

2021 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010042

參展科別 數學

作品名稱 Shoot!圓錐曲線神射手

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 周洺朱

作者姓名 李博翰、鄭凱駿、蔡弘祥

關鍵詞 二次曲線、射影幾何、線束投射

作者簡介



我們是 Shoot!圓錐曲線神射手，由左至右分別是李博翰、蔡弘祥、鄭凱駿，目前就讀師大附中 1482 班。在高中的兩年生活當中，選擇了數學科展這條路，並在數學領域中鑽研，提升自己的能力，雖然過程辛苦也花費了我們許多時間，但我們相信這一切的努力一定能為數學做出貢獻，也希望能夠在比賽中獲得好成績。

摘要

本研究主要提出新的、有創意的圓錐曲線製造方法。首先，我們利用兩個全等三角形製造兩個線束，來討論基線夾角與線束中心在平面上的相對位置，用以製造各式的二次曲線。接著，分別在五條等距平行線上取點，固定其中四點為梯形，分類第五個點的位置來對應生成不同的圓錐曲線。然後，簡化為共線的四個點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 ，往線外一點 B_0 投射，滿足 $\overrightarrow{B_k B_0} = k \cdot \overrightarrow{B_0 A_k}$ 得 B_k ， $k = 1, 2, 3, 4$ ，依 $\overrightarrow{A_1 A_2} : \overrightarrow{A_2 A_3} : \overrightarrow{A_3 A_4}$ 的不同比例，來分類 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 生成的二次曲線。特別的是，由此得到兩個特別的應用：一、得到一個過圓錐曲線中心線段的比例，只要給定 A_1 、 A_2 、 B_0 三點即可快速尺規作圖得到中心；二、新的拋物線切線的尺規作圖法。最後，我們定義了三個線束特定的對應方式，得到六個對應點共橢圓的性質，以及分類了兩個基圓上點與點的角度與圓心的相對位置，用以製造各式的二次曲線。未來，我們希望能量化我們的結果，以及探討更多個線束的對應。

Abstract

Our project is mainly about providing new ways of creating conic sections. In the beginning, we create two pencils of lines using two congruent triangles and classify the angles of two general pencils of lines' baseline and the relative position of two pencils of lines to create all kinds of conic sections. Next, we respectively select five points from five lines that are parallel and in the same distance to each other. Then we make four of the points fixed as a trapezoid and assort different conic sections formed by five points by changing the fifth point's position. Next, we simplify the method by using B_k , the projection from four collinear points A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 to point B_0 that satisfy equation $\overrightarrow{B_k B_0} = k \cdot \overrightarrow{B_0 A_k}$, $k = 1, 2, 3, 4$, to classify the conic sections. The types of the conic sections formed by $\{B_k\}_{k=0}^4$ varies according to the proportion of $\overrightarrow{A_1 A_2} : \overrightarrow{A_2 A_3} : \overrightarrow{A_3 A_4}$. This leads to two special applications: first, we found out a proportion of the segments that passes through the center of the conic section and if three points A_1 、 A_2 、 B_0 is given, then we can quickly figure out the position of the center of the conic sections by using geometric construction with this proportion. Second, we developed a new way to find the tangent line to a parabola. Last, we define the specific correspondence of three pencils of lines and all six corresponding points can form an ellipse. After that, we classify two base-circles' relative position to create all kinds of conic sections. In the future, we hope to quantify our results and to explore more about the correspondence between multiple pencils of lines.

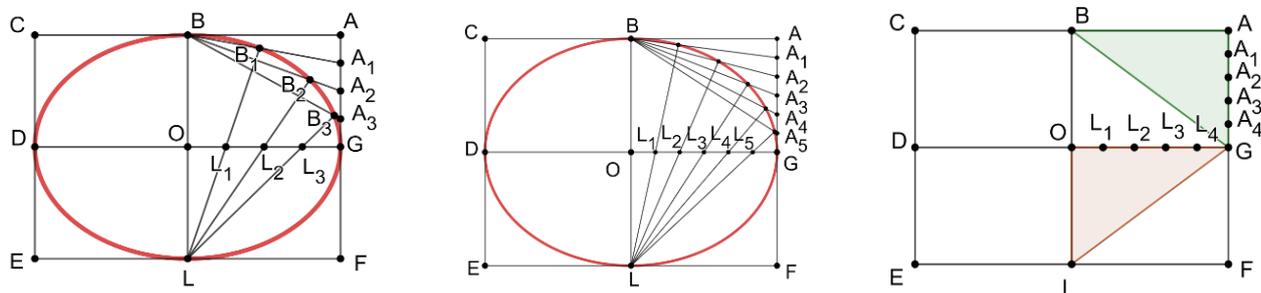
一、前言

(一) 研究動機

在數學競賽時考到了一題競賽題『矩形 $ACEF$ 中， $\overline{EF} = 8$ ， $\overline{CE} = 6$ ， B 、 D 、 L 、 G 分別為矩形四條邊之中點， L_1 、 L_2 、 L_3 是 \overline{OG} 的四等分點， A_1 、 A_2 、 A_3 是 \overline{AG} 的四等分點，請證明

$\overline{LL_1}$ 與 $\overline{BA_1}$ 、 $\overline{LL_2}$ 與 $\overline{BA_2}$ 、 $\overline{LL_3}$ 與 $\overline{BA_3}$ 的交點 B_1 、 B_2 、 B_3 都在橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上』，我們用了 *GGB*

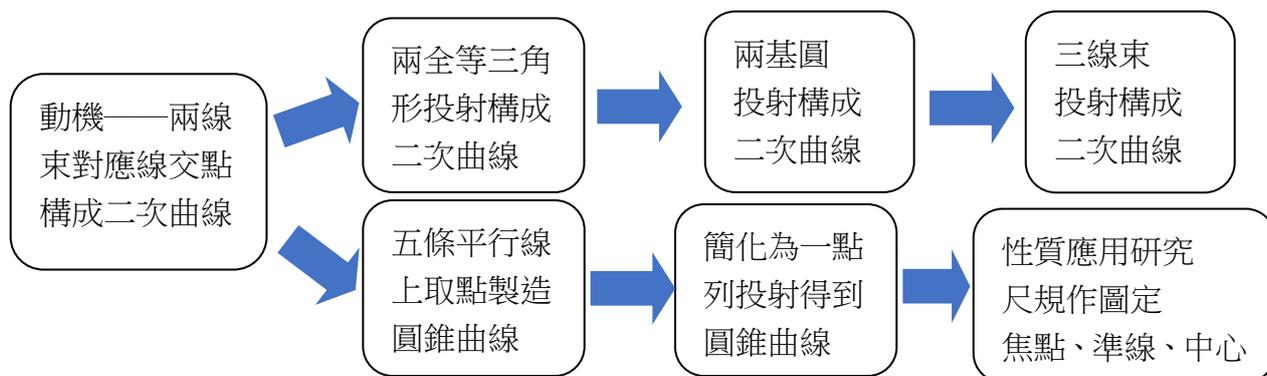
做測試，發現 \overline{OG} 、 \overline{AG} 任意 n 等分點的對應線束交點仍落在同一個橢圓上，引起我們很大的好奇心。



此題的橢圓製造方式跟課本的截然不同，我們查到射影幾何(朱德祥,朱維宗(2007))[1]中，有個很特別的定理「兩個不共心的射影線束之對應線交點，連同兩個線束的心，其軌跡為一二次曲線」。題目裡兩組點列中的點是相鄰等距的，所以我們想到先將兩組相鄰等距的點列和兩對邊中點視為一組全等的三角形，探討兩個全等三角形的對應方式來製造特定圓錐曲線。最後討論任意兩線束和三線束的相對位置，以及特定的對應方式來製造特定圓錐曲線。

(二) 研究目的

1. 透過兩基線、兩基圓來定義兩線束，並討論相對位置與對應方式，來生成特定二次曲線。
2. 以一個點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 的點 A_k 往平面上一點 B_0 投射，改變點列上點的相對位置可生成特定的圓錐曲線。
3. 在五條平行線間分別取五個點，滿足特定條件，生成特定的二次曲線。
4. 點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 的點 A_k 往平面上一點 B_0 投射，滿足特定條件時：
 - (1) 得到一實數線與拋物線一一對應的關係
 - (2) 利用尺規作圖作出任意拋物線的切線、焦點和準線。
5. 定義三線束的對應關係，來生成橢圓。
6. 研究流程圖



(三) 名詞解釋

定義 (1) n 梯五點形：

五邊形 $ABCDE$ 中，頂點連線恰有 n 組對邊平行，則稱其為 n 梯五點形， $n = 0, 1, 2, 3$ ，如圖一。

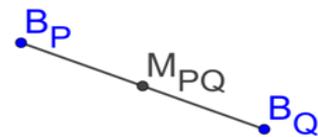
定義 (2) 點集、點列和線束：

①考慮平面上 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ，則以 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 或 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 表示，稱之為 A 點集，如圖二。

②若 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 皆共直線 p ，則記為 $p(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ 或 $p(A_k)_{k=1}^n$ ，稱為 A 點列，直線 p 稱為此點列的基線，如圖三。

③若平面上 n 條直線 l_1, l_2, \dots, l_n 皆過點 P ，則稱為線束，記為 $P(l_k)_{k=1}^n$ ，點 P 稱為線束中心，如圖四。

定義 (3) 中點符號 M_{PQ} ：平面上 B_P 和 B_Q 的中點記為 M_{PQ} 。



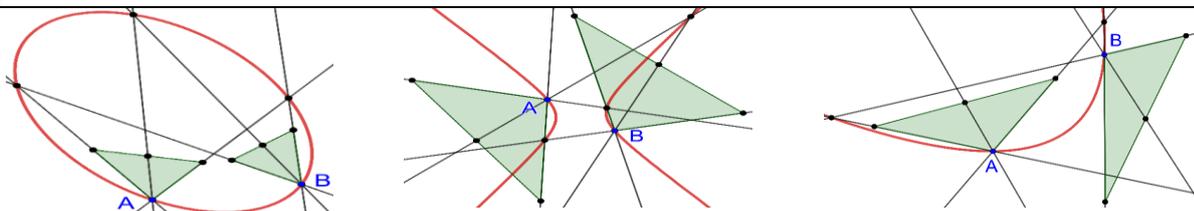
定義 (4) 第 k 等分線：

給定一線束中心 $P_A \notin \overline{HE}$ 與一基線 \overline{HE} ，若 $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_{n-1}$ 分別為 \overline{HE} 的 n 等份點，則 $\overline{P_A A_k}$ 稱為 $p(A_k)_{k=1}^n$ 的第 k 等分線， $n \geq 2, 1 \leq k \leq n-1, k \in \mathbb{N}$ ，如圖五。

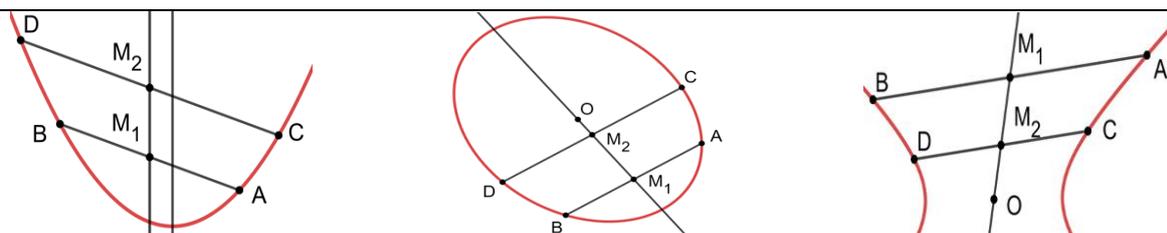
| | | | | |
|----------|-----------|--------------|---------|--------------|
| | | | | |
| 圖一 三梯五點形 | 圖二 A 點集 | 圖三 A 點列與基線 | 圖四 線束中心 | 圖五 第 k 等分線 |

3.預備定理

Lemma 1(朱德祥 et al.(2007))[1]：有兩個不共線束中心的線束，對應線交點連同這兩個線束中心會組成一條二次曲線。



Lemma 2(圓錐曲線平行弦中點連線性質)：拋物線平行弦中點連線會平行軸，橢圓與雙曲線平行弦中點連線會過中心。



Lemma 3 : 二次曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 中，判別式： $H = a + c$ ； $\delta = b^2 - 4ac$ ；

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} ; \Omega = d^2 + e^2 - 4(a+c)f .$$

| | $\delta < 0$ | $\delta = 0$ | $\delta > 0$ |
|-----------------|---|--|--------------|
| $\Delta = 0$ | 一點 | ①若 $\Omega > 0$ ，則為兩平行直線 ②若 $\Omega = 0$ ，則為兩重合直線 ③若 $\Omega < 0$ ，則為空集合 | 兩相交直線 |
| $\Delta \neq 0$ | ① $H \cdot \Delta > 0$ 空集合 ② $H \cdot \Delta < 0$ 圓或橢圓 | 拋物線 | 雙曲線 |

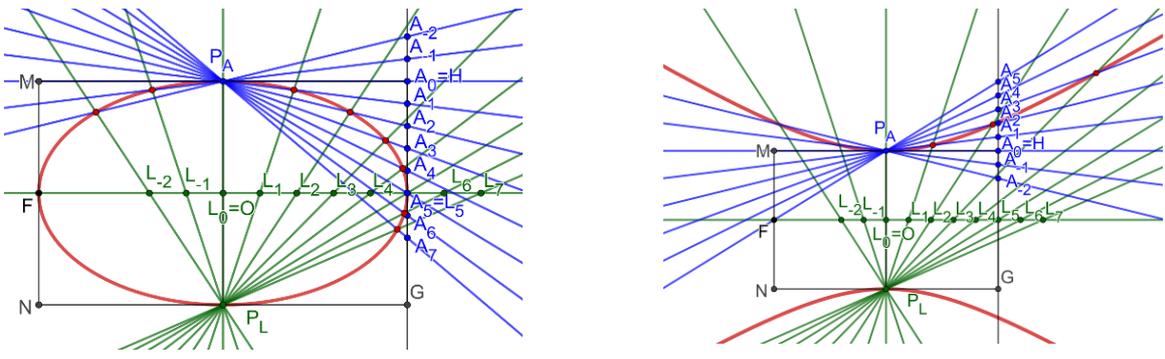
(四) 研究設備及器材

1.器材：紙、筆、電腦、Geogebra、MathType

二、研究方法或過程

(一) 兩個線束生成圓錐曲線

由動機，我們發現當基線為互相垂直時，若增加點列之等份點的個數，其對應線束與交點 $\{B_k\}$ 仍落在原來的橢圓上。若翻轉其一點列的位置，基線仍保持垂直，卻可以製造出雙曲線。



Proposition1 (雙線束 Shoot 法) 一矩形 $MNGH$ ， P_A 、 P_L 分別為 \overline{MH} 與 \overline{GN} 之中點， E 、 F 、原點 O 分別為 \overline{HG} 、 \overline{MN} 與 \overline{EF} 之中點， L_k 、 A_k 分別於 \overline{OE} 、 $\overline{A_0A_n}$ 上，滿足 $\overrightarrow{OL_k} = \frac{k}{n} \cdot \overrightarrow{OE}$ 且 $\overrightarrow{A_0A_k} = \frac{k}{n} \cdot \overrightarrow{A_0A_n}$ ， B_k 為 $\overline{P_L L_k}$ 與 $\overline{P_A A_k}$ 之交點， $k \in \square$ ， $n \in \square$ ，若 $\overline{MH} = 2a$ ， $\overline{MN} = 2b$ ，則：

(1)當 $A_0 = H$ 且 $A_n = E$ ， $\{B_k\}$ 會落在圓或橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上。

(2)當 $A_0 = M$ 且 $A_n = F$ ， $\{B_k\}$ 會落在雙曲線 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 上。

< proof > 設 $t = \frac{k}{n}$,

1. $A_n = E$; 可知 $L_k(at, 0)$ 、 $A_k(a, b - bt)$,

得 $\overline{P_L L_k} : y = \frac{b}{at}x - b$ 、 $\overline{P_A A_k} : y = \frac{-bt}{a}x + b$,

此二直線交點座標 $B_k(\frac{2at}{t^2+1}, \frac{b-bt^2}{t^2+1})$, 可看出其

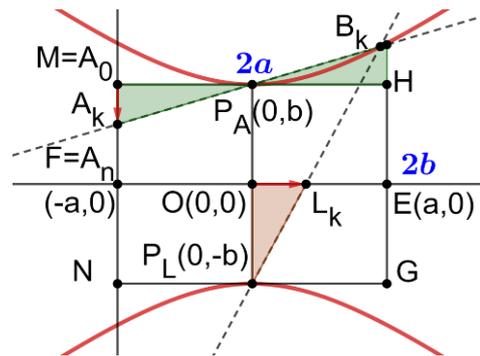
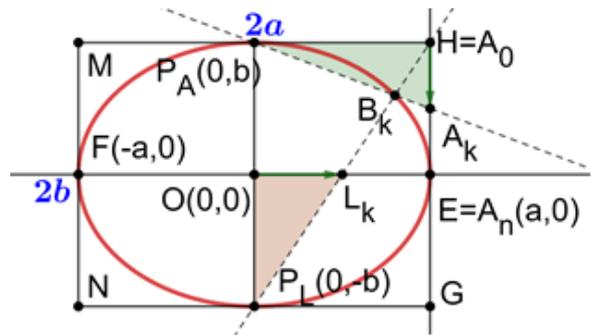
會落於橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上。 #

2. $A_n = F$: 可知 $L_k(at, 0)$ 、 $A_k(-a, b - bt)$,

得 $\overline{P_L L_k} : y = \frac{b}{at}x - b$ 、 $\overline{P_A A_k} : y = \frac{bt}{a}x + b$,

此二直線交點座標 $B_k(\frac{2at}{1-t^2}, \frac{b+bt^2}{1-t^2})$, 可看出其

會落於雙曲線 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 上。 #



1. 兩全等三角形的雙線束投射

Proposition 1 的條件為兩基線互相垂直，我們猜測曲線形狀與兩線束中心的位置和兩基線的夾角有關，但要找到雙線束一般的情況過於複雜，所以我們先研究包含線束中心與基的兩全等的三角形 $\square P_A A_1 A_3$ 、 $\square P_L L_1 L_3$ ，觀察兩全等三角形之相對位置與基之夾角所作出之二次曲線關係，選定 P_A 、 P_L 為線束中心，以其對邊當作基， $\overline{A_1 A_3}$ 、 $\overline{L_1 L_3}$ 的中點分別為 A_2 、 L_2 ，如下圖：

| | | | |
|----------|---|----|---------------|
| | | | |
| 兩全等三角形投射 | 翻 | 不翻 | 基的夾角 α |

定義 (4) (基線夾角、翻與不翻、對應關係)

令 $\vec{v}_A = \overline{A_2 A_3}$, $\vec{v}_L = \overline{L_2 L_3}$, α 為 \vec{v}_A 與 \vec{v}_L 之夾角 , $\varphi = \angle A_3 A_2 P_A$ 。

