2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010049

參展科別　數學

作品名稱　坐標平面上△尤拉線的操弄探討

就讀學校　基隆市立中正國民中學

指導教師　林耀南

作者姓名　巫玟瑾

關鍵詞　尤拉線(Euler Line)、圓錐曲線(Conic Sections)、多邊形分割點(Split Point)

作者簡介

我是巫玟槿，目前就讀基隆市中正國中三年級。我的興趣是閱讀各種的數學書籍，不論是國中、高中、大學的數學知識都讓我廢寢忘食，我也喜歡鑽研艱難的數學問題，每當解開謎題時，都帶給我無比的成就。非常榮幸可以來到國際科展，將拙作分享給諸位數學高手，也希望能在這次國際科展中，認識到更多熱愛數學的朋友。

摘要

本文先針對直線L和三定點A、B(線外)、P(線上)，探討△ABP的尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$的公式，透過函數凹性判定和對函數最小值N和3的比較，提供是否有解的依據，並找到了漂亮的判斷公式$\frac{4ab}{h^2}$。接著在確定尤拉線平行$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$的存在性及解的公式後，發現最多有三解。

對於前文的P點，作者利用先前發現的一系列定理，設計了能以尺規作圖達成△ABP的尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$的兩條直線，當在那兩條線上分別取A點和B點之後，可用尺規作圖找到P點，甚是有趣。

針對首段P點，兩平行線，尤拉線和△各邊，交角可作為0°，作者推廣至△ABP的尤拉線與$\overline{AB}$達成交角為指定角的方法。

在探討藉多邊形各邊與分割點連接的子△中，作者發現任意三角形不存在能使各子△尤拉線平行原多邊形與其共用邊的分割點P；但四邊形、五邊形可能存在符合此條件的分割點P，且能利用前文定理創造出這樣的多邊形。

Abstract

This article first focuses on line L and three fixed points, A, B (outside the line), and P (on the line).Then it explores the formula which can make Euler line of △ABP parallel to $\overleftrightarrow{AB}$. Then, we found $\frac{4ab}{h^2}$, the beautiful formula of judgment, by judging whether the function is concave or not and comparing N, the minima of function, with 3. Finally, after confirming that the Euler line can be parallel to $\overleftrightarrow{AP}$ and $\overleftrightarrow{BP}$, the number of solutions is three at most.

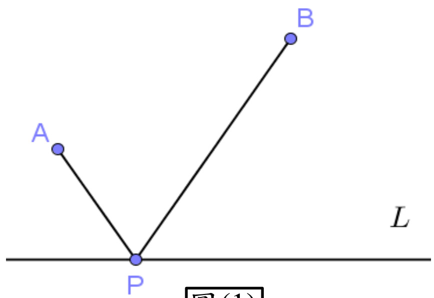
For the solution of point P in the previous article, using a series of the theorems found earlier, the author designed pairs of lines that can be used for making the Euler line parallel to $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AP}$, or $\overleftrightarrow{BP}$ by straightedge and compass construction. When A is on the one line and B is on the other, we can use a special method to achieve the goal.

For the solution of the point P in the first paragraph, the angle between the two parallel lines, the Euler line and the each side of the triangle, can be assume as 0°. The author extended arbitrary angle, and we found a new way to make the solution of the P can be done.

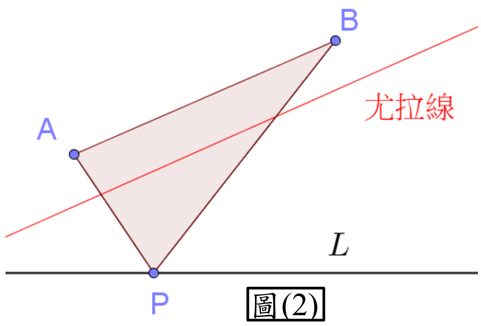
Finally, we discussed the sub-triangles, which is made by connecting Split Point and each sides of the polygon. Any triangles can't be found any Split Point P, which can make each Euler lines of the sub-triangles parallel to common side of the sub-triangle and polygon, but some of quadrilaterals and pentagons might be able to be found that. And the eligible polygons can be found by theorems in the previous article.

壹、研究動機

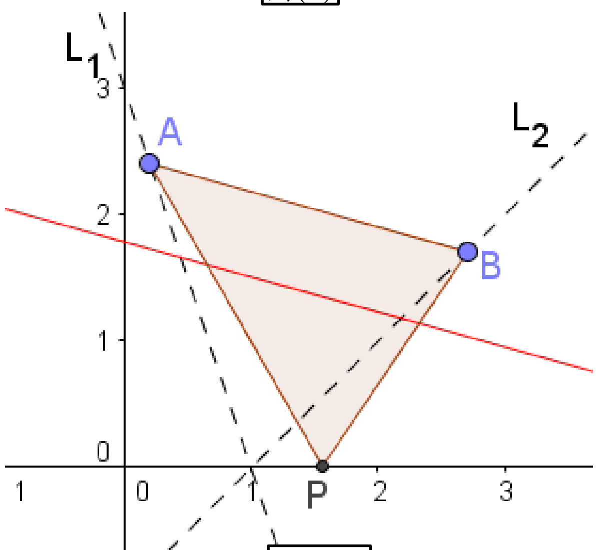
在幾何課程中，常出現一道題目：在直線L上方有A、B兩定點，如圖(1)，試在L上用尺規作圖找出一點P，使$\overline{PA}+\overline{PB}$最小。我們又想是否可以在$L$上找到一點$P$，使$\triangle PAB$的尤拉線平行$\overline{AB}$？如圖(2)，這樣的尤拉線一定有解嗎？有沒有什麼規則可以事先預判呢？再如圖(3-1)、(3-2)，我們發現了幾組的兩條直線，依序選定A、B後，可利用尺規作圖找出使尤拉線平行$\overline{AB}$、$\overline{AP}$、$\overline{BP}$的P點。又如圖(4-1)，在△ABC 中是否存在以一點 P，使尤拉線L、M、N平行$\overline{AB}$、$\overline{CA}$、$\overline{BC}$，亦或如圖(4-2)，是否可以擴充到多邊形呢?



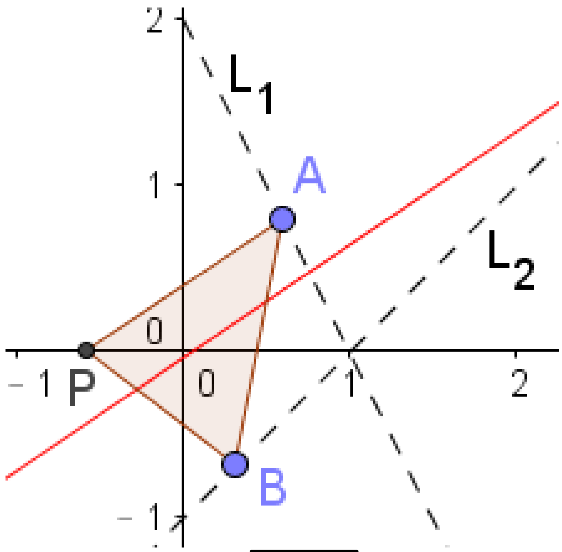
圖(1)



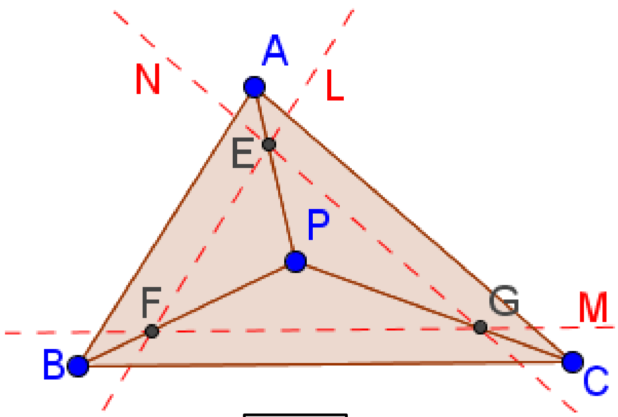
圖(2)



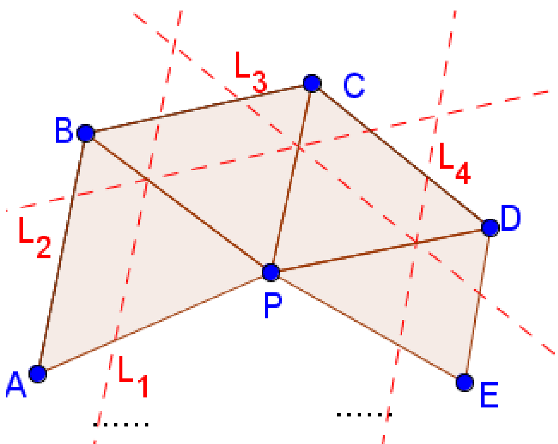
圖(3-1)



圖(3-2)



圖(4-1)



圖(4-2)

貳、名詞解釋

一、$m_{某線}$：某線斜率，若為m_E則為尤拉線斜率。

二、分割點 P　(Split Point P)：如圖(4-1)、圖(4-2)，P 在空白的平面上，藉由P點與各邊連接，將多邊形分割成多個子△。

參、研究目的

一、如圖(2)，對x軸外的兩定點 A、B，和x軸上的動點 P，探討△ PAB 尤拉線平行$\overline{AB}$、$\overline{BP}$或$\overline{PA}$的條件。

二、進一步，如圖(3-1)、圖(3-2)，探討設計兩條交點在x軸的特殊定直線L_1、L_2，使得使用者對在 L_1上的動點 A，和在L_2上的動點 B，都能在x軸上，以尺規作圖找到一點 P，使得△ PAB尤拉線平行$\overline{AB}$或$\overline{BP}$或$\overline{PA}$，且 A、B 在x軸的同異側皆可。

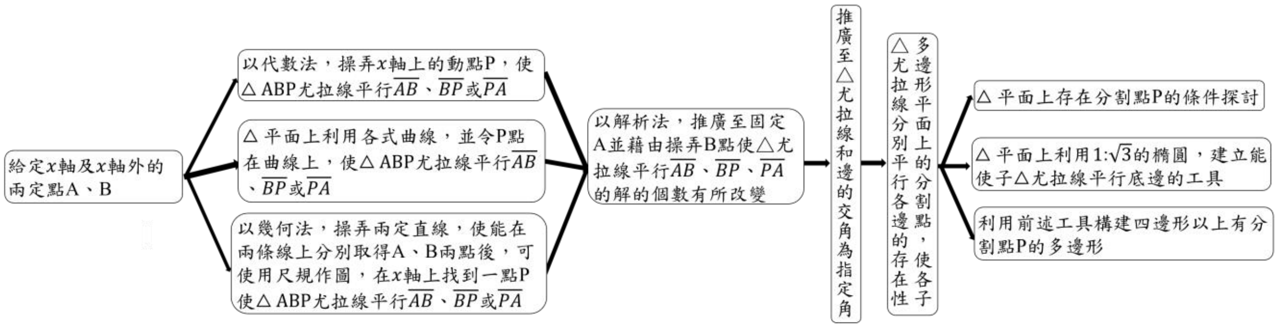
三、推廣目的一、至△ ABP的尤拉線和$\overline{AB}$達成交角為指定角(不只是平行)的探討。

四、探討如圖(4-1)，判斷△ CAB 分割點 P，使各子△尤拉線同時分別平行各邊的存在性。

五、探討如圖(4-2)，判斷多邊形分割點 P，使各子 △ 尤拉線同時分別平行各邊的存在性。

肆、研究過程與方法

一、 研究架構

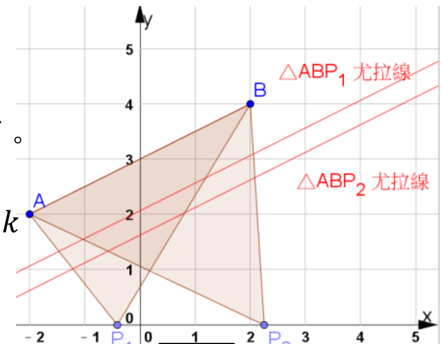


二、 固定$\overline{\text{AB}}$兩點，P在x軸上移動，找出△ABP尤拉線平行$\overline{\text{AB}}$、$\overline{BP}$、$\overline{\text{PA}}$的P點座標

(一) 找出△ABP尤拉線平行$\overline{\text{AB}}$的P點座標（解析法）

一開始我們先舉一例特殊化運算，確認其解的存在性。

令$A(-2,2)$、$B(2,4)$、$P(t,0)$，試使△PAB的尤拉線 ∥ $\overleftrightarrow{AB}$。



圖(5)

(1)由$\overleftrightarrow{AB}$方程式為$y=\frac{1}{2}x+3$，令尤拉線之方程式為$y=\frac{1}{2}x+k$

(2)算得重心座標為$\left(\frac{-2+2+t}{3},\frac{2+4+0}{3}\right)=\left(\frac{t}{3},2\right)$

(3)再由$\overline{AB}$、$\overline{PB}$中垂線聯立可得外心座標$\left(\frac{t^2+4}{2t+12},\frac{-t^2+3t+14}{t+6}\right)$

(4)將外心座標與重心座標代入尤拉線的方程式$y=\frac{1}{2}x+k$，得：$13t^2-24t-12=0$

(5)檢查判別式：$D=b^2-4ac=1200>0$，有兩解 $\Rightarrow P\left(\frac{12+10\sqrt{3}}{13},0\right)$ 或$P\left(\frac{12-10\sqrt{3}}{13},0\right)$

將結果畫出，如圖(5)。則尤拉線和$\overleftrightarrow{AB}$平行，即為所求。

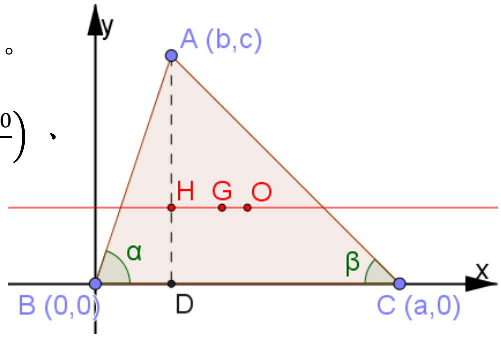
透過這個觀察，可知在平面上給兩定點A,B及外側一直線L，檢視在直線L上是否存在一個點P，使△PAB的尤拉線平行$\overleftrightarrow{AB}$，依上文的舉例來看是存在的，且依一元二次方程式的解來看，可能有兩個相異解、重根一個解，甚至也可能無解。因為這種P點的解有很多情況，所以我們後面要去創造一套判斷公式，讓使用者在收到A,B兩定點及外側直線L的資料之後，可立即判定是否有解並且利用公式把解算出來，因此我們找出了以下預備定理。

Lemma1: 平面上有$\triangle ABC$，當$\tan\angle A\cdot\tan\angle B=3$，若且唯若其尤拉線平行$\overline{AB}$。

<proof>

(1)令$A(b,c)$、$B(0,0)$、$C(a,0)$，$a>0$、$c>0$，如圖(6)。

(2)經運算後可得外心$O\left(\frac{a}{2},\frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$、重心$G\left(\frac{b+0+a}{3},\frac{c+0+0}{3}\right)$、垂心$H\left(b,\frac{ab-b^2}{c}\right)$



圖(6)

(3)尤拉線$\parallel\overline{BC}$，則H、G、O的y座標必相同

$\Rightarrow\frac{c}{3}=\frac{b^2+c^2-ab}{2c}=\frac{ab-b^2}{c}\Rightarrow c^2=3(ab-b^2)$

$\Rightarrow\tan\angle A\cdot\tan\angle B=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{c^2}{ab-b^2}=\frac{3(ab-b^2)}{ab-b^2}=3$

(4)反過來，當$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3$，即$\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{a-b}=3\ \therefore\frac{c^2}{ab-b^2}=3$

$\Rightarrow\frac{c}{3}=\frac{ab-b^2}{c}\Rightarrow G$的$y$座標$=H$的$y$座標　　證畢

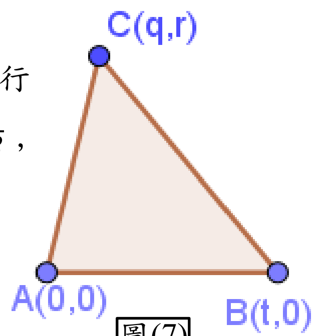
Theorem1: 取 A、B 點作橢圓短軸頂點，以$\sqrt{3}\,\overline{AB}$為長軸，則此橢圓上除四頂點外的任意一點，其與 A、B 所連成的三角形之尤拉線，必定與$\overline{\text{AB}}$平行。

<proof>

(1) 在座標平面上取 A(0,0) , B(t,0) , C(q,r)，欲使△ABC 尤拉線與$\overline{\text{AB}}$平行

(2) 由 **Lemma1** 可知若$\tan\angle A\cdot\tan\angle B=3$，若且唯若尤拉線平行$\overline{AB}$，

可推得$\tan\angle A=\frac{r}{q}$、$\tan\angle B=\frac{r}{t-q}$

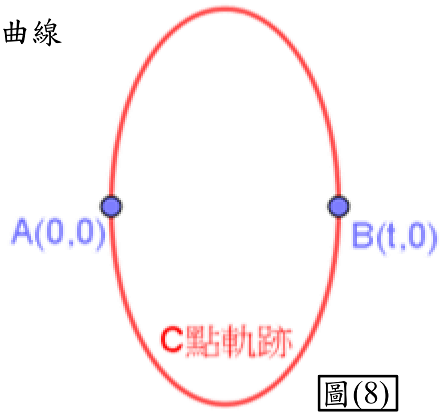


圖(7)

(3) 令$\tan\angle A\cdot\tan\angle B=3$，即$\frac{r^2}{tq-q^2}=3$

(4) 由上式可推得 C 點軌跡$\frac{y^2}{tx-x^2}=3$, $tx-x^2\neq 0$，代入圓錐曲線判別式後，可知其為一橢圓，並經轉換後可寫作：

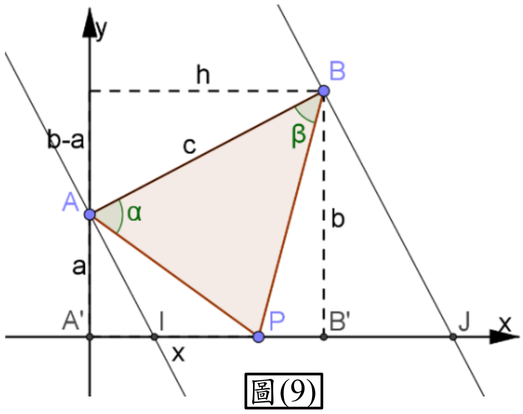
$\frac{\left(x-\frac{t}{2}\right)^2}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)^2}=1$, 則長軸：短軸$=\sqrt{3}:1$　　證畢



