

# 2021 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010048

參展科別 數學

作品名稱 空間中的福特球

得獎獎項 大會獎 四等獎

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 洪允東、徐祥峻

作者姓名 洪銘德、呂家維

關鍵詞 法里數列、福特圓、福特球

## 作者簡介



我是洪銘德，就讀師大附中 1509 科學班，我喜歡資訊、寫程式、聊天和電動，常和社團的朋友討論程式問題。在高中做科展，思考、合作、討論，學到了許多課程沒教的知識，也發現可以把程式與數學結合，讓我倍有成就感。研究過程中雖然常常碰壁、卡住，但每次有突破，總是讓我高興得大笑，高中的科展時光使我高中完整的一塊不可或缺拼圖。

我是呂家維，就讀師大附中 1509 科學班，我喜歡思考、運動、音樂和電動，也喜歡和朋友聊天。在科展的日子裡，最享受的是不設限的思考過程以及和夥伴老師討論想法的時光，雖然遇到很多的瓶頸，但也瞭解到研究的困難，並且在解決一個問題的時候有一種非比尋常的成就感。研究最吸引我的地方就是那需要自己探索未知的魅力。這兩年的科展是我高中難忘且珍貴的回憶！

## 摘要

本研究旨在探討由法里數列生成的福特圓、以及與其有相似性，但是三維(或更高)的福特球的相關性質，我們分成三個部分來探討。一、首先我們驗證福特圓的衍生方式是否與法里數列相符合，並發想出另一種福特圓的衍生方法；二、以類似福特圓的方式，定義三維中的福特球、推導出以三顆球衍生第四顆球的公式、且限制其衍生的範圍，爾後由同一方向(以最新三顆球作衍生)、固定某一個球(固定某顆球，以最新兩顆球和固定球衍生)等方式衍生，並且利用空間中的索迪公式，對其半徑倒數與配合半徑倒數化繁後的 $x$ 、 $y$ 分子的遞迴關係式作探討；三、在高維度中，同樣定義出福特球(並非球體，只是敘述上方便的統稱)，利用索迪公式對同一方向衍生的半徑倒數數列的遞迴關係式來探討。

## Abstract

This research is aimed at exploring the Ford circles generated by the Farey sequence, and the related properties of the Three-dimensional (or higher) Ford spheres which is similar to them. First, we verify whether the derivative method of Ford circles conforms to the Farey sequence, and come up with another derivative method of Ford circles. Second, using the way similar to the Ford circles, we define the Ford spheres, derive the formula of the spheres, and limit the range of their derivatives. We explored the Ford spheres using the methods like deriving the spheres in the same direction (use the latest three spheres to derive), and using a fixed sphere and the latest two spheres to derive, etc. By the use of the Soddy formula in space, we explore the recurrence formula of the sequence of the reciprocals of their radii and of the sequences of the  $x$  and  $y$  coordinates' numerators after the transformation. Third, in the high dimension, the Ford spheres are also defined (not spheres, but a convenient general term in the narrative), and we use the Soddy formula to explore the recurrence formula of the sequence of the reciprocals of their radii derived in the same direction.

# 壹、前言

## 一、研究動機

考科學班時，考題中出現了一種數列，考完試後回家查，才知道原來這種數列叫做法里數列(Farey sequence)，同時發現了福特圓(Ford circle)，這是一種在平面坐標系上圓的集合，圓與 $x$ 軸、鄰近的圓相切，這些圓的位置與法里數列存在巧妙關係，因此我就開始好奇，是否在空間中也存在類似的關係呢？

## 二、研究目的

- (一) 找出空間中是否存在球體有類似福特圓的性質。
- (二) 找出空間中的福特球是否與平面上的福特圓有關連。
- (三) 將題目推廣到更高維的空間，並找出各維度之間的關聯。

## 貳、研究方法或過程

### 一、平面中的福特圓

#### (一) 福特圓的定義

福特圓的定義：

圓心在  $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$  且半徑為  $\frac{1}{2q^2}$  的圓(其中  $\frac{p}{q}$  是  $n$  階法里數列中的項)，我們稱這樣的圓為福特圓(Ford circle)。

$n$  階法里數列  $F_n$ ：0 和 1 之間分母不大於  $n$  最簡分數的數列，由小至大排列

以 8 階法里數列為例： $F_8 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, 1 \right\}$

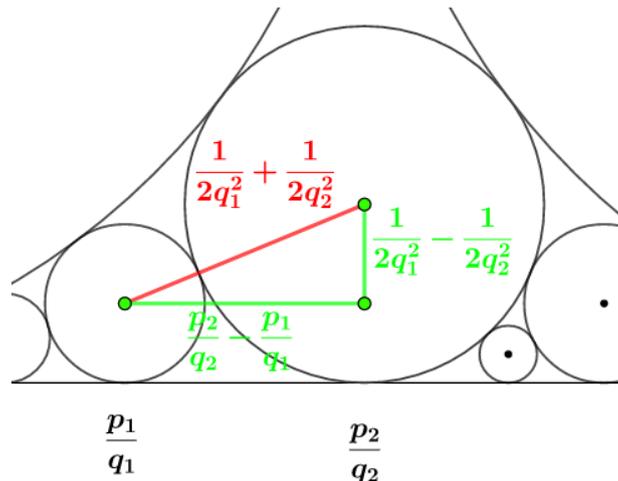
#### (二) 福特圓的性質

滿足條件的圓會有以下性質。

福特圓的性質：

當兩相切福特圓的圓心分別為  $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2}\right)$ 、 $\left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2}\right)$ ，則必存在  $n$  使得  $\frac{p_1}{q_1}$ 、 $\frac{p_2}{q_2}$  為  $n$  階法里數列中的相鄰兩項；當兩福特圓的圓心分別為  $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2}\right)$ 、 $\left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2}\right)$ ，且  $\frac{p_1}{q_1}$ 、 $\frac{p_2}{q_2}$  為  $n$  階法里數列中的相鄰兩項，則兩圓必定相切。

【證明】



圖一：兩個相切的福特圓

已知法里數列中有一性質：當  $\frac{a}{b}$  和  $\frac{c}{d}$  是法里數列中相鄰的兩項，且  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ，則

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd} \Leftrightarrow bc - ad = 1$$

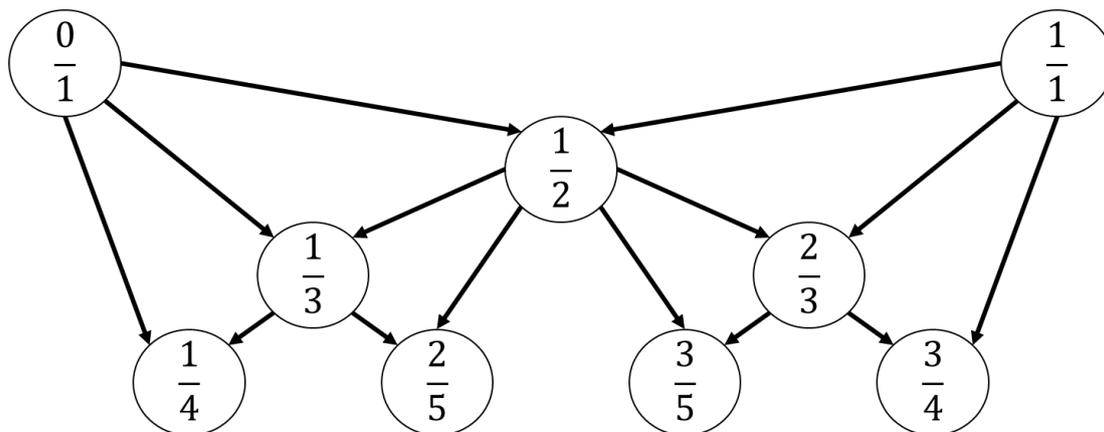
設有兩圓相切圓的圓心分別為 $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2}\right)$ 、 $\left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2}\right)$ ，如圖一，則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2q_1^2} + \frac{1}{2q_2^2} &= \sqrt{\left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2q_1^2} + \frac{1}{2q_2^2}\right)^2 &= \left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4q_1^4} + \frac{1}{2q_1^2q_2^2} + \frac{1}{4q_2^4} &= \frac{p_2^2}{q_2^2} + \frac{p_1^2}{q_1^2} - \frac{2p_1p_2}{q_1q_2} + \left(\frac{1}{4q_1^4} - \frac{1}{2q_1^2q_2^2} + \frac{1}{4q_2^4}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{q_1^2q_2^2} &= \frac{p_2^2}{q_2^2} + \frac{p_1^2}{q_1^2} - \frac{2p_1p_2}{q_1q_2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{q_1^2q_2^2} &= \frac{q_1^2p_2^2}{q_1^2q_2^2} + \frac{q_2^2p_1^2}{q_2^2q_1^2} - \frac{2q_1q_2p_1p_2}{q_1^2q_2^2} \\ \Leftrightarrow 1 &= q_1^2p_2^2 + q_2^2p_1^2 - 2q_1q_2p_1p_2 \\ \Leftrightarrow 1 &= (p_1q_2 - p_2q_1)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= |p_1q_2 - p_2q_1| \end{aligned}$$

$1 = |p_1q_2 - p_2q_1|$ 符合法里數列的性質，由此可知只要符合兩圓相切圓的圓心分別為

$\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{1}{2q_1^2}\right)$ 、 $\left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{1}{2q_2^2}\right)$ ，則 $\frac{p_1}{q_1}$ 、 $\frac{p_2}{q_2}$ 必為法里數列中的相鄰兩項。

由性質 1 知，在法里數列中，由 $\frac{0}{1}$ 、 $\frac{1}{1}$ 開始，新的項為舊有的兩項，分子和當分子，分母和當分母所構成，如圖二。



