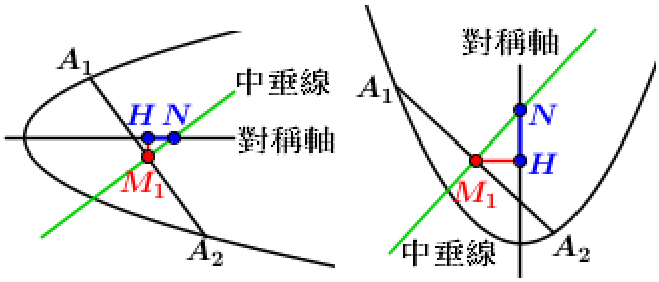


圖 11：$\overline{HN}$ 為定值

【證明】不失一般性，先以對稱軸為平行 x 軸的拋物線來證明。由**性質 3**知弦 $\overline{A_1A_2}$ 的斜率為 $m=\dfrac{4c}{2y'-2k'}$，所以 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線方程式為

$$y-y'=-\frac{2y'-2k'}{4c}(x-x') \text{ 且對稱軸方程式為 } y=k'。$$

求 $\overline{A_1A_2}$ 的中垂線與對稱軸的交點 N，即令 $y=k'$，解得 $x=x_0+2c$，

故 $\overline{HN}=|x-x_0|=2|c|$，因此，$\overline{HN}=2|c|$，其中焦距為 $|c|$。

同理可推導出當對稱軸為平行 y 軸的拋物線時，$\overline{HN}=2|c|$，其中焦距為 $|c|$。 ■

接著利用**定理 16**來建構**拋物線內接四邊形作圖(I)**：給定平面上三點 A_1,A_2,A_3，若 L' 為

平行對稱軸 L 的直線，注意對 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 作中垂線 L_1 與 L_2 且 L_1 與 L_2 的交點落在對稱軸 L 上，但交點在 L 上不在同一點，參見圖 12。作法上我們必須考慮使 L_1 、 L_2 交 L 於同一點，即底下**拋物線內接四邊形作圖(I)**中 $Step\,1$ 及 $Step\,2$ ，參見圖 13及證明**定理 17**，再由**定理 16**知 $\overline{HN}=2|c|$ 且 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸，此拋物線因而被決定。

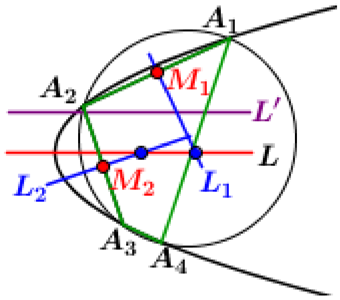


圖 12： $Step\,1$ 的必要原因

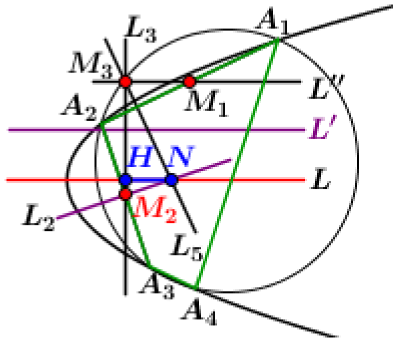


圖 13：拋物線內接四邊形作圖(I)

拋物線內接四邊形作圖(I)：圖 25中

$Step\,1$ ：過 $\overline{A_1A_2}$ 中 M_1 作 $L''//L'$ 且過 $\overline{A_2A_3}$ 中點 M_2 作 L'' 的垂直線 L_3 交 L'' 於 M_3 。

$Step\,2$ ：過 M_2 作 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線 L_2 且過 M_3 作 $\overline{A_1A_2}$ 的垂直線 L_5 ， L_2 與 L_5 相交於 N 。

$Step\,3$ ：過 N 作 L_3 的垂直線交 L_3 於 H ，即 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸 L 。

$Step\,4$ ：作以 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸且 $\overline{HN}=2|c|$ 的拋物線 Γ_1 。

$Step\,5$ ：過 A_1,A_2,A_3 三點作一圓 Ω 交 Γ_1 於 A_4 ，即四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為拋物線內接四邊形。

【定理 17】(給定三點且平行對稱軸的直線作一拋物線；拋物線內接四邊形作圖(I))

在平面上給定三點 A_1,A_2,A_3 且一拋物線平行對稱軸的直線 L' ，設三點 A_1,A_2,A_3 滿足拋物線內接四邊形作圖(I)中 $Step\,1-3$ ，參見圖 13，則(i) $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸 L 且直線 L_2 、 L_5 與相交對稱軸 L 於 N 。(ii)得到以 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸且 $\overline{HN}=2|c|$ 的拋物線。

【證明】(i)不失一般性，考慮拋物線方程式為 $y^2=4cx$ ，設 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$

且 m_1,m_2 為 $\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3}$ 的斜率，則由**性質 3**知 $m_1=\dfrac{4c}{y_1+y_2},m_2=\dfrac{4c}{y_2+y_3}$ 且由作圖知

$M_2\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ 且 $M_3\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ 。由**直線方程式中的點斜式**知

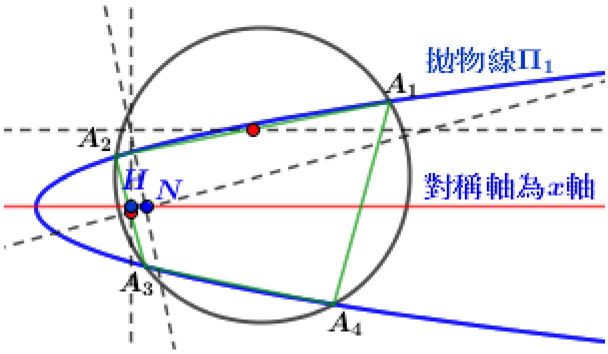
$$L_2\colon y-\frac{y_2+y_3}{2}=m_2\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right),\ L_5\colon y-\frac{y_1+y_2}{2}=m_1\left(x-\frac{x_2+x_3}{2}\right)$$

推得 $m_1\left(y-\frac{y_2+y_3}{2}\right)=m_2\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以 $\frac{4c}{y_1+y_2}\left(y-\frac{y_2+y_3}{2}\right)=\frac{4c}{y_2+y_3}\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，

$$\left(\frac{4c}{y_1+y_2}-\frac{4c}{y_2+y_3}\right)y=\frac{4c}{y_1+y_2}\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)-\frac{4c}{y_2+y_3}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)=0\Rightarrow y=0$$

故直線 L_2 與 L_5 的交點在對稱軸 $y=0$ 上。

(ii)由(i)知 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸，再由**定理 16**知 $\overline{HN}=2|c|$，因此，以 $\overleftrightarrow{HN}$ 為對稱軸且 $\overline{HN}=2|c|$ 的拋物線。 ■



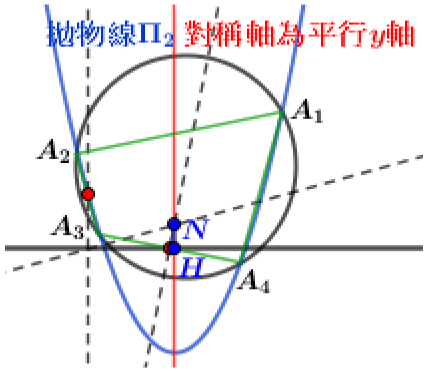


圖 14：僅能作出兩條對稱軸相互垂直的拋物線

【定理 18】(拋物線內接四邊形的延伸性質)

