2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 010031

參展科別 數學

作品名稱 3 進位 Kaprekar 變換之結構

得獎獎項 大會獎 四等獎

就讀學校 國立臺南女子高級中學

指導教師 洪士薰

作者姓名 呂家彤、高立屏、施凱心

關鍵詞 Kaprekar 變換、Kaprekar 常數、
Kaprekar 循環數

作者簡介

呂家彤（中）：我是呂家彤，來自臺南女中，今年高二。在高中參加的社團是演辯社曾在 2020 疫情稍緩時和社團一起舉辦了一場辯論比賽—椰風盃。在本次比賽中是做數學組的內容，一開始以為科展的數學是無趣的，只能看著密密麻麻的數字不斷的反覆，但做了科展後才發現數學理論中有趣的地方，或許無法體會它完整的好，但已從中吸取到很多經驗。。

高立屏（右）：我是台南女中二年級的學生高立屏，在學校擔任模擬聯合國社總務一職，平常喜歡聽音樂、拉琴、看小說、看電影。經由這次的科展，讓我透過不同的觀點來看待數學，有別於學校正規的考試，數學的世界是那麼的無邊無際，從一年前對文章一知半解，甚至常常需要研究很久才能理解透徹，到今天的成果，過程中雖然偶爾覺得辛苦卻也樂在其中，實在獲益良多。

施凱心（左）：我是施凱心，來自台南女中，就讀二年級。平常喜歡打排球、拉琴，而社團則是擔任醫研社公活。在疫情的延燒下，很幸運國際科展能如期舉行，這次算是在高中第一次參加學科類的競賽，也很開心可以和朋友一起參加，過程中也常用不同觀點去看數學，有時必須跳脫很多框架去理解，也謝謝隊友們的互相幫忙，相信透過這次科展也一定會學習到很多！

中 文 摘 要

b 進位的 n 位數字 x，數字 x 各位數字由大到小排列為 p，由小到大排列為 q，定義 Kaprekar 變換 T(b,n)(x)=p-q，例如 T(10,3)(x)= 954-459。當 T(b,n)(x)= x，稱 x 為 Kaprekar 常數。$T^k(b,n)(x)=T(b,n)(T^{k-1}(b,n)(x))= x$, $k>1$ 時，稱 x 為 k 階 Kaprekar 循環數。本文解答了以下問題：

1. b 進位的數字不包含數字 b-1 的 Kaprekar 常數的形式。
2. 3,4,5,6 進位的 Kaprekar 常數的一般形式。
3. 對於 2,3 進位的情形，我們引入三元非負整數的形式來討論 *Kaprekar* 變換，轉換成 *Kaprekar* 數對(p,q)，再進一步，由來探討比值 p/q，將 *Kaprekar* 變換轉成 *Kaprekar* 函數 g(x)，解決 *Kaprekar* 循環數的所有形式及解。

最後我們得到 $T^l(b,n)(x)$必是 Kaprekar 循環數。

英 文 摘 要

The n-digit number x with the b-adic, the digits of the number x are arranged from large to small as p, and from small to large as q, the Kaprekar transformation is defined as T(b,n)(x)=p-q, For example T(10,3) (x)= 954-459. When T(b,n)(x) = x, call x the Kaprekar constant. T^k(b,n)(x)=T(b,n)(T^(k-1) (b,n)(x))=x, when k>1, x is called the Kaprekar cycle number of order k. This article answers the following questions:

1. The form of Kaprekar constant when the b-adic number does not contain the number b-1.
2. The general form of Kaprekar constants with 3, 4, 5, and 6-adic.
3. For the case of 2, 3-adic, we Kaprekar pairs (p, q), and further, to discuss the ratio p/q, and the Kaprekar transformation is converted into Kaprekar function g(x), it solved all formula of Kaprekar cycle numbers.

Finally, we get T^l (b,n)(x) must be the Kaprekar cycle number, for some positive integer l.

壹、問題及動機

數字 495，將各位數字由大到小排列為 954 及由小到大排列 459，兩數相減 954-459 仍是 495，類似 7641-1467=6174，也是。像這樣的數字稱為 Kaprekar 常數。起源於 Kaprekar DR (1955). "An Interesting Property of the Number 6174". *Scripta Mathematica*. **15**: 244–245 。

有些數字像 6767 在同樣的運算方式下：$6767 \rightarrow 1089 \rightarrow 9621 \rightarrow 8352 \rightarrow 6174$ 需要好幾次運算後會得到 Kaprekar 常數；而例如$81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 09 \rightarrow 81 \rightarrow \cdots$，則會不斷地循環下去。在維基百科有人把 Kaprekar 常數，稱為黑洞數。對於 2~10 位數的 10 進位情形可以找到相關的結果 。

雖然這樣的數字已被發現有 60 多年，但仍有許多未知的結果，像在 1981[1] , 2011[2], 提出了許多的新結果，[2]中，引進了下三角矩陣來計算 10 進位的數字若包含有數字 9 的 Kaprekar 常數的形式。2019[4]，得到了不同進位及不同位數 Kaprekar 常數數量的計算公式；2017[3]則討論了 4 位數的 10 進位 Kaprekar 運算的對稱性並以新觀點再解決 Kaprekar 常數與循環數。

因此我們對以下的問題感到好奇：

4. 是不是也有類似[2]中的矩陣，可以計算 10 進位的數字若**不包含**數字 9 的 Kaprekar 常數的形式呢？
5. 而這些[2]中結果是不是也可以推廣到其他非 10 進位的情形呢?
6. 另外進行多次 Kaprekar 運算後會循環的 Kaprekar 循環數形式是什麼呢? 例如 2,3 進位的 *Kaprekar* 循環數的形式為何?

本文中 3 進位 3 元序對(a, b, c) 在 Kaprekar 變換下的行為、Kaprekar 數對(p, q) 在 Kaprekar 變換下的行為、$2^n \ mod \ P$, $P = p + q$的行為都以 excel 實際計算測試列在附錄中。

貳、目的

1. 根據[2]中的矩陣，我們進一步推廣ＳＴＡＮ矩陣的形式及應用到一般進位以及數字中不含$g - 1$時的情形，進而大大簡化了[2]中的証明。因此我們利用ＳＴＡＮ矩陣來計算一般進位的 *Kaprekar* 常數。
2. 對於 2,3 進位的情形，我們引入三元非負整數的形式來討論 *Kaprekar* 變換，再進一步轉換成 *Kaprekar* 數對(p, q)來探討 *Kaprekar* 變換，了解 *Kaprekar* 常數，*Kaprekar* 循環數的所有形式及解。

參、研究方法或過程

一、基本定義

$$c_1 \times g^{n-1} + c_2 \times g^{n-2} + \ldots + c_n \text{，}$$

為書寫方便在不混淆的情形，也可以表示成$c_1 c_2 \ldots c_n$。

$\overline{C}$是 C 各位數字由大而小的重排$a_1 a_2 \ldots a_n$，即$a_1, a_2, \ldots, a_n$為$c_1, c_2, \ldots, c_n$的重新排列，且

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n。$$

$\underline{C}$是 C 各位數字由小到大的重排$a_n \ldots a_1$ 。若數列中有部份為 0，$\underline{C}$ 仍將 0 補在前面例如 C ＝69500 時, 則$\underline{C}$ =00569。

<u>定義 *1*</u>:(1) $T_{g,n}(C) = \overline{C} - \underline{C}$,稱$T_{g,n}(C)$ 為 *Kaprekar* 變換。

$$\overline{T}_{g,n}(C) = \overline{\overline{C} - \underline{C}}\ ,$$

(2) 若$T_{g,n}(C) = C$，稱 C 為 *Kaprekar* 常數。

(3) $T^k_{g,n}(C) = T^{k-1}_{g,n}(\overline{C} - \underline{C})$，$k > 1$；$T^1_{g,n}(C) = T_{g,n}(C)$。若 $T^k_{g,n}(C) = C$，且 $T^i_{g,n}(C) \neq C$，$i < k$，稱 C 為 *k*-階 *Kaprekar* 循環數，並記$Ord(C) = k$ 。

在這篇文章我們關心 3~9 進位的 *Kaprekar* 常數，以及 2,3 進位的 *Kaprekar* 循環數的形式。

考慮$\overline{C}$=$a_1 a_2 \ldots a_n$，令 $q = g - 1$，顯然 $q \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$

$T_{g,n}(C) = \overline{C} - \underline{C}$，：

$$因此T_{g,n}(C) = x_1 \ldots (x_j - 1)q \ldots q(q - x_j) \ldots (q - x_2)(g - x_1)$$

$$或者T_{g,n}(C) = x_1 \ldots (x_j - 1)(q - x_j) \ldots (q - x_2)(g - x_1), j = \frac{n}{2}$$

其中$x_i = a_i - a_{n+1-i}$，$1 \leq i \leq j$，$j \leq [\frac{n+1}{2}]$，滿足$x_j > 0$ 。

$T_{g,n}(C)$的第 *k* 與第 *n*+1-*k* 位數和必為 *q*，$2 \leq k \leq j - 1$；第 1 與第 *n* 位數和為 *g*；第 *j* 與第 *n*+1-*j* 位數和為 *q*-1。

顯然數列$\{x_i\}$單調遞減。

例如：C=4917655449，則$\overline{C} = 9976554441$, $\underline{C} = 1444556799$

$$\begin{array}{cr} & 9976554441 \\ - & \underline{1444556799} \\ & 8531997642 \end{array}$$

二、已知文獻結果

<u>定理 A</u>：([1], [2])

C 是 *g* ($g \geq 2$)進位的 *n* 位數字，則$T_{g,n}(C)$中的各位數字除部分為 *q*，其餘數字必可兩兩配對成$\{a, q - a\}$或$\{a, q - 1 - a\}$或$\{a, g - a\}$，其中$\{a, q - 1 - a\}$及$\{a, g - a\}$都恰有一對。

若 C 為 *Kaprekar* 常數，且

$$T_{g,n}(C) = x_1 \ldots (x_j - 1)q \ldots q(q - x_j) \ldots (q - x_2)(g - x_1)，$$

