

2021 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010039

參展科別 數學

作品名稱 複數平面解析應用-探討旋轉三角形對西姆松
線交點軌跡之影響

就讀學校 臺北市立大同高級中學

指導教師 談得聖、李承修

作者姓名 洪嘉佑、彭昇禾、汪俞宏

關鍵詞 西姆松線、軌跡方程式、複數解析幾何

作者簡介



我是洪嘉佑(右)，目前就讀市立大同高中二年級。從小就對於數學感興趣，平常也會嘗試研究或思考一些有趣的數學問題，高一加入數學班，學到了很多數學技巧，高二時開始正式做專題研究，在專題研究的過程中也學到和發現了很多原本不知道或不了解的數學。在這次的科展比賽，能和一樣熱愛數學的同儕一起互相切磋，學習更多原本不懂的新知識。

我是彭昇禾(中)，我目前就讀大同高中二年級，從小時候可是我對數學就有著極高的興趣，無論是課程中的題目、課外接觸到的題目，我願意去嘗試、去思考，而在升上高中後也很幸運的進入數學專修班，得到了更多學習數學、探討數學的機會。而在高二開始專題研究後，更加投入於研究數學，在和同學的相互合作下進入國際科展，希望在往後的研究之路也能繼續延續。

我是汪俞宏(左)，目前就讀市立大同高級中學，我喜歡探究各種問題，特別偏好數學問題，在老師說明各式各樣有趣的數學問題時，我常常沉迷於其中，這次的研究也一樣，從剛接觸時便覺得很特別，也開始持續探究，在老師的帶領和同學間的討論過程中，我逐漸發現數學的美好之處，並學習新的數學解析方法。

摘要

在三角形的外接圓上取一點，作其對三角形三邊的垂足，此時這三個垂足會共線，稱為西姆松線。本研究主要探討的問題為：當三角形以其外心旋轉 180° 時（我們稱之為對徑三角形），將此外接圓上一動點 P 對兩對徑三角形分別做西姆松線，我們想研究當 P 點在外接圓上轉動時，兩西姆松線的交點軌跡為何。我們將西姆松線放在複數平面上來分析，這兩條西姆松線會互相垂直，並且它們的交點軌跡為一橢圓。此橢圓會相切於兩對徑三角形的六條邊，因此我們將此橢圓稱作這兩對徑三角形的「六點橢圓」，並探討這個橢圓的性質。

Abstract

Given a triangle and a point on its circumcircle, and asked to draw perpendicular lines from the three vertices of the triangle. When the three perpendicular feet are collinear, the line which passes through these perpendicular feet is called the Simson line. The focus of our research is as follows : when the triangle rotates 180 degrees about its circumcenter, which we call it an antipodal triangle, let P be a movable point on its circumcircle, and draw two Simson lines with P and the two antipodal triangles. We study the trace of the intersection of the two Simson lines when P is moving on the circumcircle. We analyzed the properties of the Simson line on the complex plane, and found that the two Simson lines are perpendicular to each other. Furthermore, the trace of their intersection is an ellipse. This ellipse is tangent to all the sides of the two antipodal triangles. Thus, we call this ellipse the “six-pointed ellipse” of the two antipodal triangles, and discuss the properties of this ellipse.

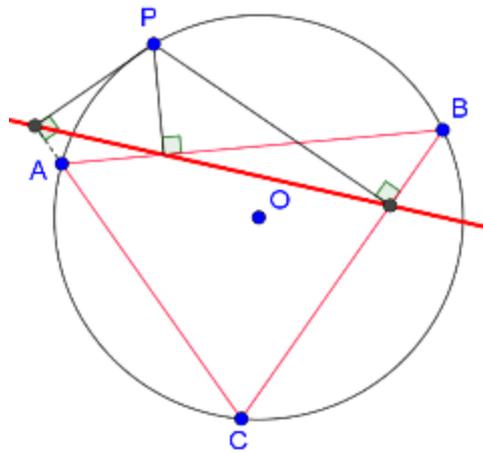
壹、前言

一、研究動機

有次老師在課堂中提及了西姆松線定理的內容，該定理的敘述如下：

西姆松定理：

平面上對任意一 $\triangle ABC$ ，有一動點 P ，若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，則 P 對此三角形三邊上的垂足（投影點）共線。（稱此直線為西姆松線）



圖一

在聽完此定理後，我們覺得十分有趣，便開始著手用 GGB 畫出西姆松線（如圖一），並且尋找了相關的性質，其中令我們印象最深刻的是西姆松線與三角形的九點圓竟然會有關聯，這激發了我們的好奇心，我們的研究之旅也就此展開。

二、研究目的及問題

本研究有別於常見的幾何方法，運用了複數平面解析的方式來深入了解西姆松線的性質與推廣，我們欲研究的問題如下：

(一) 了解複數平面直線方程式之性質

1-1. 在複數平面上給定兩點求直線方程式

1-2. 判斷複數平面上直線方程式的斜率

(二) 將複數平面解析應用在西姆松線問題上

2-1. 求出西姆松線在複數平面上的直線方程式。

2-2. 將三角形的三頂點旋轉，探討旋轉前後的兩西姆松線夾角會如何變化？

- 2-3. 給定一三角形及其對徑三角形，和外接圓上一點 P ，令 P 對兩三角形分別做西姆松線，此時兩西姆松線之交點軌跡為何？
- 2-4. 探討在目的 2-3 所得之交點軌跡的性質。
- 2-5. 用複數解析來證明西姆松線相關定理。

三、研究工具

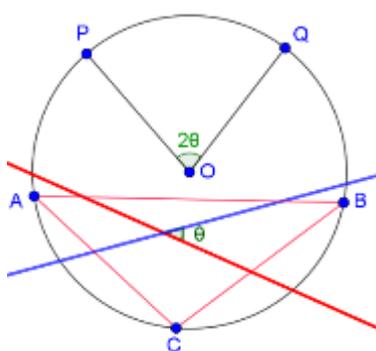
紙、筆、電腦、幾何軟體 Geogebra。

貳、研究方法或過程

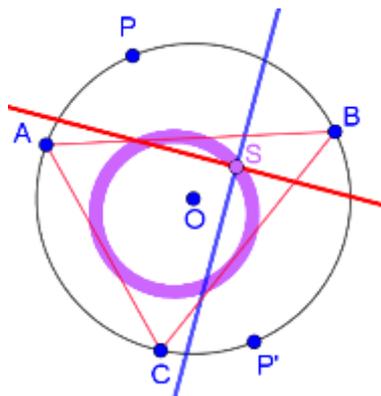
一、文獻探討

西姆松線已有兩百多年的歷史，在廣泛的研究後也衍伸出許多相關的性質，例如：

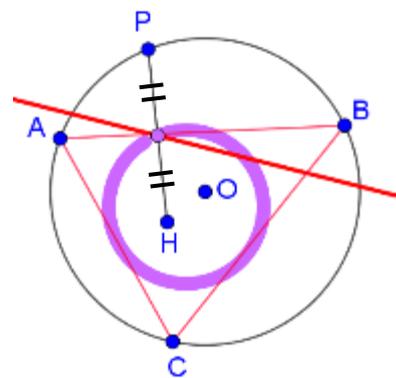
- (一) 在 $\triangle ABC$ 外接圓上之相異兩點 P 、 Q ，分別對此三角形作兩條西姆松線，兩條西姆松線之夾角會等於 $\angle POQ$ 的一半，如(圖二)所示。
- (二) 外接圓上一點 P 與其對徑點 P' ，此兩點對三角形作的兩條西姆松線之交點軌跡為三角形的九點圓，如(圖三)所示。
- (三) 外接圓上一點 P 與三角形的垂心 H 連成 \overline{PH} 線段，此線段會被 P 所作之西姆松線平分，且此線段與西姆松線之交點必在 $\triangle ABC$ 九點圓上。如(圖四)。