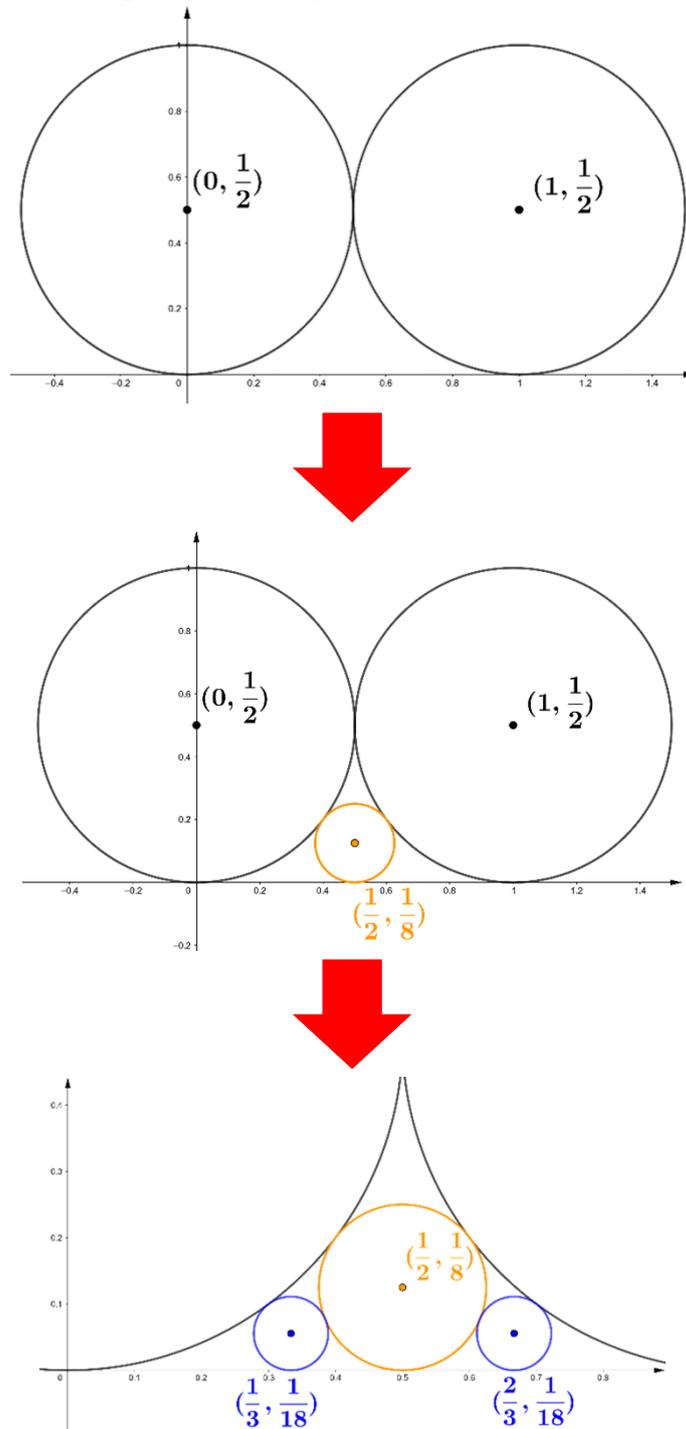
圖二：法里數列產生過程

### (三) 福特圓衍生的想法

由想法 1 可以得到與以上定義衍生出的相同的圓：

福特圓的衍生：

在平面中的福特圓，是由兩個圓心分別在 $(0, \frac{1}{2})$ 、 $(1, \frac{1}{2})$ 且與 $x$ 軸相切的起始圓開始，在每個圓皆與 $x$ 軸相切的情況下，做出與任兩圓相切的下個圓，持續衍伸下去，所形成的圓，如圖三。



圖三：衍生想法下的福特圓

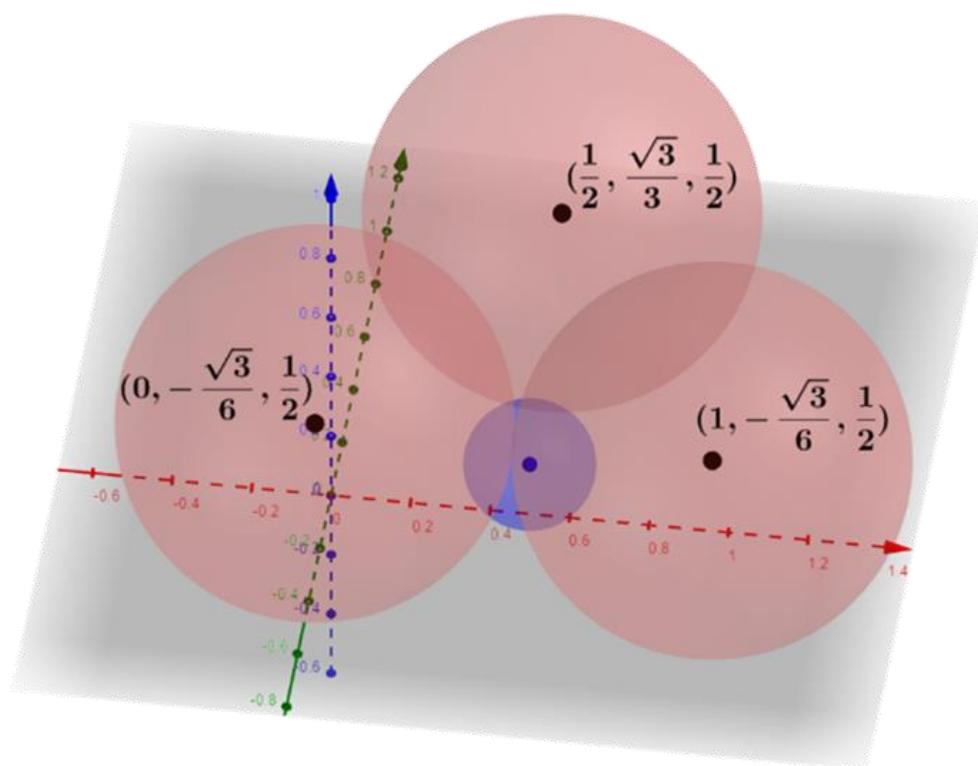
## 二、空間中的福特球

### (一) 福特球的定義與衍生的起始

在空間中，我的目標是找的球心，使得指定球心的球，以 $z$ 為半徑作球，所得的球會互相相切或相離(類似福特圓)。但因為沒辦法一開始就知道球心位置，所以我們先指定幾個起始的球，再作相切的球，漸漸作(衍生)出福特球的方式開始研究(類似想法 1)。具體行動如下：

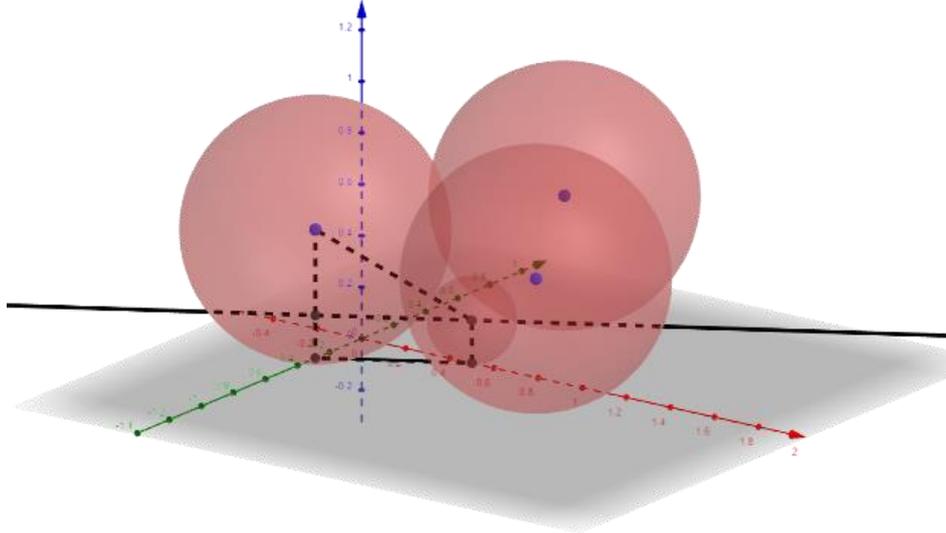
福特球的定義：

類似福特圓的衍生，定義三個起始球的球心分別在 $o_1\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 、 $o_2\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 、 $o_3\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ ，半徑為 $\frac{1}{2}$ ，這樣與這三個球可以決定唯一一個與它們皆外切，且切 $xy$ 平面的球(半徑即為 $z$ 值)，如圖四。接下來則是作與 $xy$ 平面相切且與任三球外切同時不與其他球重疊的球體。



圖四：衍生想法下的福特球

(二) 第四顆球的衍生



圖五：衍生第四顆福特球

首先，從與起始三個球皆相切的球開始，要找第四顆球 $O_4$ 的球心位置。

設所求球之半徑為 $z$ ，球心為 $(x, y, z)$ ，如圖五。

其與球心在 $(0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2})$ 半徑 $\frac{1}{2}$ 的球相切，

$$\Rightarrow \text{連心線長度為 } \sqrt{(x-0)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2} = z + \frac{1}{2}。$$

$$\Rightarrow (x-0)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x-0)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{12} = 2z \dots\dots\dots ①$$

$$\text{同理，} (x-1)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{12} = 2z \dots\dots\dots ②$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3} = 2z \dots\dots\dots ③$$

$$② - ① \text{ 得 } x = \frac{1}{2}, \text{ 帶入 } ①、③ \text{ 得 } y^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3} = 2z, y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3} = 2z$$

$$\text{解得 } y = 0, z = \frac{1}{6}, \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)。$$