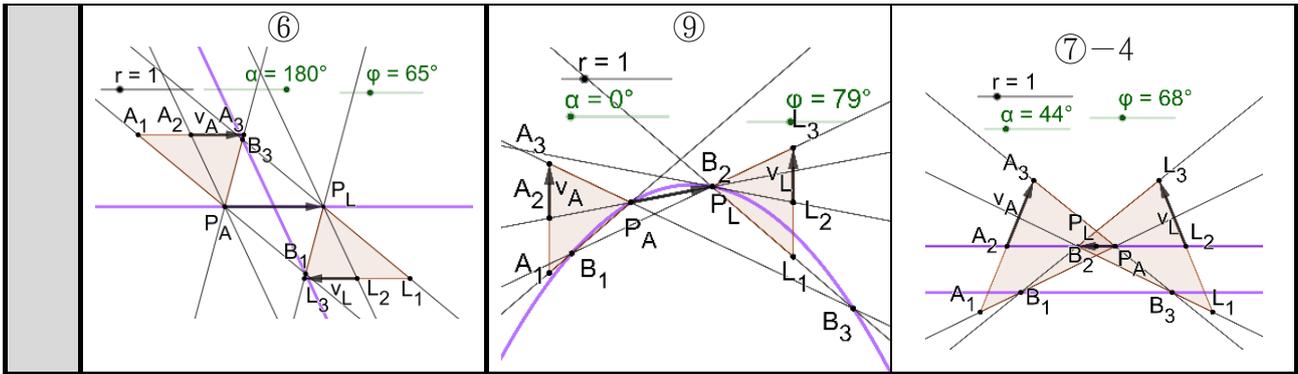
| | |
|--|---|
| 正對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_k}$ 之交點。 | 逆對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_{4-k}}$ 之交點。 |
| 翻：兩三角形 $\square P_A A_1 A_3$ 、 $\square P_L L_1 L_3$, 令 P_L' 為 P_L 對 L 點列的對稱點，若 $\square P_A A_1 A_3 \cong \square P_L' L_1 L_3$, 則稱 $\square P_A A_1 A_3$ 、 $\square P_L L_1 L_3$ 關係為翻。 | 未翻：兩三角形 $\square P_A A_1 A_3$ 、 $\square P_L L_1 L_3$, 若 $\square P_A A_1 A_3 \cong \square P_L L_1 L_3$, 則稱 $\square P_A A_1 A_3$ 、 $\square P_L L_1 L_3$ 關係為未翻。 |

Theorem 1(全等三角形 Shoot 法) 當 $\square P_A A_1 A_3 \cong \square P_L L_1 L_3$, 且兩三角形皆不為等腰三角形， P_A 、 P_L 為線束中心，其中 $P_A \neq P_L$, 以其對邊當作基，以下為兩線束對應的圖形：

| 分類 | 正對應 | 逆對應 |
|----|---|---|
| 未翻 | ① $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_L$: 圓 ② $\vec{v}_A // \vec{v}_L$: 無圖形 | ⑤ $\vec{P}_A \vec{P}_L \not\parallel \vec{v}_A$ 且 $\vec{P}_A \vec{P}_L \not\parallel \vec{v}_L$: 雙曲線, 兩相交直線 ⑥ $\vec{P}_A \vec{P}_L // \vec{v}_A // \vec{v}_L$: 兩相交直線 |
| 翻 | ③ $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 雙曲線 ④ $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線 | ⑦ $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_L$: 雙曲線或橢圓或拋物線或兩相交直線或兩平行直線。當 $k \in \square$, $\alpha = k\pi - 2\angle P_A A_2 A_3$, 為拋物線或兩平行直線。 ⑧ $\vec{P}_A \vec{P}_L // \vec{v}_A // \vec{v}_L$: 兩平行直線 ⑨ $\vec{P}_A \vec{P}_L \not\parallel \vec{v}_A$ 且 $\vec{P}_A \vec{P}_L \not\parallel \vec{v}_L$ 且 $\vec{v}_A // \vec{v}_L$: 拋物線 |

<說明>

| | 未翻 | 翻 | |
|-----|---------|---------|---------|
| 正對應 | ① | ③ | ④ |
| 逆對應 | ⑤-1 | ⑦-5 | ⑦-1 |
| | ⑤-2 | ⑧ | ⑦-2 |
| | | | ⑦-3 |



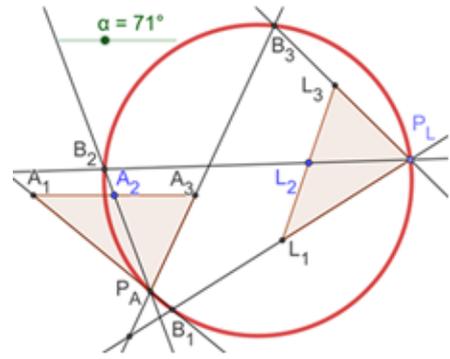
< proof of Theorem 1 >

(1). 未翻正對應—基不平行軌跡為圓的證明 (case①)

1° 因 $\angle B_3P_A A_1 = \angle B_3P_L B_1$ ，則四邊形 $P_A B_1 P_L B_3$ 中
 $\angle B_3P_A B_1 + \angle B_3P_L B_1 = (\pi - \angle B_3P_A A_1) + \angle B_3P_L B_1 = \pi$ ，
 得 $P_A B_1 P_L B_3$ 四點共圓。

2° 因 $\angle B_2P_A A_1 = \angle B_2P_L B_1$ ，則四邊形 $P_A B_1 P_L B_2$ 中
 $\angle B_2P_A B_1 + \angle B_2P_L B_1 = (\pi - \angle B_2P_A A_1) + \angle B_2P_L B_1 = \pi$ ，
 得 $P_A B_1 P_L B_2$ 四點共圓。

由 1°、2° 得 $P_A B_1 P_L B_3 B_2$ 五點共圓。#



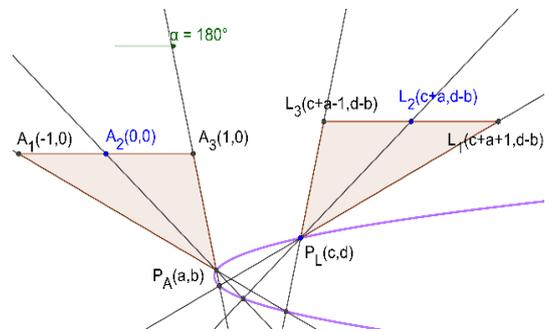
未翻正對應—基不平行

(2). 翻逆對應—基平行軌跡為拋物線的證明 (case⑨)

不失一般性，設 $P_A(a,b)$ 、 $A_1(-1,0)$ 、 $A_2(0,0)$ 、 $A_3(1,0)$ 、
 $P_L(c,d)$ ，則可知 $L_1(c+a+1,d-b)$ 、 $L_2(c+a,d-b)$ 、
 $L_3(c+a-1,d-b)$ ，由條件可知顯然 $b \neq 0$ 且 $b \neq d$ ，將
 三個交點與兩線束中心代入二次曲線一般式，再利用
 克拉瑪公式可解得其方程式為

$$x = \frac{-2a}{b(d-b)} y^2 + \frac{bc+ab+2ad}{b(d-b)} y - \frac{bc+ad}{d-b}$$

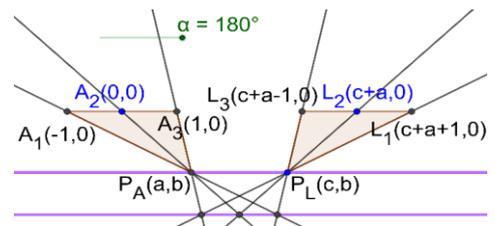
，可知其為拋物線。#



翻逆對應—基平行

(3). 翻逆對應—基重合軌跡為兩平行直線的證明 (case⑧)

不失一般性，設 $P_A(a,b)$ 、 $A_1(-1,0)$ 、 $A_2(0,0)$ 、 $A_3(1,0)$ 、
 $P_L(c,b)$ ，則可知 $L_1(c+a+1,0)$ 、 $L_2(c+a,0)$ 、
 $L_3(c+a-1,0)$ ，將三個交點與兩線束中心代入二次曲線一
 般式，再利用克拉瑪公式可解得其方程式為
 $(y-b)(2ay-(ab+bc))=0$ ，為兩平行直線。#



翻逆對應—基重合

(4). 翻正對應 $A_2 = L_2$ 軌跡為互相垂直的兩直線的證明

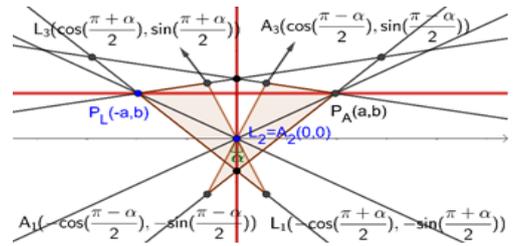
(case④)

不失一般性，令對稱軸為 y 軸，設 $A_2(0,0)$ 、 $P_A(a,b)$ 、

$$A_1(-\cos \frac{\pi-\alpha}{2}, -\sin \frac{\pi-\alpha}{2})、A_3(\cos \frac{\pi-\alpha}{2}, \sin \frac{\pi-\alpha}{2})、$$

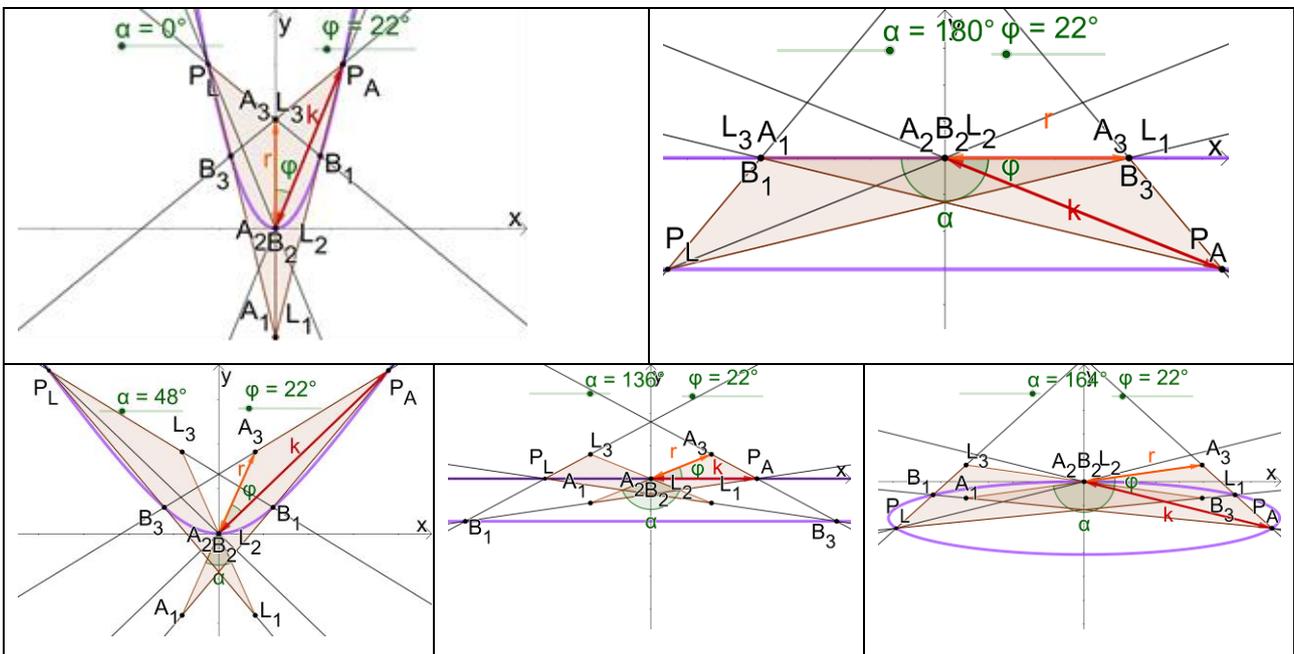
$$P_L(-a,b)，則可知 $L_1(-\cos \frac{\pi+\alpha}{2}, -\sin \frac{\pi+\alpha}{2})、L_2(0,0)、L_3(\cos \frac{\pi+\alpha}{2}, \sin \frac{\pi+\alpha}{2})$ ，將三個交點$$

與兩線束中心代入二次曲線一般式，再利用克拉瑪公式可解得其方程式為 $x(y-b)=0$ ，為互相垂直的兩直線。# 其餘退化型 (case⑥) 皆可用與上述類似方法求得，故省略



翻正對應— $A_2 = L_2$

(5). 翻、逆對應、基不平行的證明：我們先考慮兩基線中點重合的情況，



< proof > 設 $A_2(0,0)$ 、 $L_2(0,0)$ 、 $\overline{A_3A_2} = r$ 、 $\overline{P_A A_2} = k$ 、 $\angle A_3 A_2 P_A = \varphi$ ，

其中規定 $0 \leq \alpha \leq \pi$ 、 $0 < \varphi < \pi$ 、 $\frac{\alpha}{2} + \varphi \neq \pi$ (否則 $P_A = P_L$)， $r, k \in \mathbb{R}^+$ ，

$$則 A_1(-r \sin \frac{\alpha}{2}, -r \cos \frac{\alpha}{2})、A_3(r \sin \frac{\alpha}{2}, r \cos \frac{\alpha}{2})、P_A(k \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi), k \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi))、$$

$$L_1(r \sin \frac{\alpha}{2}, -r \cos \frac{\alpha}{2})、L_3(-r \sin \frac{\alpha}{2}, r \cos \frac{\alpha}{2})、P_L(-k \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi), k \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi))、$$

$$\overline{P_A A_1} \text{ 交 } \overline{P_L L_3} \text{ 於 } B_1(\frac{k^2 r \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha}, \frac{kr^2 \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha})、$$

$$\overline{P_A A_2} \text{ 交 } \overline{P_L L_2} \text{ 於 } B_2(0,0)，$$

$$\overline{P_A A_3} \text{ 交 } \overline{P_L L_1} \text{ 於 } B_3 \left(\frac{-k^2 r \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha}, \frac{kr^2 \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \sin \varphi}{k^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) - r^2 \sin \alpha \cos \alpha} \right),$$

將 P_A 、 P_L 、 B_1 、 B_2 、 B_3 代入二次曲線一般式，解得

$$\begin{aligned} & -\cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos \frac{\alpha}{2} (\cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} r^2 + \sin \varphi \cos \frac{\alpha}{2} r^2 - \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos^2(\frac{\alpha}{2} + \varphi) k^2) x^2 \\ & + \sin^2(\frac{\alpha}{2} + \varphi) (\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} r^2 - \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) \cos \frac{\alpha}{2} k^2 + \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) k^2) y^2 \\ & + k \sin \varphi \sin^2(\frac{\alpha}{2} + \varphi) (\cos \frac{\alpha}{2} r - \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) k) (\cos \frac{\alpha}{2} r + \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi) k) y = 0, \end{aligned}$$

透過 Lemma 3 的結論，可以得到 α 、 φ 、 k 的不同限制來對應不同的二次曲線。#

(6). 翻逆對應—基不平行拋物線出現的情況的證明 (case ⑦)

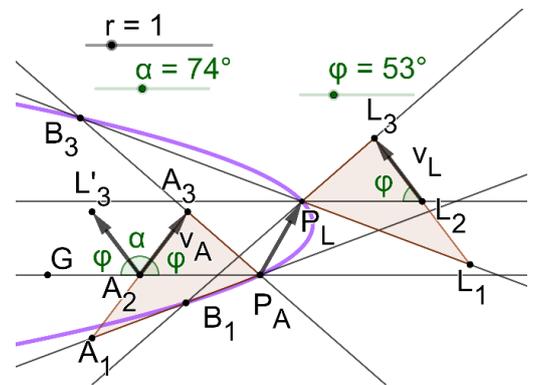
拋物線僅發生在 $A_2 \neq L_2$ ，且 $\alpha = k\pi - 2\varphi$ ，其中 $k=1, 2$ ，

以下為 $\varphi < \frac{\pi}{2}$ 的證明，而 $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 的證明類似，故略之。

< proof > 因軌跡為拋物線時， B_2 必在無窮遠處，可知

$\overline{P_A A_2} // \overline{P_L L_2}$ 。作 L_3' 滿足 $\vec{v}_L = \vec{A_2 L_3'}$ ，因 $\angle P_L L_2 L_3 = \varphi$ 且 $\overline{P_A A_2} // \overline{P_L L_2}$ ，所以 $\angle GA_2 L_3' = \varphi$ 。

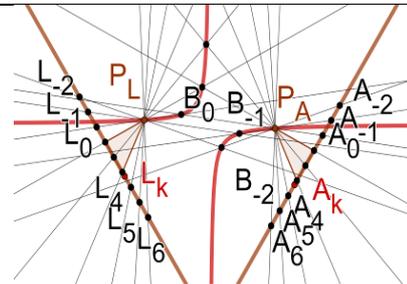
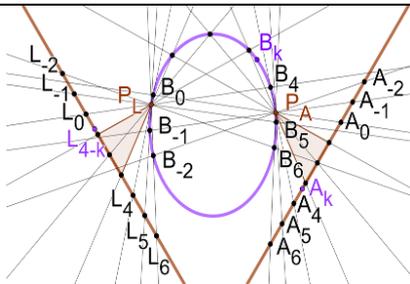
因 $\angle GA_2 L_3' + \angle L_3' A_2 A_3 + \angle P_L L_2 L_3 = \pi$ ，所以得 $\alpha + 2\varphi = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - 2\varphi$ 。#



Proposition 2. 當 $\square P_A A_1 A_3 \cong \square P_L L_1 L_3$ ， P_A 、 P_L 為線束中心，其中 $P_A \neq P_L$ ，以 $\overline{A_1 A_3}$ 、 $\overline{L_1 L_3}$ 當作基，

$$\vec{OA_k} = \frac{(3-k)\vec{OA_1} + (k-1)\vec{OA_3}}{2}, \quad \vec{OL_k} = \frac{(3-k)\vec{OL_1} + (k-1)\vec{OL_3}}{2},$$

則 $\overline{P_A A_k}$ 、 $\overline{P_L L_k}$ 的交點 B_k 會落在同一個二次曲線上， k 為任意實數。



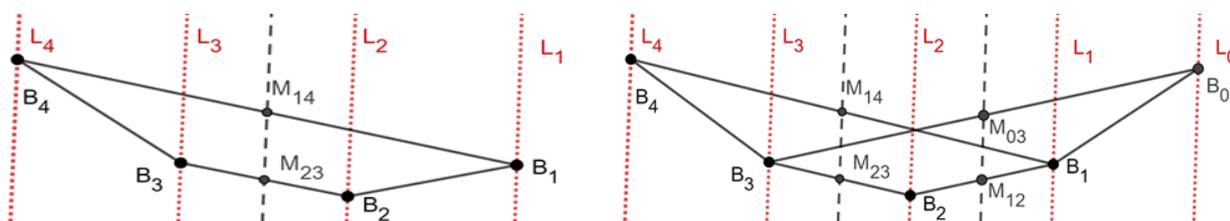
利用此性質可以將原本兩全等三角形中，在平面上的三個點和曲線的對應推廣至兩基線和曲線的對應，並藉此描繪出整個曲線的樣貌，但描出的曲線不會是完整的，反而會有一個「洞」，

而這個洞可視為是無窮遠的點所對應出來的。

2.一線束中心在無窮遠之雙線束投射

由 Theorem1 的討論，可知將任意的雙線束製造二次曲線經簡化為兩全等三角形投射的情況仍然非常複雜，所以我們將一個線束中心拉到無窮遠，即可視為『分別自五條相鄰等距的平行線束取五點，滿足哪些特定條件，會形成特定圓錐曲線。』