圖二



圖三



圖四

在過去眾多的研究當中，大部分的證明都是使用幾何證明，因代數方法所得到的西姆松線相當複雜，如在「三角形形狀與西姆松線及三尖內擺線之關係探討」這篇研究中提到：若 $C = (1,0)$ ，令 $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $B = (\cos \beta, \sin \beta)$ 、 $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ ，則西姆松線方程式為

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{(1-\cos \alpha)[1+\cos(\alpha-\theta)+\cos \theta]}{2 \sin \alpha} - \frac{(1-\cos \beta)[1+\cos \beta-\cos(\beta-\theta)+\cos \theta]}{2 \sin \beta} \right\} x \\
& + \left\{ \frac{[1+\cos \beta-\cos(\beta-\theta)-\cos \theta]}{2} - \frac{[1+\cos \alpha-\cos(\alpha-\theta)-\cos \theta]}{2} \right\} y \\
= & \frac{(1-\cos \alpha)[1+\cos \alpha-\cos(\alpha-\theta)+\cos \theta][1+\cos \beta-\cos(\beta-\theta)-\cos \theta]}{4 \sin \alpha} \\
& - \frac{(1-\cos \beta)(1+\cos \beta-\cos(\beta-\theta)+\cos \theta)[1+\cos \alpha-\cos(\alpha-\theta)-\cos \theta]}{4 \sin \beta}
\end{aligned}$$

我們想要能更深入的來探討西姆松線의 各種性質，於是我們嘗試在複數平面上來探討西姆松線方程式。

二、複數平面上的直線方程式與其性質

為了能得到西姆松線在複數平面上的方程式，我們效法在實數平面上給定兩點求方程式的方法，先從「在複數平面上給定兩點求方程式」開始。

【定理一】

給定複數平面上任意兩點 Z_1 、 Z_2 其複數值分別為 z_1 、 z_2 ，而過此兩點的直線方程式可表示為

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2,$$

我們將其稱之為兩點式。

pf: 令 L 為過 Z_1 、 Z_2 兩點之直線。

設 $z_1 = a + bi$ 、 $z_2 = c + di$ 、 $\bar{z}_1 = a - bi$ 、 $\bar{z}_2 = c - di$ ， $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$

其中 $a = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}$ 、 $b = \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}$ 、 $c = \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2}$ 、 $d = \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i}$

當 $z = x + yi$ 為直線 L 上任意一點時，可得 $\bar{z} = x - yi$ ，以及

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

由直線上任兩點斜率相等可列出等式

$$\frac{\left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i}\right) - \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}\right)}{\left(\frac{z_2 + \bar{z}_2}{2}\right) - \left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) - \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}\right)}{\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - \left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} &\implies (z_2 - \bar{z}_2 - z_1 + \bar{z}_1)(z + \bar{z} - z_1 - \bar{z}_1) \\ &= (z - \bar{z} - z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2 - z_1 - \bar{z}_1) \\ &\implies (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 \end{aligned}$$

故得證。 ■

在【定理一】中的兩點式可以表示所有複數平面上的直線方程式，但若將此方程式左右同乘一個複數 c ，其結果仍為過原兩點之直線方程式。因此為了將直線方程式的表示法固定，並使得係數更加簡化，我們將其重新改寫，得到了【定理二】。

【定理二】

在複數平面上任意直線的方程式，當固定 z 的係數為 1 時，可將其唯一表示為

$$z - n\bar{z} = l,$$

其中 $n \in \mathbb{C}$ 且 $|n| = 1$ ，我們稱此表示法為**最簡一般式**。(簡稱一般式)

pf: 首先我們先證明存在性，從【定理一】可知，複數平面中任意過兩點之直線方程式可表示為 $(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$

經整理後可得

$$z - \left(\frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \right) \bar{z} = \frac{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

令 $n = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$ ，即複數平面上任意直線方程式可表示為 $z - n\bar{z} = l$ ，

其中 $l = \frac{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$ ，且 $|n| = \left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = 1$

接著我們證明此表示法唯一，

設同一直線有兩種一般式 $z - n_1\bar{z} = l_1$ 及 $z - n_2\bar{z} = l_2$ ，且 $n_1 \neq n_2$ 又設 k_1, k_2 為在此直線上的兩相異複數，分別代入上面二式後得到

$$\begin{aligned} k_1 - n_1\bar{k}_1 &= l_1 \cdots \cdots \textcircled{1}, & k_2 - n_1\bar{k}_2 &= l_1 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ k_1 - n_2\bar{k}_1 &= l_2 \cdots \cdots \textcircled{3}, & k_2 - n_2\bar{k}_2 &= l_2 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \implies (k_1 - k_2) - n_1(\overline{k_1} - \overline{k_2}) = 0$$

$$\implies n_1 = \frac{k_1 - k_2}{\overline{k_1} - \overline{k_2}}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \implies (k_1 - k_2) - n_2(\overline{k_1} - \overline{k_2}) = 0$$

$$\implies n_2 = \frac{k_1 - k_2}{\overline{k_1} - \overline{k_2}}$$

則 $n_1 = n_2$ (矛盾)

可知，當以一般式表示同一直線時 n 值唯一；再代入直線上的任意點，可得到唯一的 l 值，故得證。 ■

接下來我們探討：給定一直線 $z - n\bar{z} = l$ ，該直線的斜率與 n 的關係。

【定理三】

任意直線一般式 $z - n\bar{z} = l$ 的斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$ ，即直線與實軸夾角為 $\frac{\theta_n}{2}$ ，

其中 θ_n 為複數 n 和實軸正向之夾角， $0 \leq \theta_n < \pi$ 。

pf: 因為平面上任意直線，皆可將其水平移動使其通過原點，故此證明中我們將先討論通過原點的直線斜率，接著再將其水平移動至任意位置。由【定理一】可知，當直線通過原點時，其一般式表示為 $z - n\bar{z} = 0$ ，

將一般式中的 z 以複數極式 $|z|(\cos \theta_z + i \sin \theta_z)$ 表示，將直線改寫成

$$|z|(\cos \theta_z + i \sin \theta_z) - n|z|(\cos(-\theta_z) + i \sin(-\theta_z)) = 0$$

$$\implies n = \frac{|z|(\cos \theta_z + i \sin \theta_z)}{|z|(\cos(-\theta_z) + i \sin(-\theta_z))} = \cos 2\theta_z + i \sin 2\theta_z$$

可知 $\theta n = 2\theta_z$ ，即過原點直線方程斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$ 。