圖(8)

(二) 找出$\triangle ABP$尤拉線平行$\overline{\mathrm{AB}}$的 P 點座標（幾何法）

1. 規定：如圖(9)，在直角坐標平面上，令$A(0,a)$、$B(h,b)$、$\overline{AB}=c$，$\overline{AA'}\perp x$軸、$\overline{BB'}\perp x$軸，$\overline{AA'}=a$、$\overline{BB'}=b$，$A'(0,0)$、$B'(h,0)$，$\overline{A'B'}=h$，作$\overline{AI}\perp\overline{AB}$，$\overline{BJ}\perp\overline{AB}$分別交$x$軸於$I$、$J$。



圖(9)

且由圖(8)可知該橢圓和x軸最多有兩點或一交點或不相交，但為了使$\tan\alpha>0$，$\tan\beta>0$恆成立，我們在圖(9)中，加入$\overline{AI}\perp\overline{AB},\overline{BJ}\perp\overline{AB}$使$\angle PAB$及$\angle PBA$皆為銳角，此時$K>0$而排除$\angle PAB$或$\angle PBA$為鈍角的情況(三角形不可能有兩鈍角)。又由圖(9)知道我們要找的P點必落在$\overline{IJ}$上。$P(x,0)$在x軸上，且先假設P點的有效範圍是在I點和J點之間，而$\alpha=\angle PAB$、$\beta=\angle PBA$、$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$。

2. 推導K函數

首先利用圖(9)去計算$\tan\alpha$和$\tan\beta$的表示式，即$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$的表示式。

$$\tan\alpha=\frac{-\frac{h}{b-a}-\frac{x}{a}}{1+\frac{-h}{b-a}\cdot\frac{x}{a}}=\frac{-ah-bx+ax}{ab-a^2-hx}$$

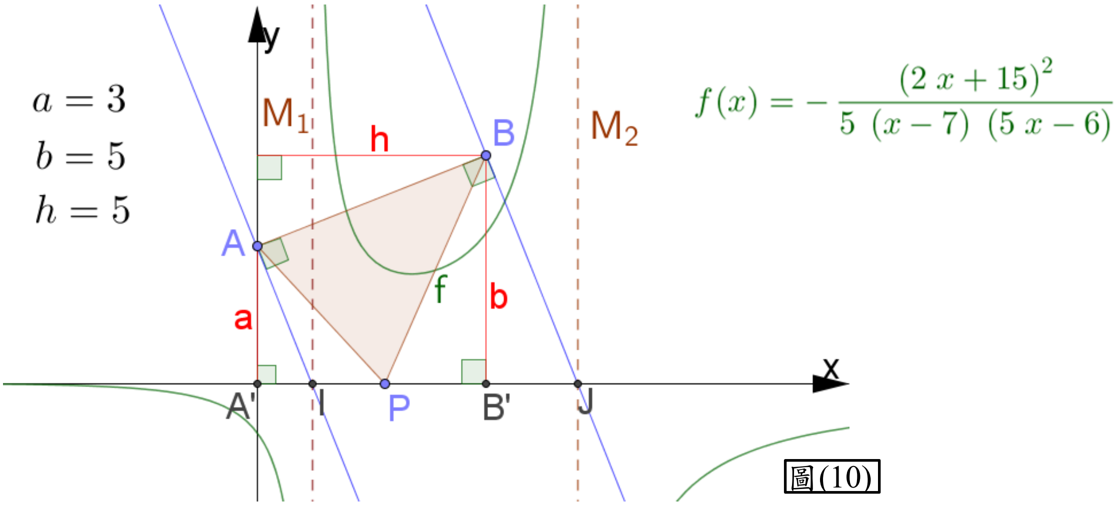
$$\tan\beta=\frac{\frac{h}{b-a}-\frac{h-x}{b}}{1+\frac{h}{b-a}\cdot\frac{h-x}{b}}=\frac{ah+bx-ax}{b^2-ab+h^2-hx}$$

接著我們研究K函數所繪出的曲線

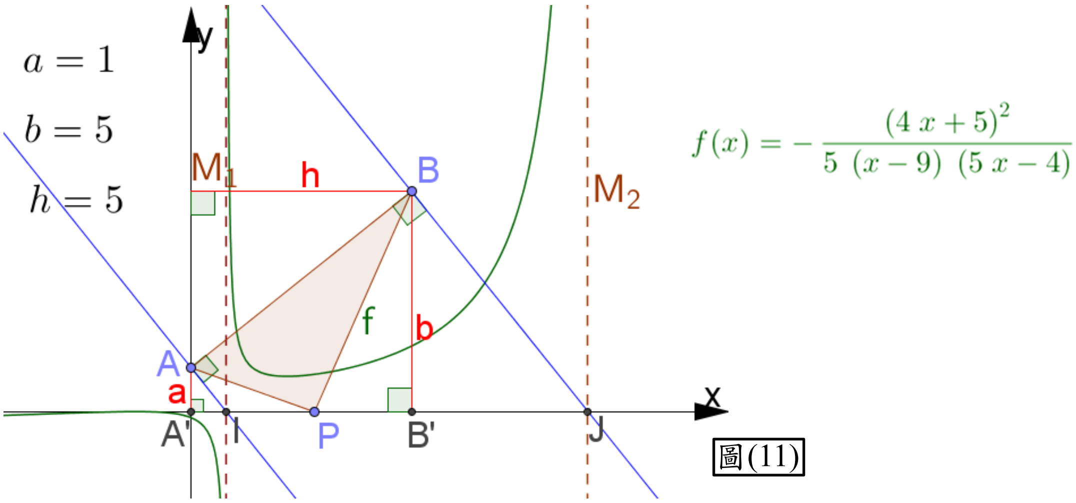
3. 使用 Geogebra 畫出K函數曲線

令$y=f(x)=K$，即$y=f(x)=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$

將上式輸入 Geogebra 並代入a、b、h可得下圖。（M_1、$M_2\perp x$軸）



圖(10)



圖(11)

4. 我們由圖(10)和圖(11)綜合出以下兩點問題：

(1) 我們設的兩組a、b、h中，直線M_1、M_2恰為其之垂直漸近線，因此曲線f的範圍在直線M_1、M_2之間(不包含直線M_1、M_2)，但是我們無法確認是否存在例外，因此我們決定利用代數運算的方式將其推導出。(運算過程請見下文 3.)

(2) 從製作出的兩個f曲線中我們可以得知：在兩漸近線的區間中，f曲線為上凹，但我們仍需要使用代數運算得之，以確保沒有例外。(運算過程請見下文 4.)

5. 使用代數運算計算直線M_1、M_2和f曲線之漸近線

Lemma2:如圖(11)，$a>0$、$b>0$、$h>0$，f曲線的垂直漸近線必定為M_1、M_2（M_1、$M_2\perp$ x軸），且$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$

<proof>

(1) 算出直線M_1、M_2方程式

首先我們算出$\overleftrightarrow{AB}$方程式：$\dfrac{y-a}{x-0}=\dfrac{a-b}{0-h}$

接著算出I和J之座標，令$\overleftrightarrow{AI}$之y截距為k、$\overleftrightarrow{BJ}$之y截距為w

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AI}:y=\frac{h}{a-b}x+k$、$\overleftrightarrow{BJ}:y=\frac{h}{a-b}x+w$，將$A$、$B$座標代入，令$y=0$

得$I\left(-\frac{a(a-b)}{h},0\right),J\left(\frac{-b(a-b)+h}{h},0\right)$

則$M_1:x=\frac{ab-a^2}{h}$, $M_2:x=\frac{h^2+b^2-ab}{h}$

(2) 使用a、b、h代數運算計算出$f(x)$的垂直漸近線

$f(x)=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$

hx任意的趨近於$ab-a^2$和趨近於h^2+b^2-ab，並可任意靠近 0，

故以下式表示之：

$hx-(ab-a^2)\to 0$ 和 $hx-(h^2+b^2-ab)\to 0$

即$x-\left(\frac{ab-a^2}{h}\right)\to 0$ 和$x-\left(\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)\to 0$

並得 $\lim\limits_{x\to\frac{ab-a^2}{h}}\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{0}=\pm\infty$

以及 $\lim\limits_{x\to\frac{h^2+b^2-ab}{h}}\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}=\frac{-(-ax+bx+ah)^2}{0}=\pm\infty$

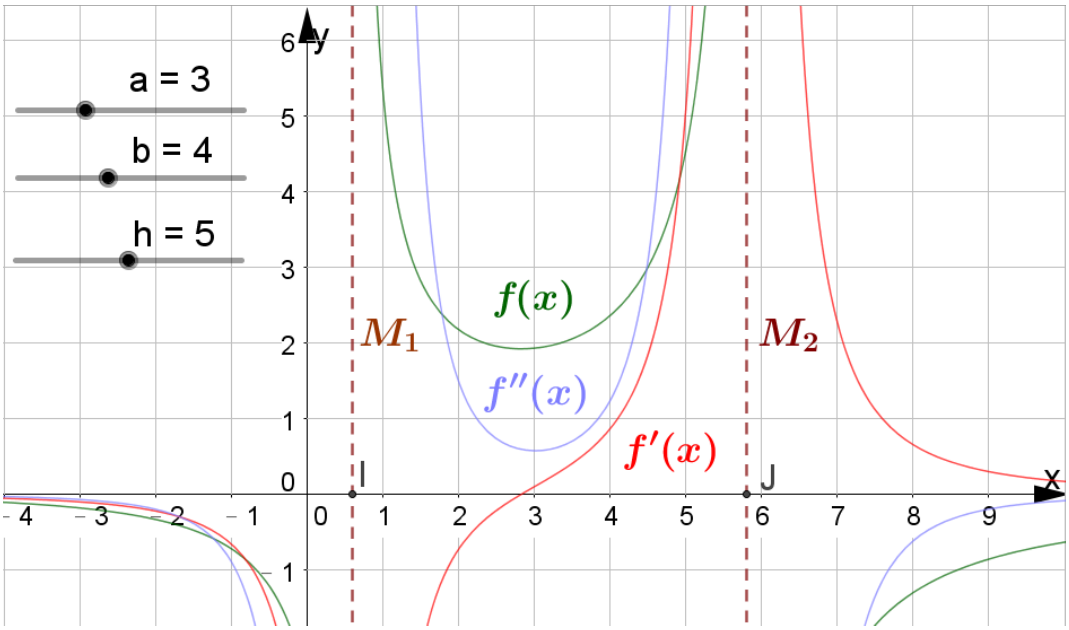
故$f(x)$之垂直漸近線為$x=\frac{ab-a^2}{h}$和$x=\frac{h^2+b^2-ab}{h}$

得$f(x)$，$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$

且上二式與直線M_1、M_2之方程式相符，直線M_1、M_2為曲線f之垂直漸近線。 證畢

6. 代數運算f曲線之凹性

（1）使用微分之概念分析(以下皆為$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$探討)



圖(12)

當$x\in\mathbb{R}$時，其在$f(x)$曲線上的切線的斜率為$f(x)$之一階導數之值，如圖(12)中之$f'(x)$曲線，若$f'(x)$曲線的y值隨x的增加而跟著增加，即其$f'(x)$的每點在曲線上的切線皆>0，則$f(x)$曲線必定為上凹，因此當$f(x)$的二階導數，$f''(x)>0$時，其$f'(x)$必定符合上文所述，則$f(x)$曲線必定為上凹。因此，我們僅需要證明出$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$時，其

$f''(x)>0$，即可驗證我們上文所設的假設——在兩漸近線之間，$f(x)$曲線之凹性為上凹。

（2）試證$f''(x)>0$

Lemma3: 如圖(12)，$a>0$、$b>0$、$h>0$、$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$，$f''(x)>0$，意即在兩漸近線之間，$f(x)$曲線之凹性為上凹。

<proof>

首先我們先使用 Geogebra 程式運算出 K 函數之二階導數，但由於式子過長，因此我們決定令$a=1$、$b>a$，而當$a\neq 1$時，我們再將其他數字等比例放大或縮小即可。

其值如下：

$f''(x)=(-2(h(hx-b+1)+h(-b^2-h^2+hx+b))(-2(b-1)(bx+h-x)(hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b)+\left(h(hx-b+1)+h(-b^2-h^2+hx+b)\right)(bx+h-x)^2)(hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b)+((hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b))^2(-2(b-1)^2(hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b)+2(b-1)(h(hx-b+1)+h(-b^2-h^2+hx+b))(bx+h-x)-2h(b-1)(bx+h-x)(hx-b+1)-2h(b-1)(bx+h-x)(-b^2-h^2+hx+b)+2h^2(bx+h-x)^2))/((hx-b+1)(-b^2-h^2+hx+b))^4$

由於其分母為完全四次方因此可不用考慮，但分子仍非常繁複，如果再將另外的兩個未知數代入以上數值的話，那便無法涵蓋全部狀況，因此我們決定將其因式分解再做運算。

為了方便辨認各類不同的方程式，我們將方程式因式分解並上色，可得：

$f''(x)=-2(h^2+b^2-2b+1)(xh-b+1)(xh-h^2-b^2+b)(x^3h^3b^2-x^3h^3+3x^2h^4-3x^2h^2b^3+6x^2h^2b^2-3x^2h^2b-3xh^5-6xh^3b^2+6xh^3b+h^6+3h^4b^2-3h^4b+3h^2b^4-6h^2b^3+3h^2b^2+b^6-4b^5+6b^4-4b^3+b^2)$

由於$x\in\left(\frac{b-1}{h},\frac{h^2+b^2-b}{h}\right)$(此為$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$代入$a=1$)，因此我們可知：

$hx-b+1>0$、$-b^2-h^2+hx+b<0$

則綠色式>0，因此只需要知道上藍色式之正負即可得出$f''(x)$之正負。

我們將其再進行一次微分，並令其$=0$，求其曲線最高或最低點的x座標，將微分結果因式分解後得：

$3h^2(xb-x+h)(xbh+xh-2b^2+2b-h^2)=0$

得解$x=\frac{2b^2+h^2-2b}{bh+h}$，$\frac{-h}{b-1}$，可知前者為$>0$，後者為$<0$。

將兩式代回藍色式因式分解後分別可得：$\frac{b^2(h^2+b^2-2b+1)^3}{(b+1)^2}$，$\frac{b^2(h^2+b^2-2b+1)^3}{(b-1)^2}$

又$0<\frac{b^2(h^2+b^2-2b+1)^3}{(b+1)^2}<\frac{b^2(h^2+b^2-2b+1)^3}{(b-1)^2}$，若$b>1$，則$x\in[\frac{-h}{b-1}, \infty)$時，藍色式所形成的曲線之最低點仍然在$x$軸之上，故當$b>1$時，藍色式$>0$。

若$b=1$，藍色式為$3h^4x^2-3h^5x+h^6$，此曲線的最高或最低點為紫色式(因為此時橘色式不存在)，且紫色式>0，接著我們令藍色式為0，代入公式解的判別式：

$(-3h^5)^2-4\cdot 3h^4\cdot h^6=-3h^{10}<0$

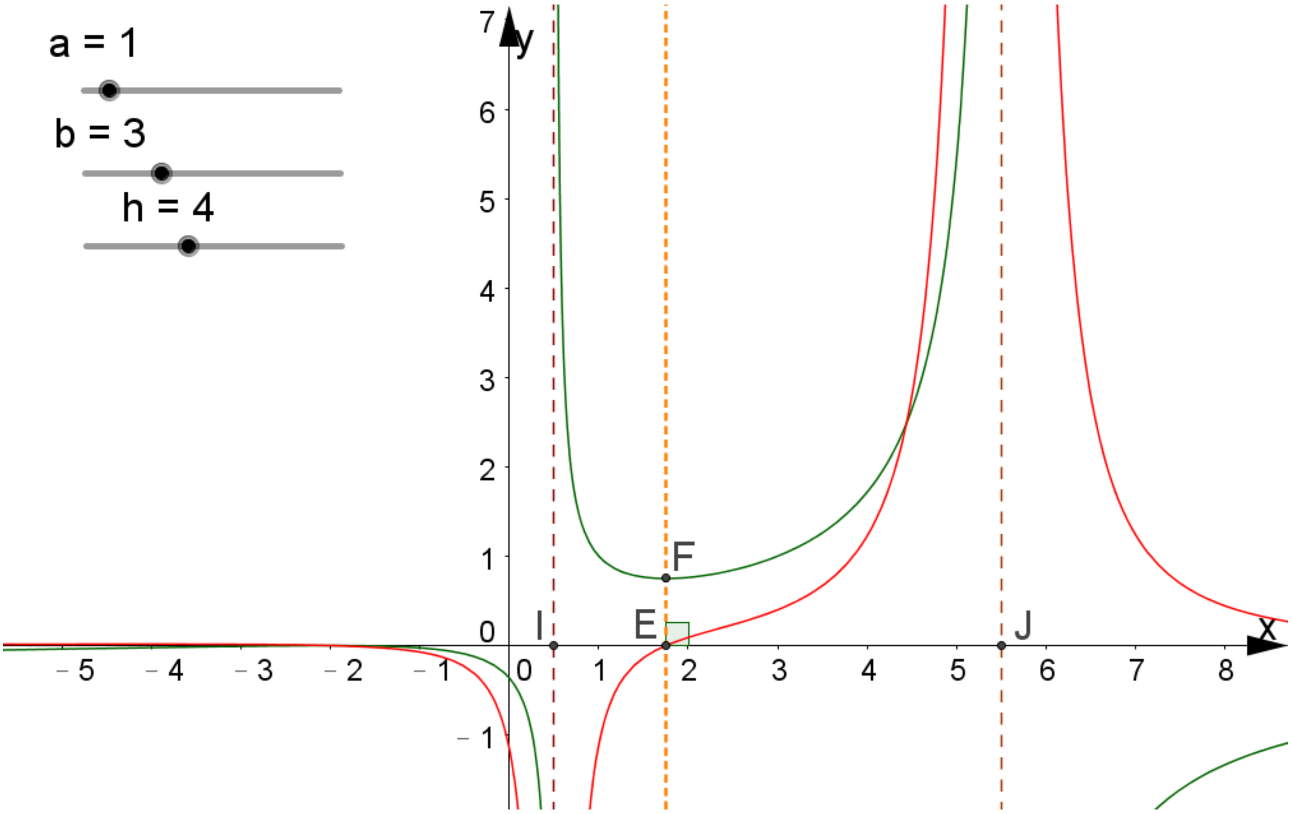
則曲線並不通過x軸，所以可知，此為一上凹圖形，且最低點亦位於x軸之上，當$b=1$時，藍色式>0。