故得知第四顆球的球心位置在 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$ 。

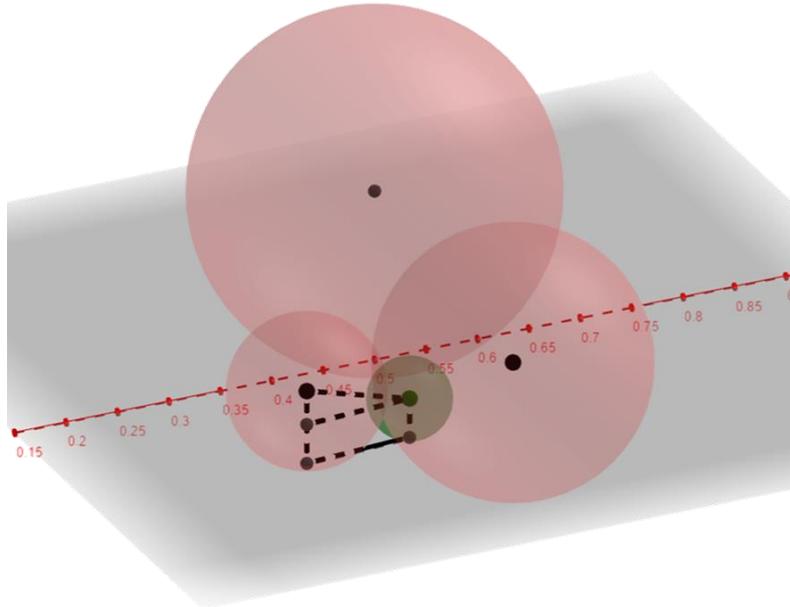
### (三) 福特球衍生的方法

福特球衍生的方法：

當有一球球心在 $(x, y, z)$ ，與球心在 $(x_1, y_1, z_1)$ 、 $(x_2, y_2, z_2)$ 、 $(x_3, y_3, z_3)$ ，半徑分別為 $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ 的球相外切，如圖六，且與 $xy$ 平面相切的球，可以有此關係式：

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = 4zz_i, i \in \{1,2,3\}$$

【證明】



圖六：衍生新的球

設所求球之半徑為 $z$ ，球心為 $(x, y, z)$ 。

其與球心在 $(x_i, y_i, z_i)$ 半徑 $z_i$ 的球相切， $i \in \{1,2,3\}$ ，如圖六，

$$\Rightarrow \text{連心線長度為} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} = z + z_i$$

$$\Rightarrow (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = (z + z_i)^2$$

$$\Rightarrow (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = 4zz_i$$

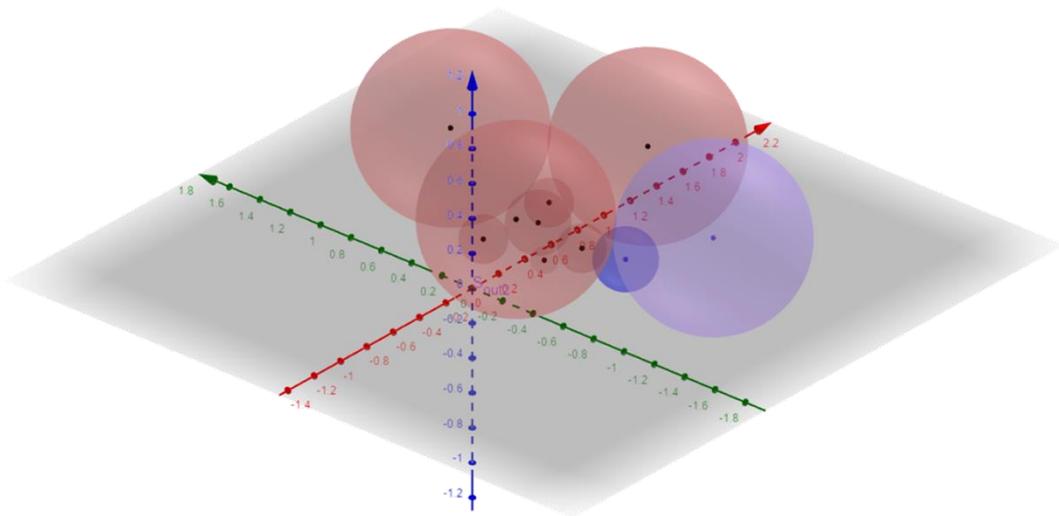
(四) 福特球的衍生結果與研究範圍訂定

由上述公式，即可推得各個球的球心，如表一。

表一：福特球衍生結果(編號為流水號)

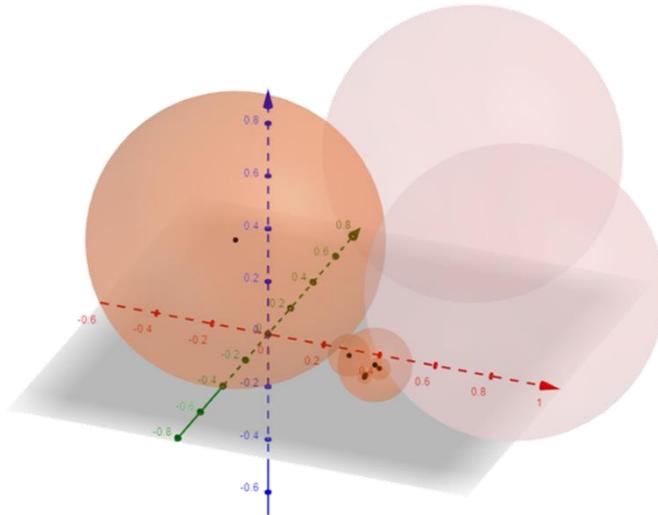
0	$\left(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$
	$O_1$	$O_2$	$O_3$
1	$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)$		
	$O_4 - O_1, O_2, O_3$		
2	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$
	$O_5 - O_4, O_1, O_2$	$O_6 - O_4, O_1, O_3$	$O_7 - O_4, O_2, O_3$
3	$\left(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{9}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$
	$O_8 - O_5, O_1, O_4$	$O_9 - O_5, O_1, O_2$	$O_{10} - O_5, O_2, O_4$
	$\left(\frac{2}{7}, -\frac{1}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{3}{7}, \frac{5}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$
	$O_{11} - O_6, O_1, O_4$	$O_{12} - O_6, O_1, O_2$	$O_{13} - O_6, O_3, O_4$
	$\left(\frac{5}{7}, -\frac{1}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$	$\left(1, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$
	$O_{14} - O_7, O_2, O_4$	$O_{15} - O_7, O_1, O_2$	$O_{17} - O_7, O_3, O_4$
⋮	⋮		

在表一中可以發現半徑變大的球(表一中藍色部分)， $O_9$ 如圖七中深藍色的球，若再以  $O_9$ 、 $O_1$ 、 $O_2$ 繼續衍生，新的球的球心位置為 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$ 如圖七中淺藍色的球，可以發現此球與 $O_1$ 、 $O_2$ 又形成新的一組三顆起始球，故接下來的研究、討論皆在一開始定的三顆球範圍內。



圖七：衍生出越來越大的球

(五) 同一方向福特球



圖八：沿同一方向所衍伸出的福特球

若將球持續以同一個方向往下做(以最新三顆球衍生出更新的球，如圖八)，並對球心座標配合z值分母作適當的化繁，可以得到數顆球的球心如表二：

表二：同一方向的福特球球心

球心	將分母變為與z值分母有關後
$\left(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{0}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{3}{6}, -\frac{0}{6}, \frac{1}{6}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{4}{8}, -\frac{4}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$
$\left(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$	$\left(\frac{5}{14}, -\frac{4}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$
$\left(\frac{6}{13}, -\frac{7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26}\right)$	$\left(\frac{12}{26}, -\frac{7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26}\right)$
$\left(\frac{3}{7}, -\frac{3}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{42}\right)$	$\left(\frac{18}{42}, -\frac{9}{42\sqrt{3}}, \frac{1}{42}\right)$
$\left(\frac{31}{74}, -\frac{11}{37\sqrt{3}}, \frac{1}{74}\right)$	$\left(\frac{31}{74}, -\frac{22}{74\sqrt{3}}, \frac{1}{74}\right)$
$\left(\frac{7}{16}, -\frac{5}{16\sqrt{3}}, \frac{1}{128}\right)$	$\left(\frac{56}{128}, -\frac{40}{128\sqrt{3}}, \frac{1}{128}\right)$
$\left(\frac{93}{218}, -\frac{35}{109\sqrt{3}}, \frac{1}{218}\right)$	$\left(\frac{93}{218}, -\frac{70}{218\sqrt{3}}, \frac{1}{218}\right)$
⋮	⋮

### 1. 同一方向福特球的半徑關係

觀察被適當球心半徑 $z$ ，可得規律 1。

半徑倒數的關係：

若將球持續以同一個方向往下做(以最新三顆球生出更新的球，如圖八)，可發現半徑倒數

$\left(\frac{1}{z}\right)$ 呈現以下數列：

$$2, 6, 8, 14, 26, 42, 74, 128, 218, 378 \dots$$

設此數列為 $\langle z \rangle$ ，可以發現以下規律：

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} - z_{n-4}, z_1 = 2, z_2 = 6, z_3 = 8, z_4 = 14, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

其一般式為

$$z_n = 2 \left( \frac{T_{n+2}(\alpha) - T_{n+2}(\beta)}{\alpha - \beta} \right)$$

其中， $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$ ， $\beta = \frac{1-\sqrt{13}}{4}$ ， $T_n(x)$ 為第一類切比雪夫多項式(Chebyshev polynomials of the first kind)。

第一類切比雪夫多項式： $T_0(x) = 1$ ， $T_1(x) = x$ ， $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

**【證明】**  $\langle z \rangle$ 遞迴式證明

由三個互相相切的球(半徑倒數分別為 $z_{n-3}$ 、 $z_{n-2}$ 、 $z_{n-1}$ )衍生新的福特球(半徑倒數為 $z_n$ )時( $n \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 5$ )，由索迪公式知

$$3(z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_{n-3}^2) = (z_n + z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3})^2$$

$$\Rightarrow 3(z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_{n-3}^2) - (z_n + z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3})^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_{n-3}^2 - z_n z_{n-1} - z_n z_{n-2} - z_n z_{n-3} - z_{n-1} z_{n-2} - z_{n-1} z_{n-3} - z_{n-2} z_{n-3}) = 0$$

$$z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_{n-3}^2 - z_n z_{n-1} - z_n z_{n-2} - z_n z_{n-3} - z_{n-1} z_{n-2} - z_{n-1} z_{n-3} - z_{n-2} z_{n-3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_{n-3}^2 - z_n z_{n-1} - z_n z_{n-2} - z_n z_{n-3} - z_{n-1} z_{n-2} - z_{n-1} z_{n-3} - z_{n-2} z_{n-3}}{z_n^2 - z_{n-4}^2 - z_n z_{n-1} - z_n z_{n-2} - z_n z_{n-3} + z_{n-4} z_{n-1} + z_{n-4} z_{n-2} + z_{n-4} z_{n-3}} = 0$$

$$z_n^2 - z_{n-4}^2 - z_n z_{n-1} - z_n z_{n-2} - z_n z_{n-3} + z_{n-4} z_{n-1} + z_{n-4} z_{n-2} + z_{n-4} z_{n-3} = 0$$

$$\Rightarrow (z_n - z_{n-4})(z_n + z_{n-4} - z_{n-1} - z_{n-2} - z_{n-3}) = 0$$

若 $z_n \neq z_{n-4}$ ，則 $z_n + z_{n-4} - z_{n-1} - z_{n-2} - z_{n-3} = 0$ ， $z_n = z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} - z_{n-4}$