將直線 $z - n\bar{z} = 0$ 向右平移 m 單位 ($m \in \mathbb{R}$) 後，則方程式表示為 $(z - m) - n(\overline{z - m}) = 0$ ，經整理後得一般式 $z - n\bar{z} = (1 - n)m$ ，

意即複數平面上任意直線一般式 $z - n\bar{z} = l$ ，其斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$

故得證 ■

舉例來說，通過原點的鉛直線之直線方程式為 $z - (-\bar{z}) = 0$ ，通過 i 的水平線方程式為 $z - (\bar{z}) = 2i$ ，通過 2 且斜率為 1 的直線方程式為 $z - (i\bar{z}) = 2 - 2i$ 通過 1 且斜率為 -1 的直線方程式為 $z - (-i\bar{z}) = 1 + i$ 接著我們證明了若給定兩直線方程式 $z - n_1\bar{z} = l_1, z - n_2\bar{z} = l_2$ ，則兩線垂直等價於 $n_1 = -n_2$ 。並利用此關係得到了【定理四】。

【定理四】

給定直線 $L: z - n\bar{z} = l$ 和線上一點 $P(p)$ ，則垂直 L 於 P 點的直線其一般式為

$$z + n\bar{z} = p + n\bar{p}$$

pf: 設直線 $L': z - n'\bar{z} = l'$ 與 L 垂直

由【定理三】知 L 與實軸正向夾角為 $\frac{\theta_n}{2}$ ，及 L' 與實軸正向夾角為 $\frac{\theta_{n'}}{2}$

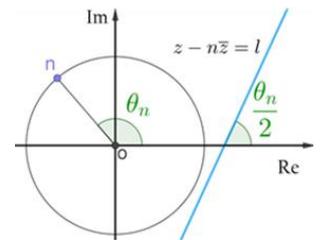
又因 L' 與 L 垂直，則 $\frac{\theta_{n'}}{2} = \frac{\theta_n}{2} \pm \frac{\pi}{2} \implies \theta_{n'} = \theta_n \pm \pi$

也就是 n 與 n' 為複數平面上兩個主幅角相差 180° 之複數，

且 $|n'| = |n|$ ，所以 $n' = -n$ ，

將其代入 L' 得 $z + n\bar{z} = l'$ ，再將 $P(p)$ 代入得 $l' = p + n\bar{p}$

即 L' 的一般式為 $z + n\bar{z} = p + n\bar{p}$ ■



圖五

三、複數平面上的西姆松線方程式

首先將複數平面上 $\triangle ABC$ 之三頂點的坐標分別以 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 表示，不失一般性，我們令 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心 O 為複數平面上的原點，接著控制 $\triangle ABC$ 的大小，使其外接圓的半徑為 1 ，而 $P(p)$ 為圓上一動點，利用【定理一】~【定理四】的結果，我們可以得到西姆松線在複數平面上的一般式。

【定理五】

給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，則 P 點對 $\triangle ABC$ 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a + b + c)p^2 - (ab + bc + ca)p - abc}{2p^2}$$

pf: 因為 A, B, C, P 皆在單位圓上，所以 $a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = c \cdot \bar{c} = p \cdot \bar{p} = 1$

首先我們先求 \overleftrightarrow{AB} 的一般式，將 $A(a), B(b)$ 代入直線一般式 $z - n\bar{z} = l$
得 $a - n\bar{a} = b - n\bar{b}$

$$\implies n = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{b-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = -ab$$

將 $n = -ab, z = a$ 代入 $z - n\bar{z} = l$ ，得 $l = a + b$

因此 $\overleftrightarrow{AB}: z + ab\bar{z} = a + b \dots\dots ①$

由【定理四】可知，過 P 且垂直 \overleftrightarrow{AB} 之直線一般式為

$$z - ab\bar{z} = p - ab\bar{p} \dots\dots ②$$

①、②兩式聯立解得，過 P 且垂直 \overleftrightarrow{AB} 之直線與 \overleftrightarrow{AB} 之垂足 z_1

$$z_1 = \frac{a+b+p-ab\bar{p}}{2}, \quad \bar{z}_1 = \frac{a+b-p+ab\bar{p}}{2ab}$$

同理得過 P 且垂直 \overleftrightarrow{AC} 之直線與 \overleftrightarrow{AC} 之垂足 z_2

$$z_2 = \frac{c+a+p-ca\bar{p}}{2}, \quad \bar{z}_2 = \frac{c+a-p+ca\bar{p}}{2ca}$$

所求之西姆松線為通過 z_1, z_2 的直線

化簡

$$\begin{aligned} n &= \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \\ &= \frac{\left(\frac{c+a+p-ca\bar{p}}{2}\right) - \left(\frac{a+b+p-ab\bar{p}}{2}\right)}{\left(\frac{c+a-p+ca\bar{p}}{2ca}\right) - \left(\frac{a+b-p+ab\bar{p}}{2ab}\right)} \\ &= \frac{abc(c-b-ca\bar{p}+ab\bar{p})}{ab-ca-bp+cp} = \frac{abc(c-b)(1-a\bar{p})}{(c-b)(p-a)} \\ &= \frac{abc\left(1-\frac{a}{p}\right)}{p\left(1-\frac{a}{p}\right)} = \frac{abc}{p} \end{aligned}$$

將 $n = \frac{abc}{p}$ 以及 z_1 代入一般式 $z - n\bar{z} = l$ ，得

$$\begin{aligned}
 l &= z_1 - \frac{abc}{p} \bar{z}_1 \\
 &= \left(\frac{a+b+p-ab\bar{p}}{2} \right) - \left(\frac{abc}{p} \right) \left(\frac{a+b-p+ab\bar{p}}{2ab} \right) \\
 &= \left(\frac{a+b+p-\frac{ab}{p}}{2} \right) - \left(\frac{ca+bc-cp+\frac{abc}{p}}{2p} \right) \\
 &= \frac{ap^2+bp^2+p^3-abp-cap-bcp+cp^2-abc}{2p^2} \\
 &= \frac{p^3+(a+b+c)p^2-(ab+bc+ca)p-abc}{2p^2}
 \end{aligned}$$

由【定理二】可得， P 點對 $\triangle ABC$ 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p} \bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2}$$

四、旋轉三角形，其對應之西姆松線變化

在文獻探討中，有許多關於兩西姆松線交點軌跡的性質，於是我們靈機一動，既然給定圓周上兩對徑點對同一個三角形可以作出兩條西姆松線求軌跡，那我們也可以嘗試給定圓周上兩個三角形，來觀察圓周上一動點對這兩個三角形所作出的兩西姆松線之交點軌跡為何。

首先我們先研究當三角形的三頂點旋轉時，兩西姆松線的夾角會如何跟著改變。

【定理六】

給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，以單位圓之圓心為旋轉中心，將 A, B, C 三點分別旋轉角度 $\theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_\gamma$ 後，得到 A', B', C' 三點，則點 P 對 $\triangle ABC$ 之西姆松線與對 $\triangle A'B'C'$ 之西姆松線，兩西姆松線所夾之角度為

$$\frac{\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma}{2}$$

pf: 由【定理三】可知， P 對 $\triangle ABC$ 之西姆松線和實軸正向夾角為

$$\frac{\theta_{\frac{abc}{p}}}{2} = \frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_p}{2}$$