經由簡單地推廣文獻[2]的 Lemma2~4 可得

<u>引理 B.</u>

若 C 為 *Kaprekar* 常數，且$T_{g,n}(C)$中有部份數字為 *q*，則$x_1 + x_j = g$。

因此若$T_{g,n}(C)$中有部份數字為 q，則

$$x_1+(x_j-1)=g,(q-x_j)+(g-x_1)=q，$$

故$T_{g,n}(C)$除中間的數字q，其餘數字皆可配對成$\{a,q-a\}$的形式。
推廣[2]中引理 5 的結果到一般 g 進位的情形，若 C 為 *Kaprekar* 常數，且包含數字 q ，則 C 中的數字必可配對成$\{0,q\},\{1,q-1\},\cdots\{s,q-s\},s=[\frac{q}{2}]$ ，設分別有 $\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_s$對，及另有 x 個數字 q
$T_{g,n}(C)=\overline{C}-\underline{C}$，算式如下：

$$a_1a_2a_3\ldots\ldots a_{n-1}a_n$$

$$a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1$$

將$(a_{n+1-i},a_i),1\le i\le\frac{n}{2}$ ，令 $s=[\frac{g}{2}]$, 依下列兩種情形作分類：
(1)g為偶數時

$$\begin{matrix}(0,q) & \cdots & (0,s)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (s-1,q) & \cdots & (s-1,s)\end{matrix}$$

(2)g為奇數時

$$\begin{matrix}(0,q) & \cdots & (0,s)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (s,q) & \cdots & (s,s)\end{matrix}$$

並以矩陣$\begin{pmatrix}m_{11} & \cdots & m_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{s1} & \cdots & m_{ss}\end{pmatrix},s=[\frac{g}{2}]$ 表示

<u>定義 *2*:</u> 若 C 為 *Kaprekar* 常數，$\overline{C}=a_1a_2a_3\ldots\ldots a_{n-1}a_n$，將$(a_{n+1-i},a_i),1\le i\le\frac{n}{2}$ 依上述 方式分類得矩陣

$$\begin{pmatrix}m_{11} & \cdots & m_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{s1} & \cdots & m_{ss}\end{pmatrix},s=[\frac{g}{2}]$$

稱為 *Kaprekar* 常數 C 的 STAN 矩陣。

<u>定義 *3*:</u> 若 C 是 g 進位的 n 位數字，$\overline{C}$ 中數字$q,q-1,\ldots,2,1,0$分別有

$$n_q,n_{q-1},\ldots,n_2,n_1,n_0$$

個， $\overline{C}=q..q(q-1)\ldots(q-1)\ldots2\ldots21\ldots10\ldots0$
以符號記為 $(q|n_q,\ q-1|n_{q-1},\ldots,2|n_2,\ 1|n_1,\ 0|n_0)$，有時也簡記為

$q_{n_q}\ (q-1)_{n_{q-1}}\ldots.1_{n_1}0_{n_0}$ 當沒有數字k時，$n_k=0$，

也可以忽略該項。 例如：98552可記為(9|1, 8|1, 5|2, 2|1) 或記為985_22。

三、文獻推廣

[2]中的引理 5 可進一步推廣至一般g進位的形式。

<u>引理 3-1</u>

若 C 為一g進位 *Kaprekar* 常數，且 C 含有數字$q(=g-1)$，

$$\overline{C}=(q|x+\delta_0,q-1|\delta_1,q-2|\delta_2,\cdots q-i|\delta_i\cdots,1|\delta_1,0|\delta_0)$$

並令$\delta_{q-i}=\delta_i, 1\le i\le s$。

則 C 的 STAN 矩陣

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{ss} \end{pmatrix}, s=[\frac{g}{2}]\text{滿足}$$

(1) 若$i<j$，則$m_{ij}=0$

(2)矩陣各行的和 $\sum_{i=1}^{s} m_{i1}=x+\delta_0$、$\sum_{i=1}^{s} m_{ij}=\delta_j, 2\le j\le s$-1，

若$\delta_s>0$時，有

$$\sum_{i=1}^{s} m_{is}=\delta_s-x\text{。}$$

(3)矩陣中各列的和 $\sum_{j=1}^{s} m_{ij}=\delta_i, 1\le i\le s$。

(4) 若$1\le k\le s+1$,則

$$\sum_{i+j=k,} m_{ij}+\sum_{t+l=2s+3-k} m_{tl}=\delta_{q-k}$$

(5) 當$(i-p)(j-q)<0$時，若$m_{ij}>0$，則 $m_{\text{pq}}=0$。

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2s} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} & m_{s2} & m_{s3} & \dots & m_{ss} \end{pmatrix}$$

事實上仿造引理 1 的思考方式，我們可以略加將 STAN 矩陣推展至g進位 *Kaprekar* 常數，且 C 不含有數字q的情形。以 10 進位的 *Kaprekar* 常數為例，由**定理 A**，C 內數字可兩兩配對成$\{1,8\}$、$\{2,7\}$、$\{3,6\}$、$\{4,5\}$、$\{a,8-a\}$、$\{b,10-b\}$的形式

模仿 STAN 矩陣方式 $\overline{C}=a_1a_2a_3\ldots\ldots a_{n-1}a_n$，將$(a_{n+1-i},a_i)$依

(0,9)	(0,8)	(0,7)	(0,6)	(0,5)
(1,9)	(1,8)	(1,7)	(1,6)	(1,5)
(2,9)	(2,8)	(2,7)	(2,6)	(2,5)
(3,9)	(3,8)	(3,7)	(3,6)	(3,5)
(4,9)	(4,8)	(4,7)	(4,6)	(4,5)

分類可得一矩陣

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & \beta & 0 & 0 \\ 0 & x & c & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & y & d & \delta \\ 0 & 0 & 0 & x & e \end{pmatrix}$$

其中$\alpha, \beta, \gamma, \delta$,$x$, y,x 皆為 0 或 1 且 α+β+γ+δ=0 或 1, 且 x+ y+z=0 或 1。

若α+β+γ+δ=0，因為數字對$\{a, 8-a\}$有一對，故必為$\{4,4\}$。若 x+ y+z=0，因為數字對$\{b, 10-b\}$有一對，故必為$\{5,5\}$。

因此推廣至一般g進位 *Kaprekar* 常數不含有數字 q=g-1 的情形，下列引理 2 成立。

<u>引理 3-2</u>

若 C 為一g進位 *Kaprekar* 常數， 不含有數字 q， $\overline{C}$內數字分別有δ_i對$\{i, q-i\}$, $1 \le i \le s-1$，及一對$\{a, q-1-a\}$與一對$\{b, g-b\}$，$a, b \le s$, $s = [\frac{g}{2}]$

則 C 的 STAN 矩陣為

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & \ddots & \alpha_{s-2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \delta_{s-2} & \alpha_{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & x_{s-2} & \delta_{s-1} \end{pmatrix}, s = [\frac{g}{2}]$$

(1) $\sum_{j=1}^{s-1} \alpha_i = 1$或 0。若$\sum_{j=1}^{s-1} \alpha_i$ =0，則有 C 一對 $\{s-1, s-1\}$

(2) $\sum_{j=1}^{s-2} x_i = 1$或 0。若$\sum_{j=1}^{s-2} x_i$ =0，則有 C 一對 $\{s+1, s+1\}$

四、3-6 進位的 n 位數 *Kaprekar* 常數

因為

$$\overline{T}_{3,n}(\,1|b,\ 0|a) = \begin{cases} (2|b-a+1,\ \ 1|2(a-1),\ \ 0|1) & b \ge a \\ (2|a-b+1,\ \ 1|2(b-1),\ \ 0|1) & a > b \end{cases},$$

所以 3 進位的 *Kaprekar* 常數必包含數字 2，故可設$C = (2|a+x,\ \ 1|b,\ \ 0|a)$ 為 3 進位的 *Kaprekar* 常數其對應的矩陣為$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

依引理 1, $a + b_1 = a + x, b_1 + b_2 = b, b_2 = b - x$，因此$b = 2x$，即$C = (2|a+x,\ \ 1|2x,\ \ 0|a)$

<u>定理 4-1</u>

3 進位的 n 位數 *Kaprekar* 常數為$(2|a+x,\ \ 1|2x,\ \ 0|a)$，其中 $2a+3x = n, a, x$為非負整數。

若C為 4 進位的 *Kaprekar* 常數且 C 不包含數字 3，$\overline{T}_{4,n}(C)=C$由定理 A，C 必可配成若干對$\{1,2\}$及一對$\{i,4-i\}$, 一對$\{i,2-i\}$，因此($2|a,\ 1|b,\ 0|c$) 數字為若干對$\{1,2\}$一對$\{2,2\}$及一對$\{0,2\}$或$\{1,1\}$。因此 $C=(2|a+3,\ 1|a,\ 0|1)$或 $(2|a+2,\ 1|a+2)$

$$\overline{T_{3,n}}(2|a+2,1|a+2)=(3|1,\ 2|a+1,1|a+1,\ 0|1)$$

$$\overline{T_{3,n}}(2|a+3,1|a,0|1)=(3|2,\ 2|a+2,1|a-1,\ 0|1)$$

因此若C為 4 進位的 *Kaprekar* 常數則，C 必包含數字 3 。

設$C=(3|a+x,\ 2|b,\ 1|b,\ 0|a)$ 為 4 進位的 *Kaprekar* 常數其對應的矩陣為$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

依引理 1, $a+b_1=a+x, b_1+b_2=b, b_2=b-x$，因此$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ x & b-x \end{pmatrix}$

<u>定理 *4-2*</u>

4 進位的 n 位數 *Kaprekar* 常數為$(3|a+x,\ 2|b,\ 1|b,\ 0|a)$，其中 $2a+2b+x=n$, a,b,x為非負整數。

上述方法可延伸到 5,6 進位得到下列結果：

<u>定理 *4-3*</u>

(1) 5 進位的 *Kaprekar* 常數為$(4|a+\beta, 3|2\beta,\ 2|2\beta,\ 1|2\beta,\ 0|a), \beta>0$ 或 $(4|a+\gamma,\ 2|2\gamma,\ 0|a)$。

(2) 6 進位的 n 位數 *Kaprekar* 常數有二類，分別為

(a) $(5|a+b,\ 4|b+c,\ 3|b+c,\ 2|b+c,\ 1|b+c,\ 0|a)$，其中$2a+5b+4c=n$
成立條件為： $a=0, b\neq 0, c=0$ 或 $a\neq 0, b=0, c\neq 0$或 $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

(b) $(5|a+b+c,\ 4|b,\ 3|b+c,\ 2|b+c,\ 1|b,\ 0|a)$，
其中$2a+5b+3c=n$，成立條件為： $a=0, b\neq 0, c=0$ 或
$a=0, b=0, c\neq 0$或 $a=0, b\neq 0, c\neq 0$

五、2 進位的 *Kaprekar* 常數及循環數：

將連續 a 個 1 再連續 b 個 0 的數字$1.\ldots\ldots\ldots.10.\ldots0$，以符號記為 $(1|a,0|b)$ (or 1_a0_b) 分成(1) $a\geq b$ 與 (2) $a<b$兩種情形如下:

(1) $a\geq b$

$$\begin{array}{c} 1.\ldots\ldots\ldots.10.\ldots0 \\ 0.\ldots01.\ldots\ldots\ldots.1 \end{array}$$

$T_{2,n}(1|a,0|b)=(1|a,0|b)-(0|b,1|a), n=a+b$ (or $T_{2,n}(1_a0_b)=(1_a0_b)-(0_b1_a)$)

因此 $\overline{T_{2,n}(1|a;0|b)}=(1|a;0|b)$

(2) $a<b$

$$\overline{T_{2,n}(1|a;0|b)} = (1|b;0|a)$$

由前段(1)(2)討論可得，

<u>定理 *5*</u>

由(1)(2)可得若 $a \geq b$ 則 $(1|a;0|b)$的 *n* 位數重排為 Kaprekar 常數；若 $a < b$ 則 $T_{2,n}(1|a;0|b)$為 *Kaprekar* 常數.