我們想到圓錐曲線有很特殊的幾何性質——橢圓和雙曲線的平行弦中點連線會過中心，拋物線中的平行弦中點連線會平行軸，我們先從性質比較簡單的拋物線做起。要製造平行弦，讓我們想到『梯形』，加上希望能控制兩組平行弦的中點連線要互相平行，才能形成拋物線，所以想到利用兩個『上底:下底=1:3』的梯形拼成五點形（如下圖），顯然，五點形要落在五條相鄰等距的平行線上，且平行弦的中點連線會平行於給定的平行線，則這五點形會落在拋物線上。我們希望以這個想法為出發點，製造出其他不同的圓錐曲線。



由上右圖，我們發現當四邊形 $B_0B_1B_2B_3$ 與四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為梯形時，設 $\vec{B_0B_1} = \vec{a}$ ， $\vec{B_1B_2} = \vec{b}$ ，由向量運算可得 $\vec{B_1B_3} = \vec{B_0B_3} - \vec{B_0B_1} = 3\vec{b} - \vec{a}$ ， $\vec{B_0B_4} = \vec{B_0B_1} + \vec{B_1B_4} = 6\vec{b} - 2\vec{a}$ ，則 $\vec{B_1B_3} // \vec{B_0B_4}$ ，故五條平行線上的二梯五點形必為三梯五點形四邊形 $B_0B_1B_3B_4$ 必為梯形，我們稱五邊形 $B_0B_1B_2B_3B_4$ 為一個三梯五點形。顯然，一個三梯五點形的頂點必可決定一個拋物線。

為了方便討論，以下研究報告中，

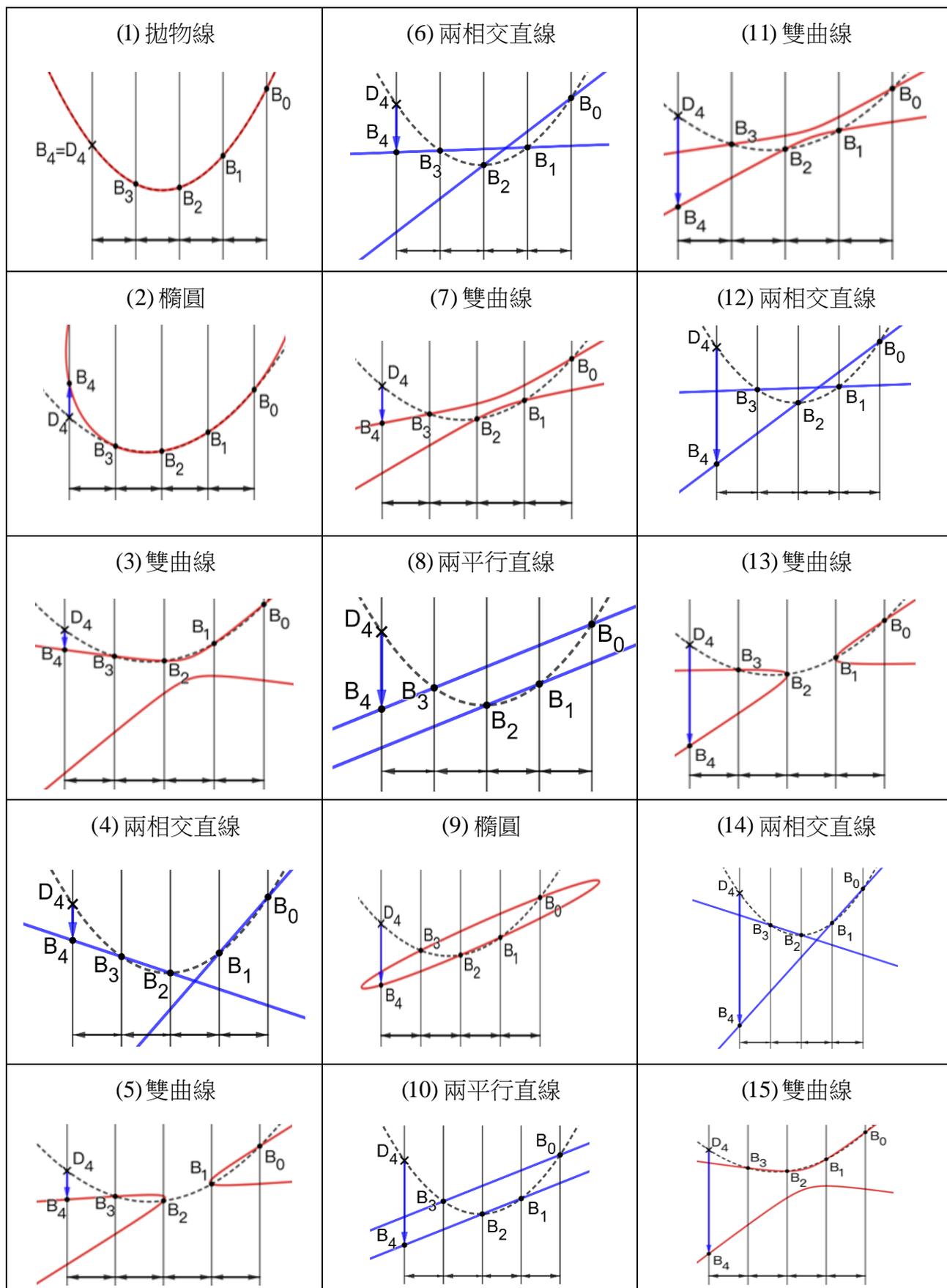
(1)我們定義 $\{L_k | k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ 依 k 遞減由左至右排列，滿足相鄰等距且互相平行，點 $B_k \in L_k$ ， $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

(2)五邊形 $B_0B_1B_2B_3B_4$ 為三梯五點形，當 $\vec{B_0B_1} = \vec{a}$ ， $\vec{B_1B_2} = \vec{b}$ ，則經由計算可得 $\vec{B_0B_2} = \vec{a} + \vec{b}$ ， $\vec{B_0B_3} = 3\vec{B_1B_2} = 3\vec{b}$ ， $\vec{B_0B_4} = 6\vec{b} - 2\vec{a}$ ，我們常使用到這個結論。

【GGB 測試】

我們想先固定 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 四點分別在等距平行線 L_0 、 L_1 、 L_2 、 L_3 上的位置，來任意移動在 L_4 上的 B_4 ，透過 GGB 來觀察 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 會落在哪種類型的二次曲線上，沒想到有以下令人

驚奇的結果，讓我們想探討拉動 B_4 的移動量與圖形的對應關係：



(1) B_4 僅有一個位置，才能生成拋物線：令此時的 B_4 為 D_4 ，即 $B_0B_1B_2B_3D_4$ 為一三梯五點形。

(2) 若 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 中有三點共線，則會生成兩相交直線或兩平行直線。

我們不考慮 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 中有三點共線生成退化型二次曲線的情況，得到以下定理：

Theorem 2(拉拉 move 法)

$\{L_k \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ 依序相鄰等距且互相平行， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 任三點不共線，點 $B_k \in L_k$ 滿足四邊形 $B_0B_1B_2B_3$ 為梯形，其中 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_0B_3}$ 分別為其上底、下底，且 $B_0B_1B_2B_3D_4$ 為三梯五點形。

則下表為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的二次曲線：

| B_4 位置 | $B_4 = D_4$ | 與拋物線焦點同側 | 與拋物線焦點異側 |
|------------------------------------|-------------|----------|----------|
| $\{B_k\}_{k=0}^4$ 決定的二次曲線 Γ | 拋物線 | 橢圓 | 雙曲線、橢圓 |

< proof >

當 $B_4 \neq D_4$ ，即非拋物線情形，

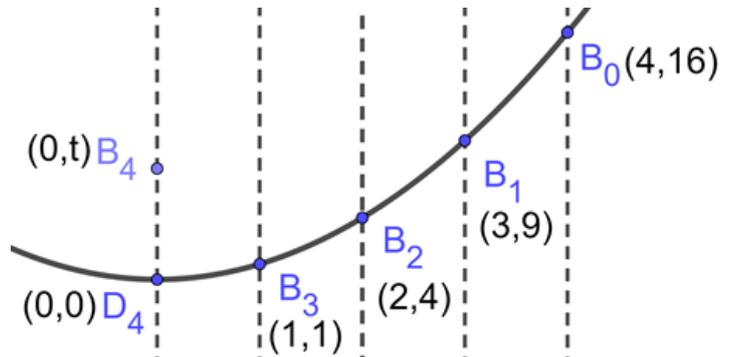
我們利用解析證法來證明：

不失一般性，假設 B_0, B_1, B_2, B_3, D_4

落在拋物線 $y = x^2$ 上，令各點座標分別為

$B_0(4,16)$ ， $B_1(3,9)$ ， $B_2(2,4)$ ， $B_3(1,1)$ ，

$D_4(0,0)$ ，而有一動點 B_4 落在直線 L_4 上，



設 B_4 座標為 $(0,t)$ 且 $t \neq 0$ ，將 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 代入 $x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，

$$\text{得到} \begin{cases} bt^2 + et + f = 0 \\ 1 + b + c + d + e + f = 0 \\ 4 + 16b + 8c + 2d + 4e + f = 0 \\ 9 + 81b + 27c + 3d + 9e + f = 0 \\ 16 + 256b + 64c + 4d + 16e + f = 0 \end{cases} \text{，再利用克拉瑪公式求得 } \{B_k\}_{k=0}^4 \text{ 會落在}$$

$$x^2 - \frac{10t}{t^2 + 35t + 24}xy + \frac{t}{t^2 + 35t + 24}y^2 - \frac{50t}{t^2 + 35t + 24}x - \frac{t^2 + 24}{t^2 + 35t + 24}y + \frac{24t}{t^2 + 35t + 24} = 0 \text{。}$$

由 Lemma 3 中二次曲線的判別式，

$$H = 1 + \frac{t}{t^2 + 35t + 24} = \frac{t^2 + 36t + 24}{t^2 + 35t + 24} \text{， } \delta = \left(\frac{-10t}{t^2 + 35t + 24}\right)^2 - 4\left(\frac{t}{t^2 + 35t + 24}\right) = \frac{-4t(t+4)(t+6)}{(t^2 + 35t + 24)^2} \text{，}$$

$$d^2 + e^2 - 4(a+c)f = \frac{1}{(t^2 + 35t + 24)^2} (t^4 - 96t^3 - 908t^2 - 2304t + 576) \text{，}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & \frac{-10t}{t^2+35t+24} & \frac{-50t}{t^2+35t+24} \\ \frac{-10t}{t^2+35t+24} & 2t & \frac{-(t^2+24)}{t^2+35t+24} \\ \frac{-50t}{t^2+35t+24} & \frac{-(t^2+24)}{t^2+35t+24} & 48t \end{vmatrix} = \frac{-1}{(t^2+35t+24)^3} (t+2)(t+3)(t+4)(t+6)(t+8)(t+12),$$

得：

① 當 $t \in (-6, -4) \cup (0, \infty)$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 落在橢圓上。

② 當 $t \in (-\infty, -12) \cup (-12, -8) \cup (-8, -6) \cup (-4, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, 0)$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 落在雙曲線上。

③ 當 $t = 0, -2, -3, -4, -6, -8, -12$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 為兩平行直線與兩相交直線。

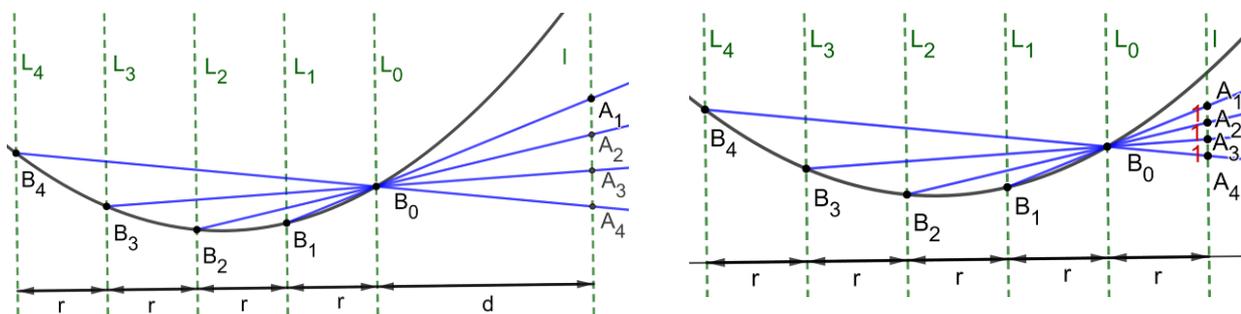
t 區間範圍的邊界值即退化型的情況，所以由 t 值可以確定 B_4 在不同位置時決定的二次曲線，且可看出僅有 $t = 0$ 時， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 會落在拋物線上，因此我們找出平移量與圖形變化之關係。#

(二) 利用一點列線束投射得圓錐曲線

1. 觀察 B 點集以 B_0 為線束中心投射到一點列

Theorem 2 製造圓錐曲線的方式仍需仰賴許多平行線，所以我們希望再簡化方法，想到先將五點形透過其中一點為投射中心，找到與其餘四點對應的點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 。

【討論 1】 欲在 L_0 右側再找一條平行線 l ，將 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 各點以 B_0 為投射中心投射到 l 上， $B_k \mapsto A_k$ ：



我們先在 L_0 右側作 l 使 $l \parallel L_0$ ，設 $d(L_{m+1}, L_m) = r$ ， $d(L_0, l) = d$ ， $r, d > 0$ 、 $m = 0, 1, 2, 3$ ，

將 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 以 B_0 投射到 l 上得到 $\{A_k\}_{k=1}^4$ ，則 $\vec{B}_k \vec{B}_0 = \frac{kr}{d} \cdot \vec{B}_0 \vec{A}_k$ 。由相似形與向量運算可得

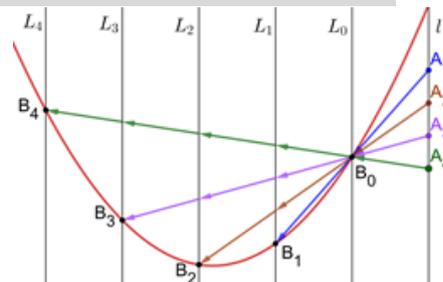
$\vec{A}_1 \vec{A}_2 : \vec{A}_2 \vec{A}_3 : \vec{A}_3 \vec{A}_4 = 1:1:1$ 。反之，由彼此相鄰等距的 $\{A_k\}_{k=1}^4$ 可利用 $\frac{kr}{d} \cdot \vec{A}_k \vec{B}_0 = \vec{B}_0 \vec{B}_k$ 得到 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 。

2. 由一點列經一中心投射整數倍率得落在拋物線上的 B 點集

由討論 1，為了方便討論，我們取 $d = r$ ，

即 l 是 L_0 在右邊的等距平行線時，可得

$k \cdot \vec{A}_k \vec{B}_0 = \vec{B}_0 \vec{B}_k$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ ，即 $\vec{B}_1 \vec{B}_0 = \vec{B}_0 \vec{A}_1$ 、 $\vec{B}_2 \vec{B}_0 = 2 \vec{B}_0 \vec{A}_2$ 、



$$\vec{B_3B_0} = 3\vec{B_0A_3}, \vec{B_4B_0} = 4\vec{B_0A_4}.$$

換句話說，依序相鄰等距的 A_1, A_2, A_3, A_4 分別對 B_0 投射『1倍』、『2倍』、『3倍』、『4倍』得到 B_1, B_2, B_3, B_4 ， $\{B_k\}_{k=0}^4$ 五點可決定一個拋物線。

即得下列 Proposition 3，又 Theorem 2 中拉動 B_4 相當於改變 A_4 的位置，我們於 Theorem 3 裡討論這個對應的結果。

Proposition 3. 點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 滿足 $\vec{A_1A_2} : \vec{A_2A_3} : \vec{A_3A_4} = 1:1:1$ ， $B_0 \notin l$ ，以 B_0 為投射中心， $l // l_k$ ， $d(l, L_0) = d(L_{k-1}, L_k)$ ，且 $\vec{B_kB_0} = k \cdot \vec{B_0A_k}$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ ，則 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 落在一拋物線上。

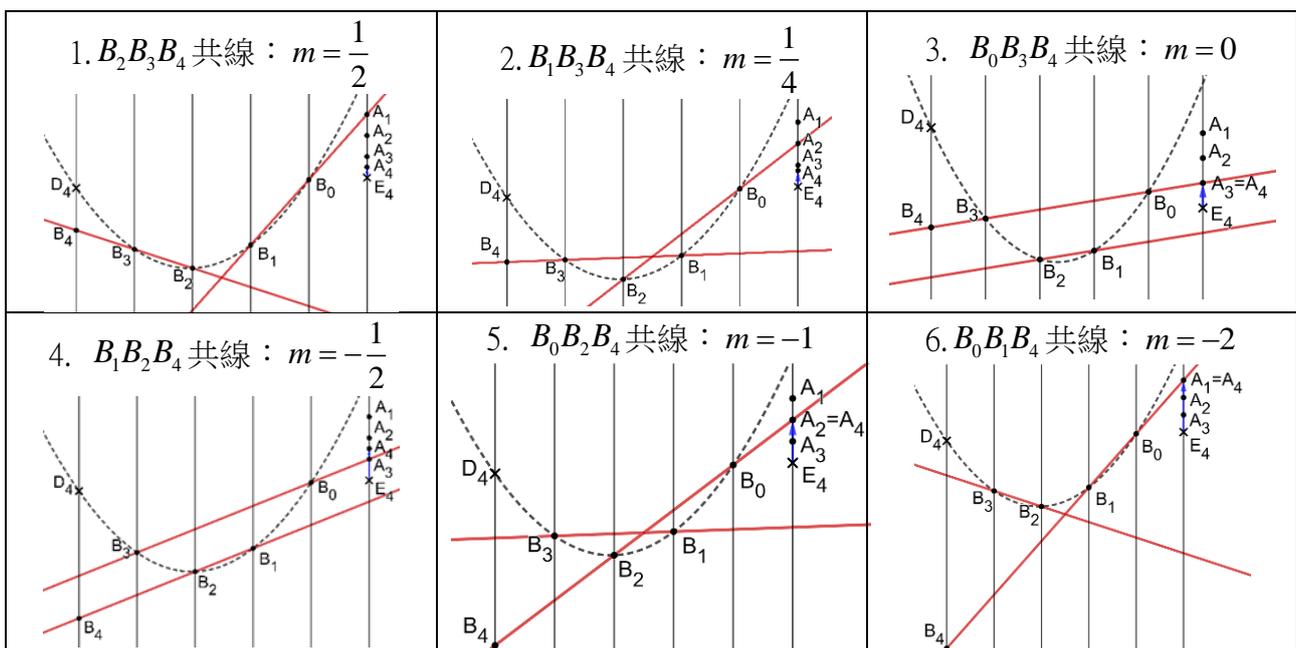
Theorem 3(點列 1234 Shoot 法)

考慮滿足 $\vec{A_1A_2} : \vec{A_2A_3} : \vec{A_3A_4} = 1:1:m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用 $k \cdot \vec{A_kB_0} = \vec{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ ，則下表為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的二次曲線。

| m 範圍 | $m = 1$ | $m > 1$ 或 $-\frac{1}{2} < m < 0$ | $0 < m < 1$ 或 $m < -\frac{1}{2}$ ， 其中 $m \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1, -2$ | $m = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$ 或 -1 或 -2 | $m = -\frac{1}{2}$ 或 0 |
|-------------------------------------|---------|----------------------------------|--|---|--------------------------|
| $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定的二次曲線 Γ | 拋物線 | 橢圓 | 雙曲線 | 兩相交直線 | 兩平行直線 |