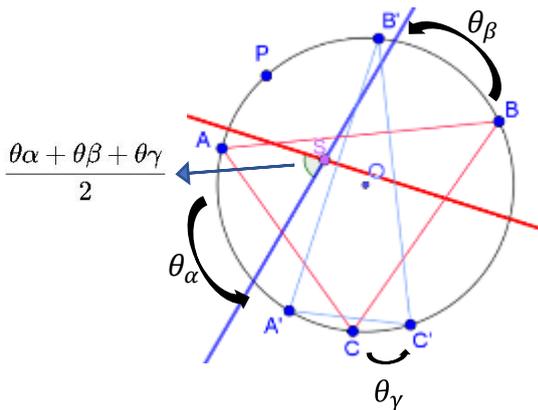
將 A 、 B 、 C 三點分別旋轉角度 $\theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_\gamma$ 後得到 A' 、 B' 、 C' 三點，則 P 對 $\triangle A'B'C'$ 之西姆松線和實軸正向夾角為

$$\frac{(\theta_a + \theta_\alpha) + (\theta_b + \theta_\beta) + (\theta_c + \theta_\gamma) - \theta_p}{2} = \frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_p}{2} + \frac{\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma}{2}$$

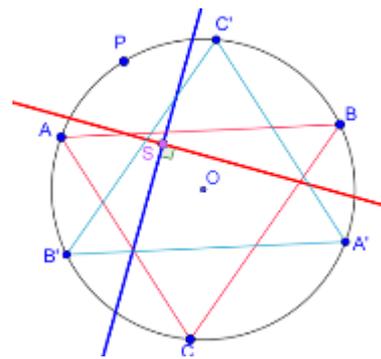
因此兩西姆松線夾角為 $\frac{\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma}{2}$ 。



接著我們考慮將三角形作旋轉，定義對任意 $\triangle ABC$ ，將此三角形三頂點 A 、 B 、 C 分別對其外接圓圓心旋轉180度，可得對徑點 A' 、 B' 、 C' ，稱 $\triangle A'B'C'$ 為 $\triangle ABC$ 之對徑三角形。



圖六



圖七

根據【定理六】的結果，我們可以得知，外接圓上一點分別對 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 做西姆松線時，兩西姆松線的夾角為270度，因此兩西姆松線會互相垂直，(如圖七)。我們進一步將兩條西姆松線的方程式求出並解聯立，可以求得兩西姆松線的交點軌跡方程式。

【定理七】

單位圓上定三定點 $A(a), B(b), C(c)$ 與一動點 $P(p)$ ，將 P 對 $\triangle ABC$ 及其對徑三角形 $\triangle A'B'C'$ 分別作西姆松線，則當 P 在圓上旋轉時，兩西姆松線的交點 $S(x)$ 的軌跡方程式為

$$x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab + bc + ca)}{2p}$$

pf: 因為 $\Delta A'B'C'$ 為 ΔABC 之對徑三角形，可知 $A'(-a), B'(-b), C'(-c)$

由【定理五】可得點 P 對 ΔABC 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2} \dots\dots ①$$

同理，點 P 對 $\Delta A'B'C'$ 之西姆松線一般式為

$$z + \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 - (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p + abc}{2p^2} \dots\dots ②$$

①、②聯立解得交點 S 的軌跡方程式為

$$x = \frac{p^3 - (ab+bc+ca)p}{2p^2} = \frac{p}{2} + \frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$$

在【定理七】中，我們看到軌跡方程式的前項為 $\frac{p}{2}$ ，是一個和 ΔABC 的外接圓同圓心且半徑為一半的圓；而後項 $\frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$ 也是一個同圓心，但是以 $\frac{|ab+bc+ca|}{2}$ 為半徑的圓。此外，我們注意到當 P 點在外接圓上以逆時針的方向旋轉時， $\frac{1}{p}$ 是以相同的角速率作順時針旋轉，所以當 P 點作順向轉動時， $\frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$ 也以相同的角速率作逆時針旋轉。

接著我們想要證明，兩個在同心圓上的動點，當一個作逆向轉動，而另一個作順向轉動時，兩者的軌跡相加為哪一種幾何圖形？

【定理八】

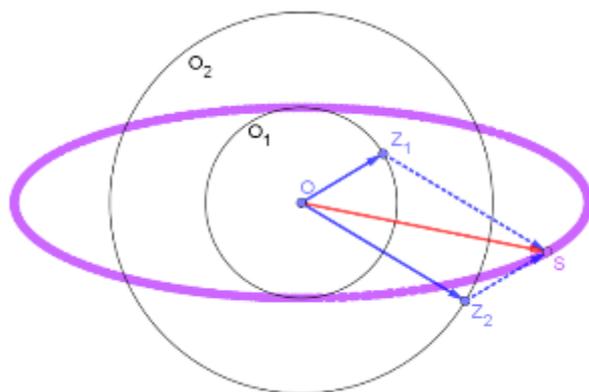
當複數平面上兩點 $Z_1(z_1)$ 和 $Z_2(z_2)$ 在兩個同心圓上，以相同的角速率反向轉動時， $z_1 + z_2$ 的軌跡為一橢圓。

pf: 不失一般性，設 $z_1 = r_1(\cos \theta + i \sin \theta)$ 、 $z_2 = r_2(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= r_1(\cos \theta + i \sin \theta) + r_2(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= r_1(\cos \theta + i \sin \theta) + r_2(\cos(\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= (r_1 + r_2) \cos \theta + (r_1 - r_2) i \sin \theta \end{aligned}$$

因在複數平面上的橢圓參數式為 $z = a \cos \theta + ib \sin \theta$

即 $z_1 + z_2$ 是以 $r_1 + r_2$ 為半長軸， $r_1 - r_2$ 為半短軸的橢圓(如圖八)。



圖八

特別地，當兩同心圓半徑相同時，橢圓會退化為一線段。

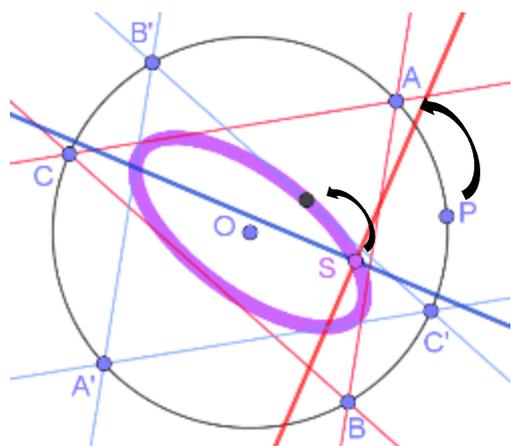
【定理九】

給定 $\triangle ABC$ 和其外接圓上一動點 P ，將 $\triangle ABC$ 對圓心旋轉 180° ，此時 P 點對此兩對徑三角形分別所作出的西姆松線之交點軌跡為一個橢圓。其橢圓方程式在複數平面中可表示為