在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形中，若逆時鐘取四點 A_1,A_2,A_3,A_4 中連續三點作拋物線內接四邊形作圖(I)，則在圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中僅能作出兩條對稱軸相互垂直的拋物線，參見圖 14。

【證明】若給定三點 A_1,A_2,A_3 且平行對稱軸的直線 L'，按照拋物線內接四邊形作圖(I)可決定對稱軸 L 且 $\overline{HN}=2|c|$，因此，決定一拋物線 Π_1 及拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，參見圖 14中右圖。當給定三點 A_1,A_3,A_4 且平行對稱軸的直線 L'時，也是決定拋物線 Π_1。

若給定三點 A_2,A_3,A_4 且與 L'垂直的直線當平行對稱軸的直線，按照拋物線內接四邊形作圖(I)，決定對稱軸 L 且 $\overline{HN}=2|c|$，因此，決定一拋物線及拋物線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，參見圖 14中左圖。當給定三點 A_1,A_2,A_4 且與 L'垂直的直線當平行對稱軸的直線時，也是決定拋物線 Π_2。綜合以上，在圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中僅能作

出兩條對稱軸相互垂直的拋物線。 ■

(二)拋物線內接四邊形的作圖(II)

事實上,定平行對稱軸的直線L'是不容易的,主因任三點決定拋物線有可能是斜拋物線,參見圖 15,那麼直線L'如何找呢?參見**輔助定理**及**性質 4**。

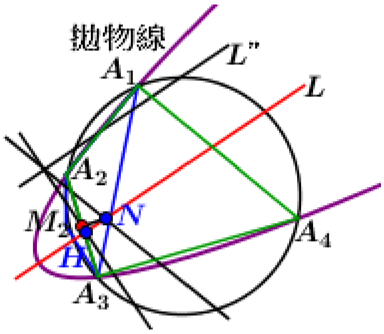


圖 15:斜拋物線

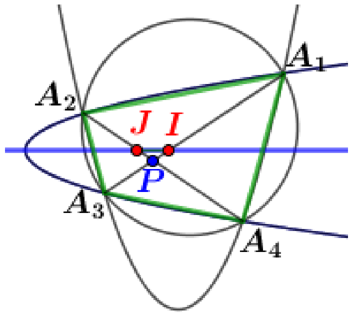


圖 16:拋物線內接四邊形的兩對角線與對稱軸性質

【輔助定理】(拋物線內接四邊形的兩對角線與對稱軸性質)

給定一圓及拋物線內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$,兩對角線$\overline{A_1A_3}$與$\overline{A_2A_4}$交於P,設I,J分別為兩對角線$\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_2A_4}$與對稱軸的交點,參見圖 16,則$\overline{PI}=\overline{PJ}$。

【性質 4】(建構拋物線內接四邊形的對稱軸;由兩對角線上點找平行對稱軸的直線)

給定拋物線內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$且其兩對角線交於P,設一圓為以P為圓心且適當長為半徑的圓,與兩對角線交於V_1,V_2,V_3,V_4,參見圖 17,則拋物線是以$\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$為平行對稱軸的直線且$\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3}$為兩垂直直線。

【證明】由**輔助定理**知$\overline{PI}=\overline{PJ}$,參見圖 16,所以以四邊形$A_1A_2A_3A_4$的兩對角線交點$P$為圓心,以適當長為半徑畫圓交兩對角線於$V_1,V_2,V_3,V_4$,參見圖 17,則$\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$為平行對稱軸的直線$L'$。

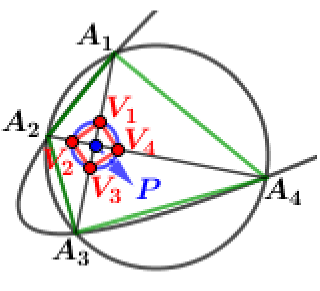


圖 17:斜拋物線

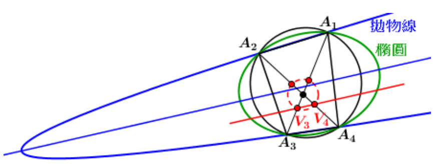


圖 18:橢圓

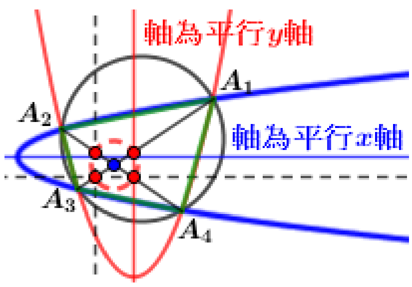


圖 19:二條拋物線內接四邊形

由於$\overline{V_1V_3},\overline{V_2V_4}$為直徑，所以由**泰利斯定理**知

$\angle V_2V_1V_4=\angle V_1V_2V_3=\angle V_2V_3V_4=\angle V_3V_4V_1=90^\circ$，推得$\overleftrightarrow{V_1V_2}//\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_2V_3}//\overleftrightarrow{V_1V_4}$且$\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3}$為兩垂直直線。 ■

那麼沒有按照**性質 4**給定平行對稱軸的直線L'，而採平行x軸當直線L'會是甚麼圖形呢？圖 18中若$\overleftrightarrow{V_3V_4}$為直線$L'$可建構出一拋物線，但採平行$x$軸當直線$L'$的圖形為**橢圓**。

【定理 19】(拋物線內接四邊形作圖(II))

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為圓內接四邊形，則在圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中僅能作出兩個對稱軸相互垂直的拋物線，參見圖 19。

【證明】由**性質 4**知拋物線內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$是以$\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3},\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_1V_4}$為平行對稱軸的直線且$\overleftrightarrow{V_1V_2},\overleftrightarrow{V_2V_3}$為兩垂直直線。由於$\overleftrightarrow{V_1V_2}//\overleftrightarrow{V_3V_4},\overleftrightarrow{V_2V_3}//\overleftrightarrow{V_1V_4}$，所以平行對稱軸的直線僅有二條，參見圖 19。美妙地，與由**定理 18**知在圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中僅能作出兩個對稱軸相互垂直的拋物線之結果是相同的。 ■

五、探討圓錐曲線內接四邊形中的$B-$四邊形

前面已探討拋物線內接四邊形，這裡要探討更一般圓錐曲線內接四邊形**(任兩對邊不平行)**的建構條件，方法共有二種：一是在圓內接四邊形A_1,A_2,A_3,A_4中，由**拋物線內接四邊形作圖**找到橢圓平行長軸(或短軸)的直線及雙曲線平行貫軸(或共軛軸)的直線來決定圓錐曲線內接四邊形，稱其為**圓錐曲線內接四邊形(I)**。二是已知圓內接四邊形A_1,A_2,A_3,A_4中四個頂點，再取平面上一點來決定圓錐曲線內接四邊形，稱為**圓錐曲線內接四邊形(II)**。

(一)由拋物線內接四邊形作圖來建構橢圓內接四邊形(I)

現在要建構**圓或橢圓內接四邊形(I)**，是由圓或橢圓的直徑性質來協助論證。

【性質 5】(橢圓的直徑性質)