則$f''(x)>0$得證，f曲線為上凹，即為所求。　　　證畢

7. 利用之前的研究結果建立一套判定尤拉線和兩定點平行的公式解

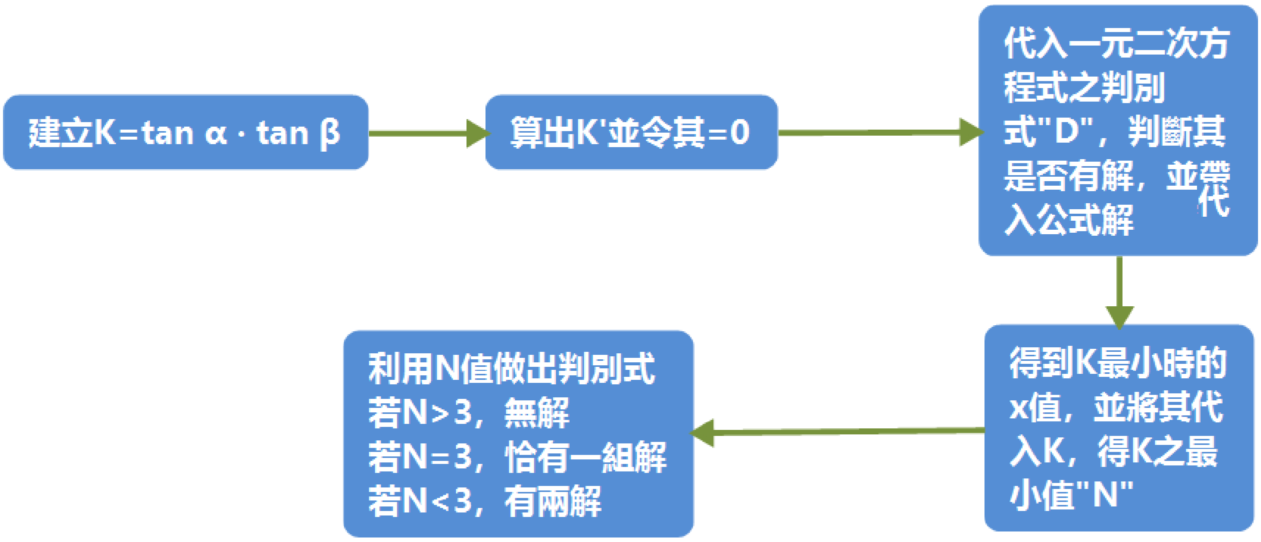
(1)架構說明

我們知道f曲線在直線M_1和M_2之間必定為開口向上之曲線，所以只要使用微分的概念便可得到K函數之最小值，如圖(13)，並且由$K=\tan\alpha\cdot\tan\beta$和$y=3$做出判別式。

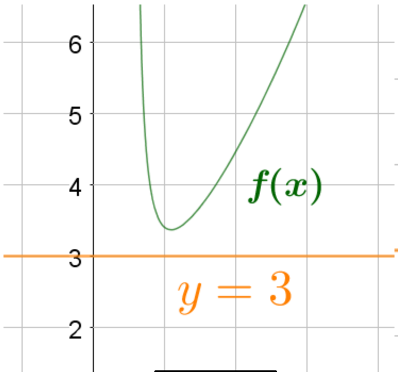


圖(13)

令K的一階導數值為 0，尋找哪一點$(x, f(x))$能夠使得其在曲線f的切線斜率為 0 即可找出何時的K函數最小，接著將此時的x代入前式之K，就能夠算得K函數之最小值"N"。其架構說明如圖(14)。

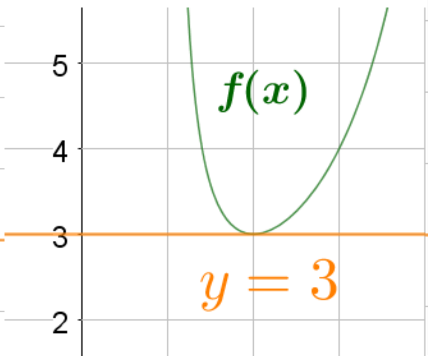


圖(14)



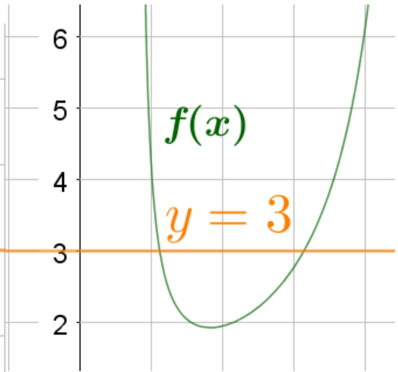
圖(15-1)

$N > 3$，無解



圖(15-2)

$N = 3$，恰有一解



圖(15-3)

$N < 3$，兩解

8. 在直線M_1和直線M_2之間的範圍，求K的最低點的x座標

Lemma4:如圖(12)，$a > 0$、$b > 0$、$h > 0$、則f曲線在兩漸近線之間的最低點的x座標為：$\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$

<proof>

$K = \frac{-(-ax+bx+ah)^2}{(hx+a^2-ab)(hx+ab-h^2-b^2)}$，我們使用了Geogebra 程式，將上式微分，可得下式：

$$\frac{-\left(2(-a+b)(a^2-ab+hx)(ah-ax+bx)(-b^2-h^2+ab+hx)-\left(h(a^2-ab+hx)+h(-b^2-h^2+ab+hx)\right)(ah-ax+bx)^2\right)}{\left((a^2-ab+hx)(-b^2-h^2+ab+hx)\right)^2}$$

令上式為 0，並因式分解後可得下式：

$(-a^2+2ab-b^2-h^2)(ax-bx-ah)(ahx+bhx+2a^2b-2ab^2-ah^2)=0$

由上式可知：$x=\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}, \frac{ah}{a-b}$

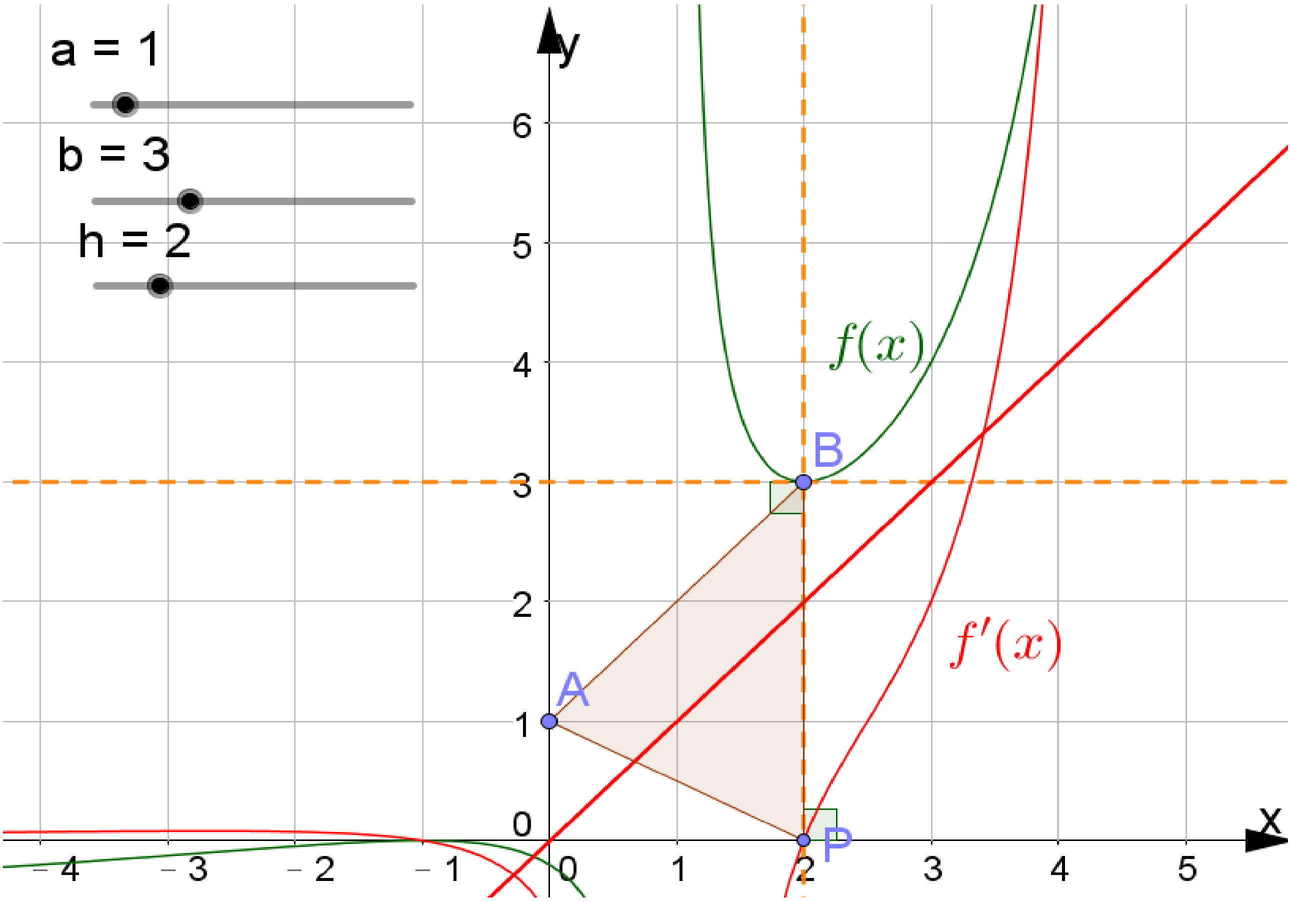
我們知道$f(x)$在M_1和M_2之間，即$x\in\left(\frac{ab-a^2}{h},\frac{h^2+b^2-ab}{h}\right)$，必為上凹曲線，因此$x$一定只有一解且經運算後可知：$\frac{ah}{a-b}<\frac{ab-a^2}{h}<\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}<\frac{h^2+b^2-ab}{h}$，則$f(x)$在$M_1$和$M_2$之間的最低點的$x$座標為：$\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$　　證畢

9.試找出僅有一組解時的b

若要使$N=3$(即P僅有一解)，便要令$x=\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$，並且代入$K$，然後令其為3。可得$K=\frac{4ab}{h^2}=3$，我們任意舉了一例，令$h=2$、$a=1$

$\Rightarrow b=3$，再將以上代回$\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$ 得$x=2$，在 Geogebra 中代入後可得下圖(16)

此時的$N=3$，即P僅有一解，即為所求。　　證畢



圖(16)

10. 製作出一套判斷有幾組解使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行之判別式(代數式)

我們將先前算出之K的最小值時的x，代入$K=3$的方程式之中製作出判別式：

Theorem2:在空白平面上取三段距離a、b、h，如圖(17)，並令$N=\frac{4ab}{h^2}$，

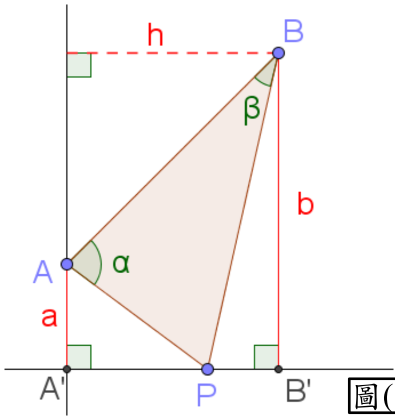
若$N>3$　　　則無解，無法使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行

若$N=3$　　　則恰有一解使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行

若$N<3$　　　則有兩解使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行

<proof>

將 **Lemma4** 中所得的結果:$\frac{-2a^2b+2ab^2+ah^2}{ah+bh}$，令其為$x$帶入 K 中即可得到：$\frac{4ab}{h^2}$，此式即為我們想求得的判斷公式 N，為曲線 f 在漸近線之間的最低點之 y 座標，所以可用此來判斷其解的數量，如圖(15-1)、圖(15-2)、圖(15-3)。　　證畢



圖(17)

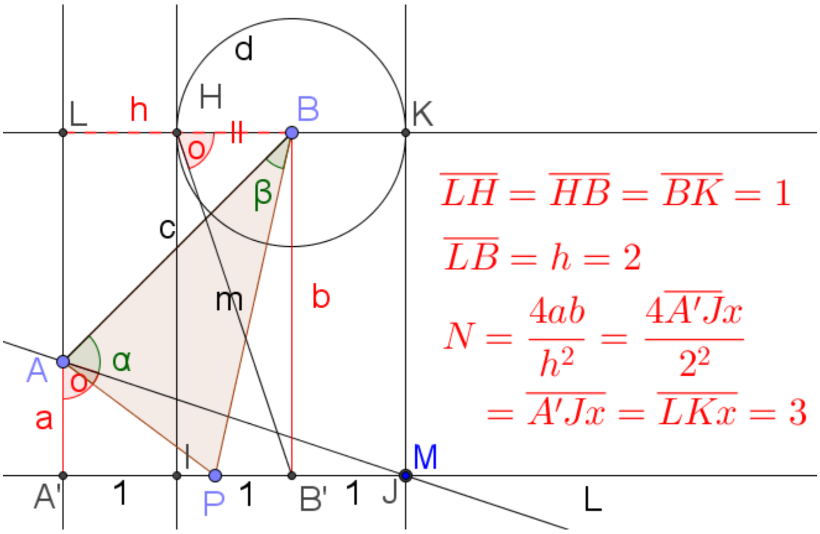
Note1:可以看出$\frac{4ab}{h^2}$中所用到的數值，皆可以使用尺規作圖作出，所以也就是說判斷解的數量是可以使用尺規作圖作出的，而要接解找出則是需要使用橢圓規方能作出。

11. 製作出一套判斷有幾組解使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行的方法(尺規作圖)

Theorem3:平面上有直線 L 和 A、B 兩點，求有幾個 P 點可以使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行。

(1) 作$\overleftrightarrow{A'A}$、$\overleftrightarrow{B'B}\perp L$軸	(7) 以 B 為圓心，$\overline{BH}$為半徑畫圓，交$\overleftrightarrow{LB}$於 M 點
(2) 作$\overline{BL}\perp\overleftrightarrow{B'B}$，交$\overleftrightarrow{A'A}$於 L 點	(8) 作$\overline{KJ}\perp$直線 L，交$\overrightarrow{CA}$於 J 點
(3) 作$\overline{BL}$中垂線且交$\overline{BL}$於 H	(9) 比較$\overline{A'M}$、$\overline{A'J}$長度
(4) 連$\overline{B'H}$	若$\overline{A'J}>\overline{A'M}$ 則無解，無法使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行
(5) 作$\angle A'AJ=\angle BHB'$，交直線 L 於J點	若$\overline{A'M}=\overline{A'J}$ 則恰有一解使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行
(6) 延長$\overleftrightarrow{LB}$	若$\overline{A'M}<\overline{A'J}$ 則有兩解使△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行

我們以圖(17)為例，過程如圖(18)所示:



<proof>

圖(18)

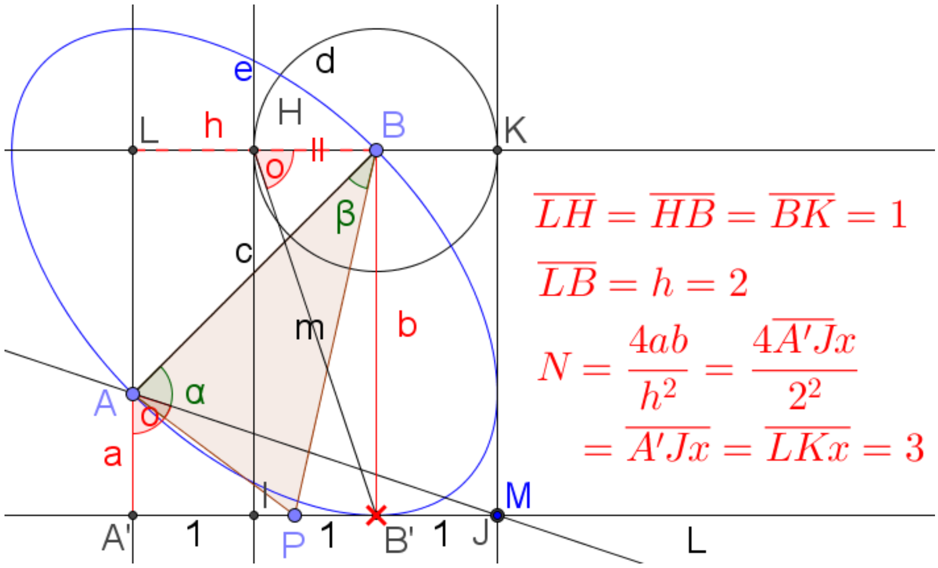
(1) 令$\overline{\mathrm{AA'}}=a$、$\overline{\mathrm{BB'}}=b$、$\overline{\mathrm{AC}}=h$

(2) 先令$h=2$，以使得$\frac{4ab}{h^2}=ab$，然後再將ab與$\frac{3h}{2}$比較

(3) 利用相似性質作出ab長$(1{:}\,b=a{:}\,ab)$

(4) 最後對ab和$\frac{3h}{2}$進行必較即為所求　　證畢

由上圖可知$ab=\frac{3h}{2}$，所以應該有兩組解，而我們也再以橢圓檢驗是否正確，如圖(19)：



圖(19)

12. 程式化

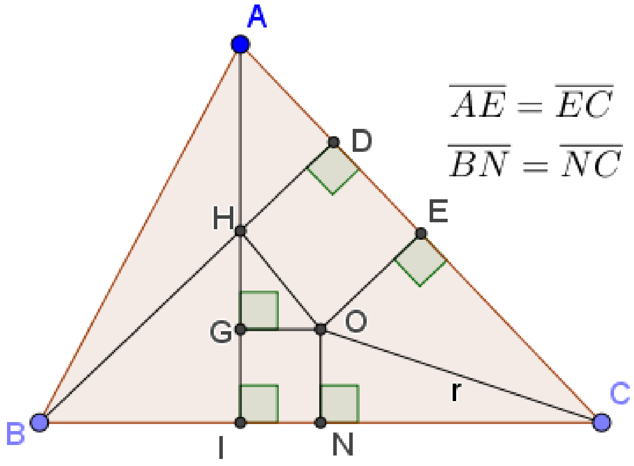
我們將研究出的方程式，先做流程圖，再譯成電腦程式，以供大家使用，詳見**附件一**。此程式能夠精準判斷P點的數量和解出P點的座標，並且判讀輸入是否正確。