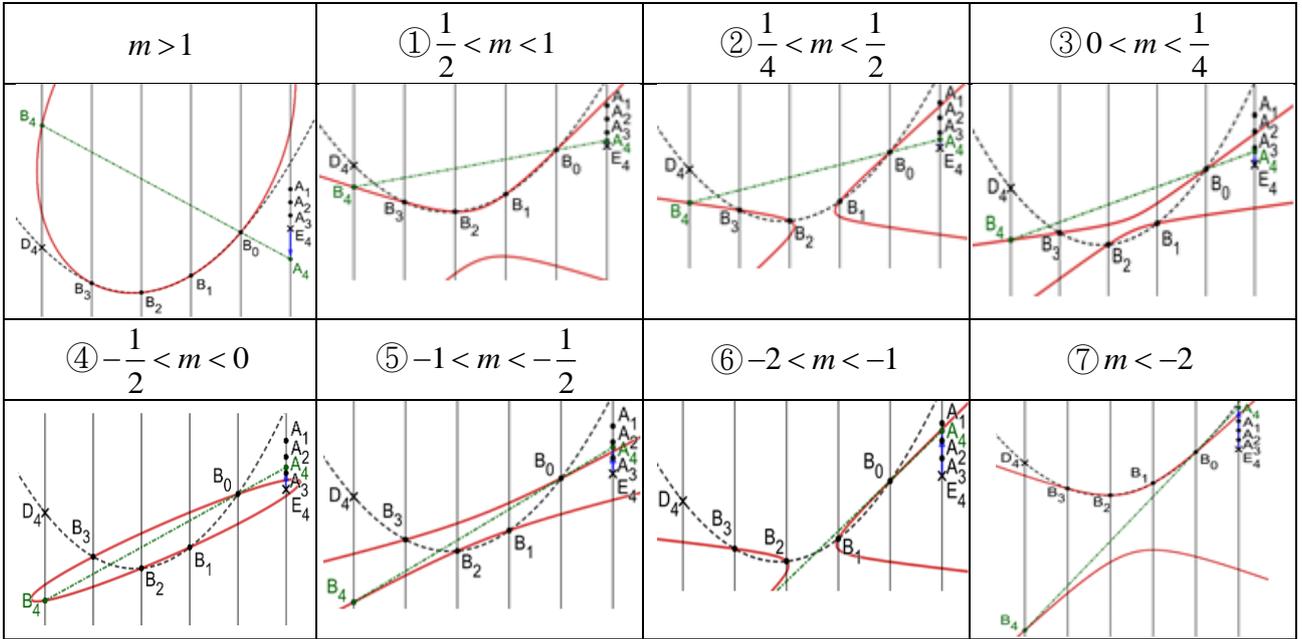
< proof > 退化型的 m 值必為圓錐曲線變化的邊界值，設 $\vec{A_1A_2} : \vec{A_2A_3} : \vec{A_3A_4} = 1:1:m$ ：

case1^o 【退化型】若 $\{B_k\}$ 中有三點共線，則可透過向量運算得到對應的 m 值，以下為 m 值對應的退化型分類：



case2° **【非退化型】** A_4 在 A 點列上移動：因 Theorem 2 與 Theorem 3 顯然一一對應等價，概略說明如下。我們將 A_4 移動的情況分為三大類，即可得到結論。

1. $A_4 = E_4 \Leftrightarrow m=1 \Leftrightarrow$ 圖形為拋物線。 2. A_4 向上移 $\Leftrightarrow m < 1$ 。 3. A_4 向下移 $\Leftrightarrow m > 1$ 。



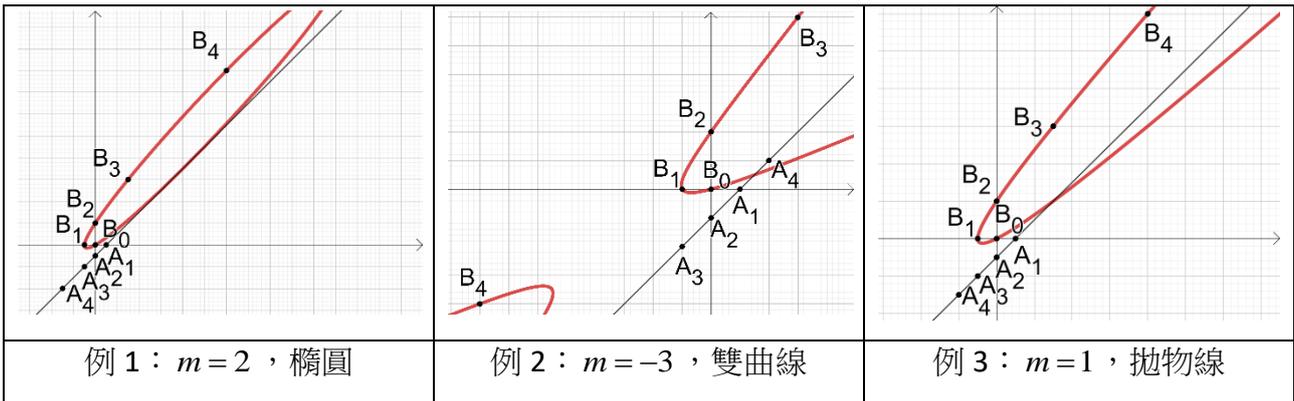
#

例 給定一滿足 $\vec{A_1A_2} : \vec{A_2A_3} : \vec{A_2A_3} = 1:1:m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 且 $A_1(1,0)$ 、 $A_2(0,-1)$ ，與一投影中心 $B_0(0,0)$ ，利用 $k \cdot \vec{A_kB_0} = \vec{B_0B_k}$ 的投影方式得 $\{B_k\}_{k=1}^4$ ，求出由 $\{B_k\}_{k=1}^4$ 與 B_0 構出之二次曲線 Γ 的種類。

(1) $m = 2$

(2) $m = -3$

(3) $m = 1$ 。



(1) $m = 2$:

由 $\vec{A_1A_2} : \vec{A_2A_3} : \vec{A_2A_3} = 1:1:2$ ，可知 $A_3(-1,-2)$ 、 $A_4(-3,-4)$ 、 $B_1(-1,0)$ 、 $B_2(0,2)$ 、 $B_3(3,6)$ 、 $B_4(12,16)$ ，並將 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 代入二次曲線一般式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，

$$\text{得到} \begin{cases} f = 0 \\ a - d = 0 \\ 4c + 2e = 0 \\ 9a + 18b + 36c + 3d + 6e = 0 \\ 144a + 192b + 256c + 12d + 16e = 0 \end{cases}, \text{故方程式為 } 24x^2 - 44xy + 21y^2 + 24x - 42y = 0。$$

由 Thm.3，可知當 $m > 1$ 時，所投出的二次曲線即為橢圓，

$$\text{而利用 Lemma3 二次曲線的判別式，得到 } \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 48 & -44 & 24 \\ -44 & 42 & -42 \\ 24 & -42 & 0 \end{vmatrix} = -10080 \neq 0，\text{且}$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (-44)^2 - 4 \cdot 24 \cdot 21 = -80 < 0，\text{也可知此二次曲線確實為橢圓。}$$

(2) $m = -3$ ：

由 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_2A_3} = 1:1:(-3)$ ，可知 $A_3(-1, -2)$ 、 $A_4(2, 1)$ 、 $B_1(-1, 0)$ 、 $B_2(0, 2)$ 、 $B_3(3, 6)$ 、 $B_4(-8, -4)$ ，並將 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 代入二次曲線一般式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，

$$\text{得到} \begin{cases} f = 0 \\ a - d + f = 0 \\ c + 2e + f = 0 \\ 9a + 18b + 36c + 3d + 6e + f = 0 \\ 84a + 32b + 16c - 8d - 4e + f = 0 \end{cases}, \text{故方程式為 } 7x^2 - 22xy + 13y^2 + 7x - 26y = 0。$$

由 Thm.3，可知當 $m < -\frac{1}{2}$ 且 $m \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1, -2$ 時，所投出的二次曲線即為雙曲線，

$$\text{而利用 Lemma3 二次曲線的判別式，得到 } \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 7 & -22 & 7 \\ -22 & 26 & -26 \\ 7 & -26 & 0 \end{vmatrix} = 2002 \neq 0 \text{ 且}$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (-22)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 13 = 120 > 0，\text{也可知此二次曲線確實為雙曲線。}\#$$

(3) $m = 1$ ：

由 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_2A_3} = 1:1:1$ ，可知 $A_3(-1, -2)$ 、 $A_4(-2, -3)$ 、 $B_1(-1, 0)$ 、 $B_2(0, 2)$ 、 $B_3(3, 6)$ 、 $B_4(8, 12)$ ，並將 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 代入二次曲線一般式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，得到

$$\begin{cases} f = 0 \\ a - d + f = 0 \\ c + 2e + f = 0 \\ 9a + 18b + 36c + 3d + 6e + f = 0 \\ 64a + 96b + 144c + 8d + 12e + f = 0 \end{cases}, \text{故方程式為 } x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y = 0。$$

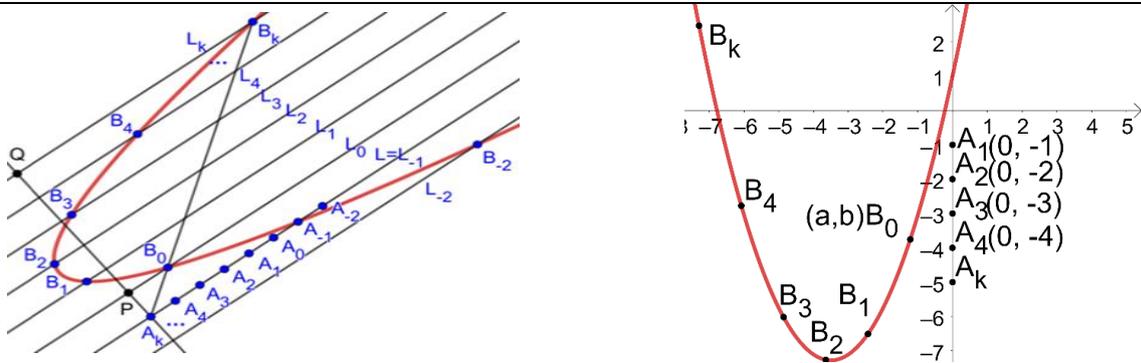
由 Thm.3 可知當 $m = 1$ 時，所投出的二次曲線即為拋物線。

而利用 *Lemma3* 二次曲線的判別式，得到 $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

且 $\delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ ，可知此二次曲線確實為拋物線。#

當 A 點列上的點彼此相鄰等距時投射會生成拋物線，我們想在 A 點列上再作其餘等距的點 A_k ，使 A_k 對 B_0 投射 k 倍得到 B_k ，而經過 GGB 測試後發現 B_k 也會落在同一拋物線上。

Proposition 4. 在 A 點列的基線上依序作相鄰等距的點 $\{A_k\}$ ，與一不在基線上的點 B_0 ，若滿足 $\vec{B_0 B_k} = k \cdot \vec{A_k B_0}$ ，則 $\{B_k\}$ 必會落在同一拋物線上，且對於任意的整數 k 皆成立。



< proof > 不失一般性，設 $A_1(0, -1)$ 、 $B_0(a, b)$ 、 $A_k(0, -k)$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，其中 $a \neq 0$ ，
可知 $A_2(0, -2)$ 、 $A_3(0, -3)$ 、 $A_4(0, -4)$ ，得 $B_1(2a, 2b+1)$ 、 $B_2(3a, 3b+4)$ 、 $B_3(4a, 4b+9)$

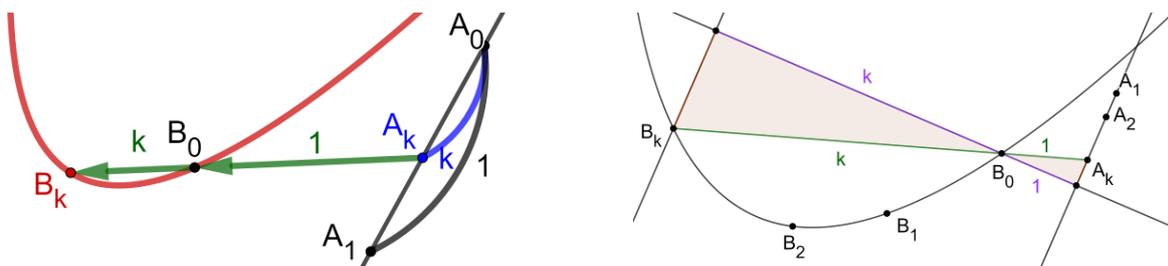
由前面的討論， B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 落在拋物線，代入二次曲線一般式，得到 $\Gamma: y = \frac{b}{a}x + (\frac{x}{a} - 1)^2$

由 $\vec{B_0 B_k} = k \vec{A_k B_0}$ ，利用向量運算和係數積可以得到 $B_k((k+1)a, (k+1)b + k^2)$ ， $k \in \mathbb{Z}$

將 B_k 代入 Γ ，得 B_k 會落在其上。也就是對於任意整數 k ，等距的 A_k 投射而得的 B_k 都會落在同一個拋物線上。#

【討論 2】 在上述證明中，可以看出 k 滿足任意實數時， B_k 也會落在同一拋物線上，也就是得到一個拋物線和實數線的一一對應關係，亦得到以下的 Corollary：

Corollary (拋物線的終極製造法---僅需不共線三點)
任意給定不共線三點 B_0 、 A_0 、 A_1 ，利用 $\vec{A_0 A_k} = k \cdot \vec{A_0 A_1}$ 和 $\vec{B_0 B_k} = k \cdot \vec{A_k B_0}$ ， $k \in \mathbb{R}$ ，則所得的 $\{B_k\}$ 會落在一個拋物線上。



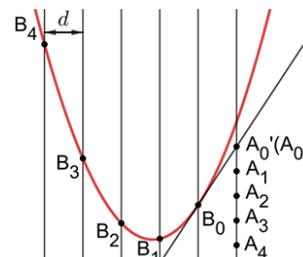
Proposition 5. 考慮滿足 $\overrightarrow{A_0A_1} : \overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1:1:1:1$ 的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用 $k \cdot \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ， Γ 為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所在的拋物線，則 $\overline{A_0B_0}$ 為 Γ 過 B_0 的切線。

< proof > 不失一般性，設拋物線方程式 $y = x^2$ 、 $B_0(x_0, x_0^2)$ ，設平行線間距 d ，得

$\overline{A_1A_2} : x = x_0 + d$ 。過 B_0 作切線 $y = 2x_0x - x_0^2$ 交於 $\overline{A_1A_2}$ 於

$A_0'(x_0 + d, x_0^2 + 2dx_0)$ ，由 $B_1(x_0 - d, (x_0 - d)^2)$ 、 $B_2(x_0 - 2d, (x_0 - 2d)^2)$ ，

得 $A_1(x_0 + d, 2x_0^2 - (x_0 - d)^2)$ 、 $A_2(x_0 + d, \frac{1}{2}(3x_0^2 - (x_0 - 2d)^2))$ ，

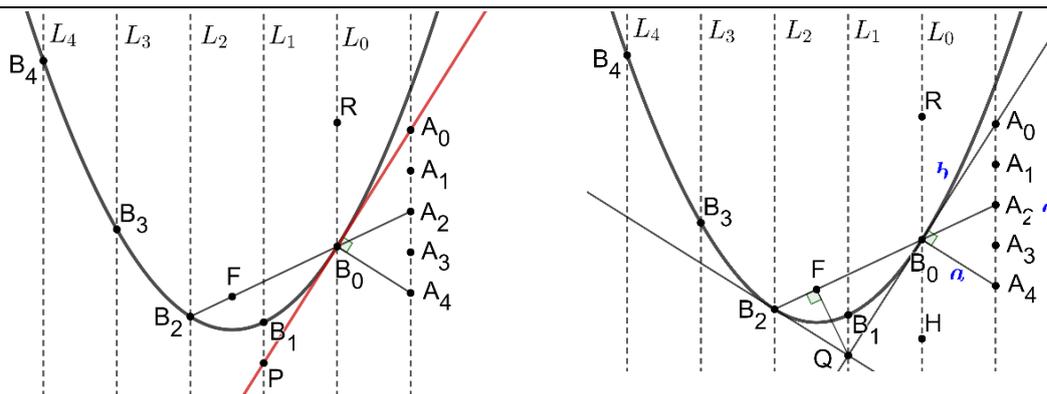


則 $\overline{A_1A_2} = [2x_0^2 - (x_0 - d)^2] - [\frac{1}{2}(3x_0^2 - (x_0 - 2d)^2)] = [x_0^2 + 2dx_0 - d^2] - [x_0^2 + 2dx_0 - d^2] = d^2$ ，

可知 $A_0(x_0 + d, 2x_0^2 - (x_0 - d)^2 + d^2)$ 。即 $A_0 = A_0'$ ，也就是 $\overline{A_0B_0}$ 是過 B_0 的切線。#

Proposition 6. 考慮滿足 $\overrightarrow{A_0A_1} : \overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1:1:1:1$ 的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，且 $\angle A_0B_0A_4 = 90^\circ$ ，利用 $k \cdot \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ， Γ 為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所在的拋物線，則 $\overline{B_0B_2}$ 為 Γ 的焦弦，且 $\overline{B_0F} : \overline{B_2F} = \overline{B_0A_0}^2 : \overline{B_0A_4}^2$ ，其中 F 為 Γ 的焦點。

< proof >



1° 欲證 $\overline{B_0B_2}$ 為拋物線焦弦，即證過 B_0 平行於軸的入射光必朝 B_2 反射而去：

過 B_0 作 $\overline{B_0R}$ 平行拋物線之軸，並連 $\overline{A_0B_0}$ （由 Proposition 5，其為過 B_0 之切線），

因 $\angle A_0B_0A_4 = 90^\circ$ 且 A_2 為 $\overline{A_0A_4}$ 中點，所以 $\overline{A_0A_2} = \overline{B_0A_2}$ ，得 $\angle B_0A_0A_4 = \angle A_0B_0A_2$ ，

又因 $\overline{B_0R} // l$ ，由內錯角 $\angle A_0B_0R = \angle B_0A_0A_4$ ，另外由對頂角 $\angle B_2B_0P = \angle A_0B_0A_2$ ，

得 $\angle A_0 B_0 R = \angle B_2 B_0 P$ ，故滿足拋物線的光學性質， $\overline{B_0 B_2}$ 為焦弦。#

2° 分別作過 B_0 、 B_2 的切線 $\overline{B_0 Q}$ 與 $\overline{B_2 Q}$ ，因 $\overline{B_0 B_2}$ 為焦弦，則 $\angle B_0 Q B_2 = 90^\circ$ ，且 $\overline{QF} \perp \overline{B_0 B_2}$

由 1° 的證明中可得 $\angle B_0 A_0 A_4 = \angle B_2 B_0 Q = \angle Q B_0 F$ ，又 $\angle A_0 B_0 A_4 = \angle B_0 F Q = 90^\circ$ ，則