此時若 $z_{n-1}, z_{n-2}, z_{n-3} \geq 0$ ，且 $z_{n-1} > z_{n-2} > z_{n-3} > z_{n-4}$ ，則 $z_n > z_{n-1}$ 。

由 $z_1 = 2, z_2 = 6, z_3 = 8, z_4 = 14$ 知 $z_4 > z_3 > z_2 > z_1$ ，故

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} - z_{n-4}, z_1 = 2, z_2 = 6, z_3 = 8, z_4 = 14, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

【證明】 $\langle z \rangle$ 一般式證明

令一數列 $a_n = 2 \left( \frac{T_{n+2}(\alpha) - T_{n+2}(\beta)}{\alpha - \beta} \right)$ ， $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$ ， $\beta = \frac{1-\sqrt{13}}{4}$ ，其中 $T_n$ 是切比雪夫多項式

首先我們知道 $2\alpha = 1 - 2\beta$ ， $\alpha\beta = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\alpha - \beta} (T_{n+2}(\alpha) - T_{n+2}(\beta)) = \frac{2}{\alpha - \beta} (2\alpha T_{n+1}(\alpha) - T_n(\alpha) - 2\beta T_{n+1}(\beta) + T_n(\beta)) \\
 &= \frac{2}{\alpha - \beta} (T_{n+1}(\alpha) - T_{n+1}(\beta)) + \frac{2}{\alpha - \beta} (-2\beta T_{n+1}(\alpha) + 2\alpha T_{n+1}(\beta) - T_n(\alpha) + T_n(\beta)) \\
 &= a_{n-1} + \frac{2}{\alpha - \beta} \left( -2\beta(2\alpha T_n(\alpha) - T_{n-1}(\alpha)) + 2\alpha(2\beta T_n(\beta) - T_{n-1}(\beta)) - T_n(\alpha) + T_n(\beta) \right) \\
 &= a_{n-1} + \frac{2}{\alpha - \beta} \left( 2(T_n(\alpha) - T_n(\beta)) + (1 - 2\alpha)T_{n-1}(\alpha) - (1 - 2\beta)T_{n-1}(\beta) \right) \\
 &= a_{n-1} + a_{n-2} + \frac{2}{\alpha - \beta} \left( (2\alpha + 1 - 2\alpha)T_{n-1}(\alpha) - (2\beta + 1 - 2\beta)T_{n-1}(\beta) - (T_{n-2}(\alpha) - T_{n-2}(\beta)) \right) \\
 &= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}
 \end{aligned}$$

也就是說， $z_n$ 和 $a_n$ 有一樣的遞迴式，且起始項皆相同，所以 $a_n = z_n$

$$\Rightarrow z_n = 2 \left( \frac{T_{n+2}(\alpha) - T_{n+2}(\beta)}{\alpha - \beta} \right), \alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}, \beta = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$$

2. 同一方向福特球的 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 座標關係

表三：同一方向的福特球球心(與表二相同)

球心	將分母變為與 $z$ 值分母有關後
$(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$	$(\frac{3}{6}, -\frac{0}{6}, \frac{1}{6})$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$	$(\frac{4}{8}, -\frac{4}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$
$(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$	$(\frac{5}{14}, -\frac{4}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$
$(\frac{6}{13}, -\frac{7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$	$(\frac{12}{26}, -\frac{7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$
$(\frac{3}{7}, -\frac{3}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{42})$	$(\frac{18}{42}, -\frac{9}{42\sqrt{3}}, \frac{1}{42})$
$(\frac{31}{74}, -\frac{11}{37\sqrt{3}}, \frac{1}{74})$	$(\frac{31}{74}, -\frac{22}{74\sqrt{3}}, \frac{1}{74})$
$(\frac{7}{16}, -\frac{5}{16\sqrt{3}}, \frac{1}{128})$	$(\frac{56}{128}, -\frac{40}{128\sqrt{3}}, \frac{1}{128})$
$(\frac{93}{218}, -\frac{35}{109\sqrt{3}}, \frac{1}{218})$	$(\frac{93}{218}, -\frac{70}{218\sqrt{3}}, \frac{1}{218})$
⋮	⋮

觀察表三中右邊被適當化繁後的球心座標可發現 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 值之間的關係。

$x$ 、 $y$ 、 $z$ 值之間的關係：

將以上的 $x$ 分子列出來得到此數列：0,3,4,5,12,18,31,56,93，設其為 $\langle x \rangle$ 。

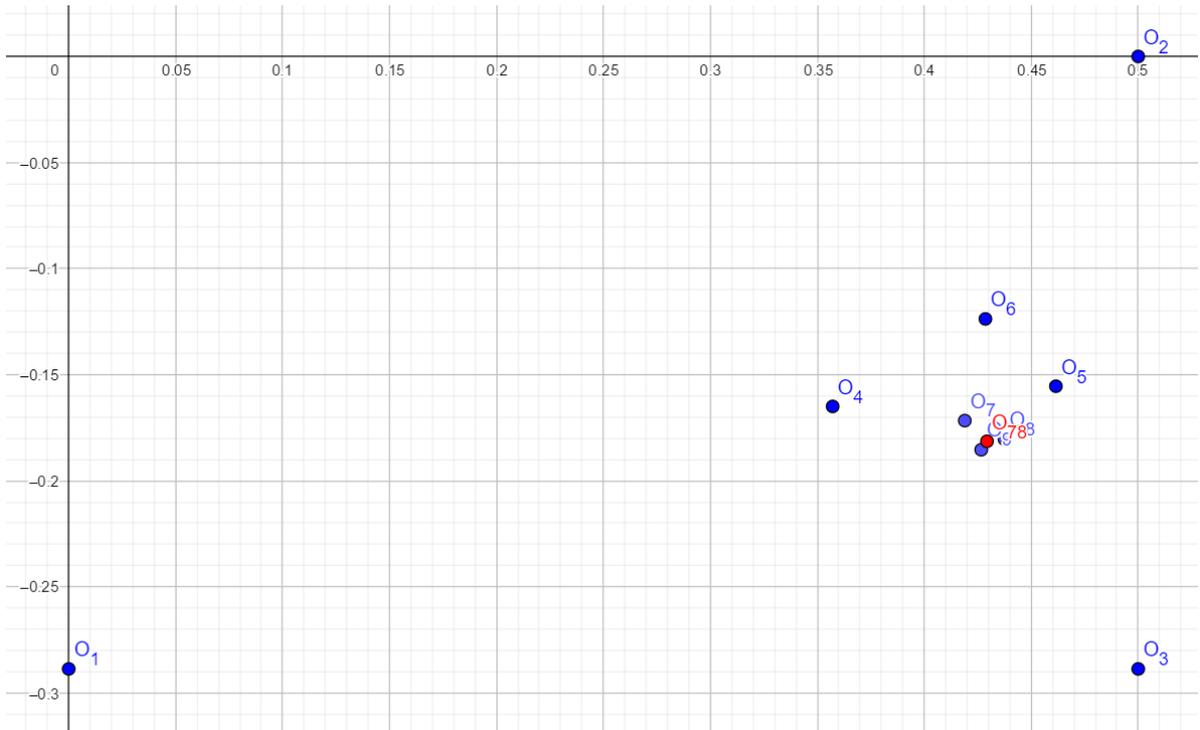
將以上的 $y$ 分子列出來得到此數列：1,0,4,4,7,15,22,40,70，設其為 $\langle y \rangle$ 。

可以發現到數列規律呈：

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} - y_{n-4}, y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 4, y_4 = 4, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

### 3. 同一方向福特球的收斂



圖九：同一方向福特球球心在 $xy$ 平面上的投影位置

觀察同一方向的福特球，發現這些球好像會有往某點收斂的趨勢。

根據規律 1，我用電腦運算各個球的位置，希望找出同一方向衍生出的福特球球心在接近無限多顆後的大致位置，第 1~9 顆球的球心在 $x, y$ 平面投影位置如圖九，經過運算得到：

$$x_{78} = 1824592495640974272$$

$$y_{78} = 1335322378520690496$$

$$z_{78} = 4250117492149788672$$

第 78 顆球的座標為

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1824592495640974272}{4250117492149788672}, -\frac{1335322378520690496}{4250117492149788672\sqrt{3}}, \frac{1}{4250117492149788672} \right) \\ & = \left( \frac{120292226769579}{280202893733504}, -\frac{88035494364497}{280202893733504\sqrt{3}}, \frac{1}{4250117492149788672} \right) \\ & \approx (0.4293, -0.1814, 0) \end{aligned}$$

為了要確定 $x$ 、 $y$ 座標是否會收斂，所以解 $z_n = z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} - z_{n-4}$ 的特徵方程

$r^4 - r^3 - r^2 - r + 1 = 0$ ，得到四個根

$$r = \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{13} \pm \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)} \right) \vee \frac{1}{4} \left( 1 - \sqrt{13} \pm i\sqrt{2(1 + \sqrt{13})} \right)$$

令其中絕對值最大的根為  $\alpha = \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{13} + \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)} \right) \approx 1.722$ 。

其他三根分別為  $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$ ，則

$$z_n = a_z \alpha^n + b_z \beta^n + c_z \gamma^n + d_z \delta^n,$$

同理可得

$$x_n = \frac{(a_x \alpha^n + b_x \beta^n + c_x \gamma^n + d_x \delta^n)}{z_n}, \quad y_n = \frac{(a_y \alpha^n + b_y \beta^n + c_y \gamma^n + d_y \delta^n)}{z_n}$$