接著是我們的第二條預備定理:

Lemma5: 平面上有△ABC，令其三邊斜率為p,q,r，則尤拉線斜率$m_E=-\frac{pq+qr+rp+3}{p+q+r+3pqr}$

<proof>

(1) 計算出△ABC的尤拉線和$\overline{BC}$夾角的正切值(如圖(20))：



圖(20)

$$\frac{q-m_E}{1+qm_E}=\tan\angle HOG=\frac{\overline{HG}}{\overline{IN}}=\frac{\overline{AI}-\overline{AH}-\overline{ON}}{\overline{BN}-\overline{BI}}$$

$$=\frac{2r\sin\angle CBA\sin\angle ACB-2r\cos\angle BAC-r\cos\angle BAC}{r\sin\angle BAC-2r\sin\angle ACB\cos\angle ABC}$$

$$=\frac{2\sin\angle CBA\sin\angle ACB+3\cos(\angle CBA+\angle ACB)}{\sin(\angle CBA+ACB)-2\sin\angle ACB\cos\angle ABC}$$

$$=\frac{3\cos\angle CBA\cos\angle ACB-\sin\angle CBA\sin\angle ACB}{\sin\angle CBA\cos ACB-\sin\angle ACB\cos\angle ABC}$$

$$=\frac{3-\tan B\tan C}{\tan B-\tan C}$$

(2) 又可算得：

$$\tan B=\frac{p-q}{1+pq},\qquad \tan C=\frac{q-r}{1+qr}$$

(3) 我們可以得到：

$$\frac{q-m_E}{1+qm_E}=\frac{3-\frac{p-q}{1+pq}\cdot\frac{q-r}{1+qr}}{\frac{p-q}{1+pq}-\frac{q-r}{1+qr}}$$

(4) 交叉相乘後可以得到：$3m_Epqr+m_Ep+m_Eq+m_Er+pq+pr+qr+3=0$

(5) 我們可以從此關係式中對m_E求解，即可得到我們的 **Lemma5**。

Theorem4.1:在座標平面上任取 A(e,f) , B(q,r)，令 P(t,0)，

若$3e^2-6eq-4fr+3q^2>0$　則有兩組解使△ABP尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$平行，且解 t 為：

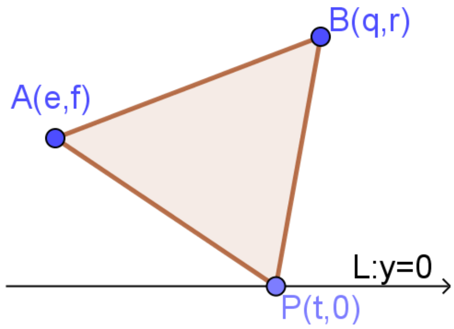
$$\frac{3e^3-3e^2q+3ef^2-2efr-3eq^2-er^2-f^2q-2fqr+3q^3+3qr^2\pm\left(\sqrt{3}e^2-2\sqrt{3}eq+\sqrt{3}f^2-2\sqrt{3}fr+\sqrt{3}q^2+\sqrt{3}r^2\right)\sqrt{3e^2-6eq-4fr+3q^2}}{6e^2-12eq+2f^2-4fr+6q^2+2r^2}$$

若$3e^2-6eq-4fr+3q^2=0$　則恰有一組解使△ABP尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$平行，且解 t 為：

$$\frac{3e^3-3e^2q+3ef^2-2efr-3eq^2-er^2-f^2q-2fqr+3q^3+3q}{6e^2-12eq+2f^2-4fr+6q^2+2r^2}$$

若$3e^2-6eq-4fr+3q^2<0$　則無解，無法使△ABP尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$平行

<proof>



圖(21)

(1) 分別算出$\overline{AB}$、$\overline{BP}$、$\overline{PA}$斜率，得:

$m_{\overline{AB}}=\frac{r-f}{g-e}$, $m_{\overline{BP}}=\frac{r}{q-t}$, $m_{\overline{PA}}=\frac{f}{e-t}$

(2) 可利用 **Lemma5** 列出方程式：

$$\frac{-\frac{fr}{(e-t)(q-t)}-\frac{f(-f+r)}{(e-t)(-e+q)}-\frac{r(-f+r)}{(q-t)(-e+q)}-3}{\frac{f}{e-t}+\frac{r}{q-t}+\frac{-f+r}{-e+q}+\frac{3fr(-f+r)}{(e-t)(q-t)(-e+q)}}=\frac{-f+r}{-e+q}$$

(3) 算得一元二次方程式之判別式：

$$\left(\sqrt{3}e^2-2\sqrt{3}eq+\sqrt{3}f^2-2\sqrt{3}fr+\sqrt{3}q^2+\sqrt{3}r^2\right)^2(3e^2-6eq-4fr+3q^2)$$

由上式可知其正負關鍵為：$3e^2-6eq-4fr+3q^2$

(4) 算得一元二次方程式解：

$$t=\frac{3e^3-3e^2q+3ef^2-2efr-3eq^2-er^2-f^2q-2fqr+3q^3+3qr^2\pm\left(\sqrt{3}e^2-2\sqrt{3}eq+\sqrt{3}f^2-2\sqrt{3}fr+\sqrt{3}q^2+\sqrt{3}r^2\right)\sqrt{3e^2-6eq-4fr+3q^2}}{6e^2-12eq+2f^2-4fr+6q^2+2r^2}$$

證畢

(二) 找出 △ ABP 尤拉線平行 $\overline{\mathrm{AP}}$、$\overline{\mathrm{BP}}$ 的 P 點座標

作法同 **Theorem4.1**，可列出以下 **Theorem4.2**、**Theorem4.3**，但因運算過於複雜，所以將 A(e,f)改為 A(0,f)，以方便計算：

Theorem4.2:在座標平面上任取 A(0,f) , B(q,r) , P(t,0)

令$\mathrm{D}=r^4+6r^3f+12r^2f^2+6r^2q^2+8rf^3-30rfq^2-3f^2q^2+9q^4$

$u=\frac{-2f^2+3q^2+r^2+fr}{9q}$、

$v=\frac{(-f^2q+4fqr)(2f^2-3q^2-r^2-fr)}{54q^2}-\frac{(2f^2-3q^2-r^2-fr)^3}{729q^3}-\frac{-f^2q^2-3f^2r^2+3f^3r}{6q}$、

$w=\frac{-f^2q+4fqr}{9q}-\frac{(2f^2-3q^2-r^2-fr)^2}{81q^2}$

若$D>0$　　則恰有一組實數解使△ ABP 尤拉線與$\overline{\mathrm{AP}}$平行，且解 t 為：$t=t_1$

若$D=0$　　則有兩組實數解使△ ABP 尤拉線與$\overline{\mathrm{AP}}$平行，且解 t 為：$t=t_1\,,t=t_2=t_3$

若$D<0$　　則有三組實數解使△ ABP 尤拉線與$\overline{\mathrm{AP}}$平行，且解 t 為：$t=t_1\,,t_2\,,t_3$

其中$t_1=u+\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$,

$$t_2=u+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}},$$

$$t_3=u+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v+w^3}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$$

<proof>

(1) 分別算出三邊斜率，得：$m_{\overline{AB}}=\frac{r-f}{g}\,,m_{\overline{BP}}=\frac{r}{q-t}\,,m_{\overline{PA}}=\frac{f}{-t}$

(2) 可利用 **Lemma5** 列出方程式：$\frac{3qt^2-f^2q+f^2t-3q^2t-r^2t+2fqr}{-fq^2-3fr^2+ft^2-rt^2+3f^2r+2qrt}=\frac{f}{-t}$

(3) 展開後為一元三次方程式：

$$3qt^3+(2f^2-3q^2-r^2-fr)x^2+(-f^2q+4fqr)x-f^2q^2-3f^2r^2+3f^3r=0$$

此三次方程式判別式為：

$$f^2(r^2-2rf+f^2+q^2)^2\frac{r^4+6r^3f+12r^2f^2+6r^2q^2+8rf^3-30rfq^2-3f^2q^2+9q^4}{729q^4}$$

觀察此式子的正負值的關鍵為後段分式的分子：

$$r^4+6r^3f+12r^2f^2+6r^2q^2+8rf^3-30rfq^2-3f^2q^2+9q^4$$

我們令上式為最新判別式 D，作為解的分類之用。

(4) 將之前的一元三次方程式中的各項係數代入三次方程式的求解公式後，由於其解的方程式過長，因此我們分成兩個步驟進行計算：

【1】先令$u=\frac{-2f^2+3q^2+r^2+fr}{9q}$,$v=\frac{(-f^2q+4fqr)(2f^2-3q^2-r^2-fr)}{54q^2}-\frac{(2f^2-3q^2-r^2-fr)^3}{729q^3}-\frac{-f^2q^2-3f^2r^2+3f^3r}{6q}$、

$w=\frac{-f^2q+4fqr}{9q}-\frac{(2f^2-3q^2-r^2-fr)^2}{81q^2}$

【2】再代入$t_1=u+\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$,

$$t_2=u+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}},$$

$$t_3=u+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v+w^3}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$$ 證畢

Theorem4.3:在座標平面上任取 A(0,f) , B(q,r) ,P(t,0)

令$D=f^4+6f^3r+12f^2r^2+6f^2q^2+8fr^3-30frq^2-3r^2q^2+9q^4$

$u=\frac{-f^2+6q^2+2r^2-fr}{9q}$、

$v=\frac{(-f^2+6q^2+2r^2-fr)(-3q^3-3qr^2+2f^2q-2fqr)}{54q^2}-\frac{(-f^2+6q^2+2r^2-fr)^3}{-729q^3}+\frac{3fr^3-f^2q^2-3f^2r^2+3fq^2r}{6q}$、

$w=\frac{(-f^2q+4fqr)(2f^2-3q^2-r^2-fr)}{54q^2}-\frac{(2f^2-3q^2-r^2-fr)^3}{729q^3}-\frac{-f^2q^2-3f^2r^2+3f^3r}{6q}$

若$D>0$ 則恰有一組實數解使△ABP尤拉線與$\overline{BP}$平行，且解 t 為：$t=t_1$

若$D=0$ 則有兩組實數解使△ABP尤拉線與$\overline{BP}$平行，且解 t 為：$t=t_1$,$t=t_2=t_3$

若$D<0$ 則有三組實數解使△ABP尤拉線與$\overline{BP}$平行，且解 t 為：$t=t_1$,t_2 ,t_3

其中$t_1=u+\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$

$$t_2=u+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}},$$

$$t_3=u+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v+w^3}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$$

<proof>

(1) 分別算出三邊斜率，得：$m_{\overline{AB}}=\frac{r-f}{g}$,$m_{\overline{BP}}=\frac{r}{q-t}$,$m_{\overline{PA}}=\frac{f}{-t}$

(2) 可利用 **Lemma5** 列出方程式：$\frac{3qt^2-f^2q+f^2t-3q^2t-r^2t+2fqr}{-fq^2-3fr^2+ft^2-rt^2+3f^2r+2qrt}=\frac{r}{q-t}$

(3) 展開後為一元三次方程式：

$$-3qx^3+(-f^2+6q^2+2r^2-fr)x^2+(-3q^3-3qr^2+2f^2q-2fqr)x+3fr^3-f^2q^2-3f^2r^2+3fq^2r=0$$

此三次方程式判別式為：

$$r^2(f^2-2fr+r^2+q^2)^2\frac{f^4+6f^3r+12f^2r^2+6f^2q^2+8fr^3-30frq^2-3r^2q^2+9q^4}{729q^4}$$

由上式可知其正負關鍵為：

$$f^4+6f^3r+12f^2r^2+6f^2q^2+8fr^3-30frq^2-3r^2q^2+9q^4$$

(4) 將之前的一元三次方程式中的各項係數代入三次方程式的求解公式後，由於其解的方程式過長，因此我們分成兩個步驟進行計算：

【1】先令$u=\frac{-f^2+6q^2+2r^2-fr}{9q}$、$v=\frac{(-f^2+6q^2+2r^2-fr)(-3q^3-3qr^2+2f^2q-2fqr)}{54q^2}-\frac{(-f^2+6q^2+2r^2-fr)^3}{-729q^3}+\frac{3fr^3-f^2q^2-3f^2r^2+3fq^2r}{6q}$、

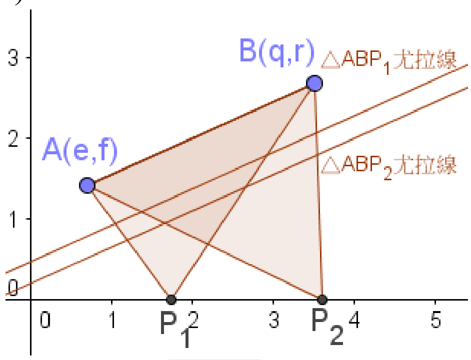
$w=\frac{(-f^2q+4fqr)(2f^2-3q^2-r^2-fr)}{54q^2}-\frac{(2f^2-3q^2-r^2-fr)^3}{729q^3}-\frac{-f^2q^2-3f^2r^2+3f^3r}{6q}$

【2】再代入$t_1=u+\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$,

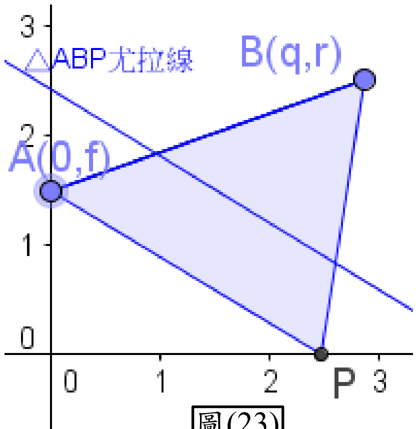
$$t_2=u+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v^2+w^3}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}},$$

$$t_3=u+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v+\sqrt{v+w^3}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{v-\sqrt{v^2+w^3}}$$ 證畢

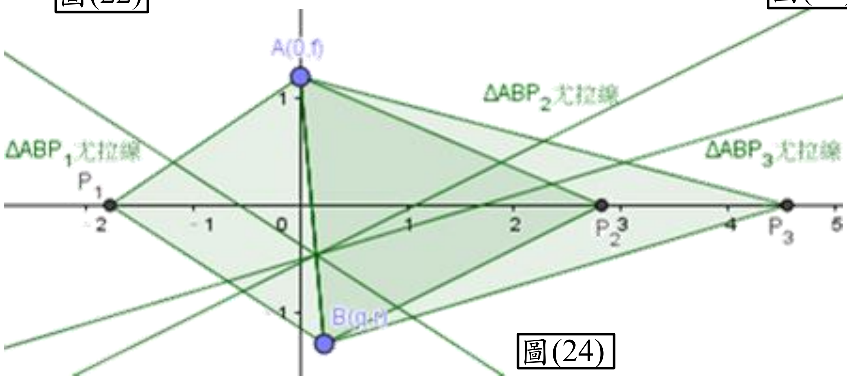
我們分別為 **Theorem4.1**、**Theorem4.2**、**Theorem4.3** 各舉了一個例子，如圖(22)、圖(23)、圖(24)



圖(22)



圖(23)



圖(24)

接著，我們可以運用以上定理 4.2、4.3，再增加 P 點一個變數，來探討△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{AP}}$、$\overline{\mathrm{BP}}$的 P 點軌跡，即可推論出以下 **Corollary1**。至於△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{AB}}$的部分，即為 **Theorem1** 中的橢圓，在此就不加贅述，

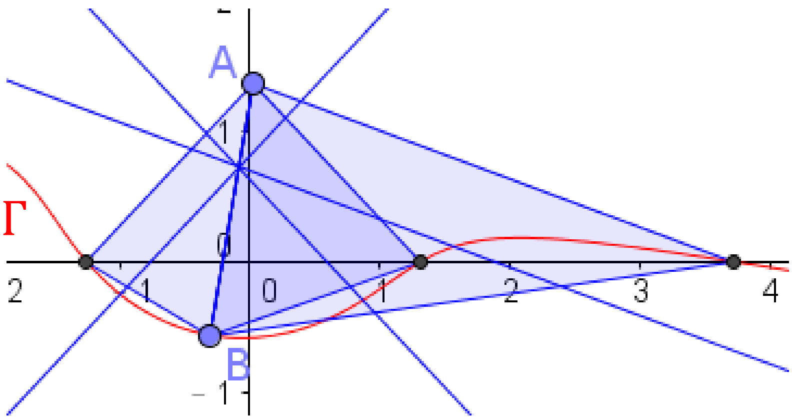
Corollary1:在座標平面上任取$A(0,f)$, $B(q,r)$, P 在曲線Γ

若曲線 Γ：
$$\frac{\frac{(f-y)(r-y)}{x(q-x)}+\frac{(f-y)(-f+r)}{qx}-\frac{(r-y)(-f+r)}{q(q-x)}-3}{\frac{-(f-r)}{q}+\frac{r-y}{q-x}+\frac{-f+y}{x}+\frac{3(f-r)(f-y)(r-y)}{qx(q-x)}}=\frac{-f+y}{x}$$

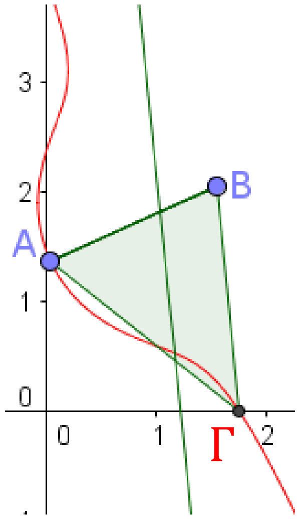
則△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{AP}}$，如圖(25) （藍色直線為△ABP尤拉線）

若曲線 Γ：
$$\frac{\frac{(f-y)(r-y)}{x(q-x)}+\frac{(f-y)(-f+r)}{qx}-\frac{(r-y)(-f+r)}{q(q-x)}-3}{\frac{r-y}{q-x}+\frac{-f+r}{q}+\frac{-f+y}{x}+\frac{3(f-r)(f-y)(r-y)}{qx(q-x)}}=\frac{r-y}{q-x}$$

