2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010030**

參展科別　數學

作品名稱　多維度空間中隨機漫步回到原點之方法數探討

得獎獎項　大會獎 三等獎

就讀學校　國立臺南第一高級中學

指導教師　蕭健忠

作者姓名　吳頴祈、吳奕娃

關鍵詞　隨機漫步、排列組合、卡特蘭數

作者簡介

我是吳頴祈，目前就讀臺南一中二年級，平常的興趣是聽披頭四及拍影片。「Mathematics is not only solving “X,” but also figuring out “Y”」Arthur Benjamin 在 TED 上演講的一席話深深地在數學研究方面影響了我。從一般的小題目發現不一般的規律，找出它究竟只是巧合還是能夠被證明，並設法推廣。過程中，各種突然意想不到的美麗性質總是能帶給我極大的驚喜與快樂。希望這次國際科展夠與大家切磋交流，分享彼此看到的數學之美。

我是吳奕娃，目前就讀台南一中二年級。一直以來，數學是我較擅長且深感興趣的科目，特別是排列組合的章節，而升上高中後我開始接觸資訊，並透過程式來輔助數學專題研究的相關計算。在做科展的過程中雖然遇到不少瓶頸，但每當有所進展時總是讓人雀躍不已，非常榮幸能夠參加這次的國際科展，也希望藉由這次的機會拓展對數學的新視野。

摘要

隨機漫步是數學、物理學、化學、經濟學上常需要涉及和探討的問題，其中探討回到原點的方法數和機率是常見的研究方向。本研究嘗試列出不同維度之間回到原點的方法數遞迴關係，發現不同維度移動相同次數時，回到原點方法數為特定的多項式。

參考了文獻 **Counting Abelian Squares** 後，本研究證明了特殊的對應關係，得到了多維空間中回到原點方法數的漸近式。儘管並沒有直接以其他較困難的數學探討方法計算，但依據本研究之結論，已可算出多維度下回到原點之方法數

至於在有限空間中回到原點的方法數，本研究僅完成二維平面下，超出邊界不同次數各種情況的討論，並經由程式檢驗公式的正確性。

Abstract

Random walk is a problemoften involved and discussed in mathematics,physics, chemistry and economics.The exploration of the number and the probability of returning to the origin is a common research direction. This article attempts to construct the recurrence relation of the number of returning to the origin between different dimensions. We have found out that when the amount of movements confirmed, the numberof returning to the origin conform a special type Polynomial.

Besides, wecan get theasymptote by proving the specialcorrespondence betweenthe number of returning to the origin andthe number of“Abelian Squares”, a sequence with beautiful properties proposed by L. B. Richmond and Jeffrey Shallit(June 7, 2018). Though this article does not involve any Further Mathematics discussion,we can easily find the number of returning to the origin regardless of the amount of movement under any dimensionalspace.
As for the number ofreturning to the origin underlimited scope, this article only solves the problem in two-dimensional space. We also verify the correctness of the formula through the program. The work on the situation of more dimensional space is still in process.

壹、研究動機

在高一數學課學到排列組合的章節時，老師曾在黑板上寫下了這個有趣的問題：

有一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長。

請問：(1)青蛙跳了四步後恰回到原點有幾種走法?

(2)跳了八步後回到原點有幾種走法?

改編自<106 年學測>

而在解題的過程中，我無意中注意到青蛙在二維平面與單一直線上的走法數恰好成平方數的關係，對於這樣的發現，我也開始好奇若將步數推廣到更多步，或是將維度推廣到更多維空間，又或者改變移動終點的位置時，是否會有特定的方法數公式，並試圖找到回到原點漸近式，研究不同維度間的關係式。

貳、研究目的

我們的研究目的如下:

一、 探討青蛙在單一直線、二維平面、三維空間上移動特定次數回到原點的方法數。

二、 探討青蛙在單一直線、二維平面、三維空間上移動特定次數到達特定點的方法數。

三、 探討青蛙在不同維度中移動相同次數與回到原點的方法數之間的關係。

四、 透過參考之數學模型探討青蛙在不同維度中移動任意次數回到原點之方法數漸近線。

五、 探討青蛙在二維平面有限範圍內，移動特定次數回到原點的方法數。

參、文獻探討

在隨機漫步的討論中，有許多在單一維度或是無限定範圍，對是否會回到原點的機率的探討，像是 1921 年波利亞·哲爾吉[1]證明了二維隨機漫步中幾乎必然會回到原點，對於三維或更高維度，返回原點的概率隨著維度的增加而減少。也有不少研究探討賭徒問題[2]，研究單回合勝率及雙方賭本給定的情況下，博弈者各自的輸光賭本的概率。也有如卡塔蘭數[3]這種探討棋盤式道路的捷徑走法數的研究。