其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  是根的係數。

當  $n \rightarrow \infty$ ，

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_x \alpha^n + b_x \beta^n + c_x \gamma^n + d_x \delta^n}{a_z \alpha^n + b_z \beta^n + c_z \gamma^n + d_z \delta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_x \alpha^n}{a_z \alpha^n} = \frac{a_x}{a_z} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_y \alpha^n + b_y \beta^n + c_y \gamma^n + d_y \delta^n}{a_z \alpha^n + b_z \beta^n + c_z \gamma^n + d_z \delta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_y \alpha^n}{a_z \alpha^n} = \frac{a_y}{a_z} \end{aligned}$$

所以只要確定  $\alpha$  的係數  $a$  非 0 即可確定  $x$ 、 $y$  會收斂。

但是這些係數不好解，所以採用反證法。

先假設  $a = 0$ ，則  $z_n = b_z \beta^n + c_z \gamma^n + d_z \delta^n$ 。

將原來的特徵方成特徵方程  $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0$  除以最大的根  $\alpha$  也就是

$$\begin{aligned} & (r - \beta) \times (r - \gamma) \times (r - \delta) \\ &= \left( r - \frac{1}{4} \left( 1 - \sqrt{13} + i \sqrt{2(1 + \sqrt{13})} \right) \right) \times \left( r - \frac{1}{4} \left( 1 - \sqrt{13} - i \sqrt{2(1 + \sqrt{13})} \right) \right) \times \left( r - \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{13} - \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)} \right) \right) \\ &= r^3 + \left( \sqrt{13} - 3 + \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)} \right) r^2 + \left( -\frac{4}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{26(\sqrt{13} - 1)} - \frac{1}{8} \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)} \right) r + \left( \frac{-2\sqrt{13}}{8} + \frac{2\sqrt{2(\sqrt{13} - 1)}}{8} - \frac{8}{2} \right) \end{aligned}$$

故若  $a = 0$ ，

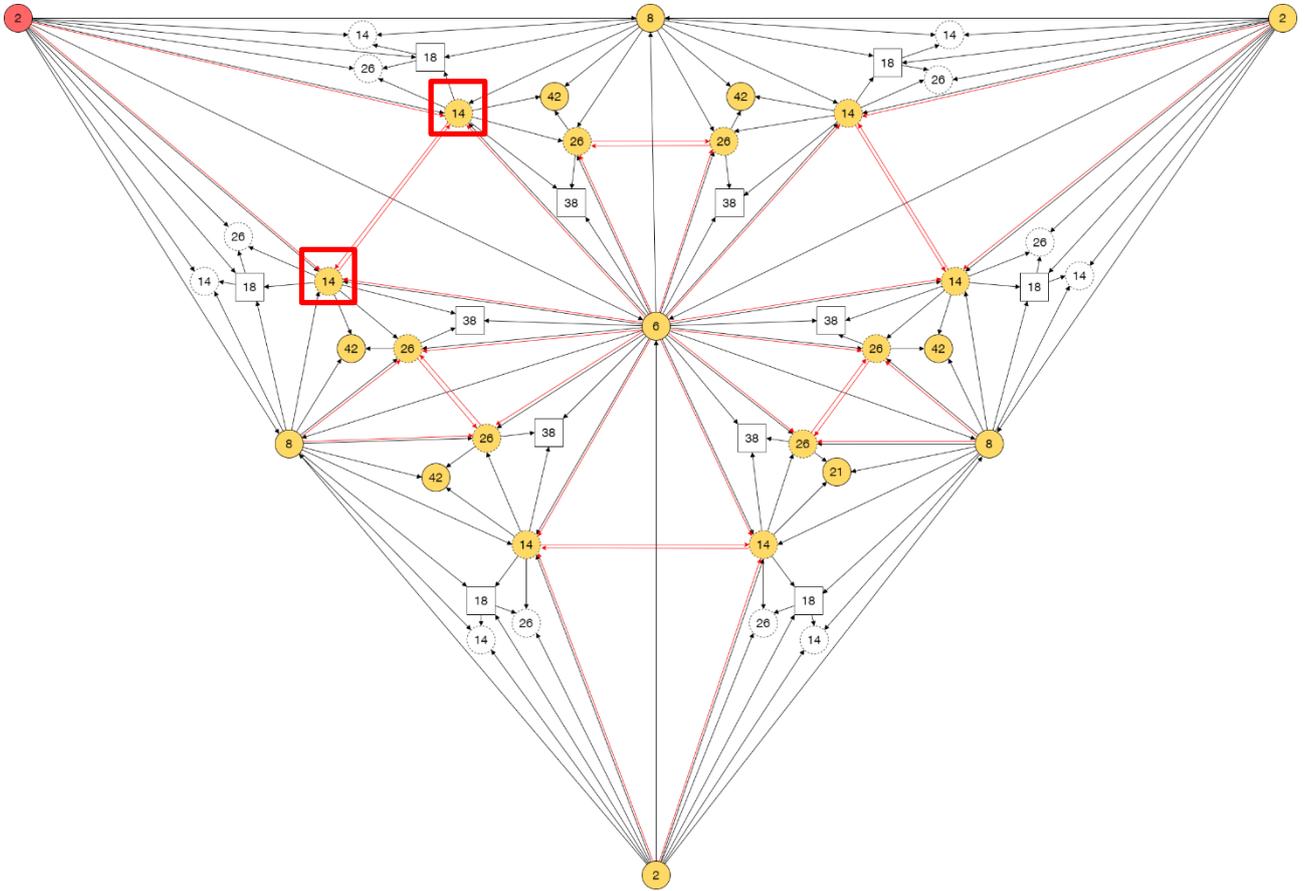
$$z_n = - \left( \sqrt{13} - 3 + \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)} \right) z_{n-1} - \left( -\frac{4}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{26(\sqrt{13} - 1)} - \frac{1}{8} \sqrt{2(\sqrt{13} - 1)} \right) z_{n-2} - \left( \frac{-2\sqrt{13}}{8} + \frac{2\sqrt{2(\sqrt{13} - 1)}}{8} - \frac{8}{2} \right) z_{n-3}$$

將  $z, x, y$  的前四項 (2,6,8,12), (0,3,4,5), (1,0,4,4) 代入發現皆不合，故  $a \neq 0$ 。

如此，便可確認同一方向的  $x$ 、 $y$  會收斂。

(六) 福特球半徑關係探討

在研究空間中的福特球時，也以類似法里數列生成的模型(圖二)來觀察半徑倒數規律。將起始三球的半徑倒數寫好後，用空間中的索迪公式求出新球的半徑倒數，並畫成一張有向圖，如圖十。



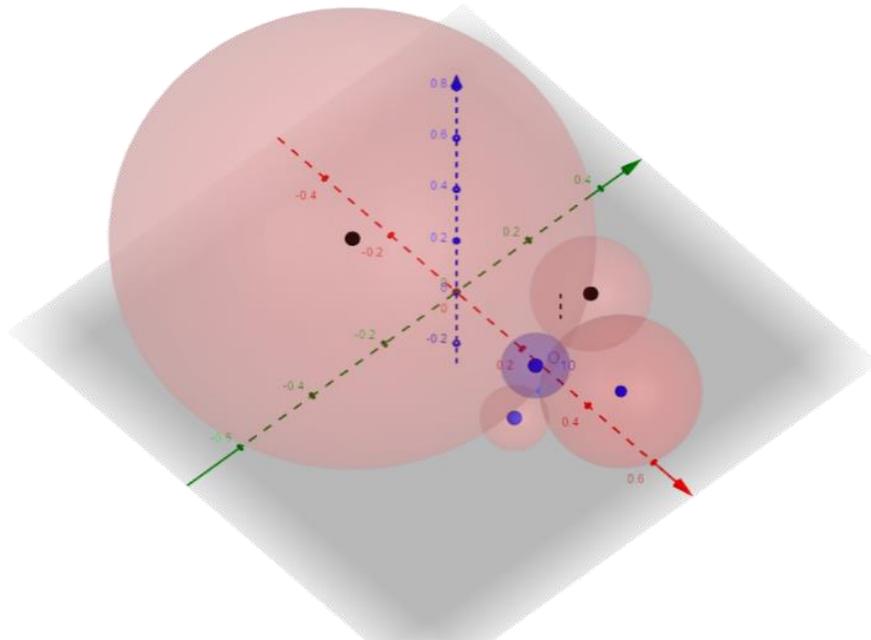
圖十：半徑倒數關係

(七) 不同組 3 顆球衍生出相同心球的情況

圖十中，黃色為已經發現規律的球，方形在規律裡沒有出現過的半徑倒數的球，虛線為以不同組半徑倒數的球，卻衍生出相同半徑倒數的球。可以特別看到紅箭頭的部分，其代表新衍生出的球可以一直衍生出半徑倒數與自己相同的更新的球。

一直衍生出半徑倒數與自己相同的球是一件很奇怪的事，所以我取了實例來討論：

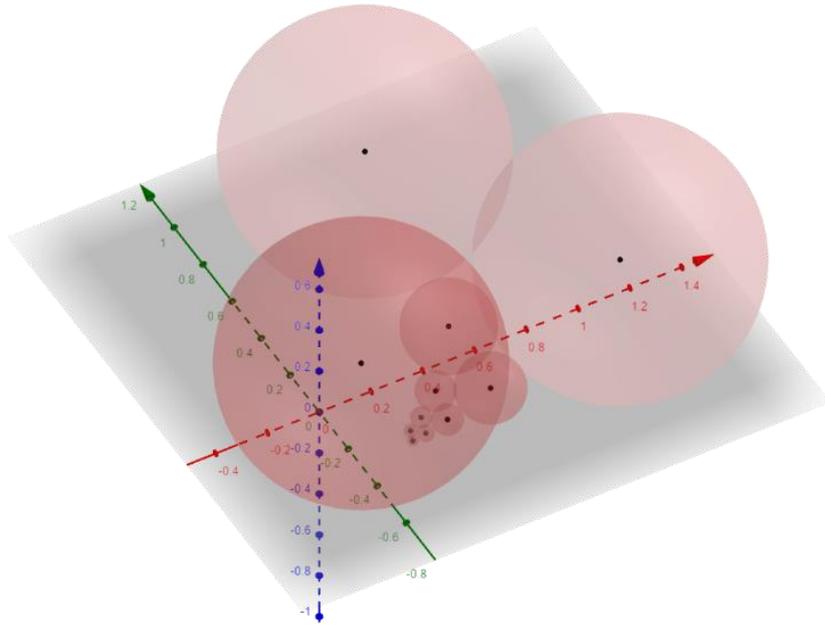
以球心在  $(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 、 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$ 、 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$  的三顆福特球衍生出的新的球球心在  $(\frac{2}{7}, -\frac{1}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$ ，而球心在  $(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 、 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$ 、 $(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$  的三顆福特球衍生出的新的球球心也在  $(\frac{2}{7}, -\frac{1}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$ ，從這個例子中，可以發現不同組的球，可能衍生出相同的新的球(在圖十中的相對位置如紅框所示)，如圖十一。