六、3 進位的 *Kaprekar* 常數及循環數：

1.定義

<u>**定義 *6-1*:**</u> **對於 3 進位的數字 C，** $\overline{C} = (2|a,1|b,0|c)$，我們以符號$(a,b,c)$表示, a,b,c 為非負整數，稱為 C 的 **3 元序對**。並且引入函數$f(a,b,c)$表示 $\overline{T}_{g,n}(C)$ 3 元序對。稱函數f為 3-*Kaprekar* 函數。

因此，若 C 為 3 進位 *Kaprekar* 常數，即$f(a,b,c) = (a,b,c)$, (a,b,c)為 C 的 3 元非負整數序對。 若 C 為 *k*-階 *Kaprekar* 循環數，則$f^k(a,b,c) = (a,b,c)$。其中

$$f^k(a,b,c) \equiv f(f^{k-1}(a,b,c)),\ f^1(a,b,c) = f(a,b,c)\text{。}$$

底下依 3 元非負整數序對分類討論 3-*Kaprekar* 函數：

(1) $(a,b,c) = (a,0,0)$或$(0,b,0)$ 或$(0,0,c)$

(2) $a = 0, bc \neq 0$ 或 $b = 0, ac \neq 0$ 或 $c = 0,\ ab \neq 0$

(3) $abc \neq 0$

2.第(1)(2)類 3 元非負整數序對

(1) 顯然 $f(n,0,0) = f(0,n,0) = f(0,0,n) = (0,0,0) = (0|n)$ 是一無聊情形。

(2) 若 $b = 0, ac \neq 0$，且$a > c$

$$(2|c,2|a-c,0|c) - (0|c,2|a-c,2|c)) = (2|c-1,1,2|a-c,0|c-1,1)$$

$$\overline{(2|c-1,1,2|a-c,0|c-1,1)} = (2|a-1,1|2,0|c-1)$$

因此， $f(a,0,c) = (a-1,2,c-1))$

同樣的方式直接計算可求得$a = c$及$a < c$情形。

$$f(a,0,c) = \begin{cases} (a-1,2,c-1) & a > c \\ (a-1,2,c-1) & a = c \\ (c-1,2,a-1) & a < c \end{cases}$$

類似前段的方式計算可求得

$$f(0,b,c) = \begin{cases} (b-c+1,2(c-1),1) & b > c \\ (1\qquad ,2(c-1),1) & b = c \\ (c-b+1,2(c-1),1) & b < c \end{cases}$$

$$f(a,b,0)=\begin{cases}(a-b+1,2(b-1),1) & a>b\\ (1\ \ ,a+b-2,1) & a=b\\ (b-a+1,2(a-1),1) & a<b\end{cases}$$

因此，3 元序對 3-*Kaprekar* 函數變換下的行為：

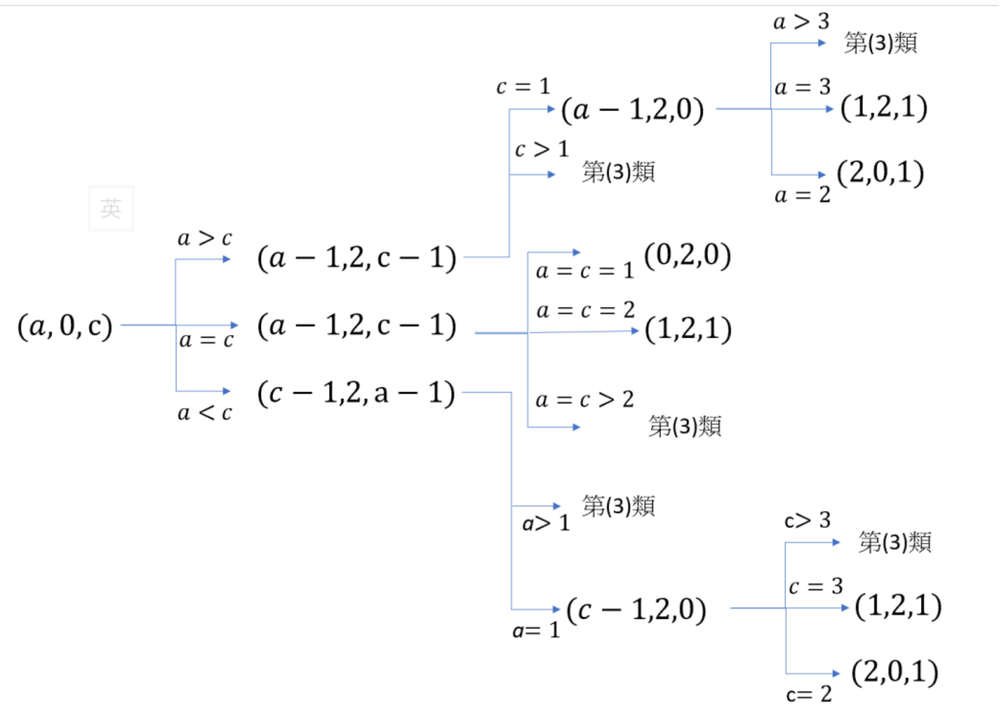


圖 1. (*a*,0,*c*)在 *Kaprekar* 函數變換下的行為

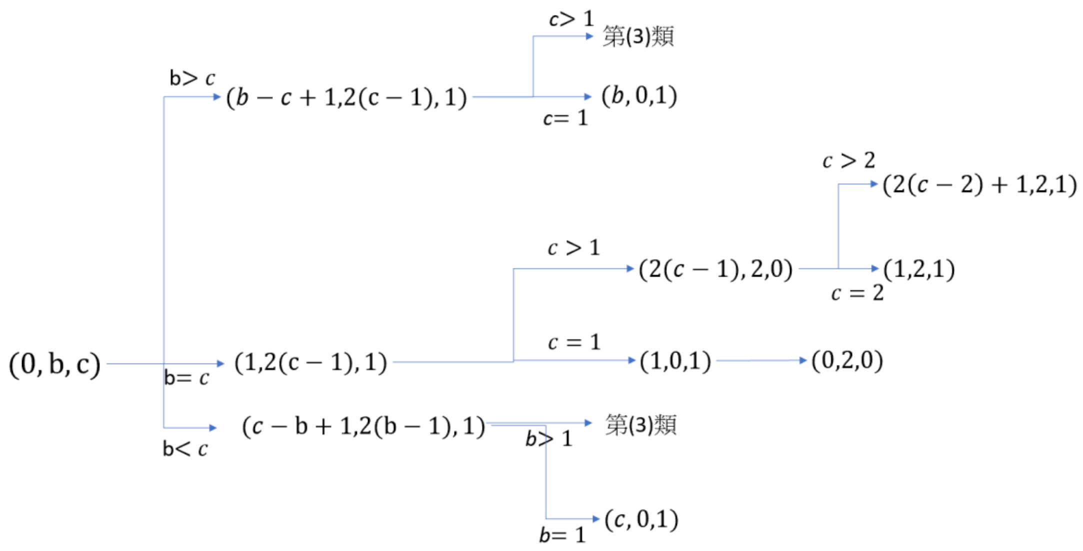


圖 2. (0,*b*,*c*)在 *Kaprekar* 函數變換下的行為

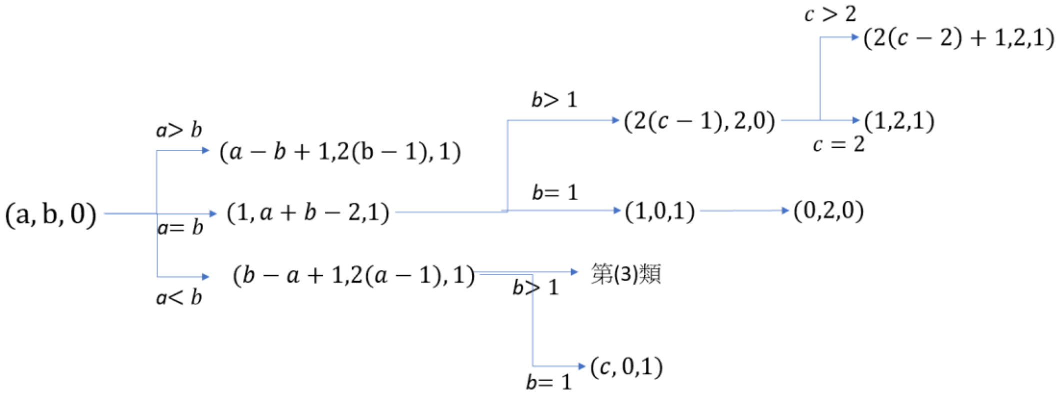


圖 3. (*a,b,0*)在 *Kaprekar* 函數變換下的行為

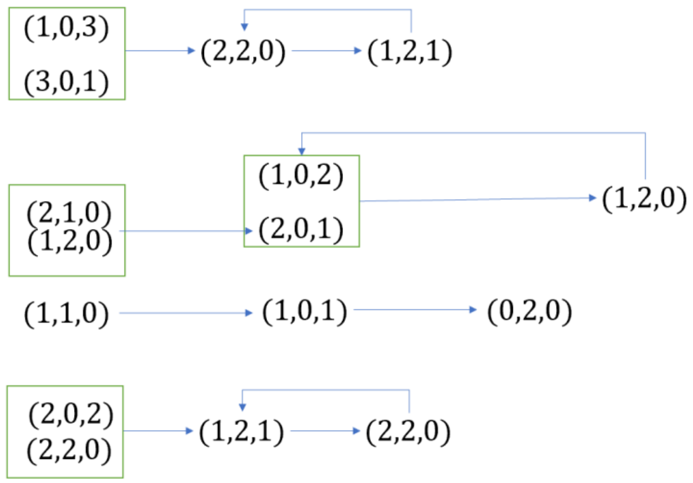


圖 4. 序數(*1,0,3*)、(*3,0,1*) 、(*2,0,2*) 、(*2,2,0*) 、(*1,2,1*) 、(*1,2,0*) 、(*2,1,0*) 、(*1,0,2*) 、(*2,0,1*) 、(*1,0,1*) 、(*1,1,0*) 、(*0,2,0*)在 *Kaprekar* 函數變換下的行為