雖然本研究中有部分討論在上網搜尋後已經有類似的結論存在，但在討論六、七中探討不同維度之間隨機漫步回到原點的方法數之間的關係式及通式，以及討論八中對於不同於無限定範圍的探討，我們給定一個限定範圍，計算回到原點的方法數，都是不同於現有資料的新結論。

肆、研究過程及方法

一、自訂名詞及符號解釋

在以下討論之中，我們有以下的定義及前提

(一) 多維空間中青蛙的移動每一次都是一單位長。

(二)因為在 D 維空間中，座標可以 D 個基本單位向量表示，因此我們設定在 D 維空間中，青蛙每一步可選擇 D 個基本單位向量及他們的反方向共 2D 個方向進行移動，且每個方向被選擇的機會相等。以三維空間舉例，青蛙可選擇$\pm x$、$\pm y$、$\pm z$共 6 個方向進行移動。

(三) 在以下討論之中，我們將以E_1、E_2、$E_3 \cdots E_D$表示青蛙沿第一、第二、第三…第 D 個基本單位向量移動的事件，而e_1、e_2、$e_3 \cdots e_D$表示往他們的反方向移動的事件；以J_1、J_2、$J_3 \cdots J_D$表示青蛙沿第一、第二、第三…第 D 個基本單位向量移動的次數，而j_1、j_2、$j_3 \cdots j_D$表示往他們的反方向移動的次數。

(四) 以$a_{(D,n)}$表示在 D 維空間中移動 2n 次恰回到原點的方法數。

(五) 以$T_{(F_1,F_2,F_3,F_4\ldots,F_D)}$表示在 D 維空間中欲到達之特定點座標，又因為$T_{(\pm F_1,\pm F_2,\ldots,\pm F_D)}$皆是對稱的，故以下討論我們設$F_1,F_2,F_3,F_4\ldots,F_D \geq 0$。

(六) 以$a_{(T(F_1,F_2,F_3,F_4\ldots,F_D),n)}$表示在 D 維空間中移動$2n+F_1+F_2+F_3\ldots F_D$到達之特定點$T_{(F_1,F_2,F_3,F_4\ldots,F_D)}$之方法數。

(七) 以$b_{m(D,n)}$表示在 D 維空間中，限制範圍為是m(任何座標絕對值皆不可大於m)，移動 2n次恰回到原點之方法數。

二、青蛙在一維空間上移動的情況

定理 1 .$a_{(1,n)} = C_n^{2n}$

(一)情境背景:

青蛙在單一條直線上移動時，青蛙可選擇E_1、e_1，共 2 種方向進行移動，其中因為要回到原點，$J_1 = j_1$, 且$J_1 + j_1 =$ 總移動次數，並設青蛙移動了 2n 次。

(二)證明:

因為青蛙總共移動了 2n 次，又$J_1 = j_1 = n$，在 2n 次移動中有 n 次是選擇E_1移動，剩下 n 次是選擇e_1移動，因此可得到一般式$a_{(1,n)} = C_n^{2n}$。

三、青蛙在二維空間上移動的情況

引理 1 :$\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2=C_n^{2n}$ (范德蒙公式)

證明：$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$

由二項式定理等號左邊可化為$(1+x)^{2n}=\sum_{r=0}^{2n}C_r^{2n}x^r$

等號右邊則可化為$(1+x)^n(1+x)^n$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k\right)=\sum_{r=0}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{r}C_k^n\times C_{r-k}^n\right)x^r$$

比較兩式中 x^n 係數，可得$C_n^{2n}=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\times C_{n-k}^n=\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2$

定理 2 .$a_{(2,n)}=(C_n^{2n})^2$

(一)情境背景:

青蛙在二維平面上移動時，青蛙可選擇E_1、e_1、E_2、e_2，共 4 種方向進行移動，其中因為要回到原點，移動過程中:$J_1=j_1,J_2=j_2,$且$J_1+j_1+J_2+j_2=$總移動次數，並設青蛙移動了 2n 次。