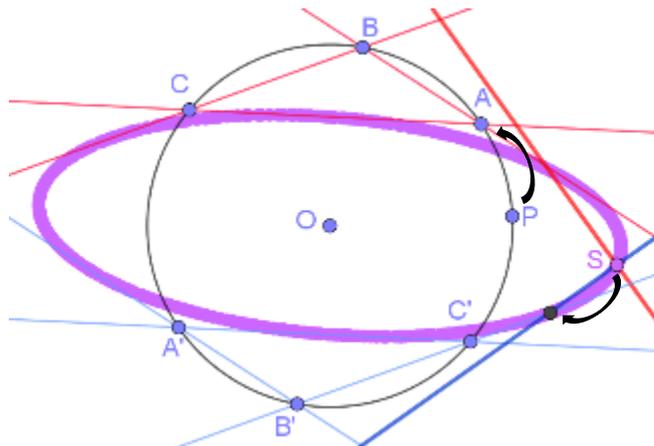
$$x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab + bc + ca)}{2p},$$

其中 a 、 b 、 c 分別為 $\triangle ABC$ 之三頂點的複數， p 為動點 P 之複數。

pf: 根據【定理七】，可知其方程式為 $x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab + bc + ac)}{2p}$ ，相當於兩圓相加，又根據【定理八】，可知交點軌跡為一橢圓。 ■



圖九



圖十

到橢圓與兩三角形所形成之六邊形必定相切於六點，且切點為兩對徑三角形之頂點對彼此邊上的垂足(如圖九)。(當 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，橢圓軌跡與兩對徑三角形各自延長的三個邊相切)(如圖十)。

【定理十】

橢圓 $x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab+bc+ac)}{2p}$ 會和 $\triangle ABC$ 及其對徑三角形 $\triangle A'B'C'$ 的六個邊均相切，因此該橢圓內切於此六邊(包含延長邊)所圍成的平行六邊形。

pf: 同定理七，兩西姆松線方程式如下：

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{(a+b+c)p^2 + p^3 + (ab+bc+ac)p - abc}{2p^2} \dots\dots ①$$

$$z + \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{-(a+b+c+p)p^2 + p^3 - (ab+bc+ac)p + abc}{2p^2} \dots\dots ②$$

$$①+② \text{ 可得 } z = \frac{p^2 - (ab+bc+ac)}{2p}$$

$$①-② \text{ 可得 } \bar{z} = \frac{-(a+b+c)p^2 + abc}{2abcp}$$

代入直線 $\overline{B'C'}$ ：

$$\begin{aligned} z + bc\bar{z} &= -b - c \\ \implies \frac{p^2 - (ab+bc+ac)}{2p} + bc \frac{-(a+b+c)p + abc\bar{p}}{2abc} &= -b - c \\ \implies \frac{p^2 - (ab+bc+ac)}{2p} + \frac{-(a+b+c)p + abc\bar{p}}{2a} &= -b - c \\ \implies a(p^2 - (ab+bc+ac) + p(-(a+b+c)p + abc\bar{p})) &= 2ap(-b-c) \\ \implies ap^2 - a^2b - a^2c - abc - ap^2 - bp^2 + abc &= -2abp - 2acp \\ \implies -a^2b - a^2c - bp^2 - cp^2 &= -2abp - 2acp \\ \implies a^2b + a^2c + bp^2 + cp^2 &= 2abp + 2acp \\ \implies (b+c)p^2 + (b+c)a^2 &= 2ap(b+c) \\ \implies p^2 - 2ap + a^2 &= 0 \\ \implies p &= a \end{aligned}$$

可得知當 $P = A$ 時橢圓會相切於直線 $\overline{B'C'}$

同理，當 P 分別移動到 B 、 C 、 A' 、 B' 、 C' 時，橢圓會和直線 $\overline{A'C'}$ 、 $\overline{A'B'}$ 、 \overline{BC} 、 \overline{AB} 、 \overline{AC} 相切。

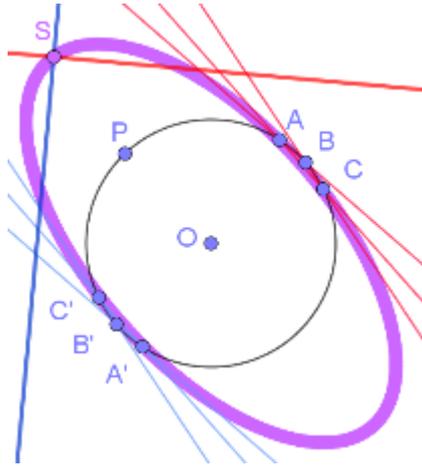
故得證 ■

橢圓的存在正如九點圓一樣的特別，於是我們將其命名為「六點橢圓」。

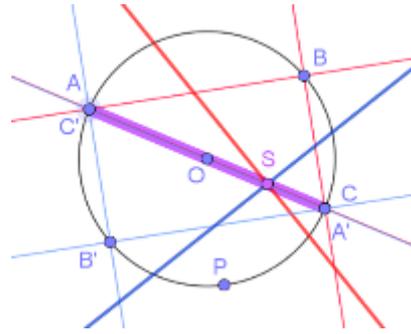
五、「六點橢圓」之性質探討

【性質 1】六點橢圓的大小

當 $\triangle ABC$ 為直角三角形時橢圓會退化成單位圓之直徑，此時的橢圓最小；而當 $\triangle ABC$ 趨近於一點時，軌跡橢圓會最大(此橢圓的半長軸為 2、半短軸為 1)。由此可知在單位圓上時橢圓的面積大小最大為 2π 最小為 0(如圖十一、十二)。



圖十一

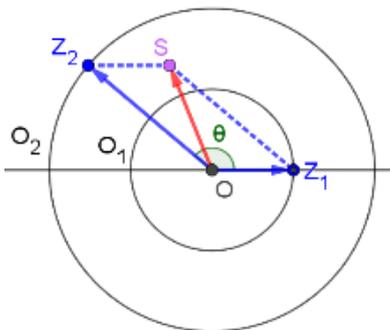


圖十二

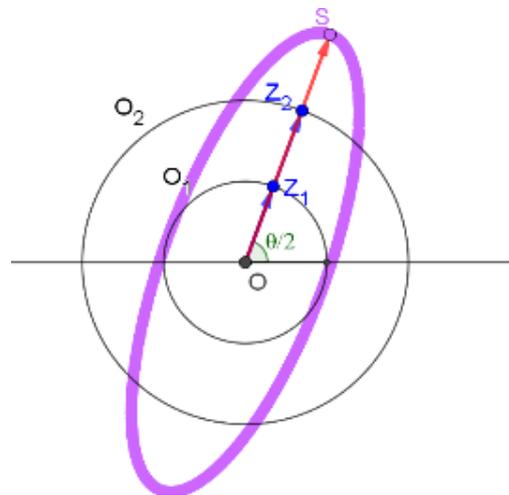
【性質 2】橢圓長軸和實軸的正向夾角

橢圓軌跡方程式 $x = \frac{p}{2} + \frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$ ，令 $z_1 = \frac{p}{2}$ ， $z_2 = \frac{-(ab+bc+ca)}{2p}$ 。

設 $\frac{-(ab+ac+bc)}{2p}$ 的主幅角為 θ ，當 $\theta_p = \frac{\theta}{2}$ 時， $\overline{OZ_1}$ ， $\overline{OZ_2}$ 方向相同，所以 Z_1 ， Z_2 落在長軸上，此時 S 為長軸一端點，由此可知長軸與實軸的正向夾角為 $\frac{\theta}{2}$ (如圖十三、十四)。