圖十一：不同組的球衍生出相同的新球

由這個例子，可以推測可能生出相同半徑倒數的球中，很多都是重複的。不過還待更多例子，以及數學嚴謹證明。

(八) 固定一顆球的衍生情況



圖十二：固定一顆球的衍生情形

衍生時，都用固定的一顆和最新的兩顆衍生出更新的球(如圖十二)，並對球心座標配合  $z$  值分母作適當的化繁，可以得到數顆球的球心。

1. 固定球的球心為  $(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$  的衍生情況

一開始用球心在  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 、 $(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$  的兩顆球衍生，則衍生結果如表四及圖十二。

觀察表四綠色底部分，可以發現每兩顆球就有一顆的  $x$ 、 $z$  座標符合平面福特圓的關係  $((x, z) = (\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}))$ ，且  $y$  座標皆為  $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 。配合  $z$  值分母做適當的化繁後，可得表四右半部，可發現  $x$  值分子成等差數列，每隔一顆球的  $y$  座標分子成二階等差數列。

表四：固定球的球心為 $(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 的衍生情況

球心	配合z值分母化繁
$(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$	$(\frac{3}{6}, \frac{0}{6}, \frac{1}{6})$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$	$(\frac{4}{8}, \frac{-4}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$
$(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$	$(\frac{5}{14}, \frac{-4}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$
$(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{18})$	$(\frac{6}{18}, \frac{-9}{18\sqrt{3}}, \frac{1}{18})$
$(\frac{7}{26}, -\frac{5}{13\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$	$(\frac{7}{26}, \frac{-10}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$
$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{32})$	$(\frac{8}{32}, \frac{-16}{32\sqrt{3}}, \frac{1}{32})$
$(\frac{3}{14}, -\frac{3}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{42})$	$(\frac{9}{42}, \frac{-18}{42\sqrt{3}}, \frac{1}{42})$
$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{50})$	$(\frac{10}{50}, \frac{-25}{50\sqrt{3}}, \frac{1}{50})$
⋮	⋮

適當觀察其半徑倒數和表四後，可得規律 3。

若以固定的一顆和最新的兩顆衍生出更新的球(如圖十二)，可發現衍生出的球的半徑倒數數列 $\langle z \rangle$ 具有以下規律：

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} - z_{n-3} + z_0, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

其中 $z_0$ 為固定的球的半徑倒數，以表四而言， $z_0 = 2, z_1 = 6, z_2 = 8, z_3 = 14$

其一般式為

$$z_n = \frac{1}{4}(5 + 3(-1)^{n+3} + 2(n+1)(n+3))$$

同時，化繁後的 $x$ 、 $y$ 分子數列 $\langle x \rangle$ 、 $\langle y \rangle$ 也有以下規律：

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3} + x_0, x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-3} + y_0, y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 4, y_3 = 4, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

【證明】 $\langle z \rangle$ 遞迴式證明

類似同一方向衍生球的證明，由三個互相相切的球(半徑倒數分別為 $z_{n-3}$ 、 $z_{n-2}$ 、 $z_0$ ， $z_0$ 為固定的那顆球的半徑倒數)衍生新的福特球(半徑倒數為 $z_n$ )時( $n \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 5$ )，由索迪公式知

$$3(z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_0^2) = (z_n + z_{n-1} + z_{n-2} + z_0)^2$$

$$\Rightarrow 3(z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_0^2) - (z_n + z_{n-1} + z_{n-2} + z_0)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_0^2 - z_n z_{n-1} - z_n z_{n-2} - z_n z_0 - z_{n-1} z_{n-2} - z_{n-1} z_0 - z_{n-2} z_0) = 0$$

$$z_n^2 + z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_0^2 - z_n z_{n-1} - z_n z_{n-2} - z_n z_0 - z_{n-1} z_{n-2} - z_{n-1} z_0 - z_{n-2} z_0 = 0$$

$$\text{--)} \quad \frac{z_{n-1}^2 + z_{n-2}^2 + z_{n-3}^2 + z_0^2 - z_{n-1} z_{n-2} - z_{n-1} z_{n-3} - z_{n-1} z_0 - z_{n-2} z_{n-3} - z_{n-2} z_0 - z_{n-3} z_0}{z_n^2 - z_{n-3}^2 - (z_{n-1} + z_{n-2} + z_0)(z_n - z_{n-3})} = 0$$

$$z_n^2 - z_{n-3}^2 - (z_{n-1} + z_{n-2} + z_0)(z_n - z_{n-3}) = 0$$

$$\Rightarrow (z_n - z_{n-3})(z_n - z_{n-1} - z_{n-2} - z_0 + z_{n-3}) = 0$$

若 $z_n \neq z_{n-3}$ ，則 $z_n - z_{n-1} - z_{n-2} - z_0 + z_{n-3} = 0$ ， $z_n = z_{n-1} + z_{n-2} - z_{n-3} + z_0$

此時若 $z_{n-1}, z_{n-2}, z_0 \geq 0$ ，且 $z_0 > z_{n-3}$ ，則 $z_n > z_{n-1}$ 。

【證明】 $\langle z \rangle$ 一般式證明

$n = 0, 1, 2, 3$ 代入 $\frac{1}{4}(5 + 3(-1)^{n+3} + 2(n+1)(n+3))$ 可知對 $n = 0, 1, 2, 3$ 皆成立。

假設在 $n = k - 3, k - 2, k - 1$ 時此式皆成立。

則在 $n = k$ 時，由其遞迴式代入得

$$z_k = z_{k-1} + z_{k-2} - z_{k-3} + z_0$$

$$= \frac{1}{4} \left( 5 + 3(-1)^k ((-1)^2 - 1 - 1) + 2k(k+2) + 2(k-1)(k+1) - 2k(k-2) \right) + 2$$

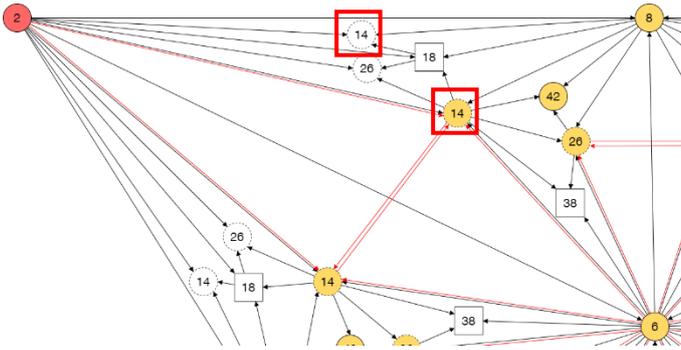
$$= \frac{1}{4} (13 + 3(-1)^{k+1} + 2k^2 + 8k - 2)$$

$$= \frac{1}{4} (13 + 3(-1)^{k+3} + 2(k+1)(k+3) - 8)$$

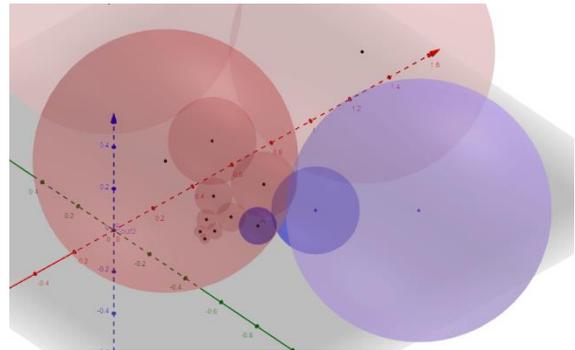
$$= \frac{1}{4} (5 + 3(-1)^{k+3} + 2(k+1)(k+3))$$

則由數學歸納法知，對所有  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $z_n = \frac{1}{4}(5 + 3(-1)^{n+3} + 2(n+1)(n+3))$

可以特別關注到有向圖的這部分(圖十三)，可以發現到半徑倒數為 2,8,18 的三顆球衍生出了一個半徑倒數為 14 的球，也就是說，球會越變越大，但經過實驗後發現半徑倒數為 14 的球心位置為  $(\frac{5}{14}, -\frac{5}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$ ，與上表中半徑倒數為 14 的球  $x$  座標相同，畫圖後發現此球可以視為以  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 、 $(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$  做為起始球開始衍生的情況(如圖十四)。



圖十三：衍生出較大的球繪成有向圖



圖十四：以另一組起始球衍生的情況

2. 固定球的球心為 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$ 的衍生情況

在這個情況中同樣以球心在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 、 $(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 的球開始衍生，其衍生結果如表五。