3 元非負整數序對(*a,b,c*)恰有一個為 0 時，在 *Kaprekar* 函數變換下的行為滿足下列定理 6-1：

定理 6-1 . 3 元非負整數序對(*a,b,c*)恰有一個為 0 時，*Kaprekar* 函數變換下的行為滿足

(1) $f(f(2,0,1))=(2,0,1)$；$f(f(3,0,1))=(1,2,1)$；$f(f(1,0,1))=(0,2,0)$；$f(f(2,0,2))=(1,2,1)$；$f(f(1,0,3))=(1,2,1)$；$f(f(1,0,2))=(2,0,1)$，其餘情形 $f(f(a,0,c))$為第(3)類非負整數序對。

(2) $f(f(0,1,1))=(1,0,1)$；$f(f(0,2,2))=(1,2,1)$；$f(f(0,b,1))=(b,0,1)$, $b>1$；$f(f(0,1,c))=(c,0,1)$, $c>1$，其餘情形 $f(f(0,b,c))$為第(3)類非負整數序對。

(3) $f(f(1,1,0))=(0,2,0)$；$f(f(2,2,0))=(1,2,1)$；$f(f(1,b,0))=(b,0,1)$, $b>1$ 其餘情形 $f(f(a,b,0))$為第(3)類非負整數序對。

(4) 三元數(*1,0,3*)、(*3,0,1*) 、(*2,0,2*) 、(*2,2,0*) 、(*1,2,1*) 、(*1,2,0*) 、(*2,1,0*) 、(*1,0,2*) 、(*2,0,1*) 、(*1,0,1*) 、(*1,1,0*) 、(*0,2,0*)如圖 4 所描述。

3. *Kaprekar* 函數的分類：

本文中 3 進位 3 元序對(a,b,c) 在 Kaprekar 變換下的行為、Kaprekar 數對(p,q) 在 Kaprekar 變換下的行為、$2^n \ mod \ P \ , P = p + q$的行為都以 excel 實際計算測試列在附錄中。

I. 若 $a \geq b + c$

$$(2|a,1|b,0|c) - (0|c,1|b,2|a)) = (2|c,1|b-1,,0,2|a-b-c,1|b,0|c-1,1)$$

$$\overline{(2|c,1|b-1,,0,2|a-b-c,1|b,0|c-1,1)} = (2|a-b,2b,c)，$$

因此有 $f(a,b,c) = (a-b,2b,c)$

II. 若 $c < a < b + c$

$$(2|a,1|b,0|c) - (0|c,1|b,2|a)) = (2|c,1|a-c-1,,0,2|b+c-a,1|a-c,0|c-1,1)$$

$$\overline{(2|c,1|a-c-1,,0,2|b+c-a,1|a-c,0|c-1,1)} = (2|b+2c-a, \quad 1|2(a-c),0|c)$$

因此 $f(a,b,c) = (b+2c-a,2(a-c),c)$

III. 若 $a = c$

$$(2|a,1|b,0|c) - (0|c,1|b,2|a)) = (2|a-1,1,2|b,,0|c-1, \quad 1)$$

$$\overline{(2|a-1,1,2|b,,0|c-1, \quad 1)} = (2|a+b-1, \quad 1|2,0|a-1)$$

因此 $f(a,b,c) = (a+b-1,2,a-1)$

IV. 若 $a < c < a + b$

$$(2|a,1|b,0|c) - (0|c,1|b,2|a)) = (2|a,1|c-a-1,0,2|b-c+a,, \ 1|c-a, \ 0|a-1,1)$$

$$\overline{(2|a,1|c-a-1,0,2|b-c+a,, \ 1|c-a, \ 0|a-1,1)} = (2|2a+b-c, \ 1|2(c-a),0|a)$$

因此 $f(a,b,c) = (2a+b-c,2(c-a),a)$

V. 若 $a + b \leq c$

$$(2|a,1|b,0|c) - (0|c,1|b,2|a)) = (2|a,1|b-1,0,2|c-a-b,, \ 1|b, \ 0|a-1,1)$$

$$\overline{(2|a,1|b-1,0,2|c-a-b,, \ 1|b, \ 0|a-1,1)} = (2|c-b, \ 1|2b,0|a)$$

因此 $f(a,b,c) = (c-b,2b,a)$

<u>定義 *6-2:*</u> 3 元正整數序對(a,b,c), 依前面 I、II、III、IV、V 的條件，分別稱為 3 元數對(a,b,c)為 type I、type II、type III、type IV、type V。分別記為 (3)-I、(3)-II、(3)-III、(3)-IV、(3)-V。

<u>性質 6-2.</u> 3 元正整數對(a,b,c), f 為 3-*Kaprekar* 函數，則$f(a,b,c) = f(c,b,a)$。

証明：

若 $a = c$, 則 $(a,b,c) = (c,b,a)$

否則$a > c$或$a < c$。 假設$a > c$ ($a < c$的情形推論是類似的)

若 $f(a,b,c)$為前段 I，則$f(c,b,a)$為前段 V；若 $f(a,b,c)$為前段 II，則$f(c,b,a)$為前段 IV。由前面 I、II、IV、V 的公式可得証。

<u>**性質 6-3.**</u> 3 元正整數序對(a,b,c),為 f的固定點，則$b = 2(a-c)$。

証明：分別考慮(a,b,c)為 type I、type II、type III、type IV、type V 的情形。只有 type II 時， $(a,b,c) = (b+2c-a, 2(a-c), c)$ 可得 $b = 2(a-c)$ 。

系理 6-4. 非負整數a,b,c， $(2|a, 1|b, 0|c)$滿足 $b = 2(a-c)$為 3 進位的 *Kaprekar* 常數；反之 3 進位的 *Kaprekar* 常數也必為$(2|a, 1|b, 0|c)$, $b = 2(a-c)$的形式。

証明： 由 <u>**定理 *6-1***</u> 及<u>**性質 6-3**</u>的結果可推知 。

系理 6-4..與前一節的<u>**定理 4-1**</u>是等價的。

<u>**性質 6-5.**</u> 3 元非負整數對(a,b,c),且$f(a,b,c) = (A,B,C)$。若$ABC = 0$((1)或(2)類)，則(a,b,c)為$(1,b,1)$，且$f(1,b,1) = (b,2,0)$。

由定理 8 及性質 3 可以得：

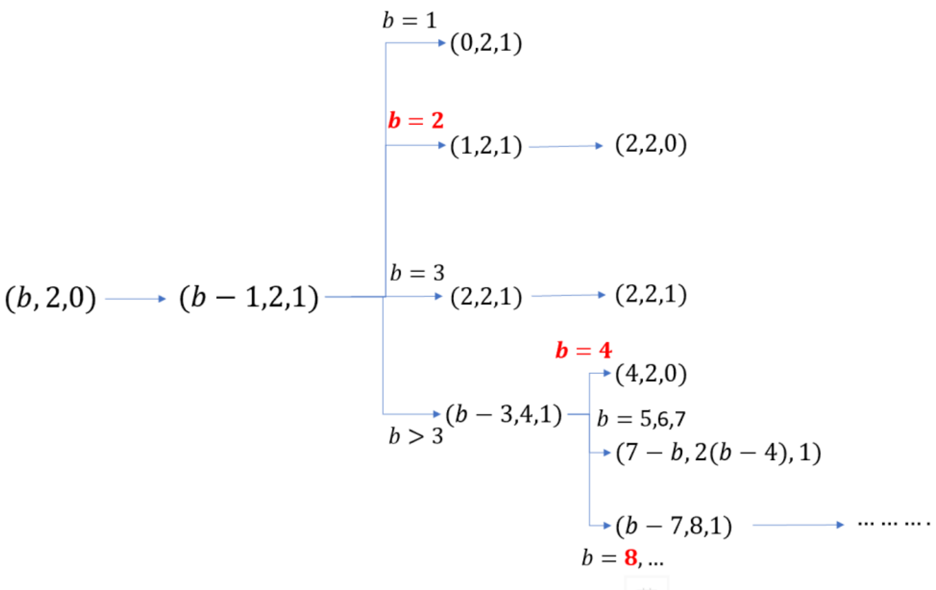


圖 5. 三元數(b,2, 0)在 *Kaprekar* 函數變換下的行為

<u>**性質 6-6.**</u> 3 元正整數序對(a,b,c)是(3)-I 類，則下列性質成立：

(1) 若 $a = (2^n - 1)b + c$，則 $f^n(a,b,c) = (c, 2^n b, c)$。

(2) 若 $a = (2^n - 1)b + \alpha, c < \alpha < 2^n b + c$，則 $f^n(a,b,c) = (\alpha, 2^n b, c)$。

若令$(a_n,\ b_n,\ c_n) = f^n(a,b,c)$，由性質 4 可知 3 元正整數序對$(a,b,c)$的運算流程如下，

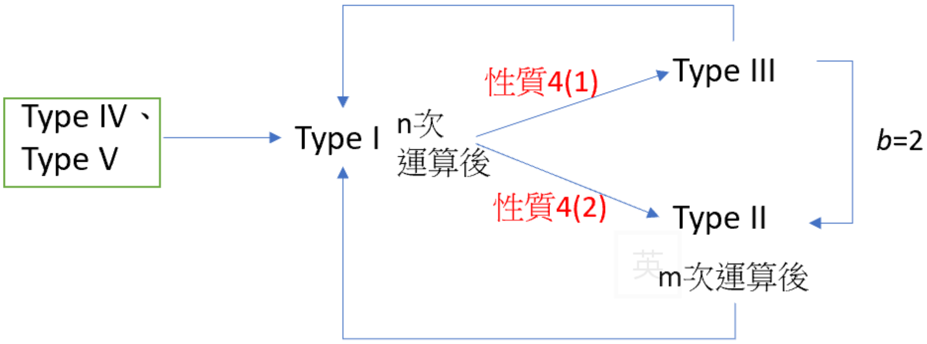


圖 6. (3)-I~V 類在 *Kaprekar* 函數變換下的行為

若(a,b,c)為(3)-IV、或(3)-V 則(c,b,a)為(3)-II、或(3)-I 的情形故由性質 1 知(3)-IV、或(3)-V 等價於(3)-II、或(3)-I 的情形；再由性質 3、4 知，當$a=(2^n-1)b+1,\ c=1$時，$f(a,b,c)$為(2)類，否則為(3)-I，(3)-II。