給定一橢圓Γ_2，設$\overline{A_1A_2}$為Γ_2中斜率為m的弦，若M_1為$\overline{A_1A_2}$的中點，則所有斜率為m的弦的中點形成的軌跡必定橢圓Γ_2的中心。

【定理 20】(橢圓中弦的中垂線與軸的交點 N_2，與弦的中點到軸的垂足點 H_2，$\overline{H_2N_2}$ 定值)

給定中心為 $O(h,k)$ 的一扁型(或直立型)橢圓 Γ_2，設 $M_2(x_0,y_0)$ 為 Γ_2 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 的中點，且過 M_2 作垂直線交長軸(或短軸)於 H_2 且作 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與長軸(或短軸)交於 N_2，參見圖 20，則(i)當 Γ_2 為扁型橢圓時，$\overline{H_2N_2}=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$。(ii)當 Γ_2 為直立型橢圓時，$\overline{H_2N_2}=\dfrac{a^2}{b^2}|x_0-h|$。

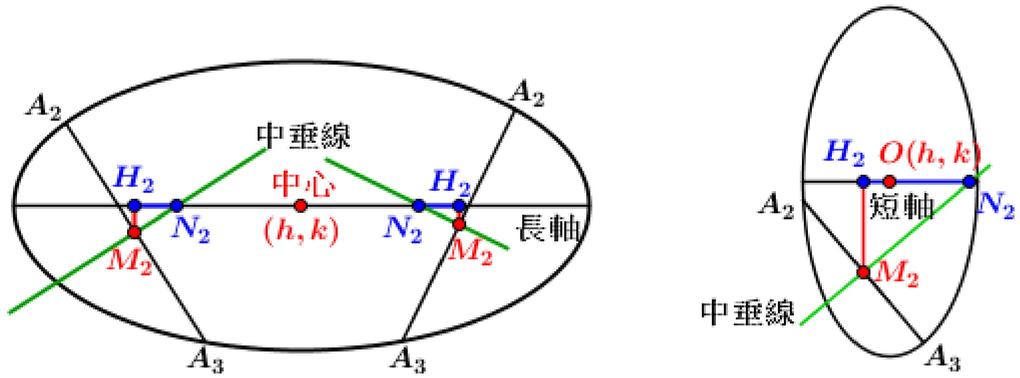


圖 20：$\overline{H_2N_2}$ 值性質

【註】定理20中絕對值取"±"決定在中心 (h,k) 與 $M_2(x_0,y_0)$ 的位置，參見圖 20。另外圓是橢圓特例，所以當圓時，由於 $a=b$，為了區分，將 N_2 改為 N_1，即 N_1 為圓心且 $\overline{H_1N_1}=|x_0-h|$。

【證明】由**性質 5** 知弦 $\overline{A_2A_3}$ 的斜率 $m=-\dfrac{b^2}{a^2}\left(\dfrac{x_0-h}{y_0-k}\right)$，其中 $x_0=\dfrac{x_2+x_3}{2}, y_0=\dfrac{y_2+y_3}{2}$。

(i)當 Γ_2 為扁型橢圓時，所以 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線方程式為 $y-y_0=\dfrac{a^2}{b^2}\left(\dfrac{y_0-k}{x_0-h}\right)(x-x_0)$。

由於長軸方程式為 $y=k$，所以要求 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與長軸的交點時，即令 $y=k$，解得

$x=x_0+\dfrac{b^2}{a^2}(h-x_0)$，故 $\overline{H_2N_2}=|x-x_0|=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$，因此，$\overline{H_2N_2}=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$。

同理可推導出當 Γ_2 為直立型橢圓時，$\overline{H_2N_2}=|x-x_0|=\dfrac{a^2}{b^2}|x_0-h|$。 ■

底下用 $\overline{HN}$ 來推導圓內接四邊形或橢圓內接四邊形的建構條件。

【定理 21】(利用拋物線內接四邊形作圖建構圓內接四邊形(I)的條件)

給定平面上三點A_1,A_2,A_3，設N_1在L_2上且過N_1作L_3的垂直線交於H_1使得圓心為$N_1(h,k)$，其中$\overline{H_1N_1}=|h-x_0|$，參見圖 21，則可建構以$N_1$為圓心且對稱軸為$\overleftrightarrow{H_1N_1}$的圓內接四邊形。

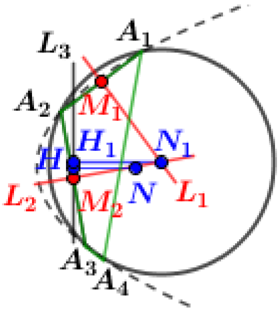
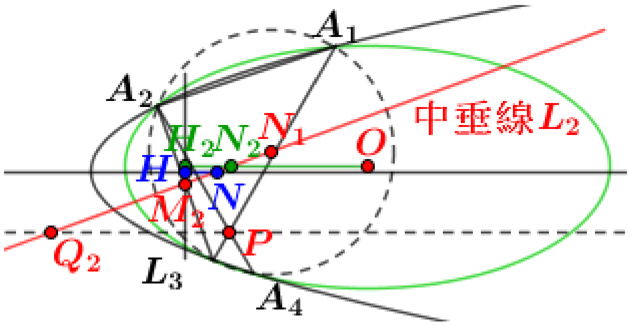


圖 21：利用**拋物線內接四邊形作圖**建構圓內接四邊形

【**證明**】在$\Delta A_1A_2A_3$中，L_1,L_2分別為$\overline{A_1A_2}$與$\overline{A_2A_3}$的中垂線，參見圖 21，所以由**外心性質**知N_1為$\Delta A_1A_2A_3$的外接圓的圓心。又由**定理 20**知$\overline{H_1N_1}=|h-x_0|$。在外接圓上適當取外接圓與拋物線的交點$A_4$，參見圖 21，因此，四邊形$A_1A_2A_3A_4$是以$N_1$為圓心且對稱軸為$\overleftrightarrow{H_1N_1}$的圓內接四邊形。 ■

我們可進一步猜測可取中垂線上的點N_2使得到橢圓的長軸為$\overleftrightarrow{H_2N_2}$，參見**定理 22**。不失一般性，底下**定理 22**是針對長軸為平行x軸或平行y軸的橢圓來探討。



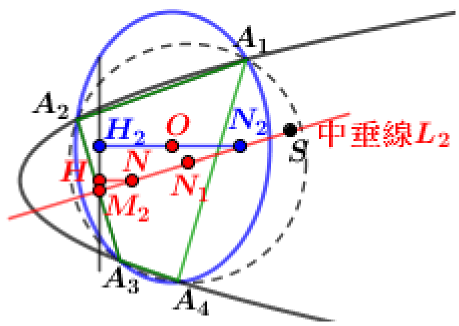


圖 22：利用**拋物線內接四邊形作圖**建構出圓錐曲線中的非退化情形：橢圓

【定理 22】(由拋物線內接四邊形作圖建構橢圓內接四邊形(I)的條件)

給定一圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$，(i)設N_2在$\overline{NN_1}$(不含端點N,N_1)上且作$\overline{H_2N_2}//\overline{HN}$，則可建構以$\overleftrightarrow{H_2N_2}$為長軸的扁型橢圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$，其中$\overline{H_2O}:\overline{H_2N_2}=a^2:b^2$。(ii)設$N_2$在$\overrightarrow{N_1S}$(不含端點$N_1$)上且作$\overline{H_2N_2}//\overline{HN}$，則可建構以$\overleftrightarrow{N_2H_2}$為短軸的直立型橢圓內接四邊形