表五：固定球的球心為 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$ 的衍生情況

球心	配合z值分母化繁
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$	$(\frac{3}{6}, \frac{0}{6}, \frac{1}{6})$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$	$(\frac{4}{8}, \frac{-4}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$
$(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$	$(\frac{5}{14}, \frac{-4}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14})$
$(\frac{6}{13}, -\frac{7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$	$(\frac{12}{26}, \frac{-7}{26\sqrt{3}}, \frac{1}{26})$
$(\frac{8}{19}, -\frac{7}{38\sqrt{3}}, \frac{1}{38})$	$(\frac{16}{38}, \frac{-7}{38\sqrt{3}}, \frac{1}{38})$
$(\frac{13}{28}, -\frac{5}{28\sqrt{3}}, \frac{1}{56})$	$(\frac{26}{56}, -\frac{10}{56\sqrt{3}}, \frac{1}{56})$
$(\frac{33}{74}, -\frac{5}{37\sqrt{3}}, \frac{1}{74})$	$(\frac{33}{74}, -\frac{10}{74\sqrt{3}}, \frac{1}{74})$
$(\frac{23}{49}, -\frac{13}{98\sqrt{3}}, \frac{1}{98})$	$(\frac{46}{98}, -\frac{13}{98\sqrt{3}}, \frac{1}{98})$
$(\frac{28}{61}, -\frac{13}{122\sqrt{3}}, \frac{1}{122})$	$(\frac{56}{122}, -\frac{13}{122\sqrt{3}}, \frac{1}{122})$
⋮	⋮

在這個情況中， $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$ 也會符合規律 3 的遞迴式，而起始項變為

$$\begin{cases} x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 12 \\ y_0 = 0, y_1 = -4, y_2 = -4, y_3 = -7 \\ z_0 = 6, z_1 = 8, z_2 = 14, z_3 = 26 \end{cases}$$

### 三、高維空間中的福特球

為了方便敘述，接下來在各維空間中的球都稱為球。目前研究中僅討論半徑間的關係。

#### (一) 福特球在高維空間中的定義

福特球在高維空間中的定義：

定義在 $D$ 維空間的福特球與在2或3維空間中的福特球相似，一開始有互相外切的 $D$ 顆等大起始球，皆切一個 $(D - 1)$ 維空間，可以以 $D$ 顆球衍生出新的一顆球，每顆球都類似2、3維空間中的福特球相切或相離，切於同個 $(D - 1)$ 維的空間。

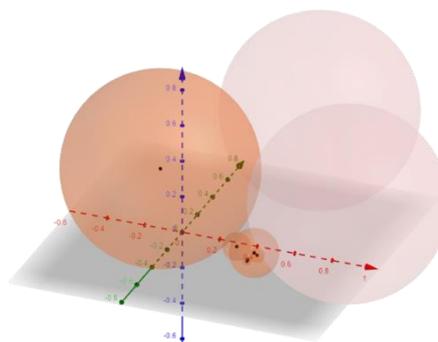
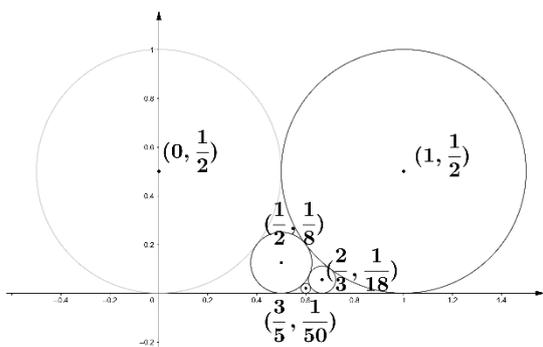
#### (二) 同一方向的福特球

規律4：

定義在 $D$ 維空間的福特球與3維空間中的福特球相似，皆切一個 $(D - 1)$ 維空間，每顆球都類似3維空間中的福特球相切或相離，可以以 $D$ 顆球衍生出新的一顆球。

則將球持續以同一個方向往下做(以最新的 $D$ 顆球衍生出新的球，三維就是規律1)，則半徑倒數數列 $\langle k_D \rangle$ 有以下關係式：

$$(D - 1)k_n = \left( \sum_{i=n-D+1}^{n-1} 2k_i \right) - (D - 1)k_{n-D}$$



圖十三：二維與三維中同一方向的福特球

#### 【證明】

索迪公式在 $D$ 維空間的形式為

$$D \left( \sum k^2 \right) = \left( \sum k \right)^2$$

其中在 $D$ 維空間中要有 $(D + 1)$ 個球才能決定唯一一顆與這 $(D + 1)$ 顆球內切的新球，而這 $(D + 2)$ 顆球的半徑倒數 $k$ 有上方的關係。

在 $D$ 維空間中的福特球皆切一個 $D - 1$ 維的空間，所以 $(D + 1)$ 顆球中的一顆球的半徑倒數為 $0$ ，又同一方向的情況中，是以目前最新的 $D$ 顆球(令其半徑倒數為 $k_{n-D} \sim k_{n-1}$ )衍生更新第 $n$ 顆球(令其半徑倒數為 $k_n$ )。則由索迪公式知

$$D \left( \sum_{i=n-D}^n k_i^2 \right) = \left( \sum_{i=n-D}^n k_i \right)^2, \Rightarrow D \left( \sum_{i=n-D}^n k_i^2 \right) - \left( \sum_{i=n-D}^n k_i \right)^2 = 0,$$

$$(D - 1) \left( \sum_{i=n-D}^n k_i^2 \right) - 2 \left( \sum_{n-D \leq i < j \leq n} k_i k_j \right) = 0.$$

又可知對於第 $n - 1$ 顆球以下公式成立

$$(D - 1) \left( \sum_{i=n-D-1}^{n-1} k_i^2 \right) - 2 \left( \sum_{n-D-1 \leq i < j \leq n-1} k_i k_j \right) = 0.$$

兩式相減得

$$(D - 1)(k_n^2 - k_{n-D-1}^2) - 2k_n \left( \sum_{i=n-D}^{n-1} k_i \right) + 2k_{n-D-1} \left( \sum_{i=n-D}^{n-1} k_i \right) = 0,$$

$$\Rightarrow (D - 1)(k_n^2 - k_{n-D-1}^2) - 2(k_n - k_{n-D-1}) \left( \sum_{i=n-D}^{n-1} k_i \right) = 0,$$

$$\Rightarrow (k_n - k_{n-D-1}) \left[ (D - 1)k_n - \left( 2 \sum_{i=n-D}^{n-1} k_i \right) + (D - 1)k_{n-D-1} \right] = 0.$$

當 $k_n - k_{n-D-1} \neq 0$ ,

$$(D - 1)k_n - \left( 2 \sum_{i=n-D}^{n-1} k_i \right) + (D - 1)k_{n-D-1} = 0,$$

$$\Rightarrow (D - 1)k_n = \left( 2 \sum_{i=n-D}^{n-1} k_i \right) - (D - 1)k_{n-D-1}.$$

## 參、研究結果與討論

### 一、研究結果

(一) 同一方向的球彼此之間會有四階遞迴關係，且半徑可用切比雪夫多項式表示。第

$n$ 顆球球心在 $\left(\frac{x_n}{z_n}, -\frac{y_n}{z_n\sqrt{3}}, \frac{1}{z_n}\right)$ ：

$$z_n = 4 \left( \frac{T_{n+2} \left( \frac{1 + \sqrt{13}}{4} \right) - T_{n+2} \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{4} \right)}{\sqrt{13}} \right)$$

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} + z_{n-3} - z_{n-4}, z_1 = 2, z_2 = 6, z_3 = 8, z_4 = 14, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} - y_{n-4}, y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 4, y_4 = 4, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$$

(二) 存在著不同組三顆球衍生出同樣第四顆球的狀況。

(三) 同一方向的球最後會收斂在一點。

(四) 固定一球的衍生情況中，衍生出的球彼此之間會有三皆遞迴關係，而第 $n$ 顆球的

球心在 $\left(\frac{x_n}{z_n}, -\frac{y_n}{z_n\sqrt{3}}, \frac{1}{z_n}\right)$ ，若以固定球球心為 $\left(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$ ，則：

$$z_n = \frac{1}{4} (5 + 3(-1)^{n+3} + 2(n+1)(n+3)), z_0 = 2, n \in \mathbb{N}$$

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} - z_{n-3} + z_0, z_0 = 2, z_1 = 6, z_2 = 8, z_3 = 14, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3} + x_0, x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-3} + y_0, y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 4, y_3 = 4, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

(五) 以固定一顆球衍生時，若固定球為起始球的其中一個，其衍生出的球每隔一個的

$x$ 、 $z$ 座標會與福特圓的形式相同 $\left(\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)\right)$ ，且 $y$ 座標皆為 $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 。

(六) 在 $D$ 維空間中若將福特球以同一方向往下做可以得到其半徑倒數的遞迴式：

$$(D-1)k_n = \left( 2 \sum_{i=n-D}^{n-1} k_i \right) - (D-1)k_{n-D-1}$$

## 二、討論

- (一) 目前可以以與 $\cos(n\theta)$ 有關的切比雪夫多項式表示同一方向半徑倒數，但目前研究中沒有出現任何關於角度的線索，這是一個很值得後續再作探討的方向。
- (二) 在證明出 $\langle z \rangle$ 的一般式的過程中，我們可以發現在 $\langle x \rangle$ 中若要滿足其遞迴式
$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}$$
似乎需要滿足其一般式與切比雪夫多項式有類似 $z_n$ 的一般式為 $T_k(\alpha) - T_k(\beta)$ 的關係，但 $k$ 可能不是 $n + 2$ 而是其他常數，這或許可以對接下來要證明 $\langle x \rangle$ 和 $\langle y \rangle$ 的一般式有所幫助。
- (三) 我們發現不論是在單一方向上、抑或是固定一顆球的衍生情況中，半徑倒數數列 $\langle z \rangle$ ，配合半徑倒數化繁後的 $x$ 、 $y$ 分子數列 $\langle x \rangle$ 、 $\langle y \rangle$ 都有相同遞迴式，恰好法里數列有一種衍生法也是分子分母分別相加後約分，這其中或許有什麼關係，但 $\langle x \rangle$ 、 $\langle y \rangle$ 數列的遞迴式都沒有經過嚴謹證明，故尚且不確定。

## 肆、結論與應用

### 一、結論

- (一) 單一方向上的球座標之間有四階遞迴式的關係。
- (二) 單一方向上的球之間有與切比雪夫多項式有關的特殊規律，並且最後會收斂於一點。
- (三) 存在著不同組三顆球衍生出同樣第四顆球的狀況。
- (四) 以固定一顆球衍生的球座標之間有三階遞迴式的關係。
- (五) 以固定一顆球衍生時，若固定球為起始球的其中一個，其衍生出的球每隔一個的 $x$ 、 $z$ 座標會與福特圓形式相同。
- (六) 在 $D$ 維空間中以單一方向做福特球的半徑倒數間會有 $D + 1$ 階遞迴式