因此接下來考慮(a,b,c)為(3)-I、或(3)-II 的情形，即

$$f(a,b,c)=\begin{cases}(a-b,2b,c) & (3)-I\\ (b+2c-a,2(a-c),c) & (3)-II\end{cases}$$

4.平面線性變換M_1、M_2與 Kaprekar 數對

觀察$(a',b',c')=f(a,b,c)$，$a'+\ b'+\ c'=a+b+c$及$c'=c$。定義 2 個平面線性變換M_1、M_2如下：

<u>**定義 *6-3*:**</u>

(1) $M_1\binom{p}{q}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\binom{p}{q}.$

(2) $M_2\binom{p}{q}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\binom{p}{q}.$

若 3 元正整數序對(a,b,c)，滿足 (3)-I、(3)-II 條件且$(a',b',c')=f(a,b,c)$時，令$p=a-c,\ q=b$及$p'=a'-c',\ q'=b'$。若(a,b,c)，滿足 (3)-I，$a'-c'=\ a-b-c=(a-c)-b=p-q$，$q'=b'=2b=2q$，因此$M_1\binom{p}{q}=\binom{p'}{q'}$。類似的方法可求得若$(a,b,c)$，滿足 (3)-II 時$M_2\binom{p}{q}=\binom{p'}{q'}$。因此 3-kaprekar 函數在(3)-I、(3)-II 的表現分別與變換M_1、M_2相同。

以 3 元數對(78,3,2)為例

$$(78,3,2)\to(75,6,2)\to(69,12,2)\to(57,24,2)\to(33,48,2)\to(19,62,2)\to\cdots$$

對應的 Kaprekar 數對為

$$(76,3)\to(73,6)\to(67,12)\to(55,24)\to(31,48)\to(17,62)\to\cdots$$

3 元數對(78,3,2) → ⋯ → (33,48,2) (3)-I 條件，直到(33,48,2) → (19,62,2)是(3)-II 條件。

$$\begin{tikzcd}
(a,b,c) \arrow[r, "typeI(II)\ karprekar\ function"] \arrow[d, "\begin{matrix} p=a-c \\ q=b \end{matrix}"'] & (a',b',c') \arrow[d, "\begin{matrix} p'=a'-c' \\ q=b' \end{matrix}"] \\
(p,q) \arrow[r, "M_i,\quad i=1{,}2"] & (p',q')
\end{tikzcd}$$

圖 7. 3 元正整數序對(a,b,c)轉換成(p,q)

若 3 元正整數序對(a,b,c) 滿足 (3)-I 條件，即 $abc \neq 0$,且$a \geq b+c$ 轉換成(p,q) 條件，即為p,q正整數且$\frac{p}{q}>1$。若 3 元正整數序對(a,b,c) 滿足 (3)-II 條件，轉換成(p,q) 條件，即為p,q正整數且$\frac{p}{q}<1$。

定義 6-4: (1)3 元正整數序對(a,b,c)，滿足$a>c$時，令$p=a-c,\ q=b$，則稱(p,q)為(a,b,c)的 Kaprekar 數對。

(2) **正整數**p,q，滿足$\frac{p}{q}>1$，稱(p,q)為第一類 Kaprekar 數對；否則為第二類 Kaprekar 數對。

(3) 當(p,q)為第一類及第二類 Kaprekar 數對時，函數$F(p,q)$分別為$M_1\binom{p}{q}$及$M_2\binom{p}{q}$。

(4) 若x為正有理數，且$x=\frac{p}{q}$ ，(p,q)為 Kaprekar 數對，$F(p,q)=(p',q')$，規定 $g(x)=\frac{p\prime}{q\prime}$。

顯然$g(x)$的定義域為正有理數。因為M_1、M_2為線性變換，因此$g(x)$的定義是有意義的。

$$M_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

故

$$M_1{}^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1-2^n\\0 & 2^n\end{pmatrix}$$

$$M_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

故

$$M_2{}^k=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2(-2)^k & 1-(-2)^k\\2(1-(-2)^k) & 2+(-2)^k\end{pmatrix}$$

令$\binom{p_n}{q_n}=M_1{}^n\binom{p}{q}$, 令$x=\frac{p}{q}$則$(p_n,q_n)$為第一類 Kaprekar 數對的條件為$\frac{p_n}{q_n}>1$，

$$\frac{p+(1-2^n)q}{2^nq}>1 \Rightarrow \frac{1}{2^n}(x+1)>2，$$

化簡可得

$$x > 2^{n+1} - 1.$$

因此，(p_n, q_n)為第二類 Kaprekar 數對的條件為

$$x < 2^{n+1} - 1。$$

例如$(p,q) = (76,3)$時，$2^4 - 1 < \frac{76}{3} = 25\frac{1}{3} < 2^5 - 1$

$$(76,3) \to (73,6) \to (67,12) \to (55,24) \to (31,48) \to (17,62)$$

(76,3)、(73,6)、(67,12)、(55,24)為第一類 Kaprekar 數對；(31,48)為則第二類 Kaprekar 數對。

引理 6-7.

已知 (p,q)為第一類 Kaprekar 數對，令$x = \frac{p}{q}$>1，$(p_k, q_k) = F^k(p.q)$，

(1) 當x >1 時，$g(x) = \frac{x-1}{2}$ 。

(2) 若$x \in (2^n - 1,\ 2^{n+1} - 1)$，則$(p_1, q_1), \dots, (p_{n-1}, q_{n-1})$ 為第一類 Kaprekar 數對，且 (p_n, q_n) 為第二類 Kaprekar 數對，且 $g^r(x) = \frac{x+1}{2^r} - 1,\ r = 1,2, \dots, n$

(3) 若$x = 2^{n+1} - 1$，則$(p_n, q_n) = (0, 2^{n+1})$。

Note：上面引理 5(2)中(p_k, q_k)，在$k < n$時皆為 Kaprekar 數對，但(p_n, q_n)則不是。

証明：

(1) 若$\frac{p}{q}$>1，(p,q)為第一類 Kaprekar 數對，由定義 6-3 及定義 6-4 知$M_1\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q \\ 2q \end{pmatrix}$，$g(x) = \frac{p-q}{2q} = \frac{\frac{p}{q}-1}{2} = \frac{x-1}{2}$ 。

(2) $g^2(x) = g(g(x)) = \frac{x+1}{2^2} - 1$， $g^{r+1}(x) = g(g^r(x)) = \frac{1}{2}(\frac{x+1}{2^r} - 1) - 1)$

由數學歸納法知(2)成立。

(3) 直接代入$g^n(x) = \frac{x+1}{2^n} - 1$，計算可得。

類似地計算二類 Kaprekar 數對運算多少次後會變成第一類 Kaprekar 數對呢?

(p,q)為第二類 Kaprekar 數對，即 $\frac{p}{q} < 1$，$\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = {M_2}^k \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，則 $\frac{p_k}{q_k} > 1$等同於

$$(1 + 2(-2)^k)\,p + (1 - (-2)^k)q > (2(1 - (-2)^k))p + (2 + (-2)^k)q,$$

令$x = \frac{p}{q}$<1，顯然 $0 < x < 1$，

若 k 為奇數，

$$x < \frac{2(-2)^k + 1}{-1 + 4(-2)^k};$$

若 k 為偶數，

$$x > \frac{2(-2)^k+1}{-1+4(-2)^k};$$

<u>定義 6-5</u>: 數列$\langle\beta_k\rangle$, 其中$\beta_k = \frac{2(-2)^k+1}{-1+4(-2)^k}, k = 1,2,3,\ldots$，稱為第二類 Kaprekar 數列。

對於數列 $\langle\beta_k\rangle$: $1, 1/3, 3/5, 5/11, 11/21, \ldots$，我們有以下性質：

<u>引理 6-8</u>. $\langle\beta_k\rangle$為第二類 Kaprekar 數列，則

(1) $0 < \beta_1 < \beta_3 < \cdots < \frac{1}{2}$，且$\frac{1}{2} < \cdots < \beta_4 < \beta_2 < 1$。

(2) $\lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \beta_{2n}$

証明：(1) 由定義$\beta_k = \frac{2(-2)^k+1}{-1+4(-2)^k}, k = 1,2,3,\ldots$，可直接計算而得。

(2) 由(1)，及

$$|\beta_{2n} - \beta_{2n+1}| = \left|\frac{2(-2)^{2n}+1}{-1+4(-2)^{2n}} - \frac{2(-2)^{2n+1}+1}{-1+4(-2)^{2n+1}}\right| = \frac{9(-2)^{2n+1}}{(-1+4(-2)^{2n+1})(-1+4(-2)^{2n})} < \frac{9}{4(2)^{2n}}$$

故由夾擠定理可得。

Remark：(OEIS A001045) Jacobsthal sequence (or Jacobsthal numbers):

J(n) = J(n-1) + 2*J(n-2), with J(0) = 0, J(1) = 1.則 $\beta_k = \frac{J(k)}{J(k+1)}$

若以 Kaprekar 數對(p,q)的比值 $x = \frac{p}{q}$ 為指標來考慮 Kaprekar 變換。當$x > 1$為(p,q)為第一類 Kaprekar 數對，否則為第一類 Kaprekar 數對。因此可以考慮

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow g^2(x) \longrightarrow \cdots \longrightarrow g^n(x)$$

$g^n(x)$的值是否比 1 大或小。

$$\begin{tikzcd}
(a,b,c) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{p=a-c,\ q=b}"'] & (a_1,b_1,c_1) \arrow[r, "f"] & \ldots \arrow[r, "f"] & (a_n,b_n,c_n) \arrow[d, "{p_n=a_n-b_n,\ q_n=b_n}"] \\
(p,q) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "x=\frac{p}{q}"'] & (p_1,q_1) \arrow[r, "F"] & \ldots \arrow[r, "F"] & (p_n,q_n) \arrow[d, "g^n(x)=\frac{p_n}{q_n}"] \\
x \arrow[r, "g"] & g(x) \arrow[r, "g"] & \ldots \arrow[r, "g"] & g^n(x)
\end{tikzcd}$$

圖 8. 3 元正整數序對(a,b,c)轉換成(p,q)與 Kaprekar 函數$g(x)$

引理 6-9.