$A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}=a^2:b^2$。參見圖 22。

【證明】(i)根據圖 33中 $\overline{A_2A_3}$ 作**拋物線內接四邊形作圖**且作 $\overline{H_2N_2}//\overline{HN}$，由**橢圓的構形**知以

$\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為長軸可建構扁型的橢圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $O(h,k)$ 在 N_2 的右邊。

又由**定理 20**知 $\overline{H_2N_2}=\dfrac{b^2}{a^2}(h-x_0)$，即 $\dfrac{\overline{H_2N_2}}{\overline{H_2O}}=\dfrac{\overline{H_2N_2}}{|h-x_0|}=\dfrac{b^2}{a^2}$，故 $\dfrac{\overline{H_2O}}{\overline{H_2N_2}}=\dfrac{a^2}{b^2}$。

注意 $\overline{H_2N_2}$ 值跟隨 a 與 b 而改變，同時中心 $O(h,k)$ 也跟著改變。又當 N_2 移動至 N_1 時，

$a=b$ 且 $\overline{H_1N_1}=h-x_0$，此時圖形為圓 Ω。

(ii)仿照(i)同理可證得由**橢圓的構形**知以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為短軸可建構直立型的橢圓內接四邊

形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $O(h,k)$ 在 H_2 與 N_2 之間。又由**定理 20**知 $\overline{H_2N_2}=\dfrac{a^2}{b^2}|x_0-h|$，即

$\dfrac{\overline{H_2N_2}}{\overline{H_2O}}=\dfrac{\overline{H_2N_2}}{|x_0-h|}=\dfrac{a^2}{b^2}$，故 $\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}=a^2:b^2$，參見圖 22。 ■

(二)由拋物線內接四邊形作圖來建構雙曲線內接四邊形(I)

【性質 6】(雙曲線的直徑性質)

給定一雙曲線 Γ_3，設 $\overline{A_1A_2}$ 為 Γ_3 中斜率為 m 的弦，若 M_1 為 $\overline{A_1A_2}$ 的中點，則所有斜率為 m 的弦的中點形成的軌跡必定雙曲線 Γ_3 的中心 O。

【證明】仿照**性質 5** 來證明。 ■

【定理 23】(雙曲線中弦中垂線與軸的交點 N_3，與弦的中點到軸的垂足點 H_3，$\overline{H_3N_3}$ 值性質)

給定中心為 $O(h,k)$ 的一左右型(或上下型)雙曲線 Γ_3，設 $M_2(x_0,y_0)$ 為 Γ_2 中斜率為 m 的弦 $\overline{A_2A_3}$ 的中點，且過 M_2 作垂直線交貫軸(或共軛軸)於 H_3 且作 $\overline{A_2A_3}$ 的中垂線與貫軸(或共軛軸)交於 N_3，則(i)當 Γ_3 為左右型雙曲線時，$\overline{H_3N_3}=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$。(ii)當 Γ_3 為上下型雙曲線時，$\overline{H_3N_3}=\dfrac{a^2}{b^2}|x_0-h|$。參見圖 23。

【註】定理23中絕對值取"±"決定在中心 (h,k) 與 $M(x_0,y_0)$ 的位置，參見圖 23。

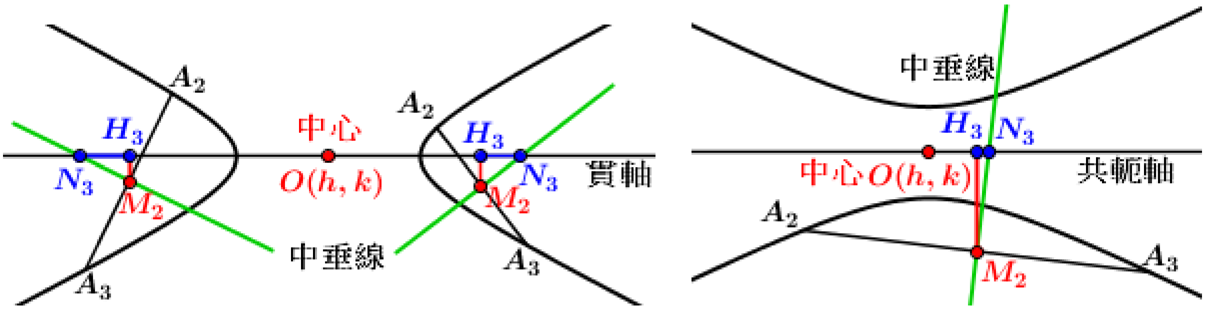


圖 23： $\overline{H_3N_3}$ 值性質

【證明】仿照**定理 20** 來證明。 ■

是否可在 L_2 上取一點 N_3 使得建構出以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸或共軛軸的雙曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 呢？要解決上述兩個問題，先探討**圓錐曲線中的退化圖形：兩相交直線**，參見**性質 7**，此時必須考慮三個關鍵點 R_1、P 及 R_2，分別為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 的交點、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 的交點及 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 的交點，參見圖 24。

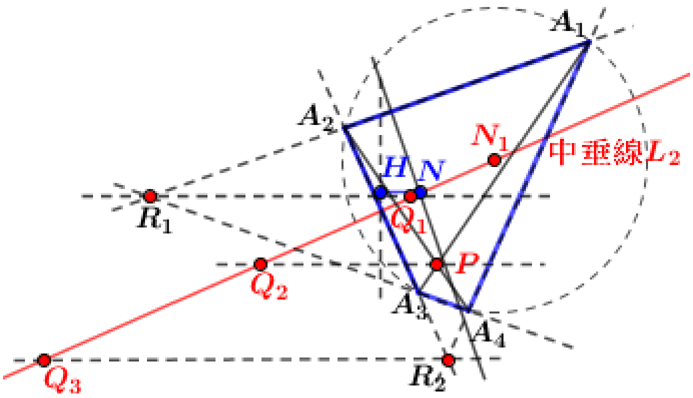


圖 24：利用拋物線內接四邊形作圖建構出圓錐曲線中的退化情形：兩相交直線

【定理 24】(由拋物線內接四邊形作圖建構兩相交直線內接四邊形的條件)

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的兩對角線交於 P，設 Q_1,Q_2,Q_3 分別為過 R_1,P,R_2 作 $\overleftrightarrow{NH}$ 的平行線與 L_2 的交點，則分別建構出以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 、$\overleftrightarrow{Q_2P}$ 及 $\overleftrightarrow{Q_3R_2}$ 為對稱軸的兩相交直線單接四邊形、兩相交直線雙接四邊形、兩相交直線單接四邊形。

【證明】仿照**定理 14**來證明。 ■

由**定理 24**知 Q_1,Q_2,Q_3 在 L_2 上影響構成兩相交直線的關鍵點，又兩相交直線為雙曲線的退化圖形，可猜測 Q_1,Q_2,Q_3 會影響著雙曲線的形狀之關鍵點，參見**定理 25**。

【定理 25】(由拋物線內接四邊形作圖建構雙曲線內接四邊形的建構條件)