圖十三

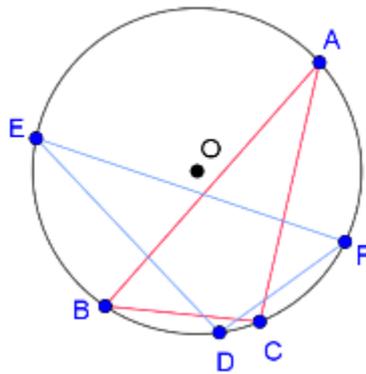


圖十四

【引理 A】

考慮單位圓上四點， $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 、 $E(bc)$ 、 $F(ca)$ 、 $D(ab)$ ，
則 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 全等。

pf: 單位圓上 D 為 A 轉了 θ_b ， E 為 C 轉了 θ_b ， D 與 E 在單位圓上的弧度差等於 C 與 A 的弧度差，同理可知 D 與 F 在圓上的弧度差等於 C 與 B 的弧度差， E 與 F 在圓上的弧度差等於 A 與 B 的弧度差，由此可知 D 、 E 、 F 間的弧度差與 A 、 B 、 C 相同，得證 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 全等(如圖十五)。

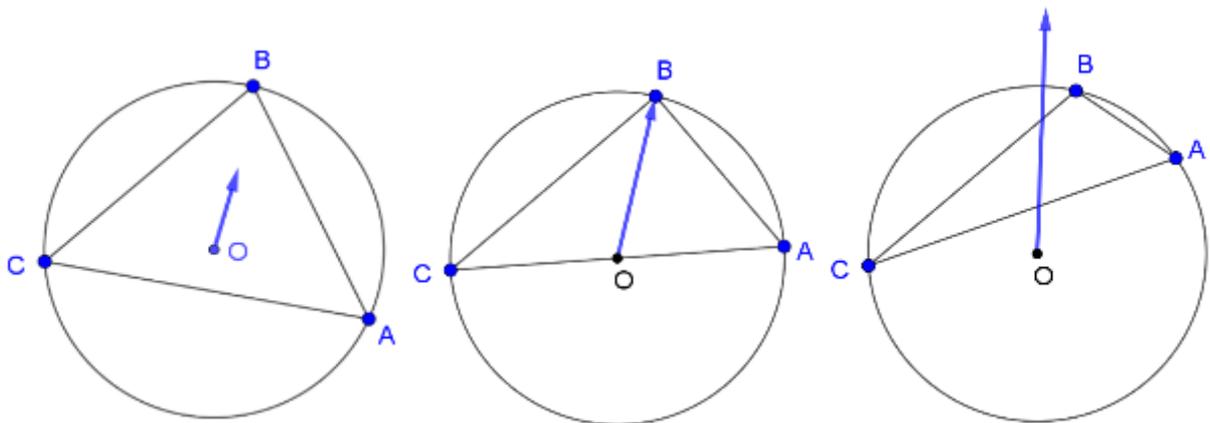


圖十五

【引理 B】

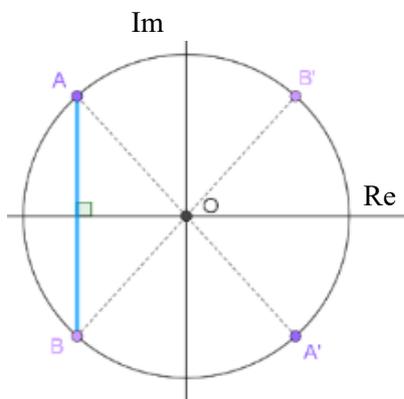
考慮 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 在單位圓上，

- (1) 若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，則 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| < 1$ ；
- (2) 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，則 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| > 1$ ；
- (3) 若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，則 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 1$ 。



圖十六

pf: 若 \overline{AB} 為直徑，顯而易見地， $|a + b + c| = 1$ 。若 \overline{AB} 不為直徑，不失一般性，我們將以單位圓圓心為旋轉中心，旋轉 $\triangle ABC$ 使 \overline{AB} 垂直實軸且位於虛軸左側(如圖十七)，此時 $\theta_b = -\theta_a$ 且 $\cos \theta_a < 0$ 。



圖十七

$$\begin{aligned}
 |a + b + c| &= \sqrt{(\cos \theta_a + \cos \theta_b + \cos \theta_c)^2 + (\sin \theta_a + \sin \theta_b + \sin \theta_c)^2} \\
 &= \sqrt{(\cos \theta_a + \cos \theta_a + \cos \theta_c)^2 + (\sin \theta_a + (-\sin \theta_a) + \sin \theta_c)^2} \\
 &= \sqrt{(2 \cos \theta_a + \cos \theta_c)^2 + (\sin \theta_c)^2} \\
 &= \sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1}
 \end{aligned}$$

令 A' 、 B' 為 A 、 B 分別對原點的對稱點

當 C 位於劣弧 $\widehat{A'B'}$ 之間， $\triangle ABC$ 為銳角三角形，可知 $|\cos \theta_a| < |\cos \theta_c|$ ，

則 $\sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1} < 1, |a + b + c| < 1$

當 C 位於優弧 $\widehat{A'B'}$ 之間， $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，可知 $|\cos \theta_a| > |\cos \theta_c|$ ，

則 $\sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1} > 1, |a + b + c| > 1$

當 C 位於 A' 或 B' 上，或 \overline{AB} 為單位圓直徑時， $\triangle ABC$ 為直角三角形，

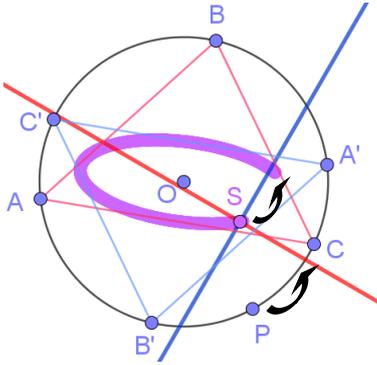
可知 $|\cos \theta_a| = |\cos \theta_c|$ ，

則 $\sqrt{4 \cos \theta_a (\cos \theta_a + \cos \theta_c) + 1} = 1, |a + b + c| = 1$ ，故得證。 ■

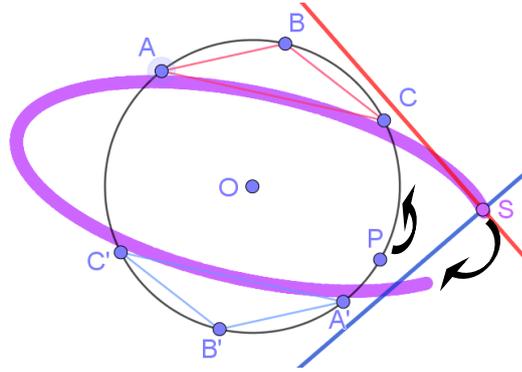
【性質 3】

當 P 沿著單位圓逆時針旋轉時，

- (1) 若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，則西姆松線交點沿著橢圓逆時針旋轉，
- (2) 若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，則西姆松線交點沿著橢圓順時針旋轉，
- (3) 若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，則西姆松線交點軌跡為一線段。