函數$g(x)$的定義如**<u>定義 5(4)</u>**，**數列**$\langle\beta_k\rangle$如定義 6，x為小於 1 的正有理數，則

(1) 若$x \in (2^n - 1, 2^{n+1} - 1), n = 1,2,3\ldots$，則$g^r(x) = \frac{1+x}{2^r} - 1, 1 \le r \le n$

(2) 若$0 < x < 1$，$g(x) = \frac{1-x}{2x}$

(3) $g(\beta_k) = \beta_{k+1}, k = 0,1,2,3, \ldots$，$\beta_0 = 1$

(4) g：$(\beta_{2k+1}, \beta_{2k+3}) \longrightarrow (\beta_{2k}, \beta_{2(k+1)})$是 1-1 映成(onto)函數。

(5) g：$(\beta_{2k+2}, \beta_{2k}) \longrightarrow (\beta_{2k-1}, \beta_{2k+1})$是 1-1 映成(onto)函數。

証明：(1)為引理 6-7 的結果

(2) $x < 1$時，

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} qx \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x+1)q \\ 2xq \end{pmatrix},$$

因此 $g(x) = \frac{1-x}{2x}$

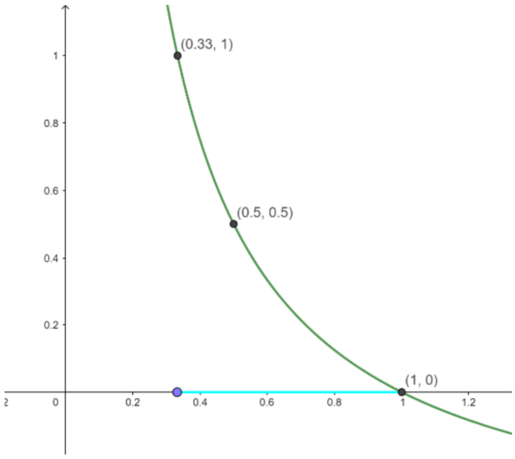
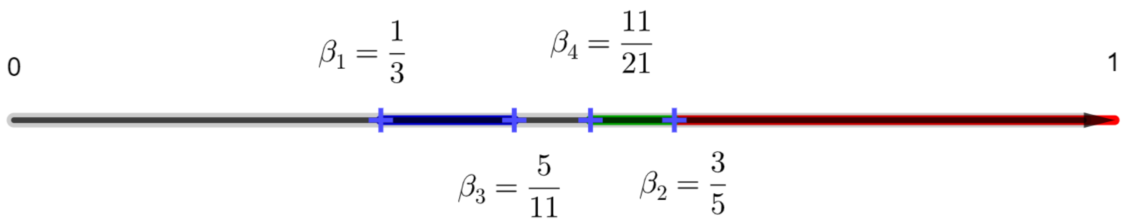


圖 9. 3 元 Kaprekar 函數$g(x)$在(0,1)的圖形

(4)(5) 因為$g(x) = \frac{1-x}{2x}$ 在$(0, \infty)$是嚴格遞減函數，且$g(\beta_{k+1}) = \beta_k$，故可得。



結合引理 6-7, 6-8, 6-9，可知

若x是區間(0,1)上的有理數，

$$g(x) = \frac{1-x}{2x};$$

若x是區間$(1, \infty)$上的有理數，

$$g(x) = \frac{1+x}{2} - 1;$$

$g(1) = 0$。

若將$g(x)$的定義延拓到所有正實數，即

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{2x} & 0<x\le 1\\ \frac{1+x}{2}-1 & x>1\end{cases},$$

顯然$g(x)$是連續函數且$g(x)$的值域是所有正實數。

$g(x)$在區間$(0,1),(1,3),\cdots,(2^n-1,\ 2^{n+1}-1),\cdots$ 上是不斷重複的結構

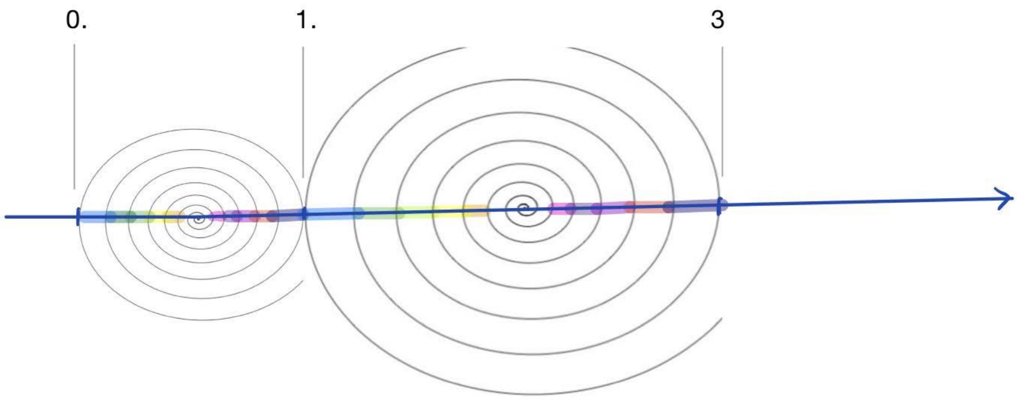
因為$g:(2^n-1,\ 2^{n+1}-1)\longrightarrow(2^{n-1}-1,\ 2^n-1)$，$g(x)=\frac{x+1}{2}-1$。是 1-1, 映成的函數

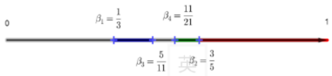
$$(2^n-1,2^{n+1}-1)\longrightarrow(2^{n-1}-1,2^n-1)\longrightarrow\ldots\longrightarrow(3,1)\longrightarrow(0,1)$$

當(p,q)為第一類 Kaprekar 數對，則會不斷地映射至$g^n(x)<1$止，此時當(p_n,q_n)為第二類 Kaprekar 數對，依 $g^n(x)\in(\beta_{2m-1},\beta_{2m+1})$ 或 $g^n(x)\in(\beta_{2m},\beta_{2(m+1)})$，可以計算

$$g^{n+2m-1}(x)\in(0,\tfrac{1}{3})\text{ 或 }g^{n+2m}(x)\ \in(0,\tfrac{1}{3})$$

$g(2.5)=0.75, g^2(0.75)=\frac{1}{6}$，$g^3(\frac{1}{6})=2.5$ ，因此$x=\frac{1}{6},0.75,2.5$都是 3-週期點。



(0,1): 

(1,3):

(3,7): 

⋮

$(2^n-1,2^{n+1}-1)$:

⋮

(p,q)為 Kaprekar 數對，$F(p,q)=(p',q')$，因為$p+q=p'+q'$，由$g(x)$的定義可知

$$F(qx,q)=\left(\frac{g(x)(1+x)q}{1+g(x)},\frac{(1+x)q}{1+g(x)}\right)$$

因此，若 $g(x)=x$ 對應 Kaprekar 數對 (p,q)，也會是固定點，進而回推到原來三元正整數對 (a,b,c) 也是 Kaprekar 常數；$g(x)$的 k 週期點也對應 k-階 *Kaprekar* 循環數，由引理 7(2)知 $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{2}$ ，對應性質 2 中的條件$b=2(a-c)$。

因為引理 5 中已經描述了若(p,q)為第一類 Kaprekar 數對的變換行為，對於 (p,q)為第二類 Kaprekar 數對，考慮$g(x)$及引理 6-9，可得下列結果 ：

定理 6-10.

若 (p,q)為第二類 Kaprekar 數對，令

$$x=\frac{p}{q}\text{，}(p_k,q_k)=F^k(p,q)\ \text{則}$$

(1) $x\in(0,\beta_1)$，則$F(p,q)$ 為第一類 Kaprekar 數對；

(2) $x\in(\beta_2,1)$，則$F(p,q)$ 為第二類 Kaprekar 數對，$F^2(p,q)$ 為第一類 Kaprekar 數對；

(3) $x\in(\beta_1,\beta_3)$，則$F(p,q)$、$F^2(p,q)$ 為第二類 Kaprekar 數對，$F^3(p,q)$ 為第一類 Kaprekar 數對；

(4) $x\in(\beta_4,\beta_2)$，則$F^k(p,q),k=1,2,3$ 為第二類 Kaprekar 數對，$F^4(p,q)$ 為第一類 Kaprekar 數對；

(5) $x\in(\beta_{2m-1},\beta_{2m+1})$，則$F^k(p,q),k=1,\dots,2m$ 為第二類 Kaprekar 數對，$F^{2m+1}(p,q)$ 為第一類 Kaprekar 數對；

(6) $x\in(\beta_{2m},\beta_{2(m+1)})$，則$F^k(p,q),k=1,\dots,2m+1$ 為第二類 Kaprekar 數對，$F^{2m+2}(p,q)$ 為第一類 Kaprekar 數對.

(7) 若$x=\frac{1}{2}$，則 $(p_k,q_k)=(p,q)$。

<u>Note:</u>

$g(1)=0$，但$x=0$,是$g(x)$的奇點，沒有定義， $x=1$，對應$a-c=b$，此時 $(a,b,c)=(b+c,b,c)$，

$$1\xrightarrow{g}0$$

$$(b+c,b,c)\xrightarrow{f}(c,2b,c)\xrightarrow{f}(c+2b-1,2,c-1)$$

$(c+2b-1,2,c-1)$ 對應$x=b$，來推算 *Kaprekar* 變換。若 b=1，則接著計算下去一樣會再次碰到$g(x)$的奇點問題，但此時

若$c=1$，$(2,1,1)\xrightarrow{f}(1,2,1)$。

若$c=2$，$(1+c,1,c)\xrightarrow{f}(c,2,c)\xrightarrow{f}(c+1,2,c-1)\xrightarrow{f}(1,4,1)$。

(1,2,1)和$(1,4,1)$的發展在前面性質 3 皆已描述過。

若$c>2$，

$$(1+c,1,c)\xrightarrow{f}(c,2,c)\xrightarrow{f}(c+1,2,c-1)\xrightarrow{f}(c-1,4,c-1)\xrightarrow{f}(c+2,2,c-2)\xrightarrow{f}(c,4,c-2)$$

$(c,4,c-2)$ 是 Kaprekar 常數。

七、 定理 7

前一節以$g(x)$ 討論對應的 Kaprekar 數對 (p,q)進而了解，原來三元數對(a,b,c) 的 Kaprekar 變換行為，$g(x)$的固定點對應 Kaprekar 常數，$g(x)$的 k 週期點對應 k-階 *Kaprekar* 循環數。但是否每一個 3 進位數都是 *Kaprekar* 常數或循環數呢? 根據後面的定理 7，答案是肯定的。

(p,q)為 Kaprekar 數對，令 $(p_k,q_k)=F^k(p,q)$，則 $p+q=p_k+q_k$

$$M_1\binom{p}{q}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\binom{p}{q}.$$

$$M_2\binom{p}{q}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\binom{p}{q}.$$

$$q_1=2q,\ \ p_1=P-q_1, p+q=P\ ,\ \ p\equiv -q\ \ (mod\ \ P)$$

因此

$$q_1\equiv 2^1\times q\ \ (mod\ \ P)\text{，}p_1\equiv -q_1\ \ (mod\ \ P)$$

$$p_1=2p,\ \ q_1=P-p_1$$

因此

$$p_1\equiv 2^1\times p\ \ (mod\ \ P)\text{，}q_1\equiv -p_1\ \ (mod\ \ P)$$

不論 (p,q) 是第一類或第二類 Kaprekar 數對，都滿足

$$x_n\equiv 2^n x\ \ (mod\ \ x+y), \text{且} y_n\equiv -x_n\ \ (mod\ \ x+y)$$

引理 7-1.