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設 $\overline{H_3N_3}//\overline{HN}$，(i)若 N_3 在 N 與 Q_1 之間，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸的左右型雙曲線單接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{OH_3}:\overline{H_3N_3}=a^2:b^2$。(ii)若 N_3 在 Q_2 與 Q_3 之間，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸可建構左右型的雙曲線雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_3O}:\overline{N_3H_3}=a^2:b^2$。(iii)若 N_3 在 Q_1 與 Q_2 之間，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸的上下型雙曲線雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$。(iv)若 N_3 在 $\overrightarrow{Q_3T}$ (不含 Q_3)上，則可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸的上下型雙曲線單接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$。

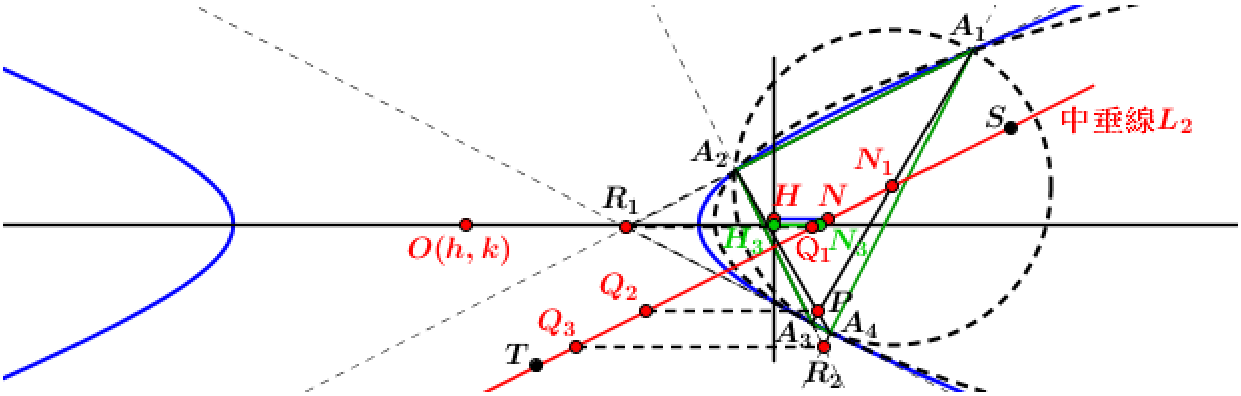


圖 25：利用**拋物線內接四邊形作圖**建構出左右型雙曲線單接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

【證明】(i) (ii)當貫軸為平行 x 軸的雙曲線時，由**定理 23**知 $\overline{H_3N_3}=\dfrac{b^2}{a^2}|x_0-h|$，由**定理 24** 知 Q_1,Q_2,Q_3 影響著雙曲線的退化圖形之關鍵點，於是以 Q_1,Q_2,Q_3 來討論，有二種情形：

一是 N_3 在 N 與 Q_1 之間：中心 $O(h,k)$ 在 $\overline{H_3N_3}$ 的左邊，即 $\overline{OH_3}:\overline{H_3N_3}=a^2:b^2$，參見圖 25。

根據雙曲線的構形知以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸可建構左右型的雙曲線單接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$。

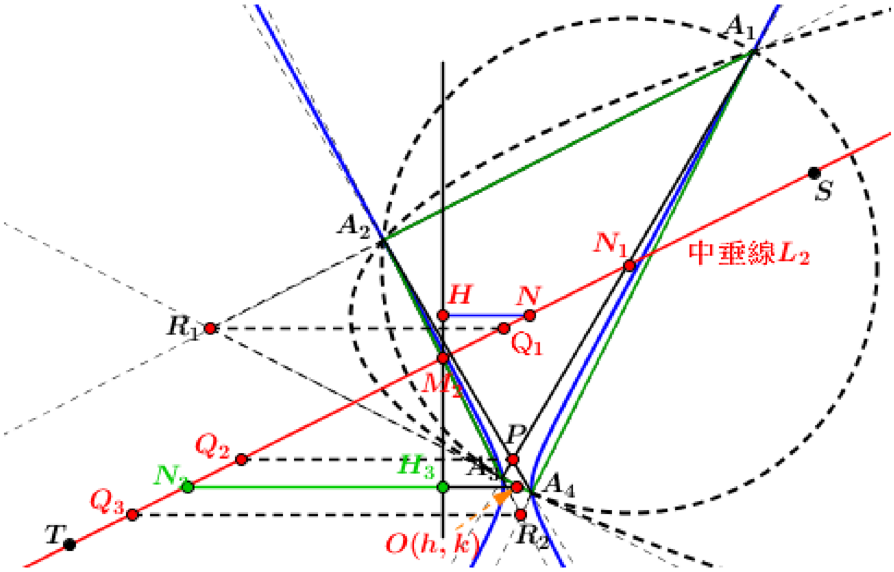


圖 26：利用**拋物線內接四邊形作圖**建構出左右型雙曲線雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$

二是 N_3 在 Q_2 與 Q_3 之間，中心 $O(h,k)$ 在 $\overline{N_3H_3}$ 的右邊，參見圖 26，即 $\overline{H_3O}:\overline{N_3H_3}=a^2:b^2$。

根據**雙曲線的構形**知以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸可建構左右型的雙曲線雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$。

(iii)(iv)當貫軸為平行 y 軸的雙曲線時，由**定理 23**知 $\overline{H_3N_3}=\dfrac{a^2}{b^2}|x_0-h|$，由**定理 24**知 Q_1,Q_2,Q_3 影響著雙曲線的退化圖形之關鍵點，於是以 Q_1,Q_2,Q_3 來討論，有二種情形：

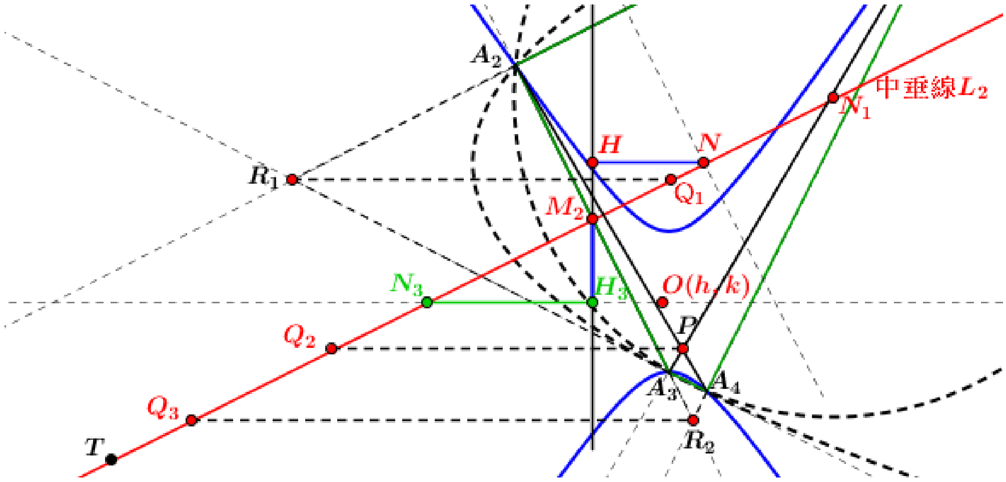


圖 27：利用**拋物線內接四邊形作圖**建構出上下型雙曲線雙接四邊形

一是 N_3 在 Q_1 與 Q_2 之間：中心 $O(h,k)$ 在 $\overline{N_3H_3}$ 的右邊，即 $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$，參見圖 27。