(二)證明:

青蛙總共移動了 2n 次，因為$J_1=j_1$，我們不妨先假設$J_1=j_1=k_1$ $(0\le k_1\le \mathrm{n})$

則出現次數$J_2=j_2=n-k_1$

回到原點的方法數$=\frac{(2n)!}{k_1!k_1!(n-k_1)!(n-k_1)!}$，考慮到所有$k_1=0,1,2,\dots,\mathrm{n}$

總方法數$=\sum_{k_1=0}^{n}\frac{(2n)!}{k_1!k_1!(n-k_1)!(n-k_1)!}$

一般式$a_{(2,n)}=\sum_{k_1=0}^{n}\frac{(2n)!}{k_1!k_1!(n-k_1)!(n-k_1)!}=\sum_{k_1=0}^{n}[\frac{(2n)!}{n!n!}\times\frac{n!n!}{k_1!k_1!(n-k_1)!(n-k_1)!}]$

$=\sum_{k_1=0}^{n}[C_n^{2n}\times(C_{k_1}^n)^2]=C_n^{2n}\sum_{k_1=0}^{n}(C_{k_1}^n)^2=(C_n^{2n})^2$ (引理 1)

恰好等於在單一直線上移動 2n 次的平方。

(三)我們也可以用另一種角度思考，並巧妙地得出結論:

1. 重新審視情境背景後，我們決定「先找到如何安排必回到原點的方法」觀察到出現次數:$J_1=j_1,J_2=j_2$可以同時代表$J_1+J_2=n$,且$J_1+j_2=n$，這是 2n 次移動回到原點的充要條件，因此倘若我們先選出在 2n 次移動中的 n 次為「大寫 E」，再選擇 2n

中 n 次為「E_1和e_2」，代表第一次，第二次均選到的次數即為E_1，第一次選到，第二次沒選到的次數即為E_2，第一次沒選到，第二次選到的次數即為e_2，第一次，第二次均沒有選到的次數即為e_1，這樣就可以寫出一種回到原點的方法。

2. 以$n = 4$舉例，青蛙總共移動了 8 次，

   先選出其中 4 次為「大寫 E」，這邊我們先選擇了第 1,2,5,6 次。(ex:移動過程 EEeeEEee)

   再選出其中 4 次為「E_1和e_2」，這邊我們先選擇了第 1,3,5,6 次。(ex:移動過程 EEeeEEee)

3. 最後，再依照上述規則，將 E 寫成 E1，將 E 寫成 E2，將 e 寫成 e2，將 e 寫成 e1，這樣就得 E1E2e2e1E1E1e1e1 這種回到原點的移動方法，簡單來說就是青蛙移動了「上右左下上上下下」，依照上列意思，我們會進行兩次「從 2n 次中選 n 次」，所以我們可列出回到原點的方法總數$C_n^{2n} \times C_n^{2n}$，綜合以上我們可以得到一般式$a_{(2,n)} = (C_n^{2n})^2$。

四、青蛙在三維空間上移動的情況

定理 3 .$a_{(3,n)} = C_n^{2n} \sum_{k=0}^{n} C_k^{2k} \times (C_k^n)^2$

(一)情境背景

青蛙在立體三維平面上移動時，青蛙可選擇E_1、e_1、E_2、e_2、E_3、e_3，共 6 種方向進行移動，其中因為要回到原點，移動過程:$J_1 = j_1, J_2 = j_2, J_3 = j_3,$ 且$J_1 + j_1 + J_2 + j_2 + J_3 + j_3 =$ 總移動次數，並設青蛙移動了 2n 次。

(二) 假設$J_1 = j_1 = k_1$，出現次數$J_2 = j_2 = k_2$，出現次數$J_3 = j_3 = n - k_1 - k_2$，青蛙總共移動了 2n 次，回到原點的方法數$= \frac{(2n)!}{k_1!k_1!k_2!k_2!(n-k_1-k_2)!(n-k_1-k_2)!}$

因為這裡k_1、k_2會互相影響其值範圍，變數過多導致不易探討，因此我們並未使用此方法繼續演算。

(三)以二維推三維:

接著我們思考三維空間回到原點的方法數和二維平面回到原點的方法數會不會有關，進一步有了以下推論:

1. 若在 2 維平面移動了 2k 次回到原點($0 \le k \le$ n)，如果在移動過程中加入 2n-2k 次的

E_3、e_3就會變成在 3 維空間中移動 2n 次後回到原點的一種方法。

2. 在移動 2n 次中，我們先選出 2k 次是原先的移動方式，再從剩下的 2n-2k 次移動中，選擇 n-k 次是$\mathrm{E_3}$，即可寫出三維空間中一種回到原點的方式。
3. 依照上列意思，我們可以列出回到原點的方法數$=\mathrm{a_{(2,k)}}\times \mathrm{C_{2k}^{2n}}\times \mathrm{C_{n-k}^{2n-2k}}$，考慮到所有$\mathrm{k}=0,1,2,\dots,\mathrm{n}$，

$$
\begin{aligned}
a_{(3,n)} &= \sum_{k=0}^{n}\left(C_k^{2k}\right)^2 \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!\,k!}\times\frac{(2k)!}{k!\,k!}\times\frac{(2n)!}{(2k)!\,(2n-2k)!}\times\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\,(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!\,k!}\times\frac{(2k)!}{k!\,k!}\times\frac{(2n)!}{(2k)!\,(2n-2k)!}\times\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\,(n-k)!}\times\frac{n!\,n!}{n!\,n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{n!\,n!}\times\frac{(2k)!}{k!\,k!}\times\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^{2n}\sum_{k=0}^{n} C_k^{2k}\times\left(C_k^n\right)^2
\end{aligned}
$$

綜合以上我們可以得到一般式$a_{(3,n)} = C_n^{2n}\sum_{k=0}^{n} C_k^{2k}\times\left(C_k^n\right)^2$

五、青蛙在一、二、三維空間上移動到特定點情況

在探討完各種情境下回到原點的方法數後，我們思考若是要到達特定點，是不是也會有類似的規律呢？因此有了以下的探討:

(一)一維直線

定理四$a_{(T(F_1),n)} = C_n^{2n+F_1}$

1. 情境背景

欲到達點$T_{(F_1)}$，青蛙在單一條直線上移動時，青蛙可選擇E_1、e_1，共 2 種方向進行移動，移動過程各方向:$J_1 = j_1 + F_1$, 且$J_1 + j_1 =$ 總移動次數，並設青蛙移動了 2n+$\mathrm{F_1}$次。

2. 推論過程

因為青蛙總共移動了 2n+F 次，又出現次數$J_1 = j_1 + F_1$，在 2n+$\mathrm{F_1}$ 次移動中有 n+$\mathrm{F_1}$ 次是選擇E_1移動，剩下 n 次是選擇e_1移動，因此我們可以輕易地得到一般式$a_{(T(F_1),n)} = C_n^{2n+F_1}$。

(二) 二維平面

定理五$a_{(T(F_1,F_2),n)}=C_{n+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2}\times C_{n+F_1}^{2n+F_1+F_2}$

1. 情境背景

欲到達點$T_{(F_1,F_2)}$青蛙在二維平面上移動時，青蛙可選擇E_1、e_1 、E_2、e_2，共 4 種方向進行移動，其中因為要回到原點，移動過程各方向出現次數:

$J_1=j_1+F_1, J_2=j_2+F_2,$

且$J_1+j_1+J_2+j_2$=總移動次數，並設青蛙移動了 $2n+F_1+F_2$ 次。

2. 推論過程

青蛙總共移動了 $2n+F_1+F_2$ 次，因為出現次數$J_1=j_1+F_1$，我們不妨先假設出現次數$j_1=k_1\quad(0\le k_1\le \mathrm{n})$，則出現次數$j_2=n-k_1$

回到原點的方法數=$\frac{(2n+F_1+F_2)!}{(k_1+F_1)!k_1!(n+F_2-k_1)!(n-k_1)!}$，考慮到所有$k_1=0,1,2,\dots,\mathrm{n}$