(p,q)為 Kaprekar 數對，令$p+q=P,$ 且 $(p_n,q_n)=F^n(p,q)$，則$q_n\equiv 2^n q\ \ (mod\ \ P)$

引理 7-2.

數列 $[1],\ [2],[2^2],\ \cdots,[2^n],\cdots$ 是週期循環的。即必存在相異正整數r,s，滿足

$$2^r\equiv 2^s\ \ (mod\ \ P)$$

若$P=2^rQ$，Q為一正奇數 $Ord_P(2)$整除$\varphi(Q)$，其中$\varphi(a)$是與小於正整數a且與a互質的正整數個數，即尤拉函數。例如：$\varphi(3)=2, \varphi(18)=6, \varphi(10)=3$

$$Ord_P(2)=\min_k\{k=|r-s|\,|\,\text{相異正整數}r,s\text{，滿足}2^r\equiv 2^s\ \ (mod\ \ P)\}$$

Note：當P為一奇數時，數列$\langle Ord_{2n+1}(2)\rangle$：1, 2, 4, 3, 6, 10, 12, 4, 8, 18, 6, 11, 20, 18, 28, 5, 10, 12, 36, 12, 20, 14, 12, 23, 21, 8, 52, 20, 18, 58, 60, 6, 12, 66, 22, 35, 9, 20, 30, 39, 54, 82, 8, 28, 11, 12, 10, 36, 48, 30, 100, 51, 12, 106, 36, 36, 28, 44, 12, 24, 110, 20, 100, 7, 14, 130, 18, 36, 68, 138, 46, 60, 28,⋯

如 OEIS 網站上編號 A002326 的數列

若$P=2^r(2n+1), r$是非負整數，則

$$Ord_P(2)=\ Ord_{2n+1}(2)$$

數列 $[1],\ [2],[2^2],\ \cdots,[2^n],\cdots$的週期即為$Ord_P(2)$。由引理 7-1,7-2 可得，

定理 7.

若(p,q)為 Kaprekar 數對，令$p+q=P,$ 且 $(p_k,q_k)=F^k(p,q)$，則存在正整數K，且當$l=Ord_P(2)$ 時，對所有 $k\geq K$，

$$(p_{k+l},q_{k+l})=\ (p_k,q_k)\text{成立。}$$

系理 7-3.

對於 3 進位的數字 C， $\overline{C}=(2|a,1|b,0|c)$，$(a,b,c)\neq(1,2^r,1)$或 $(2^r,1,1)$的三元正整數對時，$T_{3,n}^K(C)$必是 Kaprekar 循環數，且

$$Ord(C)=Ord_{a-c+b}(2)$$

肆、研究結果與討論

引理 3-1 及引理 3-2 有助於找出一般g進位含有及不含有數字 *q*=*g*-1 情形時 *Kaprekar* 常數的充要條件，因此在接下來的定理 4-1~3 我們分別得出 3, 4,5,6 進位 *Kaprekar* 常數的形式：

(1) 3 進位的 n 位數 *Kaprekar* 常數為$(2|a+x,\ 1|2x,\ 0|a)$，其中 $2a+3x=n,a,x$為非負整數。

(2) 4 進位的 n 位數 *Kaprekar* 常數為$(3|a+x,\ 2|b,\ 1|b,\ 0|a)$，其中 $2a+2b+x=n,a,b,x$為非負整數。

(3)更進一步，我們研究一般所有 2, 3 進位的 n 位數，在 Kaprekar 變換下的行為，2 進位的結果得

<u>**定理 *5***</u> 由(1)(2)可得若 $a\geq b$ 則 $(1|a;0|b)$的 *n* 位數重排為 Kaprekar 常數；若 $a<b$ 則 $T_{2,n}(1|a;0|b)$為 *Kaprekar* 常數.

3 進位的結果則是複雜許多，但藉由引進 Kaprekar 數對(p,q,)及比值$x=\frac{p}{q}$，和函數 g(x)，結果如定理 6-1, 6-10 所描述。最後經由考慮$Ord_{p+q}(2)$，我們得到了所有 3 進位數在 Kaprekar 變換下的行為。描述如定理 7，系理 7-3。

伍、結論與應用

1. 在<u>定義 *5*</u>(4)引入的函數$g(x)$可以用來刻劃 Kaprekar 變換。函數$g(x)$似乎會出現 Chaos 的現象。

2. 在本文第四段討論了 3-6 進位的 n 位數 *Kaprekar* 常數的形式，在[4]中 b-進位 n-位數的 Kaprekar 常數分成 regular 和 non-regular 兩類。當 Kaprekar 常數的每一個位數數字不同稱此 Kaprekar 常數為 regular；否則為 non-regular。而[4]得到了些 regular 的 Kaprekar 常數之公式。藉由本文的方法也可以進一步分析找尋相關的公式。

3. 一般 *b* 進位的 *Kaprekar* 循環數，及 Kaprekar 變換是否可以延伸本文的方法，結構上會是如何? *Kaprekar* 循環長度是否也跟$Ord_{a-c+b}(2)$有關呢?

4. 本文中 3 進位 3 元序對(a,b,c) 在 Kaprekar 變換下的行為、Kaprekar 數對(p,q) 在 Kaprekar 變換下的行為、$2^n\ mod\ P\ ,P=p+q$的行為都以 excel 實際計算測試列在附錄中。

陸、參考文獻

[1] G. D. Prichett, A. L. Ludington, & J. F. Lapenta. "The Determination of All Decadic. Kaprekar Constants." Fibonacci Quarterly 19.1 (1981):45-52. 11. Lucio Saffara.

[2] STAN DOLAN, A classification of Kaprekar constants, The Mathematical Gazette. Vol. 95, No. 534 (November 2011), pp. 437-443.

[3] Manuel R. F. Moreira, "Dihedral Symmetry in Kaprekar's Problem.". Mathematics Magazine, Volume 90, 2017 - Issue 1 pp. 38-47.

[4] Atsushi Yamagami * and Yūki Matsui, "On Some Formulas for Kaprekar Constants", *Symmetry* **2019**, *11*(7), 885; https://doi.org/10.3390/sym11070885