$\square A_0 B_0 A_4 \square \square B_0 F Q$ (AA 相似)。可得 $\overline{B_0 F} : \overline{A_0 B_0} = \overline{B_0 Q} : \overline{A_0 A_4}$ ，又 $\overline{B_0 Q} = \overline{A_0 B_0}$ ，則 $\overline{B_0 F} = \frac{\overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}}$ ，

$$\overline{B_2 F} = \overline{B_0 B_2} - \overline{B_0 F} = \overline{A_0 A_4} - \frac{\overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}} = \frac{\overline{A_0 A_4}^2 - \overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}} = \frac{\overline{B_0 A_4}^2}{\overline{A_0 A_4}}$$

故 $\overline{B_0 F} : \overline{B_2 F} = \frac{\overline{B_0 A_0}^2}{\overline{A_0 A_4}} : \frac{\overline{B_0 A_4}^2}{\overline{A_0 A_4}} = \overline{B_0 A_0}^2 : \overline{B_0 A_4}^2$ 。#

利用 Proposition 5、Proposition 6 可以作任意拋物線的焦點與準線(詳見應用三 P.29)

3. 由一點列經中心投射到水平距離交錯等距的 B 點集

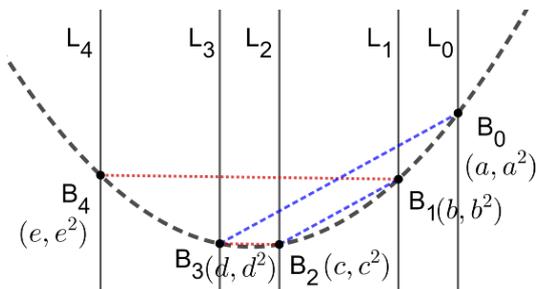
決定拋物線的二梯五點形不一定是落在等距平行線上，但一定會落在交錯等距的平行線上：

Proposition 7.若在拋物線 Γ 上依序作 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ，滿足 $\overline{B_0 B_3} // \overline{B_1 B_2}$ ， $\overline{B_2 B_3} // \overline{B_1 B_4}$ ，

則 $d(L_0, L_1) = d(L_2, L_3)$ ， $d(L_1, L_2) = d(L_3, L_4)$ 。即 L_4 、 L_3 、 L_2 、 L_1 、 L_0 為交錯等距。

< proof > 不失一般性，設拋物線 $\Gamma: y = x^2$ ，

依序取點 $B_0(a, a^2)$ 、 $B_1(b, b^2)$ 、 $B_2(c, c^2)$ 、 $B_3(d, d^2)$ 、 $B_4(e, e^2)$ ，其中 $a > b > c > d > e$ ，



$$\therefore m_{B_1 B_2} = m_{B_0 B_3}, \quad m_{B_2 B_3} = m_{B_1 B_4},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{b^2 - c^2}{b - c} = \frac{a^2 - d^2}{a - d} \Rightarrow b + c = a + d \text{ --- ①} \\ \frac{c^2 - d^2}{c - d} = \frac{b^2 - e^2}{b - e} \Rightarrow c + d = b + e \text{ --- ②} \end{cases}$$

由①得 $a - b = c - d$ ，即 $d(L_0, L_1) = d(L_2, L_3)$ ，由②得 $b - c = d - e$ ，即 $d(L_1, L_2) = d(L_3, L_4)$ 。#

以上的討論告訴我們，滿足落在交錯等距平行線上的二梯五點形即可描繪出拋物線。

我們猜測落在交錯等距平行線上的五點形 $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4$ ，移動其中一點 B_4 也可以改變其對應的

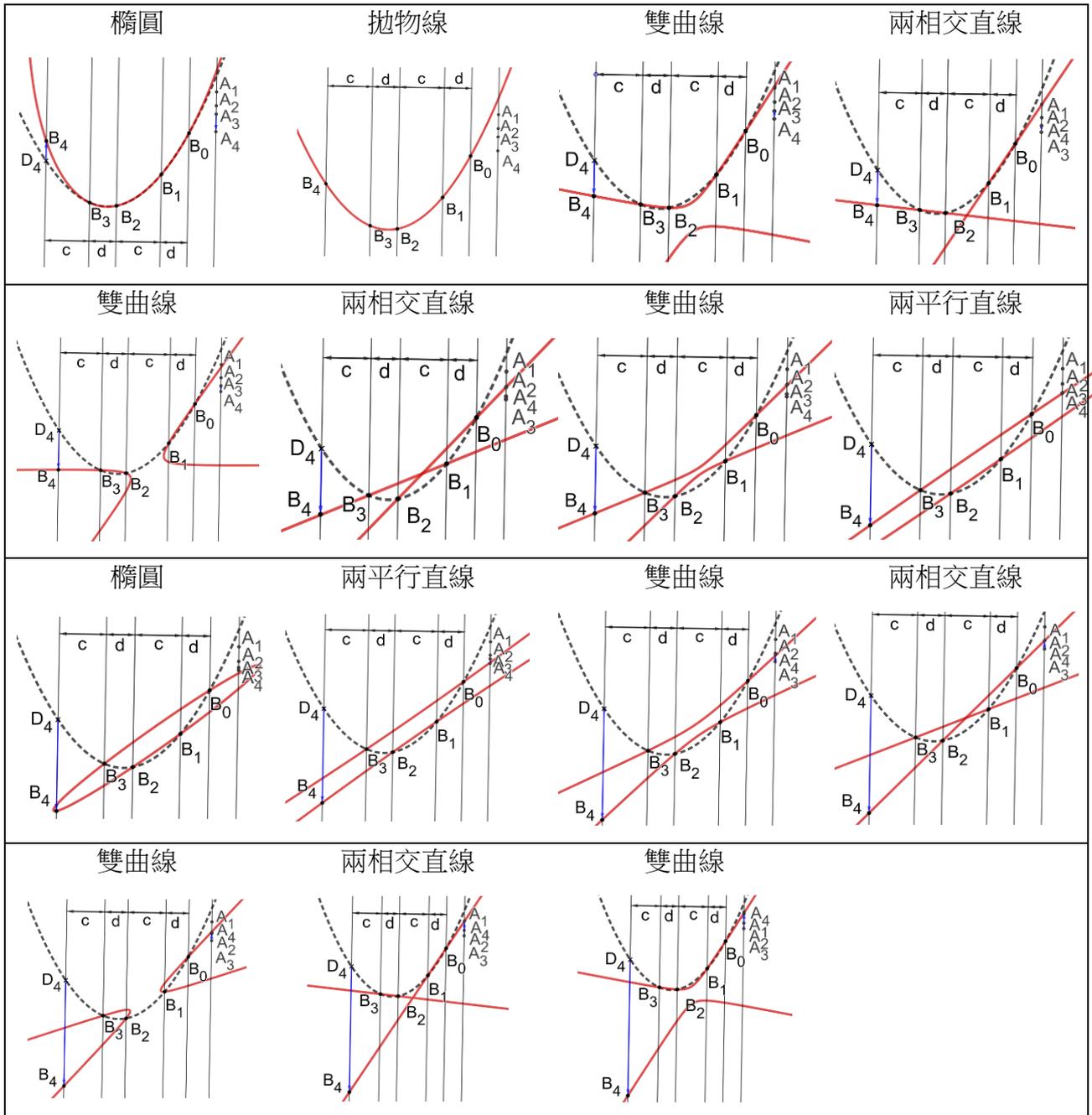
二次曲線，並找出 $\{B_k\}$ 對應的 A 點列，以下為移動 A_4 在 A 點列上的位置與二次曲線的關係：

Theorem 4(交錯等距拉拉 move 法) 考慮滿足 $\overline{A_1 A_2} : \overline{A_2 A_3} : \overline{A_3 A_4} = c : d : m$ 的點列 $l(A_k)_{k=1}^4$ 及一投

射中心 $B_0 \notin l$ ，以 $\frac{\left[\frac{k}{2}\right]c + \left[\frac{k+1}{2}\right]d}{d} \cdot \overline{B_0 A_k} = \overline{B_k B_0}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=1}^4$ ，則：

| m 範圍 | $m = c$ | $\frac{-d}{2} < m < 0$ 或 $m > c$ | $m < \frac{-d}{2}$ 或 $0 < m < c$ | $m = \frac{c}{2}$ 或 $\frac{cd}{2(c+d)}$ 或 $-d$ 或 $(-d - \frac{d^2}{c})$ | $m = -\frac{d}{2}$ 或 0 |
|---|---------|-------------------------------------|-------------------------------------|---|--------------------------|
| $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所決定 的二次曲線 Γ | 拋物線 | 橢圓 | 雙曲線 | 兩相交直線 | 兩平行直線 |

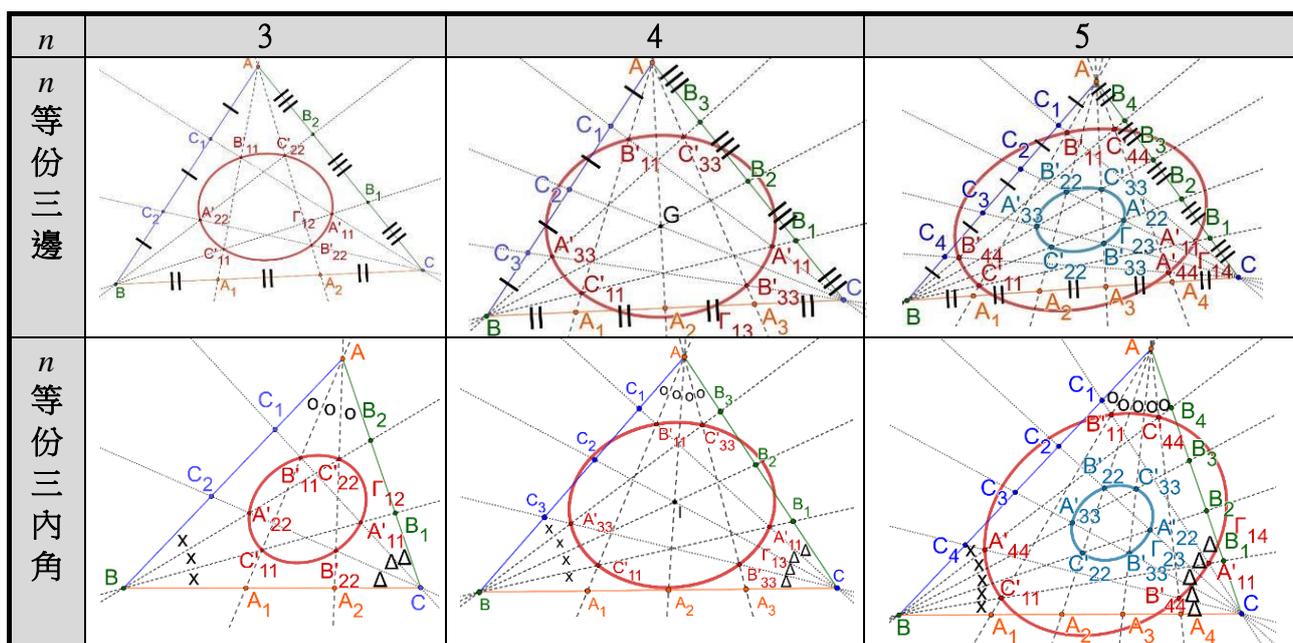
< proof > 此處證明與 Theorem 3 類似，可以由向量證之，故證明略。以下為拉動 A_4 的圖形：



(三) 三線束生成圓錐曲線

由 Proposition 2. 可得雙線束原始對應的條件可鬆綁「通過線束中心」的條件，投出的二次曲線結果大致不會改變，僅當出現退化型時，結論會改變。以翻正對應為例，原本包含線束中心的兩相交直線，卻成了不包含線束中心的一直線，若視其為二重合直線，更完善了全部的二次曲線製造法。

接著，我們把原本的雙線束推廣到三線束，並定義三線束對應條件來觀察『六個』交點所決定的二次曲線，多數情況六個交點無法共二次曲線，僅符合下列對應時『六個』交點會共橢圓。



Theorem 5. (三線束 shoot 法) $n \geq 3$ ，任意給定非正三角形 $\square ABC$ ，以頂點 A 、 B 、 C 分別作為線束中心，令三線束的對應方式為 $\overline{XX_k}$ 、 $\overline{YY_k}$ 的交點為 Z'_{kk} ， $X_k \in \overline{YZ}$ 且 (X, Y, Z) 為 (A, B, C) 的輪流置換，若 $\overline{AA_k}$ 、 $\overline{BB_k}$ 、 $\overline{CC_k}$ 滿足下列對應條件之一，則 A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 $A'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $B'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $C'_{(n-k)(n-k)}$ 會共橢圓 $\Gamma_{k,(n-k)}$ 。(規定 $\Gamma_{k,(n-k)} = \Gamma_{(n-k),k}$)

$$(1) \angle A_k AB = \frac{k}{n} \angle CAB, \angle B_k BC = \frac{k}{n} \angle ABC, \angle C_k CA = \frac{k}{n} \angle BCA, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$(2) \overrightarrow{BA_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{AB}, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

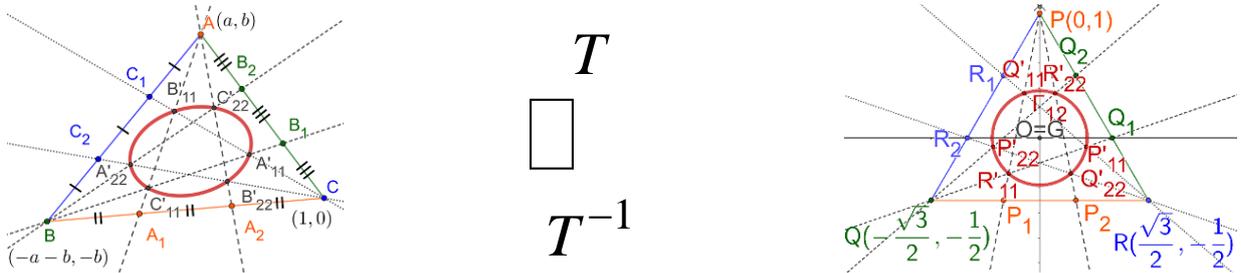
< proof of 三邊 n 等份線交點 >

(1) $n = 3$ ：不失一般性，任意給定重心 G 在 $(0,0)$ 的 $\square ABC$ ， $A(a,b)$ 、 $B(-a-1,-b)$ 、 $C(1,0)$ ，

其中 $b \neq 0$ ，設 $\square ABC$ 經由線性變換 T 變為正三角形 $\square PQR$ ，滿足 $P(0,1)$ 、 $Q(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 、

$R(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ，且 $A \xrightarrow{T} P$ 、 $B \xrightarrow{T} Q$ 、 $C \xrightarrow{T} R$ ， M 為 T 對應到的方陣。因為正三角形 $\square PQR$ 為正三角形，所以顯然六個對應焦點會共圓。因為線性變換 T 顯然可逆，所以 T 的逆變換會把圓送至二次曲線，封閉曲線經過線性變換後仍然是封閉曲線，所以可以確定變換回去的 Γ 只可能是圓或橢圓。

經由計算 $M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}a}{2b} \\ -1 & \frac{a+2}{2b} \end{bmatrix}$ ，可表示成 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ ，即 M 為推移變換與伸縮變換的合成，則 Γ 顯然為橢圓。#



(2) $n \geq 3$ ：因為對稱性，正三角形 $\square PQR$ 中 A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 $A'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $B'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $C'_{(n-k)(n-k)}$ 一定會共圓，我們可以透過孟氏定理快速得到對應點在線段上的比例以及 $\square ABC$ 映至 $\square PQR$ 之線性變換，再利用類似 $n=3$ 的證明方式就可以得到結論。

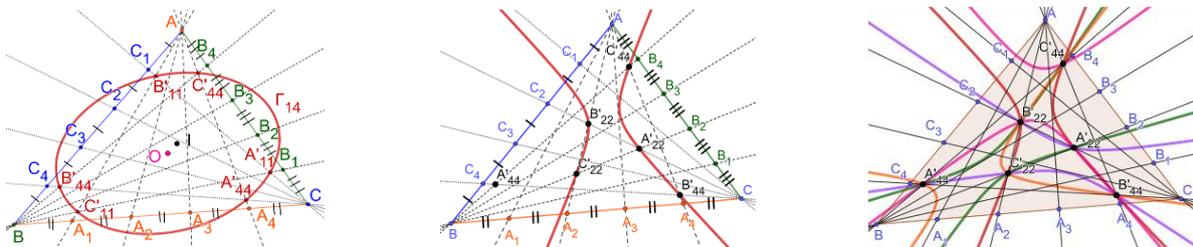
Remark 1.