根據**雙曲線的構形**知 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸可建構上下型的雙曲線雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$。

二是 N_3 在 $\overrightarrow{Q_3T}$ (不含 Q_3)上，中心 $O(h,k)$ 在 $\overline{N_3H_3}$ 的右邊，參見圖 28，即

$\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$，根據**雙曲線的構形**知以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸可建構上下型的雙曲線單

接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。

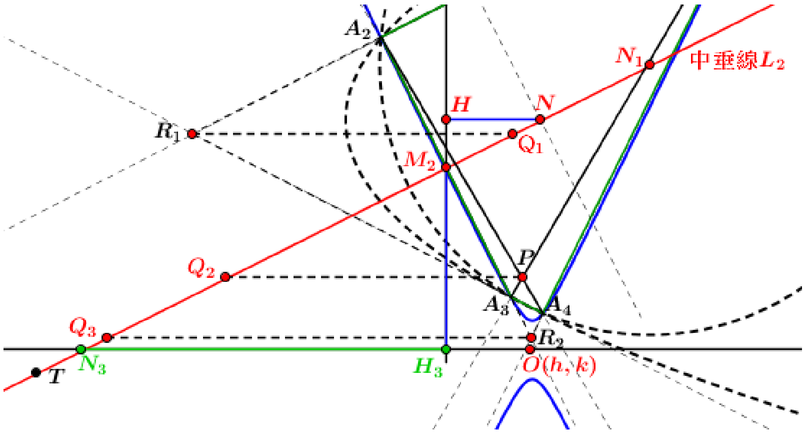


圖 28：利用**拋物線內接四邊形作圖**建構出上下型雙曲線單接四邊形

因此，根據以上討論，由**拋物線內接四邊形作圖**建構雙曲線單(雙)接四邊形的建構條件共有四種。 ■

(三)建構橢圓或雙曲線內接四邊形(II)

接著要探討**圓錐曲線內接四邊形作圖(II)**：已知圓內接四邊形 A_1,A_2,A_3,A_4 中四個頂點，再在平面上取一點 Q 來決定圓錐曲線內接四邊形呢？首先由圓、兩條拋物線、六條直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 及 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 來區分 **31** 區域 Π，參見圖 29，其中 P 點為 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 的交點、 R_1 點為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 的交點及 R_2 點為 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 的交點，取區域 Π 上一點為 Q ，那麼 Q,A_1,A_2,A_3,A_4 五點可建構何種圓錐曲線內接四邊形呢？

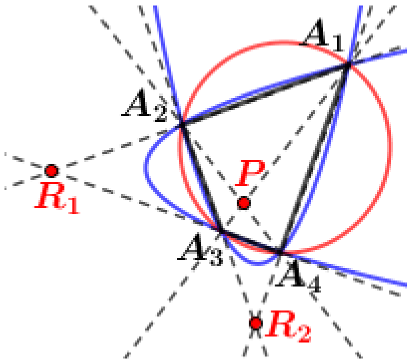


圖 29：圓、兩條拋物線、六條直線區分 **31** 區域 Π

我們得到圓錐曲線內接四邊形共有 11 種，包含 3 種兩相交直線、兩種拋物線、扁型橢圓(Q點在**區域 IV** 上)及直立型橢圓(Q點在**區域 V** 上)、左右型雙曲線(雙曲線單接四邊形： Q點在**區域 VI(a)**上及雙曲線雙接四邊形： Q點在**區域 VI(b)**)及上下型雙曲線(雙

曲線單接四邊形：Q點在**區域 VII(a)**上、雙曲線雙接四邊形：Q點在**區域 VII(b)**上)，參見圖 30-46 與**定理 26-27**。

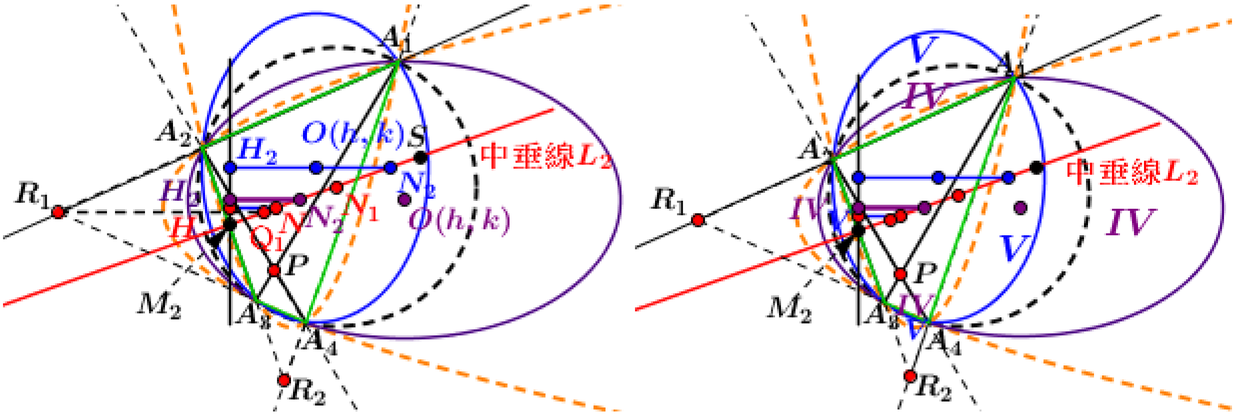


圖 30：過 Q,A_1,A_2,A_3,A_4 五點可建構橢圓內接四邊形的情形

【定理 26】(橢圓內接四邊形(任兩對邊不平行)的一般情形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且點 H_2,N_2 為由**橢圓內接四邊形(I)**得到的二點，若 Q 為平面上任何一點，則(i)當 Q 在圖 30 中**區域 IV** 時，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{ON_2}/\overline{OH_2}}$ 的扁型橢圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$。(ii)當 Q 在圖 31 中**區域 V** 時，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{ON_2}/\overline{H_2N_2}}$ 的直立型橢圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$。

【證明】(i)由**定理 22** 知當 N_2 在 N 與 N_1 之間時，可建構以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為長軸的扁型橢圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_2O}:\overline{H_2N_2}=a^2:b^2$，參見圖 30，故離心率為

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{\overline{ON_2}}}{\sqrt{\overline{OH_2}}}<1$$

此時當 Q 在圖 30 中**區域 IV** 時，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{ON_2}/\overline{OH_2}}$ 的扁型橢圓。

(ii)由**定理 22** 知 N_2 在 $\overrightarrow{N_1S}$ (不含 N_1)上時，可建構以 $\overleftrightarrow{H_2N_2}$ 為短軸的直立型橢圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_2N_2}:\overline{H_2O}:=a^2:b^2$，參見圖 31，故離心率為

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{\overline{ON_2}}}{\sqrt{\overline{H_2N_2}}}<1$$

此時 Q 在圖 31 中**區域 IV**，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{ON_2}/\overline{H_2N_2}}$ 的直立型橢圓。 ■

【定理 27】(雙曲線內接四邊形(任兩對邊不平行)的一般情形)