附　　　錄

1.3 進位 3 元序對(a,b,c) 在 Kaprekar 變換下的行為。

	A	B	C	D E F	G H I	J K L	M N O	P Q R	S T U	V W X	Y Z AA	AB AC AD	AE AF AG	AH AI AJ	AK AL AM	AN AO AP	AQ AR AS	AT AU AV	AW AX AY	AZ BA BB	BC BD BE	BF BG BH	BI BJ BK	BL BM BN	BO BP BQ	BR BS BT	BU BV BW	BX BY BZ	CA CB CC
1	a	b	c																										
2	3	5	6	5 6 3	7 4 3	3 8 3	10 2 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2
3				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
4																													
5	4	4	4	7 2 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3	5 4 3
6				non	non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
7	3	9	6	9 6 3	3 12 3	14 2 2	12 4 2	8 8 2	4 12 2	12 4 2	8 8 2	4 12 2	12 4 2	8 8 2	4 12 2	12 4 2	8 8 2	4 12 2	12 4 2	8 8 2	4 12 2	12 4 2	8 8 2	4 12 2	12 4 2	8 8 2	4 12 2	12 4 2	8 8 2
8				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
9	9	3	6	6 6 6	11 2 5	9 4 5	5 8 5	12 2 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4	6 8 4	10 4 4
10				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
11	8	5	6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6	11 2 6	9 4 6	7 6 6
12				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
13	7	5	6	10 2 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6	8 4 6
14				non	non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
15	6	5	6	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5	6 6 5	10 2 5	8 4 5
16				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
17	5	5	6	9 2 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5	7 4 5
18				non	non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
19	4	5	6	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4	9 2 4	7 4 4	5 6 4
20				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
21	3	5	6	5 6 3	7 4 3	3 8 3	10 2 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2
22				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
23	2	5	6	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2	7 4 2	3 8 2	9 2 2
24				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
25	1	2	1	2 2 0	0 4 0	3 2 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1	1 4 -1
26				non	non	non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
27	2	2	1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1	2 2 1
28				Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
	A	B	C	D E F	G H I	J K L	M N O	P Q R	S T U	V W X	Y Z AA	AB AC AD	AE AF AG	AH AI AJ	AK AL AM	AN AO AP	AQ AR AS	AT AU AV	AW AX AY	AZ BA BB	BC BD BE	BF BG BH	BI BJ BK	BL BM BN	BO BP BQ	BR BS BT	BU BV BW	BX BY BZ	CA CB CC
29	3	2	1	1 4 1	4 2 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0	2 4 0
30				non	non	non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
31	4	2	1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1	2 4 1	4 2 1
32				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
33	5	2	1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1	3 4 1
34				non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
35	6	2	1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1	6 2 1	4 4 1	2 6 1
36				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
37	7	2	1	5 4 1	1 8 1	8 2 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0	2 8 0	6 4 0
38				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
39	8	2	1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1	8 2 1	6 4 1	2 8 1
40				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
41	9	2	1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1	7 4 1	3 8 1
42				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
43	10	2	1	8 4 1	4 8 1	6 6 1	2 10 1	10 2 1	8 4 1	4 8 1	6 6 1	2 10 1	10 2 1	8 4 1	4 8 1	6 6 1	2 10 1	10 2 1	8 4 1	4 8 1	6 6 1	2 10 1	10 2 1	8 4 1	4 8 1	6 6 1	2 10 1	10 2 1	8 4 1
44				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
45	11	2	1	9 4 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1	5 8 1
46				non	non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
47	12	2	1	10 4 1	6 8 1	4 10 1	8 6 1	2 12 1	12 2 1	10 4 1	6 8 1	4 10 1	8 6 1	2 12 1	12 2 1	10 4 1	6 8 1	4 10 1	8 6 1	2 12 1	12 2 1	10 4 1	6 8 1	4 10 1	8 6 1	2 12 1	12 2 1	10 4 1	6 8 1
48				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
49	13	2	1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1	3 12 1	11 4 1	7 8 1
50				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
51	14	2	1	12 4 1	8 8 1	2 14 1	14 2 1	12 4 1	8 8 1	2 14 1	14 2 1	12 4 1	8 8 1	2 14 1	14 2 1	12 4 1	8 8 1	2 14 1	14 2 1	12 4 1	8 8 1	2 14 1	14 2 1	12 4 1	8 8 1	2 14 1	14 2 1	12 4 1	8 8 1
52				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
53	15	2	1	13 4 1	9 8 1	1 16 1	16 2 0	14 4 0	10 8 0	2 16 0	14 4 0	10 8 0	2 16 0	14 4 0	10 8 0	2 16 0	14 4 0	10 8 0	2 16 0	14 4 0	10 8 0	2 16 0	14 4 0	10 8 0	2 16 0	14 4 0	10 8 0	2 16 0	14 4 0
54				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
55	16	2	1	14 4 1	10 8 1	2 16 1	16 2 1	14 4 1	10 8 1	2 16 1	16 2 1	14 4 1	10 8 1	2 16 1	16 2 1	14 4 1	10 8 1	2 16 1	16 2 1	14 4 1	10 8 1	2 16 1	16 2 1	14 4 1	10 8 1	2 16 1	16 2 1	14 4 1	10 8 1
56				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
	A	B	C	D E F	G H I	J K L	M N O	P Q R	S T U	V W X	Y Z AA	AB AC AD	AE AF AG	AH AI AJ	AK AL AM	AN AO AP	AQ AR AS	AT AU AV	AW AX AY	AZ BA BB	BC BD BE	BF BG BH	BI BJ BK	BL BM BN	BO BP BQ	BR BS BT	BU BV BW	BX BY BZ	CA CB CC
57	17	2	1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1	3 16 1	15 4 1	11 8 1
58				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
59	18	2	1	16 4 1	12 8 1	4 16 1	14 6 1	8 12 1	6 14 1	10 10 1	2 18 1	18 2 1	16 4 1	12 8 1	4 16 1	14 6 1	8 12 1	6 14 1	10 10 1	2 18 1	18 2 1	16 4 1	12 8 1	4 16 1	14 6 1	8 12 1	6 14 1	10 10 1	2 18 1
60				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
61	31	2	1	29 4 1	25 8 1	17 16 1	1 32 1	32 2 0	30 4 0	26 8 0	18 16 0	2 32 0	30 4 0	26 8 0	18 16 0	2 32 0	30 4 0	26 8 0	18 16 0	2 32 0	30 4 0	26 8 0	18 16 0	2 32 0	30 4 0	26 8 0	18 16 0	2 32 0	30 4 0
62				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
63	29	2	1	27 4 1	23 8 1	15 16 1	3 28 1	27 4 1	23 8 1	15 16 1	3 28 1	27 4 1	23 8 1	15 16 1	3 28 1	27 4 1	23 8 1	15 16 1	3 28 1	27 4 1	23 8 1	15 16 1	3 28 1	27 4 1	23 8 1	15 16 1	3 28 1	27 4 1	23 8 1
64				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
65	28	2	1	26 4 1	22 8 1	14 16 1	4 26 1	24 6 1	18 12 1	6 24 1	20 10 1	10 20 1	12 18 1	8 22 1	16 14 1	2 28 1	28 2 1	26 4 1	22 8 1	14 16 1	4 26 1	24 6 1	18 12 1	6 24 1	20 10 1	10 20 1	12 18 1	8 22 1	16 14 1
66				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
67	3	5	6	5 6 3	7 4 3	3 8 3	10 2 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2	8 4 2	4 8 2
68				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
69	3	5	9	4 10 3	12 2 3	10 4 3	6 8 3	8 6 3	4 10 3	12 2 3	10 4 3	6 8 3	8 6 3	4 10 3	12 2 3	10 4 3	6 8 3	8 6 3	4 10 3	12 2 3	10 4 3	6 8 3	8 6 3	4 10 3	12 2 3	10 4 3	6 8 3	8 6 3	4 10 3
70				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
71	3	5	16	11 10 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3	17 4 3	13 8 3	5 16 3
72				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
73	3	5	7	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3	8 4 3	4 8 3	10 2 3
74				non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non	non
75	3	5	8	3 10 3	12 2 2	10 4 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2	6 8 2
76				non	non	non	non	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed

2. Kaprekar 數對(p,q) 在 Kaprekar 變換下的行為。

	A	B	D	E	F	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
1	c=	17	p	q	x																				
2	34	4	17	4	4.25	1	78	2	77	3	76	4	75	5	74	6	73	7	72	8	71	9	70	10	69
3			i			77	2	75	4	73	6	71	8	69	10	67	12	65	14	63	16	61	18	59	20
4	30	68	13	8	1.63	75	4	71	8	67	12	63	16	59	20	55	24	51	28	47	32	43	36	39	40
5			i			71	8	63	16	55	24	47	32	39	40	31	48	23	56	15	64	7	72	1	78
6	22	68	5	16	0.31	63	16	47	32	31	48	15	64	1	78	17	62	33	46	49	30	65	14	77	2
7			ii			47	32	15	64	17	62	49	30	77	2	45	34	13	66	19	60	51	28	75	4
8	28	68	11	10	1.1	15	64	49	30	45	34	19	60	75	4	11	68	53	26	41	38	23	56	71	8
9			i			49	30	19	60	11	68	41	38	71	8	57	22	27	52	3	76	33	46	63	16
10	18	68	1	20	0.05	19	60	41	38	57	22	3	76	63	16	35	44	25	54	73	6	13	66	47	32
11			ii			41	38	3	76	35	44	73	6	47	32	9	70	29	50	67	12	53	26	15	64
12	36	68	19	2	9.5	3	76	73	6	9	70	67	12	15	64	61	18	21	58	55	24	27	52	49	30
13			i			73	6	67	12	61	18	55	24	49	30	43	36	37	42	31	48	25	54	19	60
14	34	68	17	4	4.25	67	12	55	24	43	36	31	48	19	60	7	72	5	74	17	62	29	50	41	38
15			i			55	24	31	48	7	72	17	62	41	38	65	14	69	10	45	34	21	58	3	76
16	30	68	13	8	1.63	31	48	17	62	65	14	45	34	3	76	51	28	59	20	11	68	37	42	73	6
17			i			17	62	45	34	51	28	11	68	73	6	23	56	39	40	57	22	5	74	67	12
18	22	68	5	16	0.31	45	34	11	68	23	56	57	22	67	12	33	46	1	78	35	44	69	10	55	24
19			ii			11	68	57	22	33	46	35	44	55	24	13	66	77	2	9	70	59	20	31	48
20	28	68	11	10	1.1	57	22	35	44	13	66	9	70	31	48	53	26	75	4	61	18	39	40	17	62
21			i			35	44	9	70	53	26	61	18	17	62	27	52	71	8	43	36	1	78	45	34
22	18	68	1	20	0.05	9	70	61	18	27	52	43	36	45	34	25	54	63	16	7	72	77	2	11	68

3.$2^n \ mod\ P$,$P = p + q$的行為。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1		P=	17		P=	18		P=	19		P=	20		P=	21		P=	22
2	0	1	FALSE	8	1	FALSE	0	1	FALSE	18	1	FALSE	0	1	FALSE	6	1	FALSE
3	1	2	FALSE		2	FALSE		2	FALSE		2	FALSE		2	FALSE		2	FALSE
4	2	4	FALSE		4	FALSE		4	FALSE		4	FALSE		4	FALSE		4	FALSE
5	3	8	FALSE		8	FALSE		8	FALSE		8	FALSE		8	FALSE		8	FALSE
6	4	16	FALSE		16	FALSE		16	FALSE		16	FALSE		16	FALSE		16	FALSE
7	5	15	FALSE		14	FALSE		13	FALSE		12	FALSE		11	FALSE		10	FALSE
8	6	13	FALSE		10	FALSE		7	FALSE		4	FALSE		1	6		20	FALSE
9	7	9	FALSE		2	FALSE		14	FALSE		8	FALSE		2	FALSE		18	FALSE
10	8	1	8		4	FALSE		9	FALSE		16	FALSE		4	FALSE		14	FALSE
11	9	2	FALSE		8	FALSE		18	FALSE		12	FALSE		8	FALSE		6	FALSE
12	10	4	FALSE		16	FALSE		17	FALSE		4	FALSE		16	FALSE		12	FALSE
13	11	8	FALSE		14	FALSE		15	FALSE		8	FALSE		11	FALSE		2	FALSE
14	12	16	FALSE		10	FALSE		11	FALSE		16	FALSE		1	12		4	FALSE
15	13	15	FALSE		2	FALSE		3	FALSE		12	FALSE		2	FALSE		8	FALSE
16	14	13	FALSE		4	FALSE		6	FALSE		4	FALSE		4	FALSE		16	FALSE
17	15	9	FALSE		8	FALSE		12	FALSE		8	FALSE		8	FALSE		10	FALSE
18	16	1	16		16	FALSE		5	FALSE		16	FALSE		16	FALSE		20	FALSE
19	17	2	FALSE		14	FALSE		10	FALSE		12	FALSE		11	FALSE		18	FALSE
20	18	4	FALSE		10	FALSE		1	18		4	FALSE		1	18		14	FALSE
21	19	8	FALSE		2	FALSE		2	FALSE		8	FALSE		2	FALSE		6	FALSE
22	20	16	FALSE		4	FALSE		4	FALSE		16	FALSE		4	FALSE		12	FALSE

【評語】010031

此研究討論 Kaprekar 常數及 KaprekarKaprekar 循環數，找出 g 進位含有及不含有數字 g-1 情形時，Kaprekar 常數的充要條件.其中利用文獻所提之 STAN 矩陣討論 Kaprekar 常數的性質，獲得一些不錯且有趣的成果。