則△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{BP}}$，如圖(26) （綠色直線為△ABP尤拉線）



圖(25)



圖(26)

因為尤拉線為通過重心的平行線，所以可寫成以下註解：

Note2:令所有平行$\overline{\mathrm{AP}}$、$\overline{\mathrm{BP}}$的尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$的交點為 H。

平行$\overline{\mathrm{AP}}$時，$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HB}}=1:2$，而平行$\overline{\mathrm{BP}}$時，$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HB}}=2:1$，也就是說，當尤拉線平行$\overline{\mathrm{AP}}$、$\overline{\mathrm{BP}}$有一組以上的解時，其尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$交於同一點

另外，可以再使用定理 4.1、4.2、4.3 中的判別式，在固定一點的狀況下，便可推導出以下 **Corollary2** 的三條封閉曲線，可以迅速地看出△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{AB}}$、$\overline{\mathrm{AP}}$、$\overline{\mathrm{BP}}$有幾組解。

Corollary2:在座標平面上取 A(0,1)，任意一點 B

欲使尤拉線平行$\overline{AB}$，若有一曲線：$y=\frac{3}{4}x^2$，如圖(27)

則 B 在曲線內時，無解；在曲線上時，恰有一組解；在曲線外時，有兩解。

欲使尤拉線平行$\overline{AP}$，若有一曲線：

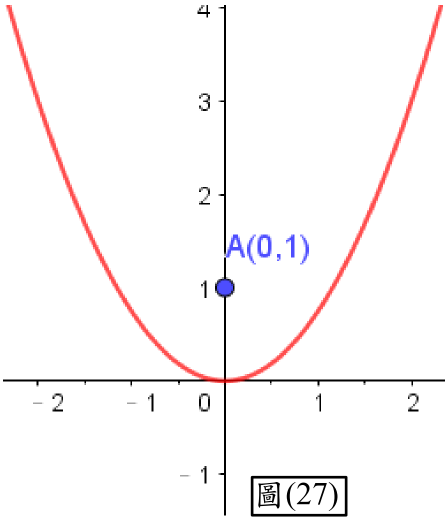
$9x^4+y^4+6x^2y^2+6y^3-30x^2y-3x^2+12y^2+8y=0$，如圖(28)

則若 B 在曲線內時，三組解；在曲線上時，有兩解；在曲線外時，恰有一組解。

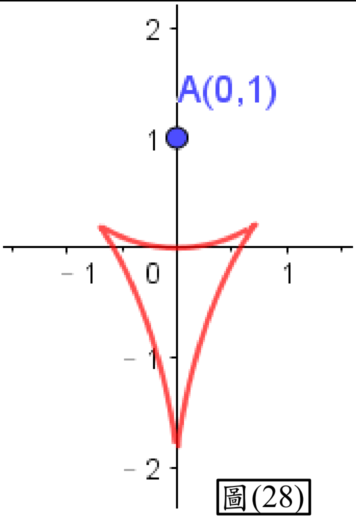
欲使尤拉線平行$\overline{BP}$，若有一曲線：

$9x^4-3x^2y^2+8y^3-30x^2y+6x^2+12y^2+6y+1=0$，如圖(29)

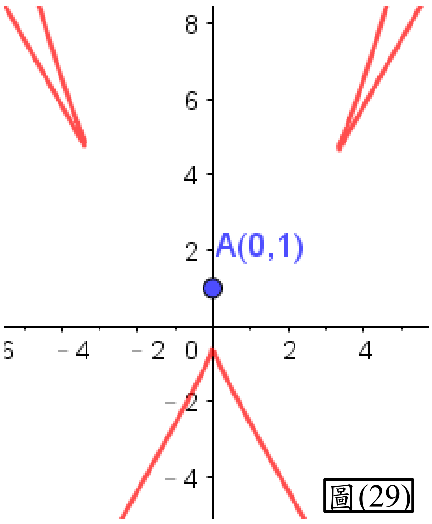
則若 B 在曲線內時，三組解；在曲線上時，有兩解；在曲線外時，恰有一組解。



圖(27)



圖(28)



圖(29)

接著，我們試著找出各組解之間的關係，我們列出了以下的定理三：

Theorem5:令$A(e,f)$,$B(q,r)$。欲使$\triangle ABP$尤拉線平行$\overline{AB}$，在 P 點有解的狀況，令兩組解分別為P_1、P_2，則：$\tan\angle P_1AB\cdot\tan\angle P_2AB=\frac{3r}{f}$,$\tan\angle P_1BA\cdot\tan\angle P_2BA=\frac{3f}{r}$

<proof>

(1) 我們先令$A(0,1),B(q,r),P(x,0)$，由 **Theorem2.1** 可算得：$x=\frac{3q^3+3r^2q\pm\sqrt{3}\sqrt{3q^2-4r}(r^2+q^2-2r+1)-2rq-q}{2r^2+6q^2-4r+2}$

(2) 則$\tan\angle P_1AB=\frac{-\sqrt{3}\sqrt{3q^2-4r}+3q}{2}$,$\tan\angle P_2AB=\frac{\sqrt{3}\sqrt{-4r+3q^2}+3q}{2}$

(3) 則 $\tan\angle P_1AB\cdot\tan\angle P_2AB=3r$，可知此數值與$q$無關，所以當$e$改變時，此值並不受影響

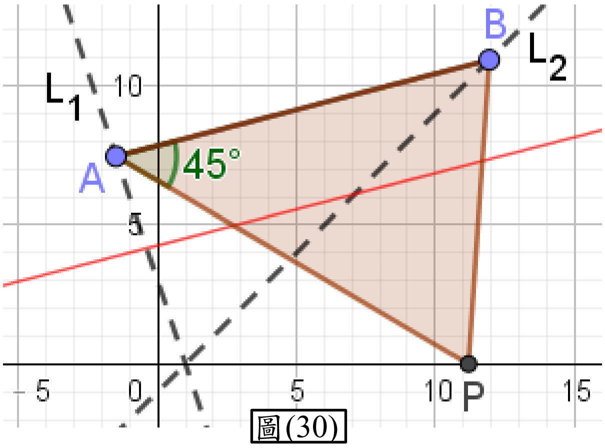
(4) 再加入f這個變數後可得:$\tan\angle P_1AB\cdot\tan\angle P_2AB=\frac{3r}{f}$

(5) 又由 **Lemma1** 可算得：$\tan\angle P_1BA\cdot\tan\angle P_2BA=\frac{3f}{r}$

因此，我們就可以使用這個特性，在只知道一組解的狀況，將第二個解找出來，且在僅有一組解時，其解可以直接以尺規作圖畫出。

三、 建立直線L_1、L_2安排 A、B 兩點在兩線上，並以尺規作圖將解找出來

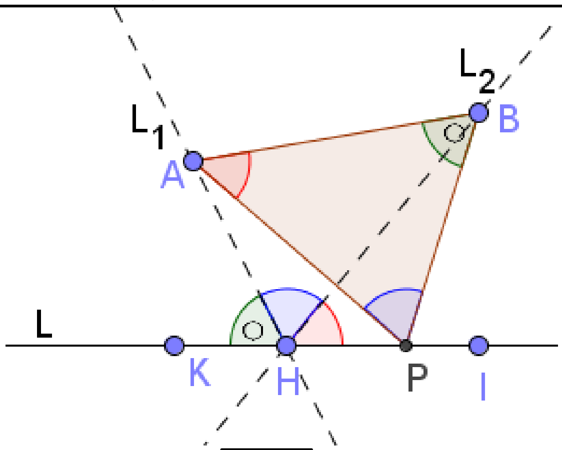
綜合前文整篇報告的分析，若在空白坐標平面上想只用圓規和直尺在x軸上找出P點，使$\triangle ABP$的尤拉線保證能平行$\overline{AB}$、$\overline{AP}$或$\overline{BP}$且同側、異側都行的通，那要如何安排A點和B點呢？解決此問題我們精心設計一套方法，設計概念來源自研究動機的圖(1)不等式求作P點的概念。我們在偶然的狀況下發現了以下的奇觀，如圖(30)，不論 A、B 兩點在直線L_1、L_2的任一處，只要使$\angle PAB = 45°$且 P 點於x軸上，則此時$\triangle ABP$的尤拉線必定與$\overleftrightarrow{AB}$平行。



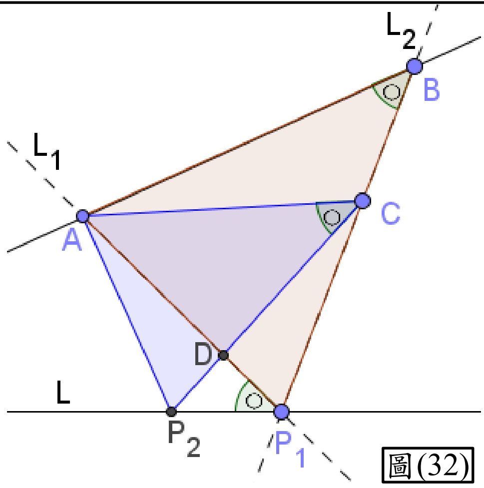
圖(30)

我們很快地發現，這樣的直線L_1、L_2並不只有一種，只是$\angle PAB$不一定是45°，且經過了我們的觀察，我們發現了此奇觀的原因，並將其寫成了以下定理。

Lemma6: 若有兩直線L_1、L_2，且兩線交於一點，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，其餘各點位置如圖(31)，且∠PBA = ∠KHA、P 點於L直線上，則∠PAB = ∠IHB、∠BPA = ∠BHA。



圖(31)



圖(32)

<proof>

(1) 如圖(32)，作L_1、$\overline{CP}$之交點為 D

(2) ∵ $\angle ACD = \angle DP_1P_2$(已知)，且$\angle CDA = \angle P_2DP_1$(對頂角相等)

(3) 故 $\triangle ACD \sim \triangle P_2P_1D$(AA 相似)

(4) 則$\overline{CD} : \overline{AD} = \overline{P_1D} : \overline{P_2D}$，又$\angle P_1DC = \angle ADP_2$(對頂角相等)

(5) 故 $\triangle ADP_2 \sim \triangle CDP_1$(SAS 相似)

(6) 則$\angle DP_2A = \angle CP_1D$，又$\angle ACP_2 = \angle ABP_1$(已知)

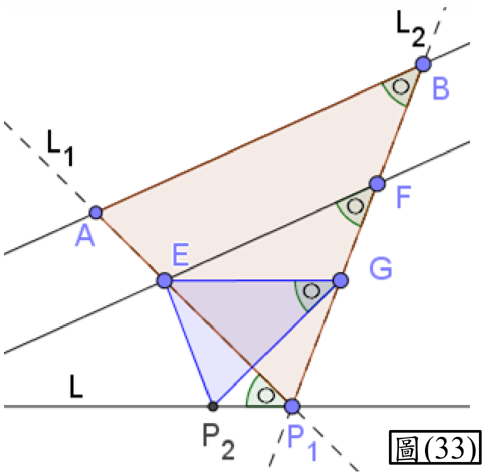
(7) 故$\triangle AP_2C \sim \triangle AP_1B$(AA 相似)

(8) 當直線L_1、L_2上分別有兩點 E、F，且$\overline{EF}//\overline{AB}$，如圖(33)

(9) 此時若再取一點 G 於L_2上，連$\overline{EG}$，作$\angle ABP_1 = \angle GEP_2$，且$P_2$在$L$直線上

(10) 根據上紋可得出結果：$\triangle EP_2G \sim \triangle EP_1F \sim \triangle AP_1B$

(11) 由於 E、F 可任意移動，所以此證明能涵蓋所有情況　　　證畢



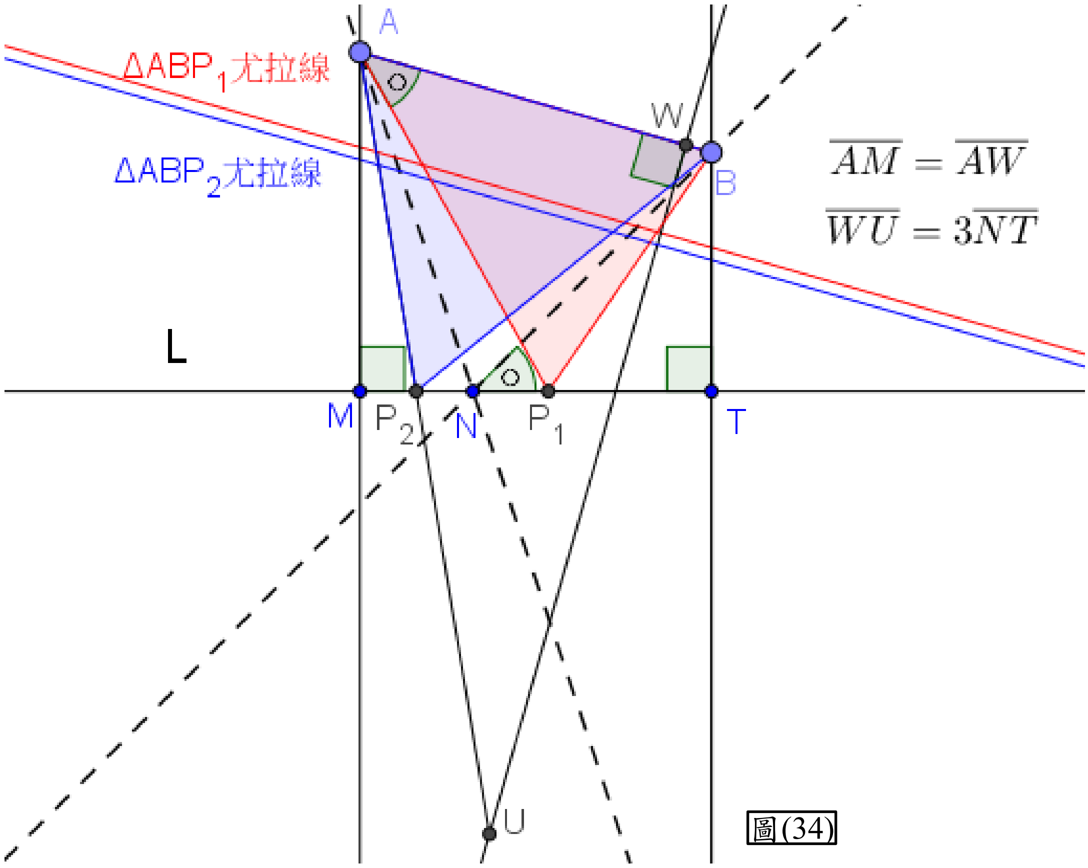
圖(33)

Theorem6.1:若有兩直線L_1、L_2，且兩直線交於一點 G、$m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -3$，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，並作∠PAB = ∠PGB，且 P 點於x軸上，則△ PAB尤拉線平行$\overline{AB}$。

<proof>

根據 **Lemma6** 可推得，若$\tan\angle PGB \cdot \tan\angle AGE = 3$，即$m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -3$，$\tan\angle PAB \cdot \tan\angle ABP = 3$，則△ PAB尤拉線平行$\overline{AB}$ 證畢

Note3: 雖然此方法僅取得一解，不過我們可以由 **Theorem5** 將第二組解求出，如圖(34)



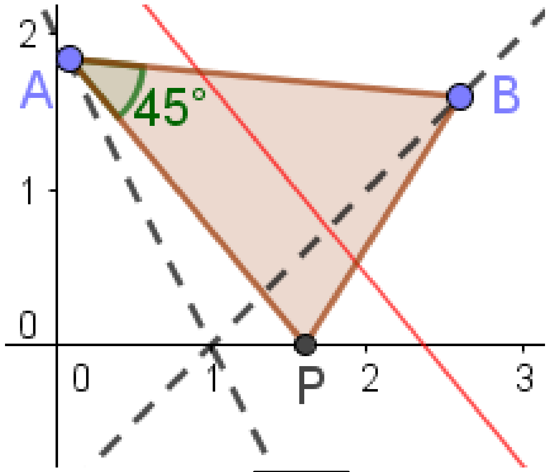
圖(34)

接著同理，可以推得平行$\overline{AP}$、$\overline{BP}$的作法。

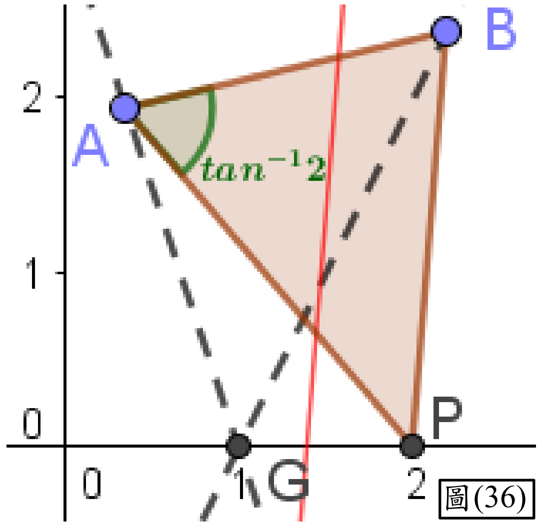
Theorem6.2:若有兩直線L_1、L_2，且兩直線交於一點 G、$\tan\angle BGA \cdot m_{L_2} = 3$，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，並作∠PAB = ∠PGB，且 P 點於x軸上，則△ PAB尤拉線平行$\overline{AP}$。

Theorem6.3:若有兩直線L_1、L_2，且兩直線交於一點 G、$\tan\angle BGA \cdot m_{L_1} = -3$，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，並作∠PAB = ∠PGB，且 P 點於x軸上，則△ PAB尤拉線平行$\overline{BP}$。

我們分別為定理 **6.2**、**6.3** 各舉了一個例子如下：



圖(35)



圖(36)

四、 找出 $\triangle ABP$ 尤拉線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 夾角為任一角度的所有 P 點軌跡圖

Theorem7: 令A(0,0)、B(1,0)、P 在曲線Γ。若△ABP中m_E為常數，則曲線Γ為不連續之圓錐曲線，且滿足：$m_E > \sqrt{3}$或$m_E < -\sqrt{3}$時，曲線Γ為不連續雙曲線 $m_E = \pm\sqrt{3}$ 時，曲線Γ為不連續之拋物線(退化為兩條平行線) $-\sqrt{3} < m_E < \sqrt{3}$時，曲線Γ為不連續橢圓

<proof>

(1) 以 **Lemma2** 算得Γ曲線方程式：

$$\Gamma：3x^2 - 2m_E xy + y^2 - 3x + m_E y = 0 \qquad x \neq 0\,, x \neq 1\,, x \neq \tfrac{1}{2}\,, y \neq 0$$