圖十八



圖十九

pf: 設 Z_1 為圓 $O_1(Z = \frac{p}{2})$ 上一動點， Z_2 為圓 $O_2(Z = \frac{-(ab+bc+ac)}{2p})$

且 Z_1 沿著順時針旋轉， Z_2 沿著 $Z = \frac{-(ab+bc+ac)}{2p}$ 專時，

將兩向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ ， $\overrightarrow{OZ_2}$ 分解為垂直長軸以及平行長軸的兩分量，平行長軸的向量兩者方向相同，因此 $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$ 軌跡生成方向會跟隨垂直長軸的向量較大者。

根據【引理 A】， $|a+b+c| = |ab+bc+ac|$

又根據【引理 B】，我們得到以下結果：

若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形， $|a+b+c| < |1|$ $\left| \frac{ab+bc+ac}{2} \right| < \left| \frac{1}{2} \right|$

可知 O_1 半徑較大，則西姆松線交點沿著橢圓逆時針旋轉(如圖十八)。

若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形， $|a+b+c| > |1|$ $\left| \frac{ab+bc+ac}{2} \right| > \left| \frac{1}{2} \right|$

可知 O_2 半徑較小，則西姆松線交點沿著橢圓順時針旋轉(如圖十九)。

若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形， $|a+b+c| = |1|$ ，則 $\left| \frac{ab+bc+ac}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} \right|$ ，

可知兩半徑等長，垂直長軸的向量會相互抵消，因此西姆松線的交點軌跡為一線段。 ■

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一) 有關複數平面的直線方程式之研究成果如下：

【定理二】

在複數平面上任意直線的方程式，當固定 z 的係數為1時，可將其唯一表示為 $z - n\bar{z} = l$ ，其中 $n \in \mathbb{C}$ 且 $|n| = 1$ ，我們稱此表示法為最簡一般式。

【定理三】

任意直線一般式 $z - n\bar{z} = l$ 的斜率為 $\tan \frac{\theta_n}{2}$ ，即直線與實軸夾角為 $\frac{\theta_n}{2}$ ，其中 θ_n 為複數 n 和實軸正向之夾角， $0 \leq \theta_n < \pi$ 。

【定理四】

給定直線 $L: z - n\bar{z} = l$ 和線上一點 $P(p)$ ，則垂直 L 於 P 點的直線一般式為 $z + n\bar{z} = p + n\bar{p}$

(二) 將複數解析應用在西姆松線上，我們得到了以下成果：

【定理五】

給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，則 P 點對 $\triangle ABC$ 之西姆松線一般式為

$$z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ca)p - abc}{2p^2}$$

【定理六】

給定單位圓上四點 $A(a), B(b), C(c), P(p)$ ，將 A, B, C 三點分別以圓心旋轉角度 $\theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_\gamma$ 後，得到 A', B', C' 三點，則點 P 對 $\triangle ABC$ 之西姆松線與對 $\triangle A'B'C'$ 之西姆松線，兩西姆松線所夾之角度為 $\frac{\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma}{2}$ 。

【定理九】

給定 $\triangle ABC$ 和其外接圓上一動點 P ，將 $\triangle ABC$ 對圓心旋轉 180° ，此時 P 點對此兩對徑三角形分別所作出的西姆松線之交點軌跡為一個橢圓。

其橢圓方程式在複數平面中可表為 $z = \frac{1}{2} \left[p + \frac{-(ab+bc+ca)}{p} \right]$ 。

【定理十】

定理九中所敘述之橢圓會和兩對徑三角形的六個邊(包含延長邊)所圍成的平行六邊形相切，我們將此橢圓稱為「六點橢圓」。

(三) 有關於六點橢圓的性質探討，我們有以下性質：

【性質一】

六點橢圓的大小有上界，最大面積為 2π ，此時橢圓的半長軸長為 2、半短軸長為 1。

【性質二】

橢圓長軸和實軸正向夾角為 $\frac{\theta}{2}$ ，其中 θ 為 $\frac{-(ab+ac+bc)}{2p}$ 的主輻角。

【性質三】

當 P 沿著單位圓逆時針旋轉，橢圓生成軌跡的方向與 $\triangle ABC$ 有關，若 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形，西姆松線交點沿著橢圓逆時針旋轉，若 $\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，西姆松線交點沿著橢圓順時針旋轉。

二、討論

1. 在 $\triangle ABC$ 外接圓上之相異兩點 $P(p)$ 、 $Q(q)$ ，分別對此三角形作西姆松線，兩條西姆松線之夾角會等於 $\angle POQ$ 的一半。

pf: 不失一般性，設 $\theta_p > \theta_q$

$\triangle ABC$ 對於 P 點作西姆松線，此線對於實軸之夾角為 $\frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_p}{2}$

$\triangle ABC$ 對於 Q 點作西姆松線，此線對於實軸之夾角為 $\frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_q}{2}$

則兩線夾角為 $\frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_q}{2} - \frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c - \theta_p}{2} = \frac{-\theta_q + \theta_p}{2}$

$\angle POQ = |\theta_p - \theta_q|$

兩線夾角為 $\angle POQ$ 的一半，故得證。 ■

2. 給定 $\triangle ABC$ 和其外接圓上一動點 P 與其對徑點 P' ，此兩點對三角形分別作西姆松線，我們有以下討論。

2-1. 兩線之交點軌跡為三角形的九點圓

pf: 由【定理五】可得

$$P \text{ 的西姆松線為 } z - \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{p^3 + (a+b+c)p^2 - (ab+bc+ac)p - abc}{2p^2}$$

$$P' \text{ 的西姆松線為 } z + \frac{abc}{p}\bar{z} = \frac{-p^3 + (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ac)p - abc}{2p^2}$$

$$\text{設以上兩條西姆松線交於點 } S(x), \text{ 聯立得 } x = \frac{a+b+c}{2} + \frac{-abc}{2p^2}$$

$$\text{且 } \left| x - \frac{a+b+c}{2} \right| = \left| \frac{-abc}{2p^2} \right| = \frac{1}{2}$$

可知軌跡 S 以 $\frac{a+b+c}{2}$ 為圓心、 $\frac{1}{2}$ 為半徑長的圓。

接著我們確認三角形三邊中點是否位於軌跡 S 上，將 x 用 \overline{AC} 中點代入得

$$\frac{a+b+c}{2} + \frac{-abc\bar{p}}{2p^2} = \frac{a+c}{2}$$

$$\implies \frac{b}{2} - \frac{abc}{2p^2} = 0$$

$$\implies \frac{b}{2} = \frac{abc}{2p^2}$$

$$\implies p^2 = ac$$

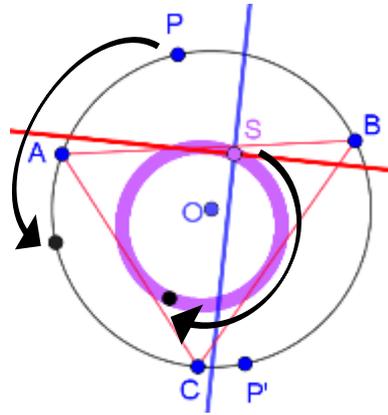
$$\implies p = \pm(ac)^{\frac{1}{2}}$$

可知當 p 在 AC 弧中點或 AC 弧中點之對徑點，兩西姆松線交點 S 恰為 \overline{AC} 中點；同理，此圓也會過 \overline{BC} 和 \overline{AB} 的中點。