總方法數=$\sum_{k_1=0}^{n}\frac{(2n+F_1+F_2)!}{(k_1+F_1)!k_1!(n+F_2-k_1)!(n-k_1)!}$

一般式$a_{(T(F_1,F_2),n)}$

$$=\sum_{k_1=0}^{n}\frac{(2n+F_1+F_2)!}{(k_1+F_1)!\,k_1!\,(n+F_2-k_1)!\,(n-k_1)!}$$

$$=\sum_{k_1=0}^{n}[\frac{(2n+F_1+F_2)!}{n!\,(n+F_1+F_2)!}\times\frac{n!\,(n+F_1+F_2)!}{k_1!\,(n-k_1)!\,(n+F_2-k_1)!\,(k_1+F_1)!}]$$

$$=\sum_{k_1=0}^{n}[C_n^{2n+F_1+F_2}\times C_{k_1}^{n}\times C_{n+F_2-k_1}^{n+F_1+F_2}]=C_n^{2n+F_1+F_2}\sum_{k_1=0}^{n}C_{k_1}^{n}\times C_{n+F_2-k_1}^{n+F_1+F_2}$$

$$=C_{n+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2}\times C_{n+F_1}^{2n+F_1+F_2}$$ (引理一)

(三) 三維空間

定理六$a_{(T(F_1,F_2,F_3),n)}=C_{n+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2}\sum_{k=0}^{n}C_{k+F_1}^{2k+F_1+F_2}\times C_{k+F_1+F_2}^{n+F_1+F_2+F_3}\times C_k^n$

1. 情境背景

欲到達點$T_{(F_1,F_2,F_3)}$青蛙在三維平面上移動時，青蛙可選擇J_1、j_1 、J_2、j_2 、J_3、j_3，共 6 種方向進行移動，其中因為要回到原點，移動過程各方向出現次數:$J_1=j_1+F_1, J_2=j_2+F_2, J_3=j_3+F_3$，

且$J_1+j_1+J_2+j_2+J_3+j_3$=總移動次數，並設青蛙移動了 $2n+F_1+F_2+F_3$ 次。

2.推論過程

我們比照情境，思考三維空間到達特定點的方法數和二維平面到達特定點的方法數會不會有關，進一步有了以下推論:

若在 2 維平面移動了 2k+F1+F2 次到達特定點 T，如果在移動過程中加入 2n-2k+F3 次的E_3、e_3就會變成在 3 維空間中移動 2n+F1+F2+F3 次後回到原點的一種方法。

而在總共移動 2n+F1+F2+F3 次中，我們先選出 2k+F1+F2 次是原先的移動到$T_{(F_1,F_2,0)}$的方式，再從剩下的 2n-2k+F3 次移動中，選擇 n-k+F3 次是E_3，即可寫出三維空間中一種回到原點的方式。

依照上列意思，我們可以列出回到原點的方法數$=a_{(T(F_1,F_2),k)}\times C_{2k+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2+F_3}\times C_{n-k+F_3}^{2n-2k+F_3}$，考慮到所有$k=0,1,2,\dots,n$，

$$a_{(3,n)}=\sum_{k=0}^{n}C_{k+F_1+F_2}^{2k+F_1+F_2}\times C_{k+F_1}^{2k+F_1+F_2}\times C_{2k+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2+F_3}\times C_{n-k+F_3}^{2n-2k+F_3}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{k+F_1}^{2k+F_1+F_2}\times\frac{(2k+F_1+F_2)!}{(k+F_1+F_2)!\,k!}\times\frac{(2n+F_1+F_2+F_3)!}{(2k+F_1+F_2)!\,(2n-2k+F_3)!}\times\frac{(2n-2k+F_3)!}{(n-k+F_3)!\,(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{k+F_1}^{2k+F_1+F_2}\times\frac{(2n+F_1+F_2+F_3)!}{(k+F_1+F_2)!\,k!\,(n-k+F_3)!\,(n-k)!}\times\frac{(n+F_1+F_2+F_3)!\,(n)!}{(n+F_1+F_2+F_3)!\,(n)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{k+F_1}^{2k+F_1+F_2}\times\frac{(2n+F_1+F_2+F_3)!}{(n+F_1+F_2+F_3)!\,(n)!}\times\frac{(n+F_1+F_2+F_3)!}{(k+F_1+F_2)!\,(n-k+F_3)!}\times\frac{(n)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$=C_{n+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2}\sum_{k=0}^{n}C_{k+F_1}^{2k+F_1+F_2}\times C_{k+F_1+F_2}^{n+F_1+F_2+F_3}\times C_k^n$$

六、青蛙在多維空間上移動的情況

引理 2: 領導係數為 *m* 的 *n* 次多項式經 *n*-1 次的前後項相減後會形成公差為$n!\times m$的等差數列

證明:

設$f(x)=mx^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

另設$f_1(x+1)=f(x+1)-f(x)$，$f_{k+1}(x+1)=f_k(x+1)-f_k(x)$

$f_1(x+1)$

$$= [m(x+1)^n + a_1(x+1)^{n-1} + a_2(x+1)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(x+1) + a_n]$$
$$-[mx^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n]$$
$$= m(x^n + nx^{n-1} + \cdots + 1) - mx^n$$
$$+a_1(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 1) - a_1x^{n-1}$$
$$+a_2(x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 1) - a_2x^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$+a_{n-1}(x+1) - a_{n-1}x$$
$$+a_n - a_n$$

$= nmx^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$為 n-1 次方程式。

可知每進行一次前後項相減，方程式次數減 1 且領導係數將乘上次方數，我們可推出$f_{n-1}(x)$為 1 次方程式，而$f_n(x)$為 1 次方程式的公差。

設c_k為$f_k(x)$的領導係數，則可知$\because c_{k+1} = (n-k)c_k$，$c_1 = nm$

$\therefore f_n(x) = c_n = c_{n-1} = 2c_{n-2} = (1 \times 2 \times \cdots \times n)m = n!\,m$

(一) 求 D-1 維與 D 維的關係式:

定理 7.$a_{(D,n)} = \sum_{k=0}^{n} a_{(D-1,k)} \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k}$

1. 證明

若在 D-1 維平面移動了 2k 次回到原點($0 \le k \le$ n)，如果在移動過程中加入 2n-2k 次的E_D、e_D，就會變成在 D 維空間中移動 2n 次後回到原點的一種方法，而在移動 2n 次中，我們先選出 2k 次是原先的移動方式，再從剩下的 2n-2k 次移動中，選擇 n-k 次是E_D，即可寫出 D 維空間中一種回到原點的方式。

依照上列意思，我們可以列出回到原點的方法數= $a_{(D-1,k)} \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k}$，考慮到所有$k = 0,1,2,\dots,$n，$a_{(D,n)} = \sum_{k=0}^{n} a_{(D-1,k)} \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k}$。

2. 電腦運算

隨著維度和步數的增加，在推導以及計算上也變得複雜許多，因此我們選擇使用電腦撰寫程式來進行這些運算。利用$a_{(D,n)} = \sum_{k=0}^{n} a_{(D-1,k)} \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k}$，我們便可以從$a_{(1,n)}$的數值逐步往下計算$a_{(D,n)}$的數值，對於不同 D 值、n 值及對應的$a_{(D,n)}$，我們做出如下表格(僅列出部分)。

表 1:

	D=1	2	3	4	5	6	7	8
n=0	1	1	1	1	1	1	1	1
n=1	2	4	6	8	10	12	14	16
n=2	6	36	90	168	270	396	546	720
n=3	20	400	1860	5120	10900	19920	32900	50560
n=4	70	4900	44730	190120	551950	1281420	2570050	4649680
n=5	252	63504	1172556	7939008	32232060	96807312	238935564	514031616
n=6	924	853776	32496156	357713664	2070891900	8175770064	25142196156	64941883776
n=7	3432	11778624	936369720	16993726464	142317232200	748315668672	2898980908824	9071319628800

將所有$a_{(D,n)}$同除以$a_{(1,n)}$，我們發現所有$a_{(D,n)}$都恰好能被$a_{(1,n)}$整除，接著固定 n 值，觀察同除以$a_{(1,n)}$後的$a_{(D,n)}$:

表 2:

	D=1	2	3	4	5	6	7	8
n=0	1	1	1	1	1	1	1	1
n=1	1	2	3	4	5	6	7	8
n=2	1	6	15	28	45	66	91	120
n=3	1	20	93	256	545	996	1645	2528
n=4	1	70	639	2716	7885	18306	36715	66424
n=5	1	252	4653	31504	127905	384156	948157	2039808
n=6	1	924	35169	387136	2241225	8848236	27210169	70283424
n=7	1	3432	272835	4951552	41467725	218040696	844691407	2643158400