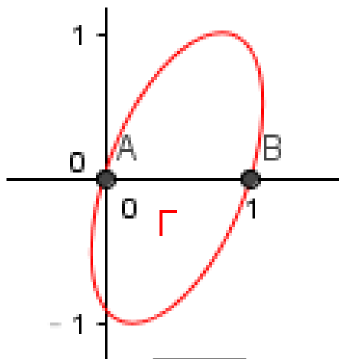
(2) 可知其為一個圓錐曲線，接著並以圓錐曲線判別是判斷之：

$m_E^2 - 3 > 0$　　曲線Γ為不連續雙曲線，如圖(37)

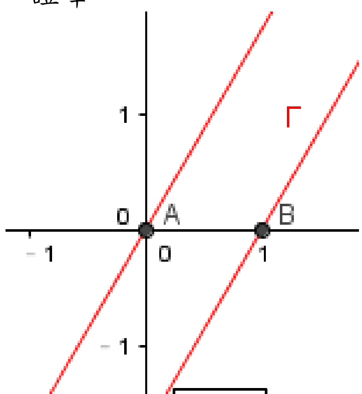
$m_E^2 - 3 = 0$　　曲線Γ為不連續之拋物線(退化為兩條平行線) ，如圖(38)

$m_E^2 - 3 < 0$　　曲線Γ為不連續橢圓，如圖(39)

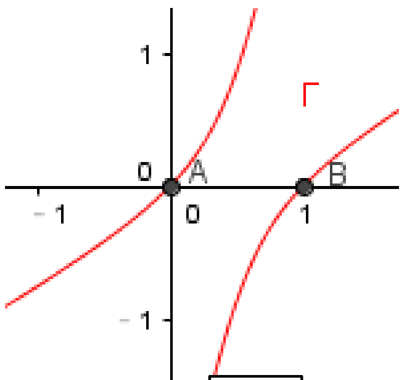
則可整理出 **Theorem4**　　　證畢



圖(37)

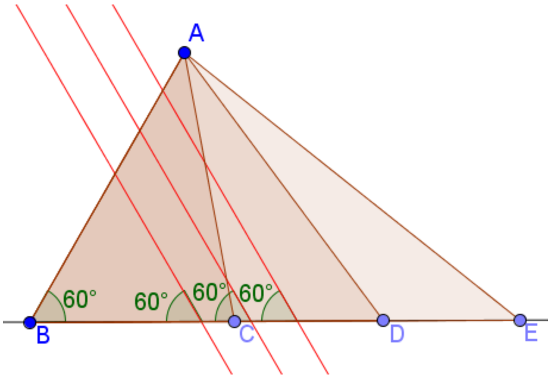


圖(38)

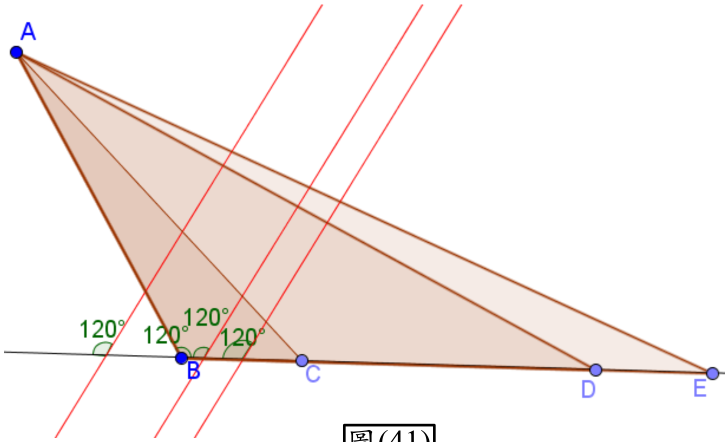


圖(39)

Note4: 當$m_E=\pm\sqrt{3}$時，曲線Γ為退化的不連續拋物線，平行線，且兩條都分別通過(1,0)、$\left(\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$、$(0,-\sqrt{3})$以及(0,0)、$\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$、$(0,\sqrt{3})$，因此此平行線跟$x$軸的夾角，一個為$60°$，另一個為$120°$，且此時線上的任意點與 A、B 所連成的三角形，其尤拉線都一定會互相平行且與x軸的夾角(銳角)皆為$60°$，如圖(40)、圖(41)。

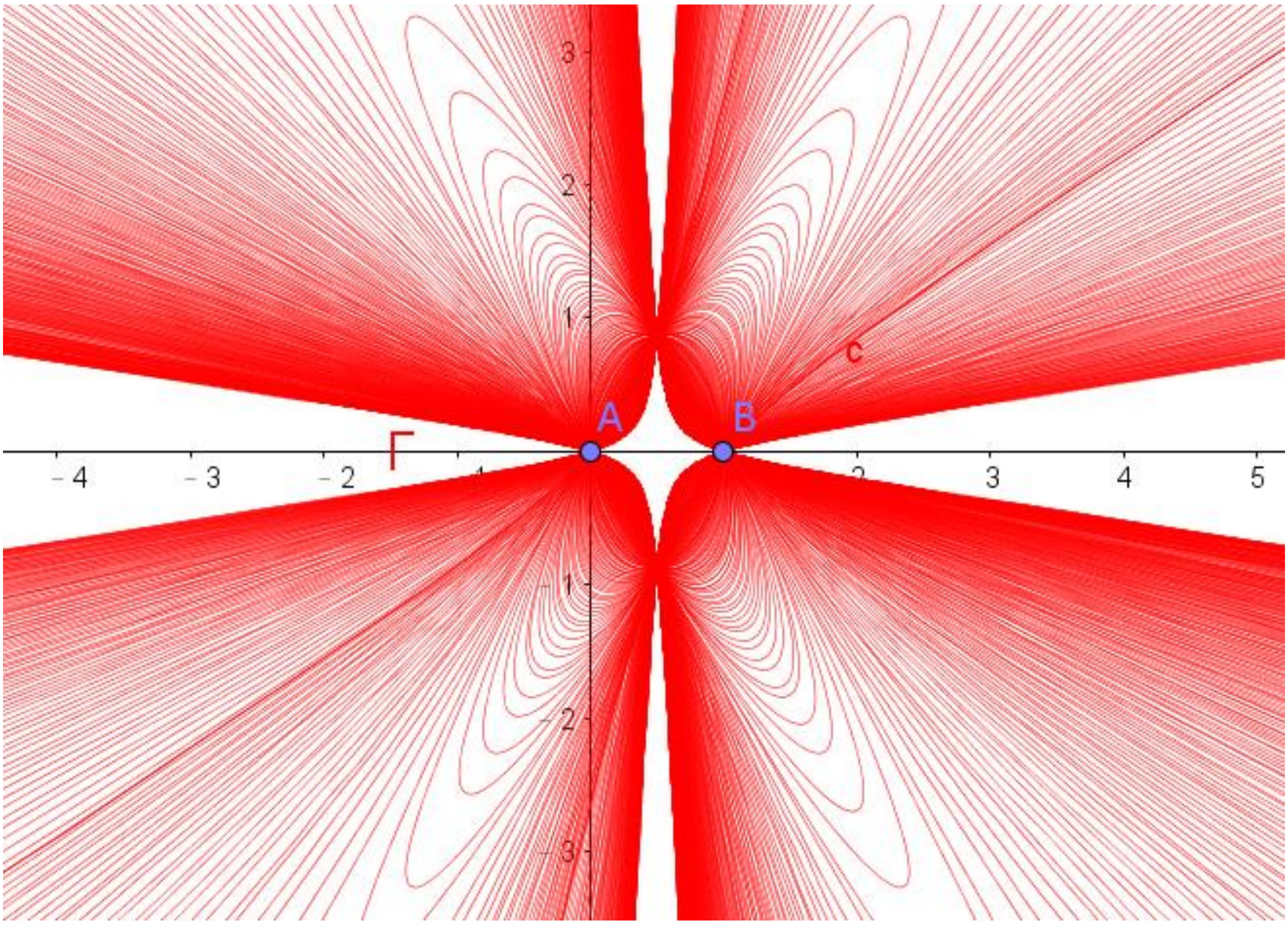


圖(40)



圖(41)

接著我們利用 Geogebra 的軌跡滑桿，研究 **Theorem7** 中的曲線Γ在改變m_E時的軌跡，如圖(42)，我們發現有些地方是固定的，且這些位置都恰巧為其不連續之處，這令我們十分驚喜，於是我們決定要來研究這個性質，並把他寫成了定理八。



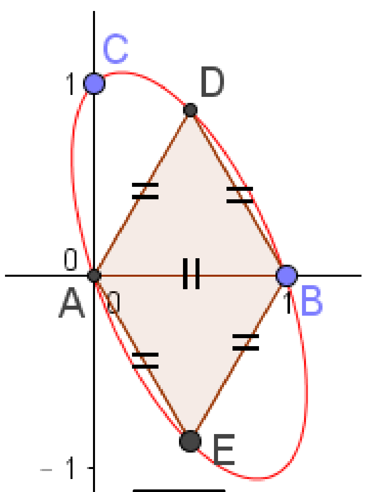
圖(42)

Theorem8: 令A(0,0)、B(1,0)、P 在曲線Γ。若△ABP中m_E為常數，則曲線Γ通過$P_1(0,0)$、$P_2(1,0)$、$P_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$P_4\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$這四個固定點，若在取得$P_5(0,-m_E)$、$P_6(1,m_E)$中的任意一點，則可畫出我們要的曲線Γ曲線，如圖(43)、圖(44)、圖(45)。且此六點為Γ曲線之間斷點。

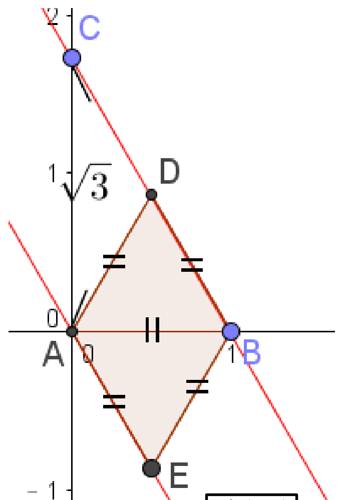
<proof>

(1) 因為我們發現重疊的點都是那些不連續的地方，所以我們決定，將 **Theorem4** 中Γ曲線的方程式帶入$x=0$, $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $y=0$，試試看能不能找出一些蛛絲馬跡。

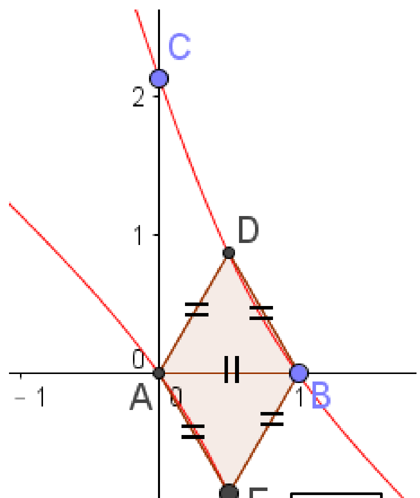
(2) 由上述方法便可以得到$P_1(0,0)$、$P_2(1,0)$、$P_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$P_4\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$P_5(0,-m_E)$、$P_6(1,m_E)$這六點，就是Γ曲線間斷點，而 **Theorem4** 中提到，若m_E為常數，則Γ曲線為圓錐曲線，僅需五點就可以作出。 證畢



圖(43)

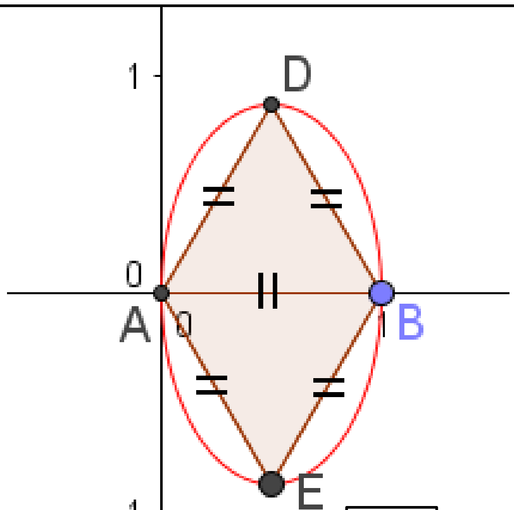


圖(44)



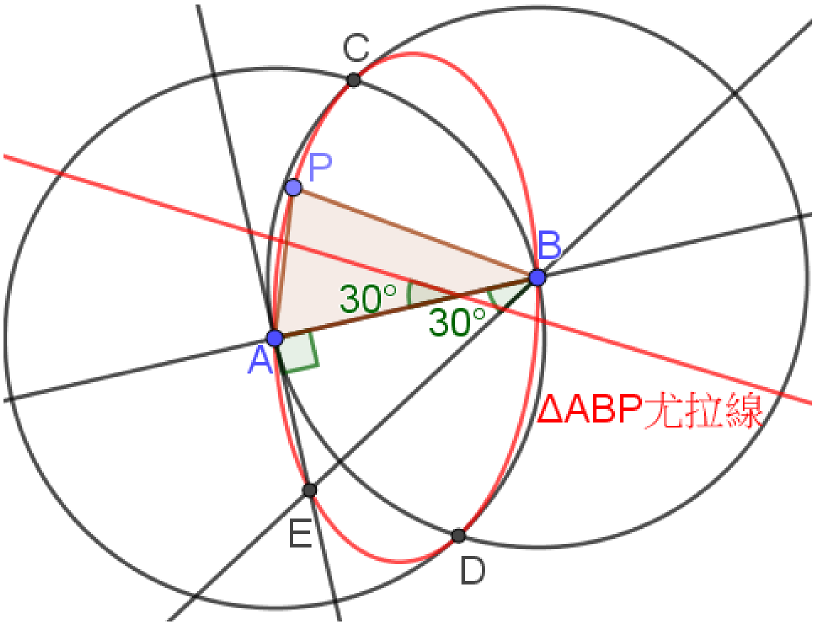
圖(45)

Note5: 當我們令$m_E=0$，會無法找出第五個點，不過因為P_1、P_2、P_3、P_4為其四個端點，因此我們仍然可以做出$m_E=0$時的曲線Γ，如圖(46)。



圖(46)

而我們便可以使用 **Theorem5** 的這個方法，在 A、B 在任意位置時，找到△ABP尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$夾角為任一角度的所有 P 點軌跡圖，我們以$30°$為例作圖，如圖(47)



圖(47)

說明:

在圖(46)中，為了使△ABP的尤拉線和$\overleftrightarrow{AB}$的夾角為$30°$，由 **Theorem5** 知，當圓錐曲線上的每一點 P 都要滿足夾角為$30°$的需求時，該圓錐曲線必定通過間斷點 A、B、C、D，且因為我們在$A(0,0)$、$B(1,0)$的狀況下還有兩個間斷點$P_5(0,-m_E)$、$P_6(1,m_E)$，而m_E即為尤拉線與$\overleftrightarrow{AB}$的正切值(逆時針為正)，先令$\overline{AB}=1$，因此知要在$\overleftrightarrow{AB}$上作一垂線，且通過 A，並作$\angle ABE=30°$，令$\overleftrightarrow{BE}$和過 A 點的垂線相交於 E，則此時$\overline{AE}=\tan 30°$，在這當下，我們已經找到了該圓錐曲線上的五個點，分別為：A、B、C、D、E，因此可以畫出該圓錐曲線，也就是說在該圓錐曲線上的任意點 P 都可以滿足△ABP的尤拉線和$\overleftrightarrow{AB}$的夾角為$30°$。

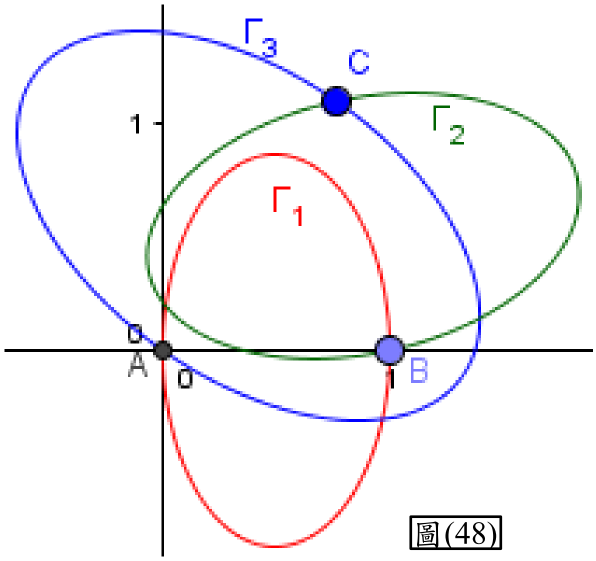
六、 探討研究動機中的圖(4-1)、(4-2)，判斷△CAB分割點P平行$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的存在性

Theorem9:任意△CAB，並不存在分割點 P，使各子△尤拉線平行$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$。

<proof>

(1) 令 A(0,0)、B(1,0)、C(p,q)

(2) 我們可以利用 **Theorem1** 中的橢圓來判定，有沒有一點 P 可以讓三邊所畫出的橢圓能夠共點，就能知道是否存在這個分割點。我們先算出三個橢圓Γ_1、Γ_2、Γ_3的方程式，如圖(48)：



圖(48)

Γ_1：$y^2+3x^2-3x=0$

$$\Gamma_2：\frac{\frac{4}{3}\left(\frac{q\left(\frac{-1}{2}(p+1)+x\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}+\frac{(-p+1)\left(\frac{-1}{2}q+y\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}\right)^2}{q^2+(p-1)^2}+\frac{4\left(-\frac{q\left(\frac{-1}{2}q+y\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}+\frac{(-p+1)\left(\frac{-1}{2}(p+1)+x\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}\right)^2}{q^2+(p-1)^2}=1$$

$$\Gamma_3：\frac{(4p^2+12q^2)\left(y-\frac{1}{2}q\right)^2+(12p^2+4q^2)\left(x-\frac{1}{2}p\right)^2+16pq\left(x-\frac{1}{2}p\right)\left(y-\frac{1}{2}q\right)}{3p^4+3q^4+6p^2q^2}=1$$