(1) 內角 n 份線交點構成的橢圓 Γ 中心與 $\square ABC$ 的內心不共點：

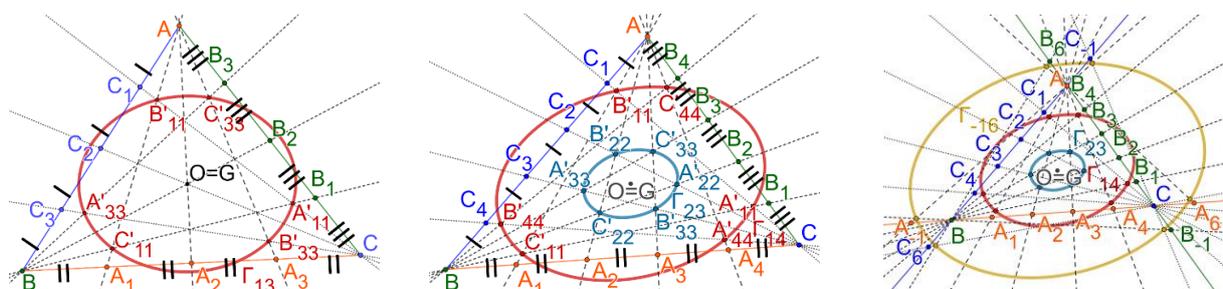
給定 $\square ABC$ ，以內角 n 等份線對應交點構成橢圓 Γ ，則 Γ 的中心 O 與 $\square ABC$ 的內心 I 不共點。

(2) 在 n 等份三線束的對應方式下，不管是等份邊或角，若 $k+t \neq n$ ，則 A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 A'_t 、 B'_t 、 C'_t 六點不共二次曲線， $k, t \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ， $k < t$ 。

例. 以 $n=5$ 等份邊為例，如下圖，① A'_{11} 、 B'_{11} 、 C'_{11} 、 A'_{44} 、 B'_{44} 、 C'_{44} 六點必共橢圓，② A'_{22} 、 B'_{22} 、 C'_{22} 、 A'_{44} 、 B'_{44} 、 C'_{44} 六點無法共一個二次曲線，除 A'_{44} 外，其他共雙曲線。



Proposition 8. 由 n 等份邊對應的橢圓 $\{\Gamma_{k, (n-k)} \mid k \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ 且 } k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ 會共中心 O ，且 O 亦為 $\square ABC$ 的重心 G ，其中 $n \geq 3$ 。(以 5 等分為例: Γ_{14} 、 Γ_{23} 、 Γ_{-16} 中心和 $\square ABC$ 重心會共點)



< proof > 因為原點經過線性變換後還是會送到原點，所以其中心不會改變。 #

三、研究結果與討論

(一) 延伸性質討論

1. 固定投射倍率，任意圓錐曲線反作 A 點列不唯一：

在 Theorem 3 中，一個 A 點列恰可投射出唯一的圓錐曲線，引起我們思考『去除對稱性後，給定圓錐曲線後可以對應得唯一的 A 點列嗎？』、『投射中心 B_0 固定，A 點列唯一嗎？』



<作法> 1° 作一過中心 O 之直線 L 。

2° 取適當距離，依序作直線 L_m 平行 L ，對於 $m=1,2,3$ 滿足 $L // L_m$ 且

$$d(L_{m-1}, L_m) = d(L_m, L_{m+1}), \text{ 且 } L_k \text{ 分別與圓錐曲線相交於 } B_k, k=0,1,2,3,4。$$

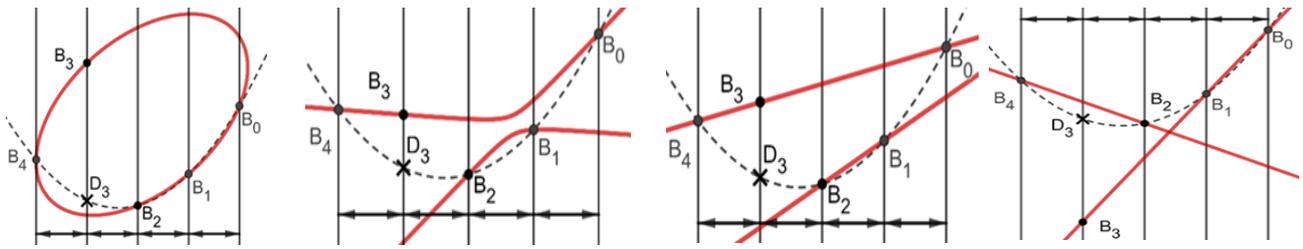
3° 將 B_1, B_2, B_3, B_4 ，對 B_0 分別投射 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 倍，得 A_1, A_2, A_3, A_4 。

在上述過程中，我們並未給定直線 L 之斜率和平行線間的距離，所以很顯然地，即使固定投射中心 B_0 與投射倍率 $1:2:3:4$ ，得出的 A 點列不唯一。

2. 利用「等腰」簡化全等雙線束：（說明於附錄四 P.36）我們發現在非等腰三角形與等腰三角形的情形在正對應的部分是相同的，是因為 $\square A_1 A_2 P_A \cong \square A_3 A_2 P_A$ ， $\square L_1 L_2 P_L \cong \square L_3 L_2 P_L$ ，導致未翻正對應和翻逆對應的結果相同，而翻正對應和未翻逆對應的結果相同，也就是完全避免掉「逆對應」的討論，雖然使用等腰三角形分類較簡單，但是等腰三角形卻無法得到拋物線、兩平行直線與橢圓的情況，因此於 Theorem 1 中我們還是使用兩非等腰全等三角形去作分類。

3. 拉拉 move 法只需固定其中任意四點拉動第五個點：在研究 Theorem 2 時，發現不一定要移動 B_4 ，只要固定四點移動第五個點也會有類似的結論，下表是移動 B_3 的部分結果：

（詳細表格於附錄三 P.36）



4. 兩基圓生成特定的二次曲線

Thm. 1 中，兩基線上的點都是相鄰等距的，自然的就想把條件改成『等角』，所以我們將基線彎成了『基圓』，基線上等點變成基圓上『圓心角相同的點』。我們先探討包含線束中心的兩個等圓 O_A 、 O_L ，觀察兩等圓及兩線束中心 P_A 、 P_L 的相對位置與作出之二次曲線的關係。

(證明與結論附於附錄一 P.30)

(二) 研究結果

Proposition 1：取一矩形的一組對邊中點為線束中心，其內中線和邊上的線段之等分點來生成兩個線束，可以透過矩形的大小，與對應線束的交點，生成特定的圓、橢圓和雙曲線。

Theorem 1：藉由改變兩線束的相對位置與基線的特定夾角來生成特定的二次曲線。

Proposition 2：當 $\square P_A A_1 A_3 \cong \square P_L L_1 L_3$ ， P_A 、 P_L 為線束中心，其中 $P_A \neq P_L$ ，以 $\overline{A_1 A_3}$ 、 $\overline{L_1 L_3}$ 當作基， $\overrightarrow{OA_k} = \frac{(3-k)\overrightarrow{OA_1} + (k-1)\overrightarrow{OA_3}}{2}$ ， $\overrightarrow{OL_k} = \frac{(3-k)\overrightarrow{OL_1} + (k-1)\overrightarrow{OL_3}}{2}$ ，則 $\overline{P_A A_k}$ 、 $\overline{P_L L_k}$ 的交點 B_k 會落在同一個二次曲線上， k 為任意實數。〔此性質和 **Proposition 3** 是類似的〕

Theorem 2：在五條相鄰等距平行線上的三梯五點形必落在一拋物線上，固定其中 4 點，拉動第 5 點，依其不同位置產生不同二次曲線。

Proposition 3：給定一相鄰等距的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，以 B_0 為投射中心， $l // L_k$ ， $d(l, L_0) = d(L_{k-1}, L_k)$ ，且 $\overrightarrow{B_k B_0} = k \cdot \overrightarrow{B_0 A_k}$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ ，則 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 落在一拋物線上。

Theorem 3：在一條基線上給定相鄰等距的 4 個點，往平面上一點 B_0 分別以 1、2、3、4 倍投射，得到的 4 個投射點與 B_0 必落在一拋物線上，拉動 A_4 ，依 $\overline{A_1 A_2} : \overline{A_2 A_3} : \overline{A_3 A_4} = 1:1:m$ 不同比例產生不同二次曲線。

Proposition 4：給定一相鄰等距的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用 $k \cdot \overrightarrow{A_k B_0} = \overrightarrow{B_0 B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ，其中 Γ 為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所在的拋物線，則 $\overline{A_0 B_0}$ 為 Γ 過 B_0 的切線。

Corollary :任意給定不共線三點 B_0 、 A_0 、 A_1 ，利用 $\overrightarrow{A_0A_k} = k \cdot \overrightarrow{A_0A_1}$ 和 $\overrightarrow{B_0B_k} = k \overrightarrow{A_kB_0}$ ， $k \in \mathbb{Q}$ ，則所得的 $\{B_k\}$ 會落在一個拋物線上。

Proposition 5.6 :給定一相鄰等距的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，且 $\angle A_0B_0A_4 = 90^\circ$ ，利用 $k \cdot \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ，其中 Γ 為 $\{B_k\}_{k=0}^4$ 所在的拋物線，則 $\overline{B_0B_2}$ 為 Γ 的焦弦，且 $\overline{B_0F} : \overline{B_2F} = \overline{B_0A_0}^2 : \overline{B_0A_4}^2$ ，其中 F 為 Γ 的焦點。

Proposition 7 :若在拋物線 Γ 上依序作 $\{B_k\}_{k=0}^4$ ，滿足 $\overline{B_0B_3} // \overline{B_1B_2}$ ， $\overline{B_2B_3} // \overline{B_1B_4}$ ，則 $d(L_0, L_1) = d(L_2, L_3)$ ， $d(L_1, L_2) = d(L_3, L_4)$ 。即 L_4 、 L_3 、 L_2 、 L_1 、 L_0 為交錯等距。

Theorem 4 :在一條基線上給定交錯等距的 4 個點，往平面上一點 B_0 分別以

$\frac{\left[\frac{k}{2} \right] c + \left[\frac{k+1}{2} \right] d}{d} \cdot \overrightarrow{B_0A_k} = \overrightarrow{B_kB_0}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ ， $\{B_k\}$ 與 B_0 必落在同一拋物線上，拉動 A_4 ，依 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = c : d : m$ 不同比例產生不同二次曲線。

Theorem 5 : $n \geq 3$ ，任意給定非正三角形 $\square ABC$ ，以頂點 A 、 B 、 C 分別作為線束中心，令三線束的對應方式為 $\overline{XX_k}$ 、 $\overline{YY_k}$ 的交點為 Z'_{kk} ， $X_k \in \overline{YZ}$ 且 (X, Y, Z) 為 (A, B, C) 的輪流置換，若 $\overline{AA_k}$ 、 $\overline{BB_k}$ 、 $\overline{CC_k}$ 滿足下列對應條件之一，則 A'_{kk} 、 B'_{kk} 、 C'_{kk} 、 $A'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $B'_{(n-k)(n-k)}$ 、 $C'_{(n-k)(n-k)}$ 會共橢圓 $\Gamma_{k,(n-k)}$ 。(規定 $\Gamma_{k,(n-k)} = \Gamma_{(n-k),k}$)

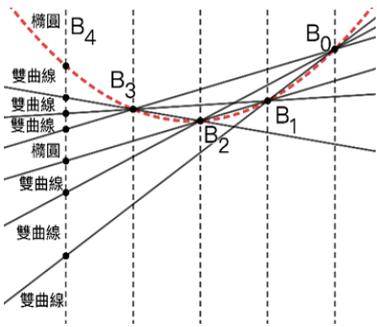
(1) $\angle A_k AB = \frac{k}{n} \angle CAB$ 、 $\angle B_k BC = \frac{k}{n} \angle ABC$ 、 $\angle C_k CA = \frac{k}{n} \angle BCA$ ， $k = 1, 2, \dots, n-1$ 。

(2) $\overrightarrow{BA_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{CB_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{AC_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{AB}$ ， $k = 1, 2, \dots, n-1$ 。

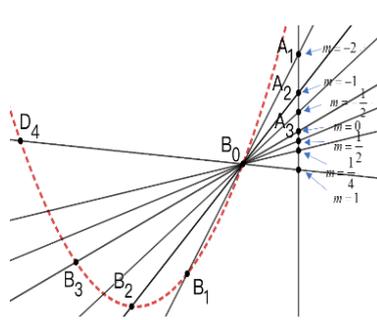
Proposition 8 :由 n 等份邊對應的橢圓 $\{\Gamma_{k,(n-k)} \mid k \in \mathbb{Q} - \{0\} \text{ 且 } k \leq [\frac{n}{2}]\}$ 會共中心 O ，且 O 亦為 $\square ABC$ 的重心 G ，其中 $n \geq 3$ 。(以 5 等分為例： Γ_{14} 、 Γ_{23} 、 Γ_{-16} 中心和 $\square ABC$ 重心會共點)

Theorem 6 :給定一相鄰等距的點列 $l(A_k)_{k=0}^4$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，以 $k \cdot \overrightarrow{A_kB_0} = \overrightarrow{B_0B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ ， $m \in \mathbb{Q}$ ，由 $\{B_k\}$ 與 B_0 構出的圓錐曲線會滿足 $\frac{\overrightarrow{M_{03}O}}{M_{12}\overrightarrow{M_{03}}} = \frac{2m^2+1}{2m-2}$ ，其中 O 為圓錐曲線的中心。(定義拋物線中心於無窮遠處)

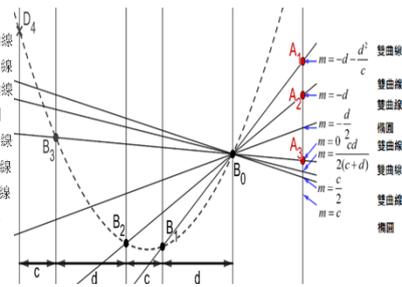
Theorem 7 :藉由改變兩線束的相對位置與兩基圓上點的角度關係生成特定的二次曲線。



Theorem 2 拉拉 move 法



Theorem 3 點列 1234shoot 法
 投射倍率 1:2:3:4



Theorem 4 交錯等距拉拉 move 法
 投射倍率 $d:(d+c):(2d+c):(2d+2c)$

四、結論與應用

(一) 研究應用

應用 1. 可透過中點連線段與神奇比例來定圓錐曲線中心：

[GGB 測試] $\vec{M_{03}O}$ 與 $\vec{M_{12}M_{03}}$ 的比值：

| | | |
|--|--|--|
| $m = 5$ | $m = -0.2$ | $m = -3$ |
| | | |
| $\vec{M_{03}O} = 12.75, \vec{M_{12}M_{03}} = 2$ | $\vec{M_{03}O} = 1.8, \vec{M_{12}M_{03}} = 4$ | $\vec{M_{03}O} = 4.75, \vec{M_{12}M_{03}} = 2$ |
| $\frac{\vec{M_{03}O}}{\vec{M_{12}M_{03}}} = \frac{12.75}{2} = 6.375 = \frac{2 \times 5^2 + 1}{2 \times 5 - 2}$ | $\frac{\vec{M_{03}O}}{\vec{M_{12}M_{03}}} = \frac{1.8}{4} = -0.45 = \frac{2 \times (0.2)^2 + 1}{2 \times (0.2) - 2}$ | $\frac{\vec{M_{03}O}}{\vec{M_{12}M_{03}}} = \frac{4.75}{2} = -2.375 = \frac{2 \times (-3)^2 + 1}{2 \times (-3) - 2}$ |

Theorem 7. 考慮滿足 $\vec{A_1A_2} : \vec{A_2A_3} : \vec{A_3A_4} = 1:1:m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及投射中心 $B_0 \notin l$ ，以 $k \cdot \vec{A_k B_0} = \vec{B_0 B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k=1,2,3,4$ ， $m \in \mathbb{R}$ ，由 $\{B_k\}$ 與 B_0 構出的圓錐曲線會滿足 $\frac{\vec{M_{03}O}}{\vec{M_{12}M_{03}}} = \frac{2m^2+1}{2m-2}$ ，其中 M_{03} 為 $\overline{B_0B_3}$ 的中點、 M_{12} 為 $\overline{B_1B_2}$ 的中點、 O 為圓錐曲線的中心。

(定義拋物線中心於無窮遠處)

(詳細證明於附錄五 P.37)

應用實例

例. 作橢圓的中心

給定一滿足 $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \overrightarrow{A_3A_4} = 1:1:\frac{5}{2}$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用

$k \cdot \overrightarrow{A_k B_0} = \overrightarrow{B_0 B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k=1, 2, 3, 4$ ，作出由 $\{B_k\}$ 與 B_0 構出之橢圓 Γ 的中心。

<已知> 任取不共線三點 A_1 、 A_2 、 B_0 ：假設 $A_1(5, 6)$ 、 $A_2(7, 4)$ 、 $B_0(0, 0)$ ，

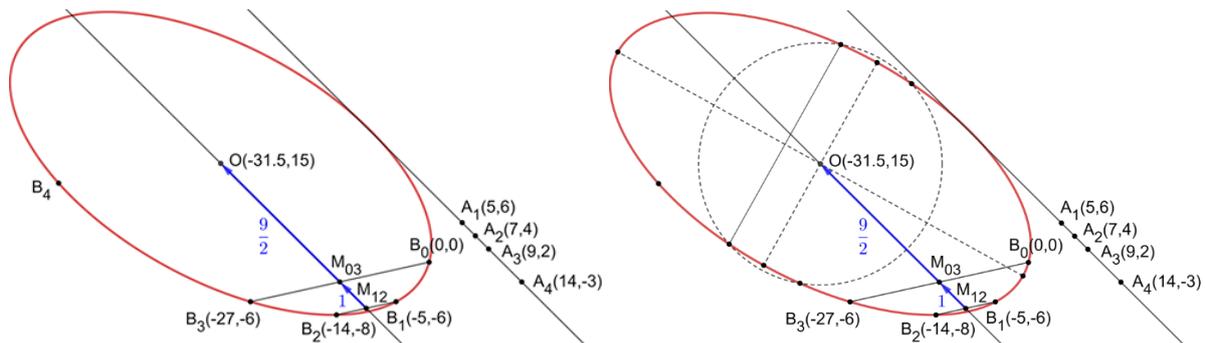
<作法>

① 由點列取法與投射比例，可得 $A_3(9, 2)$ 、 $A_4(14, -3)$ 、 $B_1(-5, -6)$ 、 $B_2(-14, -8)$ 、 $B_3(-27, -6)$

② 利用中點連線段特殊比例性質，可知 $M_{12} \overrightarrow{M_{03}} : \overrightarrow{M_{03}O} = (2 \cdot \frac{5}{2} - 2) : (2(\frac{5}{2})^2 + 1) = 3 : \frac{27}{2} = 1 : \frac{9}{2}$ ，

利用分點公式，得 $M_{03}(\frac{-27}{2}, -3)$ 與 $M_{12}(-\frac{19}{2}, -7)$ ，並將 $M_{12} \overrightarrow{M_{03}}$ 伸縮 $\frac{9}{2}$ 倍，得到 Γ 的中心 O 點

$(-\frac{63}{2}, 15)$ ， O 點即為所求。#



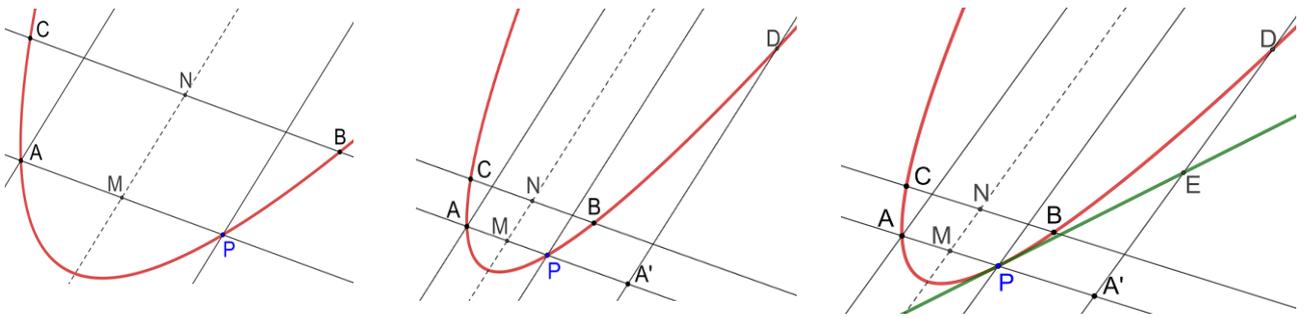
<驗證> 以圓錐曲線中心 O 為圓心，適當長為半徑作圓，交 Γ 於四點，作出長短軸，確定 O 點確實為此橢圓之中心。

應用結論： 一般要得到圓錐曲線中心，若是有圓錐曲線的方程式時，需要透過旋轉平移方程式再經過大量運算而得；若是有圓錐曲線的圖形，則需要透過平行弦中點連線性質作圖而得到。但是由我們的『中點連線段特殊比例性質』，卻不必描繪出曲線圖形，可以直接透過『分點公式』輕鬆計算而得到圓錐曲線的中心座標！

應用 2. 作過拋物線上「任意點」 P 的切線

這裡所使用到的觀念為 Proposition 5 「 $\overline{A_0B_0}$ 為拋物線切線的結果」，以下為其應用：

- ① 作出平行軸方向的直線：在 Γ 上作平行弦 $\overline{PA} // \overline{BC}$ ，分別取其中點 M 、 N 連線，得 \overline{MN} 。
- ② 作 A 對 P 的對稱點 A' ，作過 A' 且平行 \overline{MN} 的直線，其交拋物線於 D 。
- ③ 作 A' 、 D 中點 E 並連線 P 、 E ，則 \overline{PE} 為拋物線過 P 的切線。