3. 前後項相減成等差

從 n=0 到 2，可以輕易地看出他們是零次、一次、二次的多項式。

接著我們觀察到:

n=1 時： $a_{(D,1)} = 2\ \ 4\ 6\ \ 8\ \ 10\ \ 12\quad ...$ 呈等差，公差$= 2 = 2 \times (1!)^2$

n=2 時： $a_{(D,2)} = 6\ \ 36\ \ 90\ \ 168\ \ 270\ \ 396...$

前後項相減 1 次 $30\ \ 54\ \ 78\ \ 102\ \ 126...$ 呈等差，公差$= 24 = 6 \times (2!)^2$

n=3 時： $a_{(D,3)} = 20\ \ 400\ \ 1860\ \ 5120\ \ 10900\ \ 19920\quad ...$

前後項相減 1 次 $380\ \ 1460\ \ 3260\ \ 5780\ \ 9020\ \ \ ...$

前後項相減 2 次 $1080\ \ 1800\ \ 2520\ \ 3240\ ...$ 呈等差，公差$= 720 = 20 \times (3!)^2$

n=4 時： $a_{(D,4)} = 70\ \ 4900\ \ 44730\ \ 190120\ \ 551950\ \ 1281420\ \ \ ...$

前後項相減 1 次 $4830\ \ 39830\ \ 145390\ \ 361830\ \ 729470\ \ \ ...$

前後項相減 2 次 $35000\ \ 105560\ \ 216440\ \ 367640\ \ \ ...$

前後項相減 3 次 $70560\ \ 110880\ \ 151200...$ 呈等差，公差$= 40320 = 70 \times (4!)^2$

領導係數為 m 的 N 次多項式經 N-1 次的前後項相減後會形成公差為$N! \times m$的等差數列。(引理 2)。因此，我們推測在固定移動次數為 2n 次的情況下$a_{(D,n)}$是一個領導係數為$C_n^{2n} \times n!$的 D 的 n 次多項式。

4. 推導$a_{(D,n)}$關係式

引理 3: $\sum_{d=0}^{D-1} d^{n-1}$中D^n項的係數為$\frac{1}{n}$，且當$p \le n-2$時，$\sum_{d=0}^{D-1} d^p$不會產生D^n項及影響D^n的係數。

定理 8: $a_{(D,n)} = \sum_{d=0}^{D-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{(d,k)} \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k}$

證明:

以下我們將定義$a_{(D,0)} = 1$ (只有原地不動一種方式)，$a_{(0,n)} = 0$ (不存在)

$a_{(D,1)} = C_1^2 \times \mathrm{D}$ (從E_1、$E_2 \cdots E_D$、e_1、$e_2 \cdots e_D$中挑一個再往它的反方向動)

$$a_{(D,2)} = \sum_{k=0}^{2} a_{(D-1,k)} \times C_{2k}^4 \times C_{2-k}^{4-2k}$$

$$= 1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-1) \times C_2^4 \times C_1^2 + a_{(D-1,2)}$$

而我們又可以將$\mathrm{a_{(D-1,2)}}$換成$\sum_{k=0}^{2} \mathrm{a_{(D-1,k)}} \times \mathrm{C_{2k}^4} \times \mathrm{C_{2-k}^{4-2k}}$

就可以得到$a_{(D,2)} = 1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-1) \times C_2^4 \times C_1^2$

$$+1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-2) \times C_2^4 \times C_1^2 + a_{(D-2,2)}$$

同理我們再把$\mathrm{a_{(D-2,2)}}$，$\mathrm{a_{(D-3,2)}}$，$\mathrm{a_{(D-4,2)}} \cdots\cdots \mathrm{a_{(1,2)}}$用同樣的方式往下換

就可以得到$a_{(D,2)} = 1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-1) \times C_2^4 \times C_1^2$

$$+1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-2) \times C_2^4 \times C_1^2$$

$$+1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-3) \times C_2^4 \times C_1^2$$

$$\vdots$$

$$+1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-\mathrm{D}+1) \times C_2^4 \times C_1^2$$

$$+1 \times C_0^4 \times C_2^4 + C_1^2 \times (\mathrm{D}-\mathrm{D}) \times C_2^4 \times C_1^2 + a_{(0,2)}$$

$$= C_2^4 \times (\mathrm{D} + 4 \times \frac{(D-1)D}{2}) = C_2^4(2!\,D^2 - D)$$

此種推算法除了得證$\mathrm{a}_{(\mathrm{D},2)}$的通式是領導係數為$\mathrm{C}_2^4 \times 2!$外，亦可讓我們寫出另一種表達$\mathrm{a}_{(\mathrm{D},\mathrm{n})}$的方式:$\mathrm{a}_{(\mathrm{D},\mathrm{n})} = \sum_{d=0}^{D-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{(d,k)} \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k}$