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓內接四邊形且點 H_3, N_3 為由**雙曲線內接四邊形(I)**得到的二點，若 Q 為平面上任何一點，則(i)當 Q 在 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 及 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 上時，圖形為兩相交直線，共有三條。(ii)當 Q 在圖 31 中**區域 VI(a)**時，離心率 $\sqrt{\overline{ON_3}/\overline{OH_3}}$ 的左右型雙曲線單接四邊形。(iii)當 Q 在圖 31 中**區域 VI(b)**時，離心率 $\sqrt{\overline{ON_3}/\overline{OH_3}}$ 的左右型雙曲線雙接四邊形。(iv)當 Q 在圖 32 中**區域 VII(a)**時，離心率 $\sqrt{\overline{N_3O}/\overline{N_3H_3}}$ 的上下型雙曲線雙接四邊形。(v)當 Q 在圖 32 中**區域 VII(b)**時，離心率 $\sqrt{\overline{N_3O}/\overline{N_3H_3}}$ 的上下型雙曲線單接四邊形。

【證明】(i)由**定理 24** 知當 Q 在 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 及 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 上時，建構出以 $\overleftrightarrow{Q_1R_1}$ 、$\overleftrightarrow{Q_2P}$ 及 $\overleftrightarrow{Q_3R_2}$ 為對稱軸的兩相交直線雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 。此時相交直線共有三條：

$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 。

(ii)由**定理 24** 知當 N_3 在 N 與 Q_1 之間時，以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸可建構左右型的雙曲線單接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，其中 $\overline{OH_3}:\overline{H_3N_3}=a^2:b^2$ ，故離心率為 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{\overline{ON_3}}}{\sqrt{\overline{OH_3}}}>1$ 。

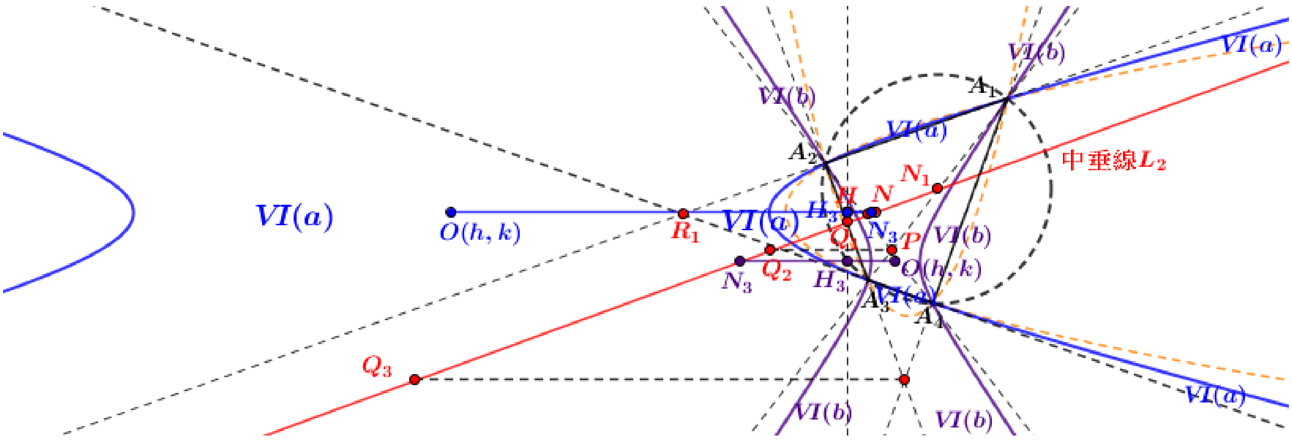


圖 31：過 Q, A_1, A_2, A_3, A_4 五點可建構左右型雙曲線單(雙)接四邊形的情形

此時當 Q 在圖 31 中**區域 VI(a)**內時，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{ON_3}/\overline{OH_3}}$ 的左右型雙曲線單接四邊形。

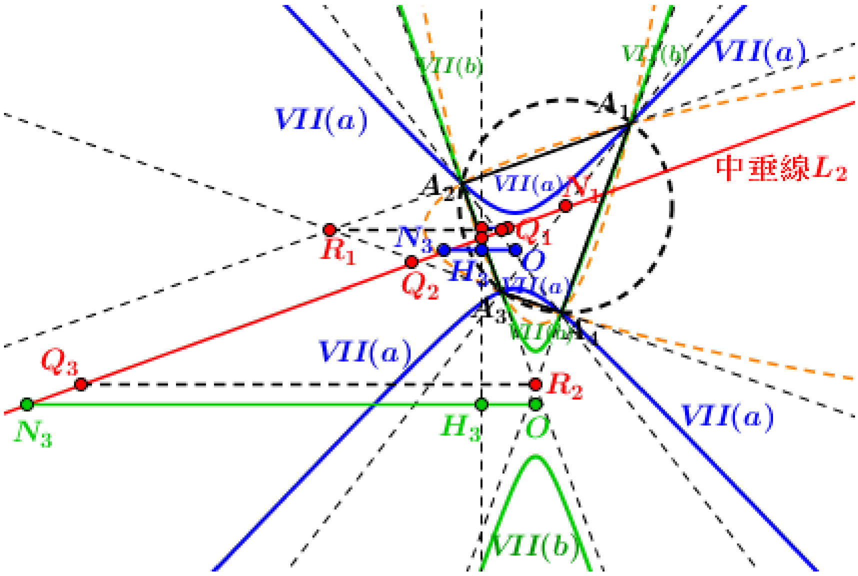


圖 32：過 Q, A_1, A_2, A_3, A_4 五點可建構左右型雙曲線單(雙)接四邊形的情形

(iii)由**定理 24** 知當 N_3 在 Q_2 與 Q_3 之間時，可建構以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為貫軸的左右型雙曲線雙接四

邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_3O}:\overline{H_3N_3}=a^2:b^2$，故離心率為 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{\overline{ON_3}}}{\sqrt{\overline{OH_3}}}>1$。

此時當 Q 在圖 31 中**區域 VI(b)**內時，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{ON_3}/\overline{OH_3}}$ 的左右型雙曲線單接四邊形。

(iv)由**定理 24** 知 N_3 在 Q_1 與 Q_2 之間時，以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸可建構上下型的雙曲線雙接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$，故離心率為 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{\overline{N_3O}}}{\sqrt{\overline{N_3H_3}}}>1$

此時當 Q 在圖 32 中**區域 VII(a)**內時，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{N_3O}/\overline{N_3H_3}}$ 的上下型的雙曲線雙接四邊形。

(v)由**定理 24** 知 N_3 在 $\overrightarrow{Q_3T}$ (不含 Q_3)上時，以 $\overleftrightarrow{H_3N_3}$ 為共軛軸可建構上下型的雙曲線單接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，其中 $\overline{H_3N_3}:\overline{OH_3}=a^2:b^2$，故離心率為 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{\overline{N_3O}}}{\sqrt{\overline{N_3H_3}}}>1$，

此時當 Q 在圖 32 中**區域 VII(b)**內時，圖形為離心率 $\sqrt{\overline{N_3O}/\overline{N_3H_3}}$ 的上下型的雙曲線單接四邊形。 ■

【**定理 26**】(**圓錐曲線內接四邊形存在婆羅摩笈多定理的性質**)

給定一圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，設 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$，則由圖 33 中區分區域取一點可建構出十一種的圓錐曲線內接四邊形包含二種拋物線、三種兩相交直線、二種橢圓及四種雙曲線內接四邊形且這些四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 皆為 $B-$四邊形。