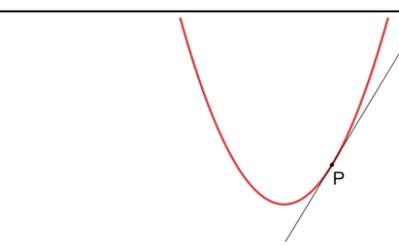
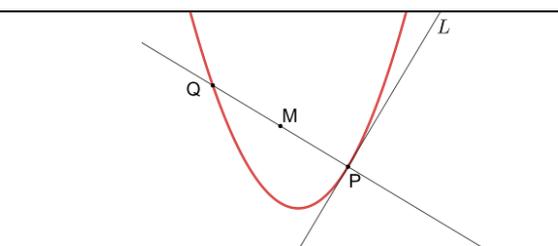
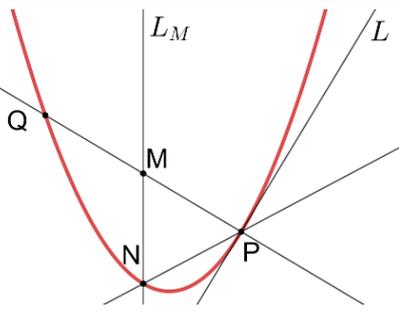
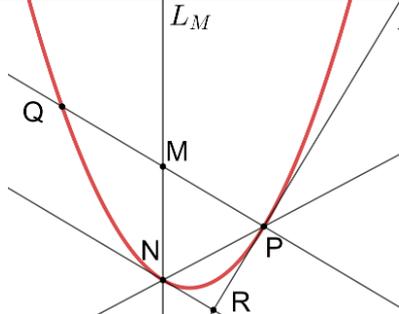
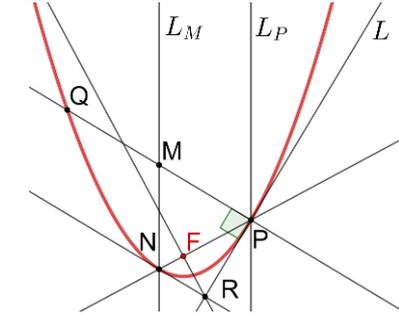


< proof > 將 P 點視為 B_0 ， A 點視為 B_1 ，則 $\overline{A'D}$ 為 A 點列且 A' 可視為 A_1 ， D 可視為 A_1 。因此 E 可視為 A_0 ，由 Proposition 5. 可知 $\overline{A_0B_0}$ 為切線，即 \overline{EP} 為 Γ 過 P 的切線。#

應用 3. 作任意拋物線的焦點與準線：

【法 1】：利用應用 1 提到的「作拋物線上過任意一點的切線」和「拋物線的光學性質」可以作出兩焦弦，而兩焦弦的交點即為焦點

【法 2】：結合「作拋物線上過任意一點的切線」和「作特定拋物線的焦點和準線」並推廣

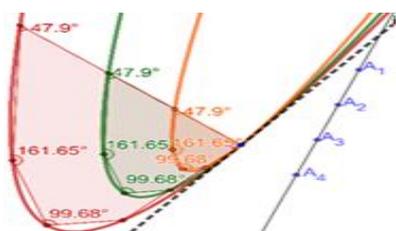
| | | |
|---|---|---|
| <p>1. 利用「作拋物線上過任意一點的切線」可以作出過 P 的切線 L 和平行於軸的線 L_P</p>  | <p>2. 在拋物線上找異於 P 的一點 Q 使得 \overline{PQ} 垂直 L，並作 P、Q 中點 M</p>  | |
| <p>3. 過 M 作平行軸的直線 L_M 交拋物線於 N，連線 P、N</p>  | <p>4. 作 \overline{NR} 垂直 L 於 R</p>  | <p>5. 作 \overline{FR} 垂直 \overline{PN} 於 F，則 F 即為所求</p>  |

【法 2】（詳細說明於附錄六 P.38）

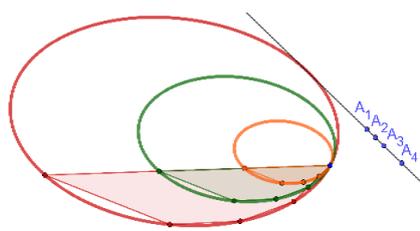
應用 4. 固定一點列，若伸縮倍率成比例，則可製造相似的圓錐曲線：

考慮滿足 $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} = 1 : n : m$ 的點列 $l(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 及一投射中心 $B_0 \notin l$ ，利用

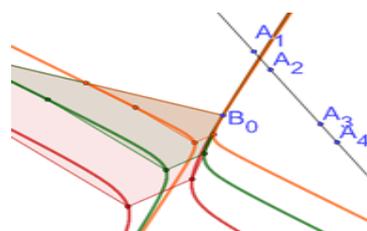
$k \cdot \overline{A_k B_0} = \overline{B_0 B_k}$ 的投射方式得 $\{B_k\}$ ， $k = \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \frac{3}{r}, \frac{4}{r}$ ， $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ ，由 $\{B_k\}$ 構之圓錐曲線彼此相似。



$n = m = 1$ 3 梯五點形相似



$m > n = 1$ 1 梯五點形相似



$n > m = 1$ 0 梯五點形相似

(二) 結論

我們的研究主要是提供**製造圓錐曲線的新方法**。第一，是在五條平行線上，利用三梯五點形製造拋物線，再固定其中四點，移動第五個點來製造二次曲線；第二，利用一點列與投射點，再加上特定投射倍率，可以製造出各特定圓錐曲線，而在這種製造方式中，我們還得到**非常神奇的『定中心的比例』**，不用透過旋轉與平移，只需利用分點公式就可以輕鬆得到曲線中心，另外，我們還給出新的可以製造任意拋物線的切線、焦點與準線的快速方法；第三，對極度複雜的二線束中心、二基線、二基圓的相對位置與對應方式來作分類二次曲線，從線束觀點得到圓錐曲線「再進行分類」，是從來沒有人研究過，而且證明過程中挾帶許多未知數，證明的整理簡化著實不易。最後，我們定義出三線束的對應方式，發現有六點共橢圓性質，未來，我們希望能對 n 個線束對應再做更進一步的探討，並且將線束的對應推廣至三維空間。另外，我們希望對於每個定理有「定量」的結果，這是正在努力的目標。

五、參考文獻

1. 朱德祥、朱維宗(2007)。高等幾何。高等教育出版社。
2. (德)德里(1982)。100 個著名初等數學問題。凡異出版社。
3. 游森棚(民 108)。普通高中數學課本第三、第四冊。翰林出版社。

六、附錄

(一) Theorem7 雙基圓 shoot 法：

定義 (5) (基圓對應的翻與不翻、正逆對應關係)

兩等圓 O_A 、 O_L 上四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 、四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ 滿足 $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_2 A_3}$ ， $\overline{L_1 L_2} = \overline{L_2 L_3}$ 且

$\angle A_1 P_A A_3 = \angle L_1 P_L L_3$ 。固定一基圓，使得另一基圓平行移動至兩圓心 O_A 、 O_L 重合，令此時的

$\angle A_2 O_A L_2 = \alpha$ ， $\varphi = \angle A_2 O_A P_A$ ， $k = 1, 2, 3$ ，兩線束中心為 P_A 、 P_L ，則定義對應關係如下：

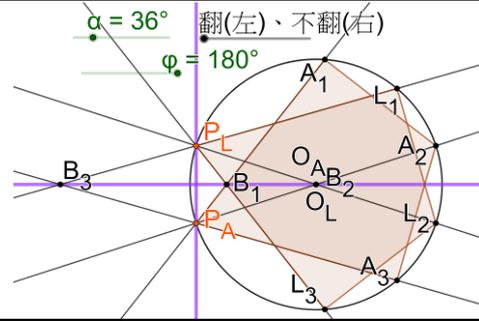
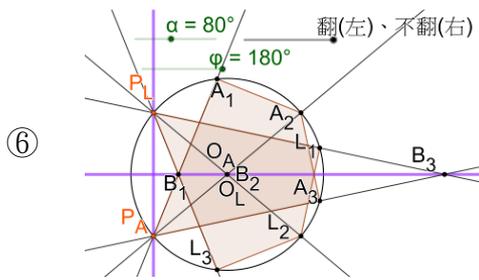
| | | | |
|---|---|--|----------------|
| 正對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_k}$ 之交點。 | | 逆對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_{4-k}}$ 之交點。 | |
| 未翻：四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3 \cong$ 四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ | | 翻： P_L 對 $\overline{O_A A_2}$ 作線對稱得 P_L' ，四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3 \cong$ 四邊形 $P_L' L_1 L_2 L_3$ 。 | |
| | | | |
| 兩基圓投射 | 翻 | 未翻 | 基圓的夾角 α |

Theorem 6(雙基圓 Shoot 法) 兩等圓 O_A 、 O_L 上四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 、四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ 滿足 $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_2 A_3}$ ， $\overline{L_1 L_2} = \overline{L_2 L_3}$ 且 $\angle A_1 P_A A_3 = \angle L_1 P_L L_3$ 。兩線束中心為 P_A 、 P_L ， $\{A_k\}_{k=1}^3$ 、 $\{L_k\}_{k=1}^3$ 分別在兩等圓 O_A 、 O_L 上順時針排列。

以下為兩線束 $P_A(\overline{P_A A_k})_{k=1}^3$ 、 $P_L(\overline{P_L L_k})_{k=1}^3$ 所對應的 $\{B_k\}$ 圖形分類：

case1°雙基圓不重合

| | 正對應 | 逆對應 |
|-----|---|---|
| 未 | ① $\alpha \neq 0^\circ$ 或 180° ：圓 | ⑤ $\varphi \neq 180^\circ$ ：等軸雙曲線 |
| 翻 | ② $\alpha = 0^\circ$ 或 180° ：無圖形 | ⑥ $\varphi = 180^\circ$ ：兩垂直直線 ⑦ $\alpha = \varphi$ ：無圖形 |
| 翻 | ③ $\alpha + \varphi \neq 180^\circ$ ：圓 ④ $\alpha + \varphi = 180^\circ$ ：無圖形 | ⑧ $\varphi \neq 180^\circ$ ：兩垂直直線 ⑨ $\varphi = 180^\circ$ ：無圖形 |
| | 未翻 | 翻 |
| 正對應 | ① $\alpha = 115^\circ$ ， $\varphi = 94^\circ$ 翻(左)、不翻(右) | ③ $\alpha = 115^\circ$ ， $\varphi = 94^\circ$ 翻(左)、不翻(右) |
| 逆對應 | ⑤ $\alpha = 80^\circ$ ， $\varphi = 90^\circ$ 翻(左)、不翻(右) | ⑧ $\alpha = 115^\circ$ ， $\varphi = 94^\circ$ 翻(左)、不翻(右) |



case2° 雙基圓重合

| 分類 | 正對應 | 逆對應 |
|----|---|---|
| 未翻 | ⑩ $\alpha \neq 0^\circ$ 或 180° : 圓 ⑪ $\alpha = 0^\circ$ 或 180° : 無圖形 | ⑭ $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線 ⑮ $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 等軸雙曲線 |
| 翻 | ⑫ $\alpha + \varphi \neq 180^\circ$: 圓 ⑬ $\alpha + \varphi = 180^\circ$: 無圖形 | ⑯ $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線 ⑰ $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 等軸雙曲線 |

| | 未翻 | 翻 |
|-----|--|--|
| 正對應 | ⑩ $\alpha = 55^\circ$ $\varphi = 54^\circ$ 翻(左)、不翻(右) | ⑫ $\alpha = 55^\circ$ $\varphi = 54^\circ$ 翻(左)、不翻(右) |
| 逆對應 | ⑭ $\alpha = 120^\circ$ $\varphi = 120^\circ$ 翻(左)、不翻(右) | ⑯ $\alpha = 120^\circ$ $\varphi = 120^\circ$ 翻(左)、不翻(右) |
| | ⑮ $\alpha = 93^\circ$ $\varphi = 127^\circ$ 翻(左)、不翻(右) | ⑰ $\alpha = 93^\circ$ $\varphi = 127^\circ$ 翻(左)、不翻(右) |

< proof of Theorem 7 >

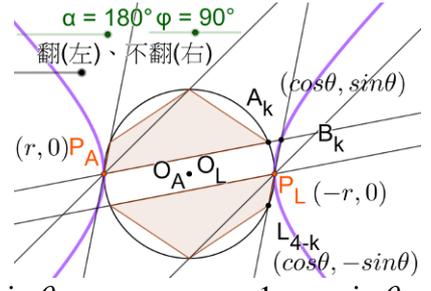
(1). 未翻逆對應 — $\varphi \neq \pi$ 、雙基圓重合 (case ⑤)

設圓心 $O_A = O_L$ 座標為 $(0,0)$ 、 $P_A(r,0)$ 、 $P_L(-r,0)$ 、

$A_k(\cos\theta, \sin\theta)$ 、 $L_{4-k}(\cos\theta, -\sin\theta)$ 、

可得 $\overline{P_A A_k} : y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}x - \frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}$ ， $\overline{P_L L_{4-k}} : y = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta+1}x - \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}$ ，解出 $B_k(\frac{1}{\cos\theta}, \frac{-\sin\theta}{\cos\theta})$ ，

會落在等軸雙曲線 $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$ 上。#



(2). 翻正對應 — $\alpha + \varphi \neq \pi$ 、雙基圓不重合 (case ②)

$\therefore \angle B_2 P_L B_1 = \angle L_2 P_L L_1$ (對頂角)，

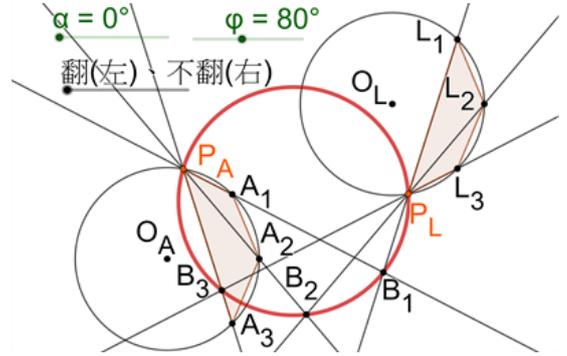
$\angle L_2 P_L L_1 = \angle A_2 P_A A_1$ (點列與線束中心皆等角)，

$\therefore \angle B_2 P_L B_1 = \angle A_2 P_A A_1$ ，

四邊形 $P_A P_L B_1 B_2$ 中 $\therefore \angle B_2 P_L B_1 = \angle A_2 P_A A_1$ ，

$\therefore P_A P_L B_1 B_2$ 四點共圓。同理可證 $P_A P_L B_2 B_3$ 四點共圓，

由 $P_A P_L B_1 B_2$ 四點共圓、 $P_A P_L B_2 B_3$ 四點共圓，可得 $P_A P_L B_1 B_2 B_3$ 五點共圓。#



(3). 翻逆對應 — $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$ 、雙基圓不重合 (case ⑦)

設 $O_A(a,b)$ 、 $O_L(-a,-b)$ 、基圓半徑 $r=1$ 、 $\angle A_2 O_A A_3 = \theta$ ，

可得 $L_k(-a + \cos(\frac{\alpha}{2} - (2-k)\theta), -b - \sin(\frac{\alpha}{2} - (2-k)\theta))$ 、

$A_k(a + \cos(\frac{\alpha}{2} + (2-k)\theta), b + \sin(\frac{\alpha}{2} + (2-k)\theta))$ ， $k=1,2,3$ ，

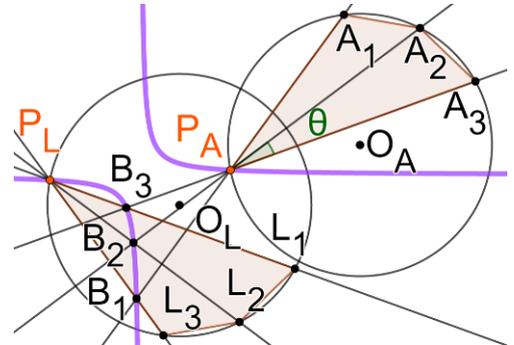
$P_A(a + \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi), b + \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi))$ 、 $P_L(-a + \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi), -b - \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi))$ ，

此時漸近線恆垂直且曲線中心 O 也是 P_A 、 P_L 的中點，故 $O(\cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi), 0)$ 。

又兩漸近線的方向向量和 x 、 y 軸分別平行，寫出兩漸近線相乘後解得等號右邊的常數，

故雙曲線方程式為 $[x - \cos(\frac{\alpha}{2} + \varphi)]y = a[b + \sin(\frac{\alpha}{2} + \varphi)]$ ，再代入 B_1 、 B_2 、 B_3 、 P_L 發現其確實也

會落在其上。# [未翻逆對應 — $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$ (case ③) 也可以由類似的方法證明]



(二) 雙基圓進化版：

在 Thm.1 中，翻與不翻的情況太過類似，所以我們再做簡化，改變線束中心的位置，將原本於基圓上的線束中心改成在基圓圓心上，也就是簡化了翻與不翻的情況，雖然使用這種方式分類所得到的結果會較為簡潔，可是為了使 Theorem 7 的兩個全等基圓與 Theorem 1 的兩個全等三角形有更強的連結，方便我們比較它們的差異性，因此我們還是留下翻與不翻等情況：

定義 (6) (基圓對應與正逆對應關係)

以兩相異點 P_A 、 P_L 為圓心分別做兩等圓，在兩圓上各取順時鐘排列的相異點 A_1 、 A_2 、 A_3 和 L_1 、 L_2 、 L_3 ，滿足 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{L_1L_2} = \overline{L_2L_3}$ ，令 $\vec{v}_A = \overrightarrow{P_A A_2}$ 、 $\vec{v}_L = \overrightarrow{P_L L_2}$ 、 α 為 \vec{v}_A 與 \vec{v}_L 之夾角，則定義對應關係如下：

| | | | |
|---|-----|---|---------------|
| 正對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_k}$ 之交點。 | | 逆對應： B_k 為 $\overline{P_A A_k}$ 與 $\overline{P_L L_{4-k}}$ 之交點。 | |
| | | | |
| 雙基圓 Shoot 法 | 正對應 | 逆對應 | 基圓夾角 α |

Theorem 7.1(雙基圓 Shoot 法 2.0) 兩等圓 P_A 、 P_L 上四邊形 $P_A A_1 A_2 A_3$ 、四邊形 $P_L L_1 L_2 L_3$ 滿足 $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_2 A_3} = \overline{L_1 L_2} = \overline{L_2 L_3}$ ，且 $\{A_k\}_{k=1}^3$ 、 $\{L_k\}_{k=1}^3$ 分別在兩等圓 O_A 、 O_L 上順時針排列。

| 正對應 | 逆對應 | |
|---|--|---|
| ① $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_L$: 圓 | ③ $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 等軸雙曲線 | |
| ② $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_L$: 無圖形 | ④ $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線 | |
| ① | ③ | ④ |

<proof of Theorem 7.1>

1. 正對應 — $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_L$ (case①)

$\because \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{L_1L_2} = \overline{L_2L_3}$ 且 $\{A_k\}_{k=1}^3$ 、