(3) 我們假設Γ_1、Γ_2、Γ_3三曲線不存在共點為假，則三曲線存在共點，可得到以下兩條等式：

$$3x^2+y^2-3x+1=\frac{(4p^2+12q^2)\left(y-\frac{1}{2}q\right)^2+(12p^2+4q^2)\left(x-\frac{1}{2}p\right)^2+16pq\left(x-\frac{1}{2}p\right)\left(y-\frac{1}{2}q\right)}{3p^4+3q^4+6p^2q^2}$$

$$3x^2+y^2-3x+1=\frac{\frac{4}{3}\left(\frac{q\left(\frac{-1}{2}(p+1)+x\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}+\frac{(-p+1)\left(\frac{-1}{2}q+y\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}\right)^2}{q^2+(p-1)^2}+\frac{4\left(-\frac{q\left(\frac{-1}{2}q+y\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}+\frac{(-p+1)\left(\frac{-1}{2}(p+1)+x\right)}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}\right)^2}{q^2+(p-1)^2}$$

(4) 我們可以從此關係式中對x求解，分別可得以下式：

$$x=\frac{9p^4-12p^3+18p^2q^2-12pq^2+16pqy+9q^4\pm\left(\sqrt{3}p^2+\sqrt{3}q^2\right)\sqrt{-36p^4y^2+27p^4-72p^3-72p^2q^2y^2+54p^2q^2-144p^2qy}}{18p^4+36p^2q^2-24p^2+18q^4-8q^2}$$

$$\overline{+96p^2y^2+48p^2-72pq^2+96pqy-36q^4y^2+27q^4-144q^3y+160q^2y^2+64qy-64y^2}$$

$$x=\frac{9p^4-48p^3+18p^2q^2+66p^2-48pq^2+16pqy-24p+9q^4+22q^2-16qy-3\pm\left(\sqrt{3}p^2-2\sqrt{3}p+\sqrt{3}q^2+\sqrt{3}\right)\sqrt{-36p^4y^2+27p^4}}{18p^4}$$

$$\frac{\overline{+144p^3y^2-36p^3-72p^2q^2y^2+54p^2q^2-144p^2qy-120p^2y^2-6p^2+144pq^2y^2-36pq^2+192pqy-48py^2+12p-36q^4y^2+27q^4}}{-72p^3+36p^2q^2+84p^2-72pq^2-24p+18q^4+28q^2-6}$$

$$\overline{-144q^3y+88q^2y^2-18q^2+16qy-4y^2+3}$$

(5) 此二式矛盾，故任意△CAB，不存在分割點 P　　　　證畢

七、 判斷多邊形分割點P，使各子△尤拉線同時分別平行各邊的存在性

三角形已證明不存在分割點 P，使各子△尤拉線同時分別平行各邊，我們以相同方法可算得四邊形存在此分割點，但不容易找到，不過因為使用橢圓計算的代數過於龐大，之後的計算就無法使用一般電腦所算出，所以我們作出了一個新的方法來判斷多邊形是否存在

分割點 P。

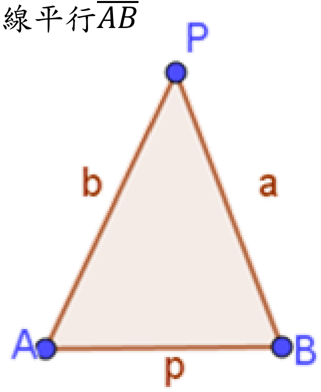
Theorem10:任意多邊形，若存在分割點 P，則各子△滿足：

假設子△為△ABP，令$\overline{\mathrm{AB}}=p$、$\overline{\mathrm{AP}}=b$、$\overline{\mathrm{BP}}=a$，則：$a^4+b^4-2p^4-2a^2b^2+a^2p^2+b^2p^2=0$

<proof>

(1) 如圖(49)，由 **Lemma1** 可知，當 $tan\,\angle A\cdot tan\,\angle B=3$，△$ABP$尤拉線平行$\overline{AB}$

，所以我們先算出$tan\,\angle A\cdot tan\,\angle B$：



圖(49)

$$tan\,\angle A\cdot tan\,\angle B=\frac{\sin\angle A}{\cos\angle A}\cdot\frac{\sin\angle B}{\cos\angle B}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\angle A}}{\cos\angle A}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos^2\angle B}}{\cos\angle B}$$

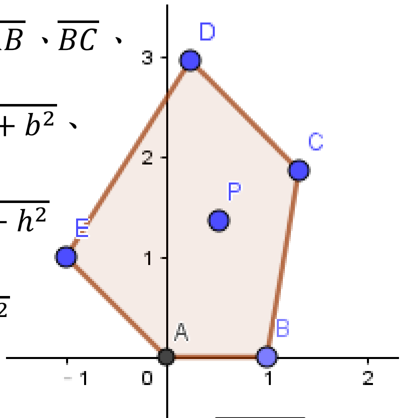
$$=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{b^2+p^2-a^2}{2bp}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{(a^2+p^2-b^2)}{2ap}\right)^2}}{\frac{b^2+p^2-a^2}{2bp}\cdot\frac{a^2+p^2-b^2}{2ap}}$$

$$=\frac{a^4+b^4+p^4-2a^2b^2-2a^2p^2-2b^2p^2}{a^4+b^4-p^4-2a^2b^2}$$

(2)令上為 3，可得：$a^4+b^4-2p^4-2a^2b^2+a^2p^2+b^2p^2=0$　　　證畢

我們便以五邊形為例，試試看是否可以使用此法計算出五邊行是否存在分割點 P，使各子△尤拉線同時分別平行各邊。

(1)如圖(50)，我們先令$C(a,b)$、$D(c,d)$、$E(e,f)$、$P(g,h)$，則$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EA}$、$\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$、$\overline{DP}$、$\overline{EP}$，分別為1、$\sqrt{(a-1)^2+b^2}$、$\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$、$\sqrt{(e-c)^2+(f-d)^2}$、$\sqrt{e^2+f^2}$、$\sqrt{g^2+h^2}$、$\sqrt{(g-1)^2+h^2}$、$\sqrt{(g-a)^2+(h-b)^2}$、$\sqrt{(g-c)^2+(h-d)^2}$、$\sqrt{(g-e)^2+(h-f)^2}$



圖(50)

(2) 我們假設存在分割點 P，使各子△尤拉線同時分別平行各邊為真，則可寫出以下式子：

$6g^2+2h^2-6g=0$

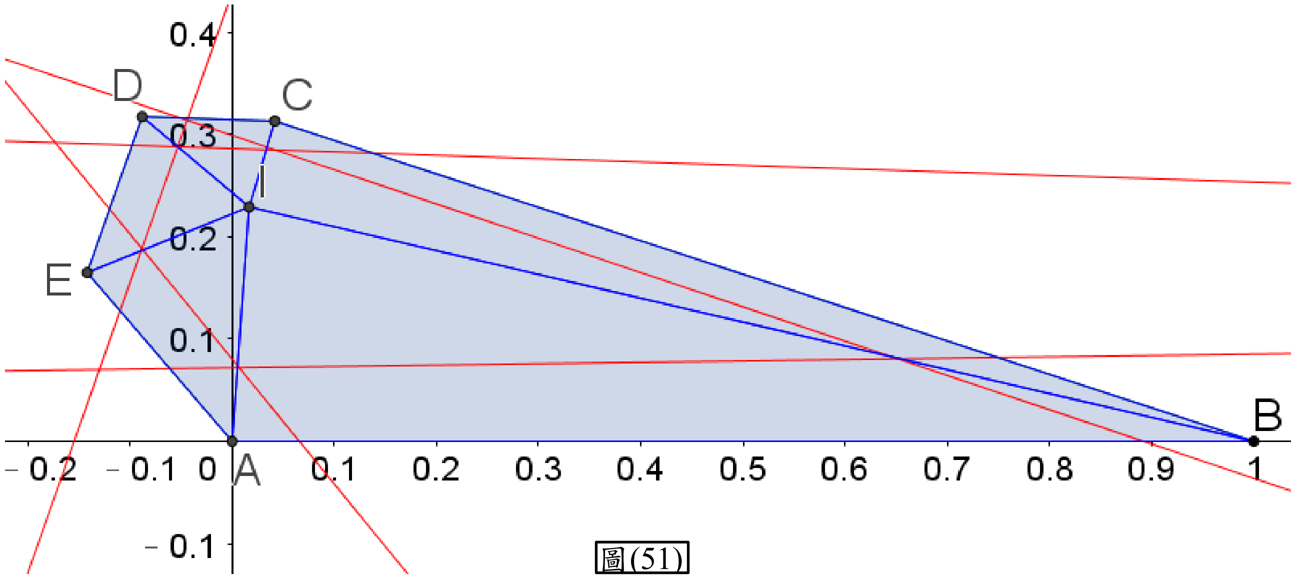
$-6a^3g+6a^3-6a^2bh+6a^2g^2+6a^2g+2a^2h^2-12a^2-6ab^2g+6ab^2+8abgh+4abh-12ag^2+6ag-4ah^2+6a-6b^3h+2b^2g^2+2b^2g+6b^2h^2-4b^2-8bgh+2bh+6g^2-6g+2h^2=0$

$6a^3c-6a^3g+6a^2bd-6a^2bh-12a^2c^2+6a^2cg-4a^2d^2+2a^2dh+6a^2g^2+2a^2h^2+6ab^2c-6ab^2g-16abcd+4abch+4abdg+8abgh+6ac^3+6ac^2g+6acd^2+4acdh-12acg^2-4ach^2+2ad^2g-8adgh+6b^3d-6b^3h-4b^2c^2+2b^2cg-12b^2d^2+6b^2dh+2b^2g^2+6b^2h^2+6bc^2d+2bc^2h+4bcdg-8bcgh+6bd^3+6bd^2h-4bdg^2-12bdh^2-6c^3g-6c^2dh+6c^2g^2+2c^2h^2-6cd^2g+8cdgh-6d^3h+2d^2g^2+6d^2h^2=0$

$6c^3e-6c^3g+6c^2df-6c^2dh-12c^2e^2+6c^2eg-4c^2f^2+2c^2fh+6c^2g^2+2c^2h^2+6cd^2e-6cd^2g-16cdef+4cdeh+4cdfg+8cdgh+6ce^3+6ce^2g+6cef^2+4cefh-12ceg^2-4ceh^2+2cf^2g-8cfgh+6d^3f-6d^3h-4d^2e^2+2d^2eg-12d^2f^2+6d^2fh+2d^2g^2+6d^2h^2+6de^2f+2de^2h+4defg-8degh+6df^3+6df^2h-4dfg^2-12dfh^2-6e^3g-6e^2fh+6e^2g^2+2e^2h^2-6ef^2g+8efgh-6f^3h+2f^2g^2+6f^2h^2=0$

$-6e^3g-6e^2fh+6e^2g^2+2e^2h^2-6ef^2g+8efgh-6f^3h+2f^2g^2+6f^2h^2=0$

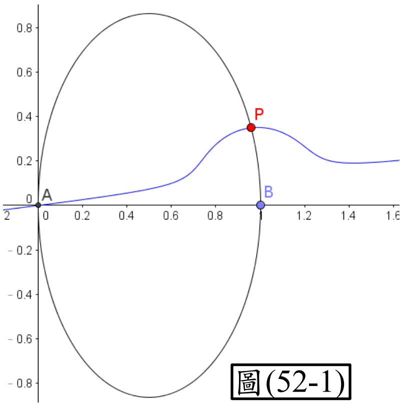
(3) 雖然算式依舊龐大，但電腦還是能算出P點x座標的解，以 **Theorem9** 中的方式，交互比較，即可證出五邊形存在分割點 P，使各子△尤拉線同時分別平行各邊，舉例如圖(51)。

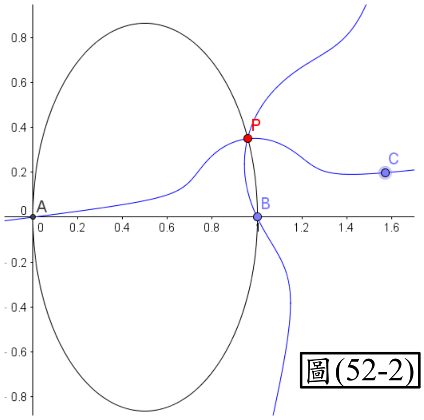


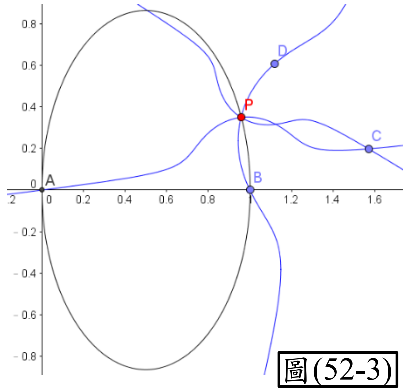
圖(51)

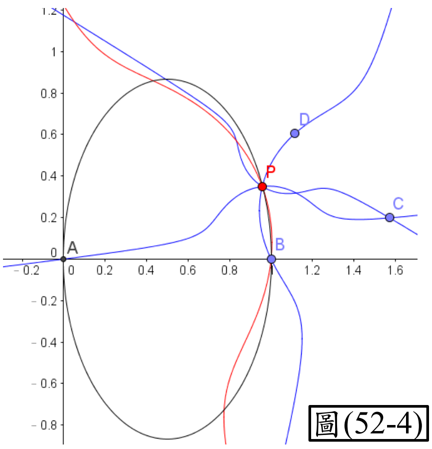
而其他多邊形便以此類推，即可判斷其是否存在分割點 P，使各子 △ 尤拉線同時分別平行各邊。以上我們的做法為先作一多邊形，再找出分割點 P，但我們轉念一想，我們何不先在橢圓上曲一點 P(分割點)，再以 **Corollary1** 中的曲線，一邊接一邊的建立，最後再取交點，即可創造出一個有分割點 P 多邊形，如圖(52-1)至圖(52-6)。

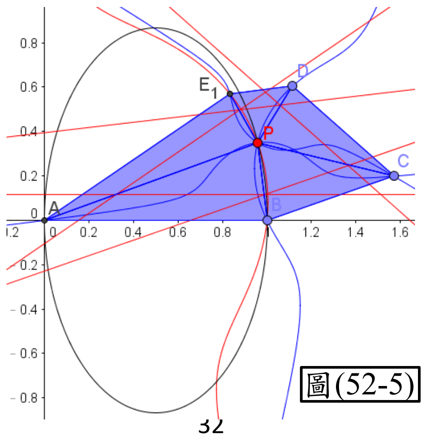
Theorem11: 令$A(0,0)$, $B(1,0)$在橢圓上曲一點 P(分割點)，再以 **Corollary1** 中的曲線，一邊接一邊的建立，最後再取交點，即可創造出一個有分割點 P 的多邊形，以五邊形為例，如圖(52-1)至圖(52-6)。詳細作法見下文。

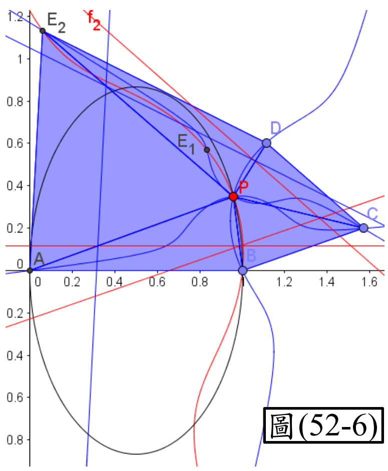

圖(52-1)

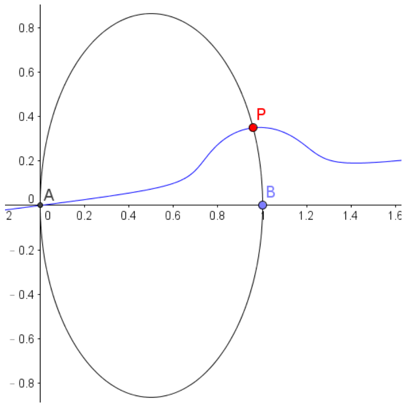

圖(52-2)


圖(52-3)

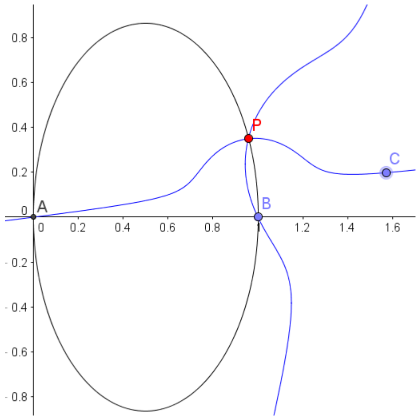

圖(52-4)


圖(52-5)

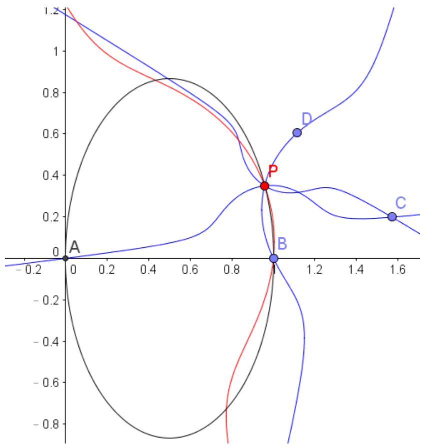

圖(52-6)



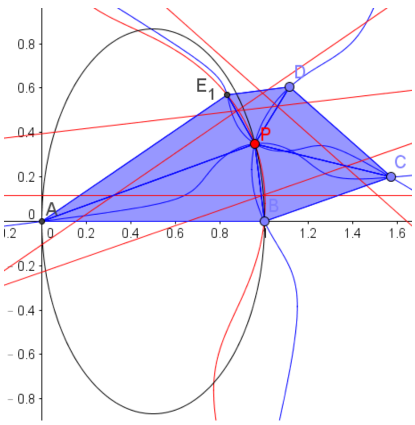
(1)令A(0,0) , $B(1,0)$，並利用 **Theorem1** 中的橢圓得到圖中的黑色曲線，在曲線上任取一點 P，再使用 **Corollary1** 中，使△ABP尤拉線平行$\overline{\text{AP}}$的曲線Γ，以 B、P 作出藍色曲線

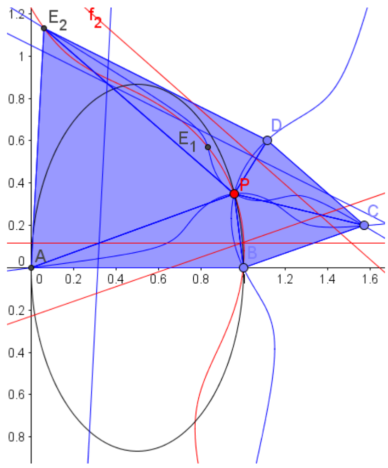


(2)接著先在原先的藍色曲線上任取一點 C，再繼續利用 **Corollary1** 中，使△ABP尤拉線平行$\overline{\text{AP}}$的曲線Γ，以 C、P 作出藍色曲線，以此類推作出 D