### 二、應用

- (一) 將原本只跟二維福特圓有關的法里數列與三維空間產生關係。
- (二) 結構穩固，可以與建築、裝飾結合。

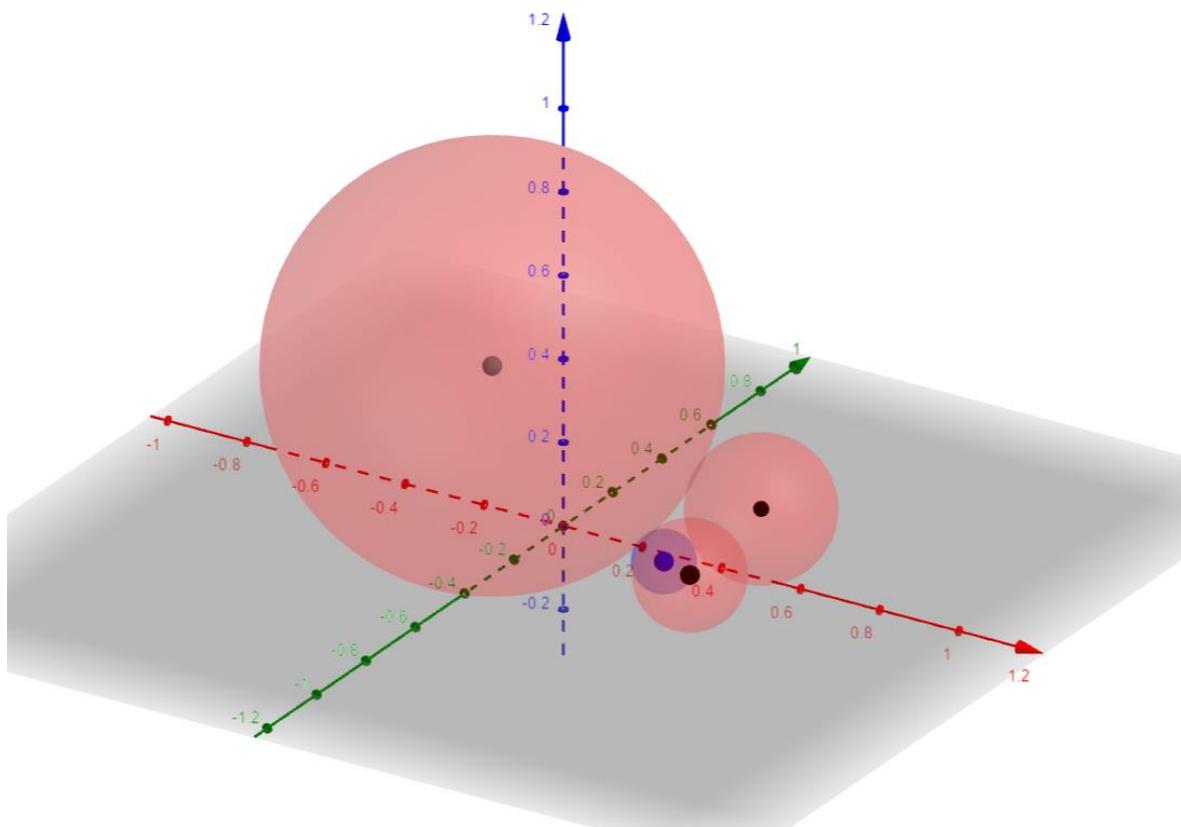
(三) 因為每個球都互相相切，所以估計福特球在結構上是穩定的，可以用作吊燈，或建築上的裝飾。

## 伍、參考文獻

### 一、參考資料

- (一) 林福來等人 (2019) · 普通高級中學數學第四冊 (62-115 頁) · 臺南市：南一書局企業股份有限公司。
- (二) 蘇意雯等人 (2019) · HPM 通訊第二十二卷第二期第一版。取自 [http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter22\(2\).pdf?fbclid=IwAR1evFcjh-HQu25-Ic3YWKu7kF7eCpEI4saBqXSGCDDKSyCp\\_rjiRfITgTc](http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter22(2).pdf?fbclid=IwAR1evFcjh-HQu25-Ic3YWKu7kF7eCpEI4saBqXSGCDDKSyCp_rjiRfITgTc)
- (三) Eric Weisstein. (2020). Tangent Spheres. Retrieved April 5, 2020, from <https://mathworld.wolfram.com/TangentSpheres.html?fbclid=IwAR33gU3iZqXOpL6HbvveqikUydyJkO7jakKgmK8eWORTSBZ04Z5AlawV37s>.
- (四) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) <https://oeis.org/>.
- (五) 柯利弗德·皮寇弗 (2003) · 數學的異想世界——125 個有趣的數學遊戲 (311-316 頁) · 臺北市：商周。
- (六) 嚴鎮軍 (2002) · 反射與反演 · 臺北市：九章文具印刷品有限公司。
- (七) Jonathan Ainsworth, Michael Dawson, John Pianta and James Warwick. (2012). The Farey Sequence. Retrieved January 5, 2020, from <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/fareyproject.pdf>.
- (八) Jerzy Kocik. (2007). A theorem on circle configurations. Retrieved January 5, 2021, from <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0706/0706.0372.pdf>.

## 附 錄



【以說明書中的方法實際找出福特球位置】

若要找出一福特球，其與球心在 $(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ 、 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$ 、 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{8})$ 的福特球皆外切，  
如圖。

則依照公式，可列出以下式子：

$$\begin{cases} (x-0)^2 + \left(y + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 4z \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \frac{1}{6} \times 4z \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{8} \times 4z \end{cases}$$

經過展開後可得

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3}z = x^2 - x + y^2 + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}z = x^2 - x + y^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z = x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{12} \\ 2z = 3x^2 - 3x + 3y^2 + \frac{3}{4} \\ 2z = 4x^2 - 4x + 4y^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}y + \frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{12} = 3x^2 - 3x + 3y^2 + \frac{3}{4} = 4x^2 - 4x + 4y^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}y + \frac{4}{3},$$

$$\Rightarrow 0 = 2x^2 - 3x + 2y^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{2}{3} = 3x^2 - 4x + 3y^2 + \sqrt{3}y + \frac{5}{4},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 9x + 6y^2 - \sqrt{3}y + 2 = 0 \\ 6x^2 - 8x + 6y^2 + 2\sqrt{3}y + \frac{5}{2} = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3\sqrt{3}y + \frac{1}{2} = 0 \\ 2x^2 - 3x + 2y^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{2}{3} = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}y,$$

$$\Rightarrow 54y^2 + 6\sqrt{3}y + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 9\sqrt{3}y + 2y^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{2}{3} = 0,$$

$$\Rightarrow 56y^2 + \frac{44}{\sqrt{3}}y + \frac{8}{3} = 0,$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\frac{44}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\left(\frac{44}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4 \times 56 \times \frac{8}{3}}}{2 \times 56},$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \vee -\frac{2}{7\sqrt{3}},$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right),$$

又當所球球心位於 $\left(1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$ 時，會與其他球重疊，

所以所求球球心位於 $\left(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$ 。

**【有四顆福特球衍生的福特球相同情況】**

$\left(0, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$ 、 $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)$ 、 $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$ 所衍生出的球球心為 $\left(\frac{2}{7}, -\frac{1}{14\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$

與由 $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)$ 、 $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, \frac{1}{8}\right)$ 、 $\left(\frac{5}{14}, -\frac{2}{7\sqrt{3}}, \frac{1}{14}\right)$ 所衍生出的球球心相同。

在研究過程中，為了快速得到 $T_n(x)$ ，我寫了一個程式幫助研究：

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 void T(int n, int a[]){
5     if (n == 0){
6         a[0] = 1;
7     }else if (n == 1){
8         a[0] = 0;
9         a[1] = 1;
10    }else{
11        int b[n+1] = {0}; int c[n-1] = {0};
12        T(n-1, b); T(n-2, c);
13        int d = b[0]; b[0] = 0;
14        int e;
15        for (int i = 1; i <= n; i++){
16            e = b[i];
17            b[i] = d;
18            d = e;
19            b[i] *= 2;
20        }
21        for (int i = 0; i < n-1; i++){
22            a[i] = b[i] - c[i];
23        }
24        a[n-1] = b[n-1];
25        a[n] = b[n];
26    }
27 }
28
29 int main(void){
30     int i, n;
31     int a[n+1];
32     scanf("%d", &n);
33     for (int i = 0; i <= n; i++){
34         T(i, a);
35         printf("\nn = %d \n", i);
36         for (int j = i; j >= 0; j--){
37             if (a[j] != 0){
38                 if (j != i){
39                     if (a[j] > 0) printf("+");
40                 }
41                 printf("%d", a[j]);
42                 if (j) printf("x^%d", j);
43             }
44         }
45         printf("\n");
46     }
47     return 0;
48 }
```

執行結果如下：

n = 0 1	n = 5 $16x^5 - 20x^3 + 5x^1$
n = 1 $1x^1$	n = 6 $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
n = 2 $2x^2 - 1$	n = 7 $64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x^1$
n = 3 $4x^3 - 3x^1$	n = 8 $128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
n = 4 $8x^4 - 8x^2 + 1$	n = 9 $256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x^1$

## 【評語】 010048

本作品的動機為試圖將平面上福特圓的曲率與 Farey 數列之間的密切關係推廣到空間中，從而定義福特球與類似 Farey 數列的網狀生長數列。問題頗有意思，三維中放球的方法遠比二維多甚多，本文能夠在其中找到某些特別的子數列與特定幾何設定之間的對應，是有趣的結果。特別是能與 Chebyshev 多項式結合在一起，是意思的發展。較為可惜的是 Farey 數列的引進似乎沒有在本文理論的發展中扮演太大的角色。Farey 數列本身有許多的性質，若能一一對應到福特圓，從而如本文推廣到高維，就會是更有趣的發展。