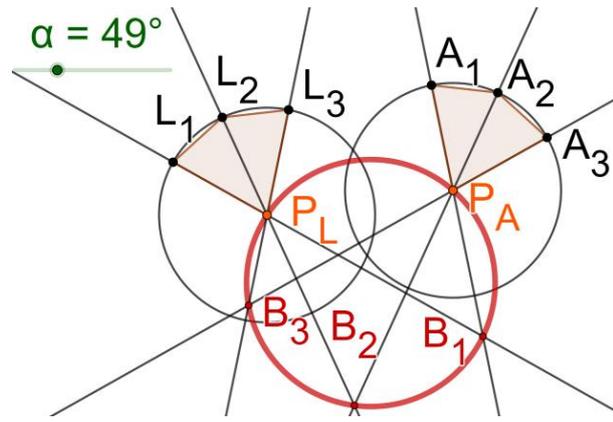
$\{L_k\}_{k=1}^3$ 在圓上都是順時鐘排列，

$\therefore \overrightarrow{P_A A_1}$ 和 $\overrightarrow{P_L L_1}$ 的夾角等於 $\overrightarrow{P_A A_2}$ 和 $\overrightarrow{P_L L_2}$ 的

夾角也等於 $\overrightarrow{P_A A_3}$ 和 $\overrightarrow{P_L L_3}$ 的夾角，也就是說

$$\angle P_A B_1 P_L = \angle P_A B_2 P_L = \angle P_A B_3 P_L,$$

可得 $P_A B_1 B_2 B_3 P_L$ 五點共圓。#



正對應 $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_L$

2. 逆對應 — $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$ (case③)

設 $P_A(a, b)$ 、 $P_L(-a, -b)$ 、

$$\angle A_1 P_A A_2 = \angle A_2 P_A A_3 = \angle L_1 P_L L_2 = \angle L_2 P_L L_3 = \theta,$$

$$\overline{P_A A_2}: y - b = m(x - a), \quad \overline{P_A A_3}: y + b = -m(x + a),$$

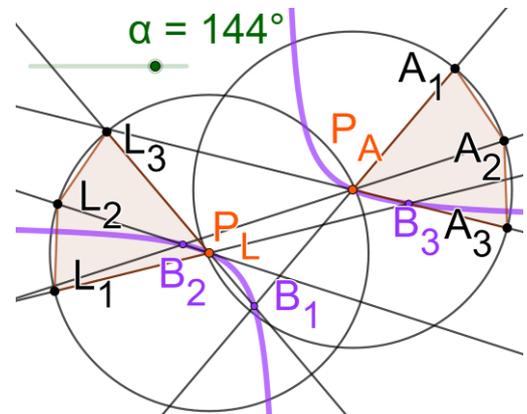
$$\text{則 } \overline{P_A A_1}: y - b = \frac{m + \tan \theta}{1 - m \tan \theta}(x - a),$$

$$\overline{P_L L_1}: y + b = \frac{-m + \tan \theta}{1 + m \tan \theta}(x + a),$$

$$\overline{P_A A_3}: y - b = \frac{m - \tan \theta}{1 + m \tan \theta}(x - a), \quad \overline{P_A A_2}: y + b = \frac{-m - \tan \theta}{1 - m \tan \theta}(x + a),$$

$$\text{解出 } B_1\left(\frac{1 - m \tan \theta}{-m - \tan \theta}b, \frac{-m - \tan \theta}{1 - m \tan \theta}a\right), \quad B_2\left(\frac{1}{-m}b, -ma\right), \quad B_3\left(\frac{1 + m \tan \theta}{-m + \tan \theta}b, \frac{-m + \tan \theta}{1 + m \tan \theta}a\right),$$

將 B_1 、 B_2 、 B_3 、 P_A 、 P_L 代入二次曲線一般式，解得方程式為 $xy = ab$ 。



逆對應 $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$

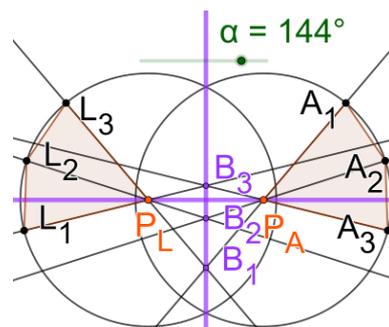
3. 逆對應 — $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$ (case④)

利用上一個證明的假設，因為 $B_2\left(\frac{1}{-m}b, -ma\right)$

會落在 P_A 、 P_L 的中垂線 $ax + by = 0$ 上，

代入後得到 $ab\left(m + \frac{1}{m}\right) = 0$ ，解出 $a = 0$ 或

$b = 0$ ，則兩垂直直線的方程式為 $xy = 0$ 。

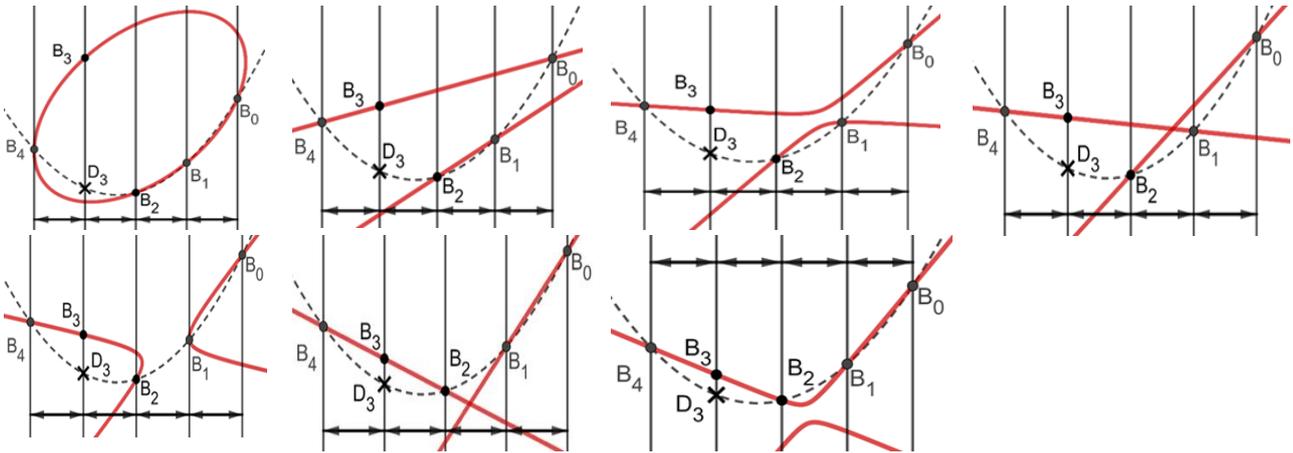


逆對應 $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$

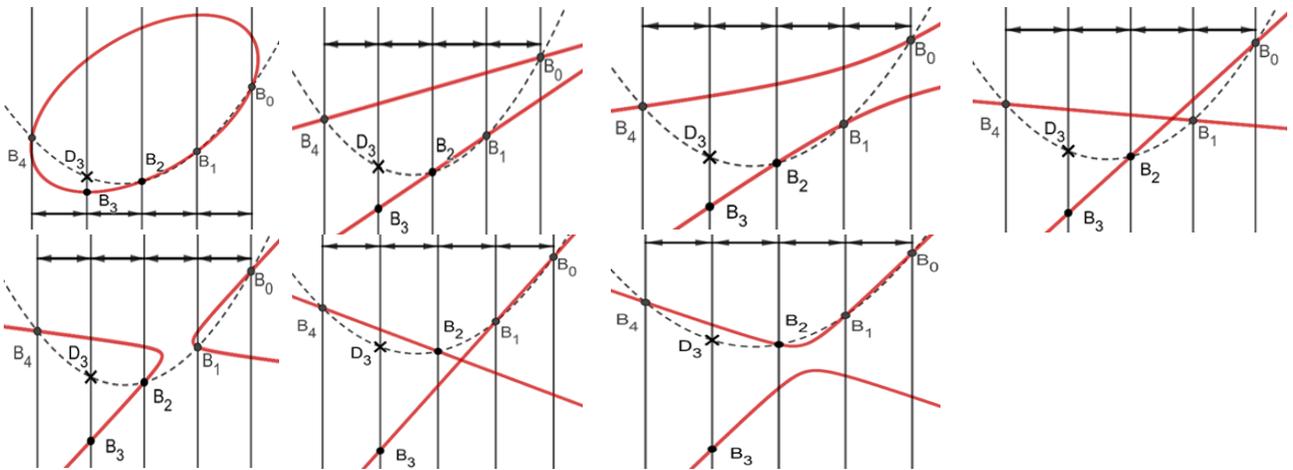
(三) 拉拉 move 法拉動 B_3 的詳細結果：

在研究 **Theorem1** 時，我們發現不一定要移動 B_4 ，只要固定四點移動第五個點也會有類似的結論，下表是固定 B_0 、 B_1 、 B_2 、 B_4 ，移動 B_3 的結論：

1. 當 B_3 位於 D_3 之上：



2. 當 B_3 位於 D_3 之下：



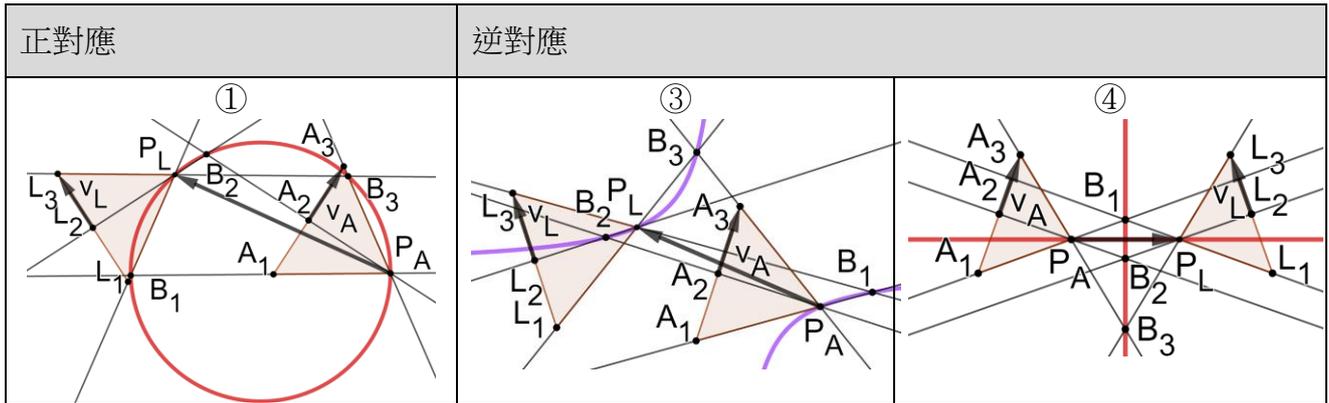
(四) 利用「等腰」簡化全等雙線束：

我們發現在非等腰三角形與等腰三角形的情形在正對應的部分是相同的，是因為

$\square A_1A_2P_A \cong \square A_3A_2P_A$ ， $\square L_1L_2P_L \cong \square L_3L_2P_L$ ，導致未翻正對應和翻逆對應的結果相同，而翻正對應和未翻逆對應的結果相同，也就是完全避免掉「逆對應」的討論，以下為兩線束對應的圖形分類結論：

| 正對應 | 逆對應 |
|---|--|
| ③ $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_L$: 圓 ② $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_L$: 無圖形 | ③ $\overline{P_A B_2} \neq \overline{P_L B_2}$: 雙曲線 ④ $\overline{P_A B_2} = \overline{P_L B_2}$: 兩垂直直線 |

<說明>



(五) 可透過中點連線段與神奇比例來定圓錐曲線中心：

<proof >

case 1° 當 $m \neq 1$:

設 B_0 為原點， $A_1(k, p)$ 、 $A_2(k, q)$ ，

由 $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} = 1 : 1 : m$ ， $m \in \mathbb{Q}$ 且 $m \neq 1$ ，得

$A_3(k, 2q - p)$ 、 $A_4(k, (2+m)q - (1+m)p)$ ，又因投射倍率為

1、2、3、4 倍，可知 $B_1(-k, -p)$ 、 $B_2(-2k, -2q)$ 、 $B_3(-3k, 3p - 6q)$ 、 $B_4(-4k, 4(1+m)p - 4(2+m)q)$ ，

因只有 A_4 在移動，由向量證明(P.12)可知 $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{B_0B_3}$ ，

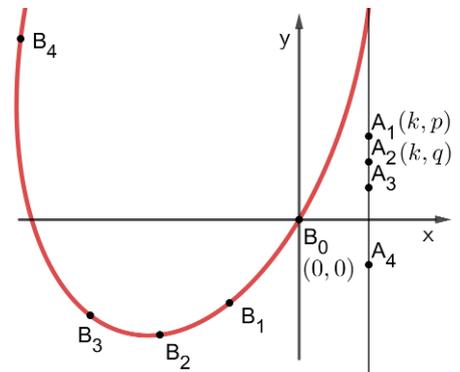
再使用 Lemma 2 圓錐曲線平行弦中點連線性質，得到 O 之 x 座標為 $\frac{-k - 2k}{2} = -\frac{3}{2}k$ ，

將 $\{B_k\}$ 代入二次曲線一般式 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，

$$\begin{cases} Ak^2 + Bkp + Cp^2 - Dk - Ep = 0 \\ 4Ak^2 + 4Bkq + 4Cq^2 - 2Dk - 2Eq = 0 \\ 9Ak^2 + 9Bk(2q - p) + 9C(2q - p)^2 - 3Dk - 3E(2q - p) = 0 \\ 16Ak^2 + 16Bk[(2+m)q - (1+m)p] + 16C[(2+m)q - (1+m)p]^2 - 4Dk - 4E[(2+m)q - (1+m)p] = 0 \end{cases},$$

又因圓錐曲線方程式可寫成 $A(x-u)^2 + B(x-u)(y-v) + C(y-v)^2 + f = 0$ ，其中 (u, v) 為中心 O 之座標，即 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (-2Au - Bv)x + (-2Cv - Bu)y + Au^2 + Cv^2 + Buv + f = 0$ ，

比較係數可得： $2Au + Bv = -D$ ，因為 $u = -\frac{3}{2}k$ ，所以 $v = \frac{-D + 3Ak}{B}$ 。



$$\begin{cases} Bkp + Cp^2 - Dk - Ep = -Ak^2 \\ 4Bkq + 4Cq^2 - 2Dk - 2Eq = -4Ak^2 \\ 9Bk(2q-p) + 9C(2q-p)^2 - 3Dk - 3E(2q-p) = -9Ak^2 \\ 16Bk[(2+m)q - (1+m)p] + 16C[(2+m)q - (1+m)p]^2 - 4Dk - 4E[(2+m)q - (1+m)p] = -16Ak^2 \end{cases},$$

利用克拉瑪公式可得：

$$\Delta = 48k^2(q-p)^2(4m^2q^2 + 6mq^2 - 4q^2 - 8m^2pq - 8mpq + 4pq + 4m^2p^2 + 3mp^2 - p^2),$$

$$\Delta_B = -96Ak^3(m-1)(q-p)^2(2q-p),$$

$$\Delta_D = 96Ak^3(q-p)^3(2m^2q + 3mq - 2q - 4m^2p - 3mp + p),$$

$$\text{代入 } v = \frac{-D + 3Ak}{B} = \frac{-\Delta_D + 3Ak\Delta}{\Delta_B} = \frac{-4m^2q - 6mq + 4q + 4m^2p + 3mp - p}{2m-2},$$

$$\text{因此 } O\left(-\frac{3}{2}k, \frac{-4m^2q - 6mq + 4q + 4m^2p + 3mp - p}{(2m-2)}\right), \text{ 所以 } M_{12}\vec{M}_{03} = \left(0, \frac{3p-6q}{2} - \left(\frac{-p-2q}{2}\right)\right) = (0, 2(p-q)),$$

$$\vec{M}_{03}O = \left(0, \frac{-4m^2q - 6mq + 4q + 4m^2p + 3mp - p}{2m-2} - \left(\frac{3p-6q}{2}\right)\right) = \left(0, \frac{2(p-q)(2m^2+1)}{2m-2}\right),$$

$$\vec{M}_{03}O : M_{12}\vec{M}_{03} = \left(\frac{2(p-q)(2m^2+1)}{2m-2}\right) : 2(p-q) = \frac{2m^2+1}{2m-2} : 1 = (2m^2+1) : (2m-2).$$

case2° 當 $m=1$:

$$\text{則 } \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} = 1:1:1, \text{ 得出對應的 } \{B_k\} \text{ 會構成拋物線, 此時 } \frac{\vec{M}_{03}O}{M_{12}\vec{M}_{03}} = \frac{2m^2+1}{2m-2} \text{ 之分母為}$$

0, 可視為拋物線中心於無窮遠處。故此結論於求「三種圓錐曲線」中心皆會成立！#

(六) 作任意拋物線的焦點與準線<法二>

1. 由「作特定拋物線的焦點和準線」可知當 $\angle A_0B_0A_4 = 90^\circ$, 也就是 $\overline{A_0B_0}$ 垂直 $\overline{B_0B_4}$ 時,

$\overline{B_0B_2}$ 會是焦弦, 而且 $\overline{A_0B_0}$ 又會是拋物線過 B_0 的切線, 所以我們推得一個結論:

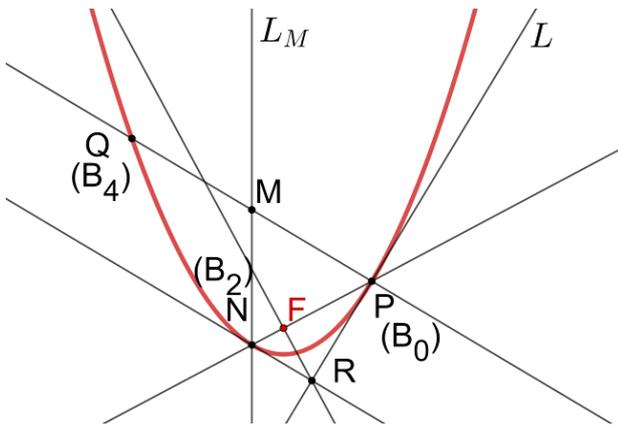
「當拋物線過 B_0 的切線垂直 $\overline{B_0B_4}$ 時, $\overline{B_0B_2}$ 會是焦弦」。

2. 所以我們先在拋物線上取任意一點 P 將其視為 B_0 , 利用「作拋物線上任意一點的切線」可以作出拋物線過 P 的切線和法線, 而法線會交拋物線於另一點 Q , 我們將其視為 B_4 。

3. 因為過 B_2 平行軸的線會交 $\overline{B_0B_4}$ 於 B_0 、 B_4 中點, 所以可以作 P 、 Q 中點 M , 再作過 M 平行於軸的直線 L_M 交拋物線於 N , 我們將其視為 B_2 。

4. 因為拋物線焦弦的極點和焦點的連線會垂直於焦弦，所以我們希望找到 \overline{PN} 的極點，再作過此極點垂直 \overline{PN} 的直線，則此線會交 \overline{PN} 於焦點。

5. 另外，作拋物線過 N 的切線時不必利用「作拋物線上過任意一點的切線」，因為「拋物線焦弦兩端點的切線會互相垂直」，所以可以直接作 \overline{NR} 垂直 L 於 R 。



【評語】 010042

本文的主要結果是分析了多種能產生圓錐曲線的幾何構造方式，對於每一種建構方式，分析了何時能產生哪一類的曲線，並有一些定量的結果，整體來說是相當用心的作品。幾何上來看，除了原始的定義外，在若干條件下動點軌跡能造成圓錐曲線的方式甚多，本作品相當於探討了一些能使得軌跡為圓錐曲線的方式。然而也因有多種構造方式，使得作品的結論略為瑣碎，是美中不足之處。此外，文中許多的結果若用射影幾何來處理，可以更加簡潔，結論也會更自然。建議可以往此方向發展，會對本問題有更深的認識。