故此圓為 $\triangle ABC$ 的九點圓。 ■

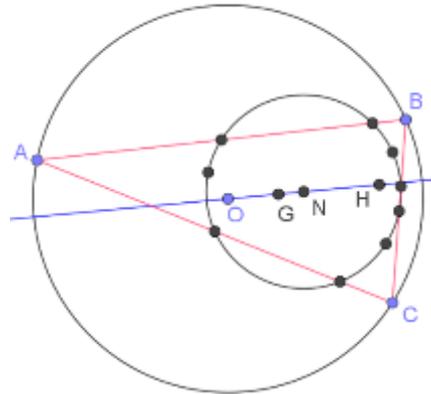
2-2. 交點軌跡生成方向

pf: 由 2-1 我們可以得知 $x = \frac{a+b+c}{2} + \frac{-abc}{2p^2}$ ，則當 P 的旋轉角度為 θ 時， S 的旋轉角度為 -2θ ，所以當 P 轉了一圈時 S 會轉兩圈，且軌跡 S 生成方向會和 P 的旋轉方向相反。 ■



圖二十

2-3. 歐拉線論證 (垂心、重心、外心、九點圓圓心四點共線)



圖二十一

pf: 首先我們求得垂心、重心、外心、九點圓圓心的複數。

直線 \overline{AB} 的一般式為 $z + ab\bar{z} = a + b$

垂直直線 \overline{AB} 且過 C 的一般式為 $z - ab\bar{z} = c - abc\bar{c} \dots\dots ①$

直線 \overline{AC} 的一般式為 $z + ac\bar{z} = a + c$

垂直直線 \overline{AC} 且過 B 的一般式為 $z - ac\bar{z} = b - acb\bar{b} \dots\dots ②$

將 ① 同乘 c 得 $c(z - ab\bar{z}) = c(c - abc\bar{c}) \implies cz - cab\bar{z} = c^2 - ab \dots\dots ③$

將 ② 同乘 b 得 $b(z - ca\bar{z}) = b(b - acb\bar{b}) \implies bz - abc\bar{z} = b^2 - ca \dots\dots ④$

④ - ③ 可得 $(b - c)z = b^2 - ca - c^2 + ab$

$\implies (b - c)z = (b - c)(b + c) + a(b - c)$

$\implies z = a + b + c$

可知垂心 H 之複數為 $a + b + c$ ；

重心的複數為三角形三頂點複數的算術平均數 $\frac{(a + b + c)}{3}$ ；

而三角形外心同原點，其複數為 0 ；

由上述可知， O 、 G 、 H 共線，且 $\overline{OG} : \overline{GH} = 2 : 1$ ，是為歐拉線。

最後，根據 2-1 可得九點圓圓心 N 的複數為 $\frac{a + b + c}{2}$ ，

又 N 為 \overline{OH} 中點，故此四點共線。 ■

3. 外接圓上一動點 P 與三角形的垂心 H 連成 \overline{PH} 線段，我們探討以下問題。

3-1. \overline{PH} 線段被 P 所作之西姆松線平分(即 \overline{PH} 中點在 P 對 $\triangle ABC$ 之西姆松線上)

pf: 設 \overline{PH} 中點為 $M = \left(\frac{a + b + c + p}{2}\right)$, $\overline{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{p}\right)$

將 $z = \frac{a + b + c + p}{2}$ 代入西姆松線方程式中得

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b+c+p)}{2} - \frac{abc}{p} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{(a + b + c + p)p^2 - abc p \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{p} \right)}{2p^2} \\ &= \frac{p^3 + (a + b + c)p^2 - bcp - acp - abp - abc}{2p^2} \\ &= \frac{p^3 + (a + b + c)p^2 - (ab + bc + ac)p - abc}{2p^2} \end{aligned}$$

等號成立，得證 P 對 $\triangle ABC$ 之西姆松線過 \overline{PH} 中點。

3-2. \overline{PH} 線段與西姆松線之交點軌跡為三角形的九點圓

pf: 根據 2-1 我們知道九點圓的圓心為 $\frac{a + b + c}{2}$ ，半徑為 $\frac{1}{2}$ 。

根據 3-1，兩線交點軌跡為 \overline{PH} 中點

$$M = \left(\frac{a + b + c + p}{2} \right) = \frac{a + b + c}{2} + \frac{p}{2}$$

故得證 ■

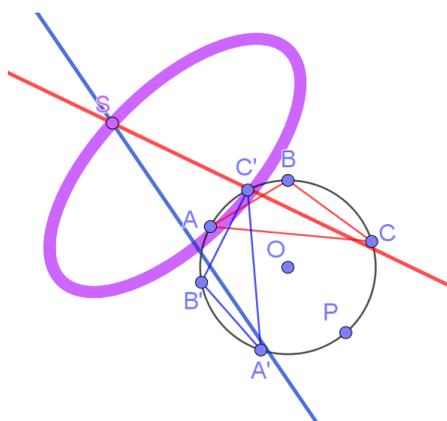
肆、結論與未來展望

在眾多有關西姆松線的研究當中，大部分都是使用幾何方法來做證明，因為在實數平面上的西姆松線方程式相當地複雜。本研究使用複數平面上的解析方式求出西姆松線方程式，原本需要好幾行的方程式被縮短成一行，展現數學上化繁為簡的美。

我們利用所得到的西姆松線方程式來探討，當有兩對徑三角形時，兩條西姆松線的軌跡竟會是一橢圓，此外，我們發現此橢圓必定會和兩對徑三角形的六邊相切。

在過去有關軌跡方程式的研究當中，大多都只討論軌跡形狀，而鮮少看到有人討論軌跡的生成方向，而從複數解析的方法中，可以容易地看出軌跡的生成方向，此為複數解析的一大特色。隨著越來越深入探究西姆松定理，各種疑惑逐漸增多，不斷地發想、深入探討性質、找出正確且嚴謹的證明，是研究的樂趣。

當有了旋轉三角形的想法後，我們也發現當旋轉角度不為 180 度時，兩西姆松線的交點軌跡仍然是橢圓(如圖二十二)，我們會運用複數解析的方式將我們的研究之路繼續延續下去。



圖二十二

伍、參考文獻

- [1] 王翊蕙、馬正芯、陶佳妤(2016)。三角形形狀與西姆松線及三尖內擺線之關係探討。
- [2] 林福來主編(2020)。高級中學數學課本選修數學[甲版]上冊。南一書局。

【評語】 010039

此作品利用複數幾何，處理平面幾何中的 Simson 線相關性質。運用平面何基本事實(共圓、共線、直線方程式等等)的複數表示，可以簡化原先用平面幾何處理的論證，並獲得一些性質的新證明，例如兩對徑三角形之兩條西姆松線交點的軌跡形成一橢圓，橢圓必和兩對徑三角形六邊相切等等，是一個有意思的作品。利用複數來處理幾何問題雖是不錯的想法，卻也是經典的想法，因而本作品本質上是已知結果的另證，原創性較為不足。建議朝這方向可以蒐羅更多的 Simson 線性質，用類似的方式簡明處理，若能因為引進複數而能有更有洞察力的結果，作品會更加豐富。