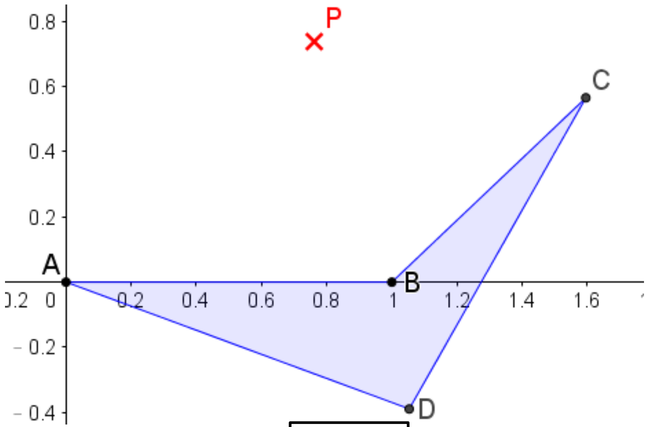


(3)最後用曲線Γ以 A、P 作出紅色曲線，在以 D、P 作出藍色曲線取交點，若無交點，則調動 P、C、D 使得兩曲線能夠有交點，而由 A、B、C、D、E (E_1 、E_2)所連成的五邊形就具有一分割點 P，即為所求

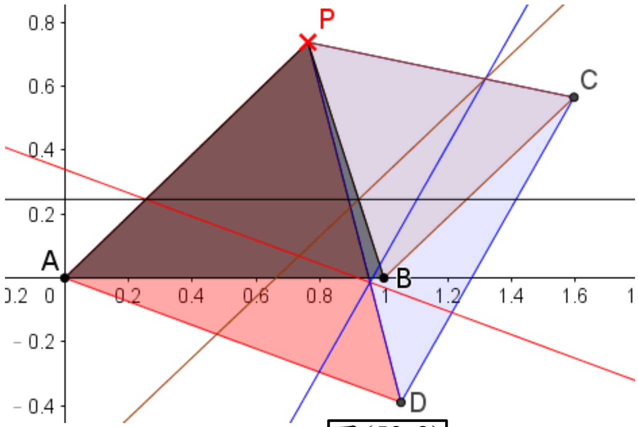




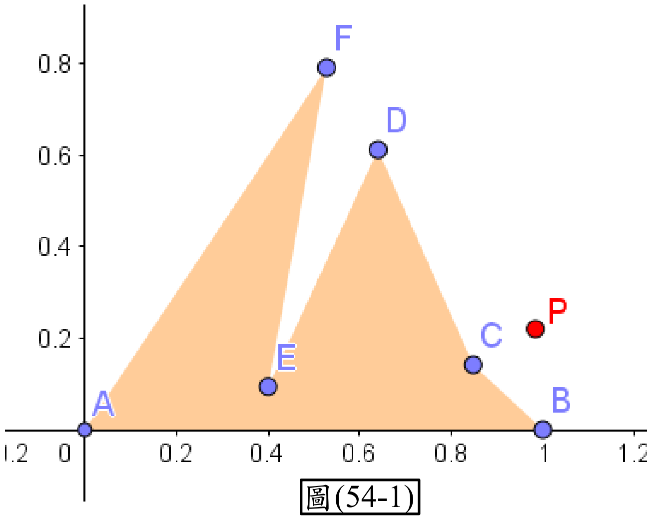
我們可以以此作法再找出其餘多邊如圖(53-1)至圖(55-2)。



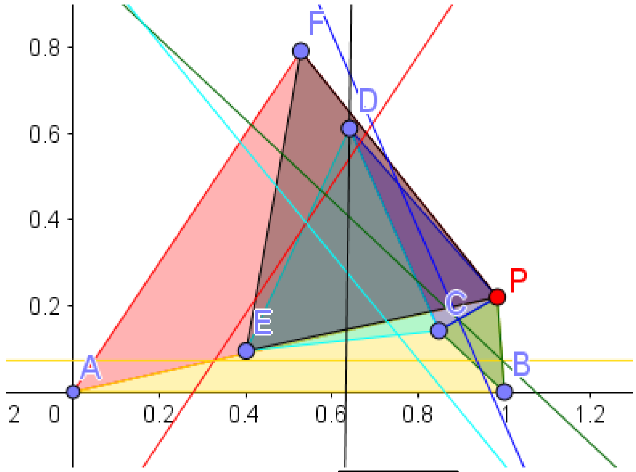
圖(53-1)



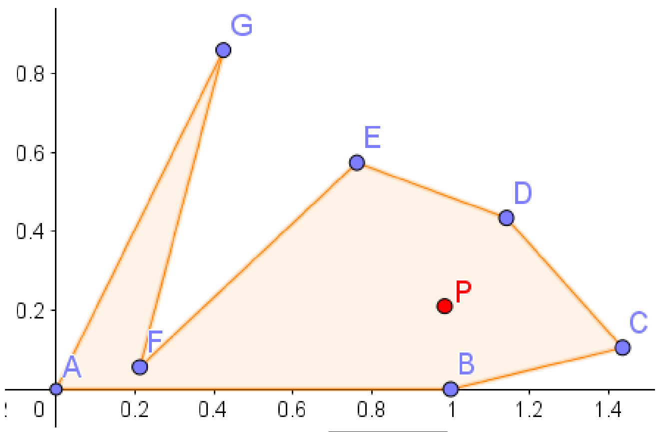
圖(53-2)



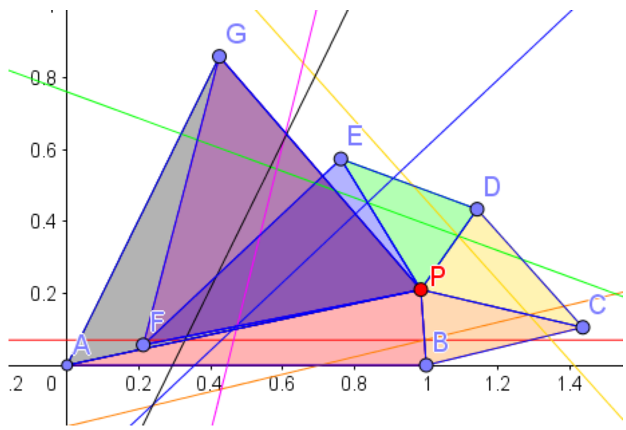
圖(54-1)



圖(54-2)



圖(55-1)



圖(55-2)

伍、討論

一、在 **Theorem2** 和 **Theorem4.1** 中皆有提到△ABP尤拉線與$\overline{AB}$平行的條件，**Theorem4.1** 中，若令 e＝0 則可得到 **Theorem2** 中的式子，兩者可相互對照，雖然是依不同的方式所算得的，然而殊途同歸，最後結果相同，令我們十分驚喜。

二、我們 **Theorem4.1**、**Theorem4.2**、**Theorem4.3** 系列中，我們的 A、B 在x軸的同側或是異側，都可以使用相同公式求得其解的個數以及解的位置，然而在尤拉線與$\overline{AB}$平行時，有些性質並不相同，如表(1)：

表(1)

	尤拉線與$\overline{AB}$平行
A、B 在x軸的同側	0 到 2 組解
A、B 在x軸的異側	必定 2 組解

陸、研究結果

我們在此列舉我們重要的定理：

Theorem1:取 A、B 點作橢圓短軸頂點，以$\sqrt{3}\,\overline{AB}$為長軸，則此橢圓上除四頂點外的任意一點，其與 A、B 所連成的三角形之尤拉線，必定與$\overline{\mathrm{AB}}$平行。

Theorem3:平面上有直線 L 和 A、B 兩點，求有幾個 P 點可以使△ABP尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$平行。

(7) 作$\overleftrightarrow{\mathrm{A'A}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{B'B}} \perp L$軸	(7) 以 B 為圓心，$\overline{\mathrm{BH}}$為半徑畫圓，交$\overleftrightarrow{\mathrm{LB}}$於 M 點
(8) 作$\overline{\mathrm{BL}} \perp \overleftrightarrow{\mathrm{B'B}}$，交$\overleftrightarrow{\mathrm{A'A}}$於 L 點	(8) 作$\overline{\mathrm{KJ}} \perp$ 直線 L，交$\overrightarrow{CA}$於 J 點
(9) 作$\overline{\mathrm{BL}}$中垂線且交$\overline{\mathrm{BL}}$於 H	(9) 比較$\overline{\mathrm{A'M}}$、$\overline{\mathrm{A'J}}$長度
(10) 連$\overline{\mathrm{B'H}}$	若$\overline{\mathrm{A'J}} > \overline{\mathrm{A'M}}$ 則無解，無法使△ABP尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$平行
(11) 作$\angle A'AJ = \angle BHB'$，交直線 L 於$J$點	若$\overline{\mathrm{A'M}} = \overline{\mathrm{A'J}}$ 則恰有一解使△ABP尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$平行
(12) 延長$\overleftrightarrow{\mathrm{LB}}$	若$\overline{\mathrm{A'M}} < \overline{\mathrm{A'J}}$ 則有兩解使△ABP尤拉線與$\overline{\mathrm{AB}}$平行

Corollary1:在座標平面上任取$A(0,f)$,$B(q,r)$

若有一曲線Γ：$$\frac{\frac{(f-y)(r-y)}{x(q-x)}+\frac{(f-y)(-f+r)}{qx}-\frac{(r-y)(-f+r)}{q(q-x)}-3}{\frac{-(f-r)}{q}+\frac{r-y}{q-x}+\frac{-f+y}{x}+\frac{3(f-r)(f-y)(r-y)}{qx(q-x)}}=\frac{-f+y}{x}$$

則△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{AP}}$，如圖(25) (藍色直線為△ABP尤拉線)

若有一曲線Γ：$$\frac{\frac{(f-y)(r-y)}{x(q-x)}+\frac{(f-y)(-f+r)}{qx}-\frac{(r-y)(-f+r)}{q(q-x)}-3}{\frac{r-y}{q-x}+\frac{-f+r}{q}+\frac{-f+y}{x}+\frac{3(f-r)(f-y)(r-y)}{qx(q-x)}}=\frac{r-y}{q-x}$$

則△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{BP}}$，如圖(26) (綠色直線為△ABP尤拉線)

Theorem5:令$A(e,f)$,$B(q,r)$。欲使△ABP尤拉線平行$\overline{\mathrm{AB}}$，在 P 點有解的狀況，令兩組解分別為P_1 、P_2，則：$tan\,\angle P_1AB \cdot tan\,\angle P_2AB = \frac{3r}{f}$,$tan\,\angle P_1BA \cdot tan\,\angle P_2BA = \frac{3f}{r}$

Corollary2:在座標平面上取 A(0,1)，任意一點 B

欲使尤拉線平行$\overline{\mathrm{AB}}$，若有一曲線：$\mathrm{y}=\frac{3}{4}x^2$，如圖(27)

則 B 在曲線內時，無解；在曲線上時，恰有一組解；在曲線外時，有兩解。

欲使尤拉線平行$\overline{\mathrm{AP}}$，若有一曲線：

$9x^4+y^4+6x^2y^2+6y^3-30x^2y-3x^2+12y^2+8y=0$，如圖(28)

則若 B 在曲線內時，三組解；在曲線上時，有兩解；在曲線外時，恰有一組解。

欲使尤拉線平行$\overline{\mathrm{BP}}$，若有一曲線：

$9x^4-3x^2y^2+8y^3-30x^2y+6x^2+12y^2+6y+1=0$，如圖(29)

則若 B 在曲線內時，三組解；在曲線上時，有兩解；在曲線外時，恰有一組解。

Lemma6:若有兩直線L_1、L_2，且兩線交於一點，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，其餘各點位置如圖(31)，且$\angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{KHA}$、P 點於$L$直線上，則$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{IHB}$、$\angle\mathrm{BPA}=\angle\mathrm{BHA}$。

Theorem6.1:若有兩直線L_1、L_2，且兩直線交於一點 G，且$m_{L_1}\cdot m_{L_2}=-3$，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，並作$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PGB}$，且 P 點於$x$軸上，則△PAB尤拉線平行$\overline{\mathrm{AB}}$。

Theorem6.2:若有兩直線L_1、L_2，且兩直線交於一點 G，且$\tan\angle\mathrm{BGA}\cdot m_{L_2}=3$，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，並作$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PGB}$，且 P 點於$x$軸上，則△PAB尤拉線平行$\overline{\mathrm{AP}}$。

Theorem6.3:若有兩直線L_1、L_2，且兩直線交於一點 G，且$\tan\angle\mathrm{BGA}\cdot m_{L_1}=-3$，將 A、B 兩點分別放置於兩線上，並作$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PGB}$，且 P 點於$x$軸上，則△PAB尤拉線平行$\overline{\mathrm{BP}}$。

Theorem8:令$\mathrm{A}(0,0)$、$\mathrm{B}(1,0)$、P 在曲線Γ。若$\triangle ABP$中m_E為常數，則曲線Γ通過$\mathrm{P}_1(0,0)$、$\mathrm{P}_2(1,0)$、$\mathrm{P}_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$\mathrm{P}_4\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$這四個固定點，若在取得$\mathrm{P}_5(0,-m_E)$、$\mathrm{P}_6(1,m_E)$中的任意一點，則可畫出我們要的曲線$\Gamma$曲線，如圖(43)、圖(44)、圖(45)。且此六點為Γ曲線之間斷點。

Theorem9:任意△CAB，並不存在分割點 P，使各子△尤拉線平行$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$。

Theorem10:任意多邊形，若存在分割點 P，則各子△滿足：

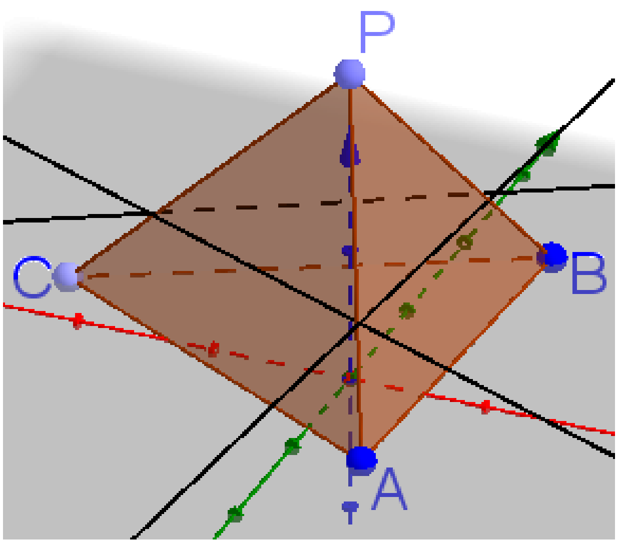
假設子△為$\triangle AB$P，令$\overline{\mathrm{AB}}=p$、$\overline{\mathrm{AP}}=b$、$\overline{\mathrm{BP}}=a$，則：$a^4+b^4-2p^4-2a^2b^2+a^2p^2+b^2p^2=0$

Theorem11: 令$\mathrm{A}(0,0)$,$B(1,0)$在橢圓上曲一點 P(分割點)，再以 **Corollary1** 中的曲線，一邊接一邊的建立，最後再取交點，即可創造出一個有分割點 P 多邊形，以五邊行為例，

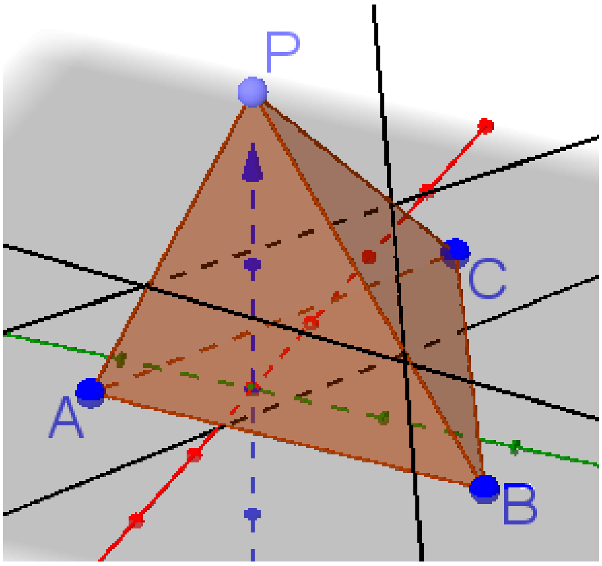
如圖(52-1)至圖(52-6)。詳細作法見下文。

柒、未來展望

若我們讓任意△CAB中的分割點P可以向z軸移動，如圖(52)(黑色直線為尤拉線)，那麼各子△尤拉線和邊是否可能平行呢？若我們再加入一個條件，除了各子△尤拉線和邊平行外，原本的△CAB尤拉線又是否可以與其邊平行呢?如圖(53)，那如果擴展到多邊形時，又會迸出甚麼樣的火花?真是令人好奇。



圖(52)



圖(53)

捌、參考資料

[1]楊精松、莊紹容(2017)。*微積分*(13 版)。東華書局。

[2]Wladimir G. Boskoff, Laurent¸iu Homentcovschi, and Bogdan D. Suceava(2013). Gossard's Perspector and Projective Consequences, *Forum Geometricorum*, 13 ,169–184. http://forumgeom.fau.edu/FG2013volume13/FG201318.pdf

[3]李昱頡、賀崇恩、劉垣妏(2016)，第 56 屆全國中小學科學展覽會——驚嘆尤拉線群遇到 60°與120°。

[4]許志農。高中數學課本第三、四冊，99 課綱。出版社：龍騰文化

【評語】010049

本作品先得出一個三角形的兩內角 tangent 值的乘積為 3 的時候，此三角形的尤拉線平行於連接兩角之邊。利用座標解析幾何的方式，列出第三個動點(在一條直線上)能讓 tangent 值的乘積為 3 的函數關係，據此討論是否存在有平行於給定兩點連線的尤拉線。就結論來看，所有結論均要仰賴一個給定的坐標系，以及 A，B 兩點的座標，才能判別是否存在平行於 AB 的尤拉線。但是比較強的結果，是在給定 AB 線段與 L 的夾角，就應該可以判別是否在 L 上存在有 P 點，使得存在平行於 AB 的尤拉線。