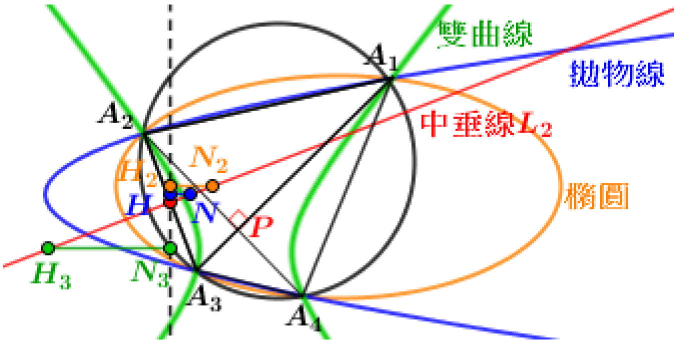


圖 33：圓錐曲線內接四邊形為 $B-$四邊形

【**證明**】由**定理 26** 與**定理 27** 知可作出二種拋物線、三種兩相交直線、二種橢圓及四種雙曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，共十一種。當以上圓錐曲線內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中邊長若滿足 $\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2=4r^2$(由**預備定理 2** 知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的兩對角線相互垂直)，即 $B-$四邊形。注意**拋物線內接四邊形作圖**不受兩對角線相互垂直所影響。 ■

參、研究結果

修正參賽中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品中的結果：特別地過 P_{i1} 考慮第 i 條水平分線後緊連的邊及過 P_{ij} 考慮第 i 條水平分線前(後)緊連的邊時，滿足關鍵角度的情形皆滿足對邊建構原則，但不是 $B-$多邊形，稱為特定多邊形，參見**定理 8-10**。

這作品針對圓錐曲線內接四邊形作深入探討，主要結果如下：

一、透過圓錐曲線族來探討各種圓錐曲線內接正方形的建構條件，且推導出七種圓錐曲線(含退化圖形)內接正方形的 $B-$正方形，上述正方形皆為 $B-$正方形，參見**定理 14-15**。

二、證明給定平面上三點與拋物線的平行軸條件下，利用拋物線的直徑性質建構拋物線內接四邊形，參見**定理 16-18**。同時也得到給定圓內接四邊形，探討出拋物線的平行軸且此四邊形可作出二種拋物線內接四邊形，參見**輔助定理**與**定理 19**。

三、進一步探討橢圓或雙曲線的直徑性質，再利用其直徑性質及拋物線內接四邊形作圖推導

出圓錐曲線內接四邊形(含退化圖形)的建構條件。研究方法有二：

(i)利用過拋物線內接四邊形作圖中的中垂線建構軸，推導出十一種圓錐曲線(含退化圖形)內接四邊形的建構條件，參見**定理 20-25**。

(ii)給定一圓內接四邊形，由區分 31 區域再取一點，即可建構出十一種的圓錐曲線內接四邊形，參見**定理 26-27**。

如上二種方法中十一種圓錐曲線包含圓、二種拋物線、二種橢圓、三種兩相交直線及四種雙曲線內接四邊形且若滿足 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$ 的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，則皆為 $B-$四邊形，參見**定理 28**。

肆、結論與未來展望

本作品深入探討圓錐曲線內接四邊形的情形，注意到若已建構出圓錐曲線內接四邊形，要為 $B-$**四邊形**僅要再考慮兩對角線是否相互垂直或是否符合 $\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = 4r^2$ (參見**預備定理 2**)，所以本作品著眼於建構何種圓錐曲線內接四邊形之探討。

事實上，建構圓錐曲線內接四邊形是有難度的，首先考慮圓錐曲線內接正方形，透過圓錐曲線族來探討各種圓錐曲線內接正方形的建構條件，論證中發現特殊情形與一般情形的建構條件是相同的，推導出七種的圓錐曲線內接正方形，這是令人驚喜的結果。事實上，也可以探討圓錐曲線內接梯形，與圓錐曲線內接正方形相同均不存在拋物線內接正方形或梯形，推導出八種圓錐曲線內接梯形，包含兩平行直線、二種兩相交直線、二種橢圓及三種雙曲線(左右型雙接、上下型單接及雙接)等等。

探討圓錐曲線內接正方形中得到不存在拋物線內接正方形，於是專研拋物線內接四邊形作圖，提供兩種方法。接著透過拋物線內接四邊形作圖論證出任意兩對邊不平行的四邊形僅能作出兩種拋物線內接四邊形，美妙地這兩種拋物線的對稱軸是相互垂直的，更令人吃驚地可由四邊形的兩對角線可決定兩條拋物線的平行對稱軸之直線，當然也可以建構斜拋物線。

接著由拋物線內接四邊形作圖中的中垂線建構軸，來決定何種圓錐曲線(含退化圖形)內接四邊形，建構出十一種的圓錐曲線內接四邊形；另一是給定圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，區分區域上一點 Q，由 A_1, A_2, A_3, A_4, Q 五點決定何種圓錐曲線(含退化圖形)內接四邊形也建構出十一種的圓錐曲線內接四邊形。雙曲線情形特別分二種定義：**雙曲線單接四邊形**(四邊形的頂點

接在雙曲線一支上，參見圖 5)及**雙曲線雙接四邊形**(四邊形的頂點接在雙曲線二支上，參見圖 6)。另外雙曲線的退化圖形-兩相交直線包含**兩相交直線單接四邊形**及**兩相交直線雙接四邊形**，參見圖 7。

數學家對圓錐曲線的研究從古希臘探究至今，歷史悠久，這作品研究中發現無心椎線－拋物線的作圖最難，原因是圓內接四邊形中僅有兩種，而橢圓及雙曲線有無限多條，所以從拋物線作圖著手，因而得到圓錐曲線內接四邊形的建構條件或圓錐曲線的形狀，是個有趣的研究歷程，部分定理及圓錐曲線內接四邊形的幾何性質仍繼續研發，使之完備為止。

伍、參考資料

[1]沈康身 (2011)。**歷史數學名題賞析 03**。新北市：稻田出版社。

[2]林〇〇、彭〇〇 (2020)。圓舞曲-婆羅摩笈多定理推廣至圓或橢圓內接多邊形中之探討。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品。

[3]黃家禮 (1997)。**幾何明珠**。台北市：九章出版社。

[4]Coxeter, H. S. M. (1967). Greitzer, S. L.*Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p. 59.

[5] Keith Kendig. (1938). *Conics*. Cambridge University Press.

[6]Honsberger, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p.37.

#【評語】010050

本作品主要係推廣婆羅摩笈多定理。原定理為圓內接四邊形若兩對角線垂直，則通過對角線交點的直線，若垂直於一邊，必平分另一邊。這個定理本身就是一個簡單幾何相似形的概念，推廣到正 n 邊，或任一夾角並不困難。但是推廣到圓錐曲線上，則限制頗多，需要多費一些功夫才能夠造成公。全篇作品由近百個小性質所組成，相當龐雜，基本上就是不斷的衍生既有婆羅摩笈多定理到不同圖形上。建議作者應該用一個比較全面性的角度去處理這個問題，精簡成數個核心定理即可。或者說明，為何所有的構造均可以成功的背後數學理由。