定理 9: 確定移動次數為 2n 時，$a_{(D,n)}$是領導係數為$C_n^{2n} \times n!$的 D 的 n 次多項式

證明:

已知$\sum_{\mathrm{d}=0}^{\mathrm{D}-1} \mathrm{d}^{\mathrm{n}-1}$中$\mathrm{D}^{\mathrm{n}}$項的係數為$\frac{1}{\mathrm{n}}$，且當$\mathrm{p} \le \mathrm{n}-2$時，$\sum_{\mathrm{d}=0}^{\mathrm{D}-1} \mathrm{d}^{\mathrm{p}}$不會產生$\mathrm{D}^{\mathrm{n}}$項及引響$\mathrm{D}^{\mathrm{n}}$的係數(領導係數)(引理 3)，因此以下將針對$\mathrm{d}^{\mathrm{n}-1}$做討論。

今天若 k=1,2,3,4…(n-1) 時，$\mathrm{a}_{(\mathrm{D},\mathrm{k})}$皆是領導係數為$\mathrm{C}_{\mathrm{k}}^{2\mathrm{k}} \times \mathrm{k}!$的 D 的 n 次多項式

針對$\sum_{\mathrm{d}=0}^{\mathrm{D}-1} \mathrm{d}^{\mathrm{n}-1}$做討論，以 R 代表算式剩下的部分(不同等式間的 R 可能不同)

$$a_{(D,n)} = \sum_{d=0}^{D-1}\left[a_{(d,n-1)} \times C_{2(n-1)}^{2n} \times C_{n-(n-1)}^{2n-2(n-1)}\right] + R$$

$$= \sum_{d=0}^{D-1}\left[C_{n-1}^{2n-2} \times (n-1)! \times d^{n-1} \times C_{2(n-1)}^{2n} \times C_{n-(n-1)}^{2n-2(n-1)}\right] + R$$

$$= (n-1)! \times C_{n-1}^{2n-2} \times C_{2n-2}^{2n} \times C_1^2 \times \sum_{d=0}^{D-1} d^{n-1} + R$$

$$= (n-1)! \times \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \times \frac{(2n)!}{(2n-2)!\,2!} \times 2 \times \frac{D^n}{n} + R$$

$$= (n-1)! \times \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \times \frac{D^n}{n} + R$$

$$= n!\,(n-1)! \times \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!\,[n(n-1)!]} \times D^n + R$$

$$= C_n^{2n} \times n! \times D^n + R$$

故 k=1,2,3,4…(n-1) ，$\mathrm{a}_{(\mathrm{D},\mathrm{k})}$皆是領導係數為$C_k^{2k} \times k!$的 D 的 k 次多項式時，$a_{(D,n)}$是領導係數為$C_n^{2n} \times n!$的 D 的 n 次多項式

5. 利用電腦求出$a_{(D,n)}$多項式

根據數學歸納法:得證$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}$，$a_{(D,n)}$是領導係數為$C_n^{2n} \times n!$的 D 的 n 次多項式

最後利用 Dev-C++軟體求出 n=0 到 7 的完整多項式

表 3:

```
a(D,0) = 1 ( 1 )
a(D,1) = 2 ( 1 D +0 )
a(D,2) = 6 ( 2 D^2 -1 D +0 )
a(D,3) = 20 ( 6 D^3 -9 D^2 +4 D +0 )
a(D,4) = 70 ( 24 D^4 -72 D^3 +82 D^2 -33 D +0 )
a(D,5) = 252 ( 120 D^5 -600 D^4 +1250 D^3 -1225 D^2 +456 D +0 )
a(D,6) = 924 ( 720 D^6 -5400 D^5 +17700 D^4 -30600 D^3 +27041 D^2 -9460 D +0 )
a(D,7) = 3432 ( 5040 D^7 -52920 D^6 +249900 D^5 -661500 D^4 +1011017 D^3 -826336 D^2 +274800 D +0 )
```

七、以對應之數學模型寫出青蛙在任意維度中回到原點的方法數通解

(一)背景解釋:

將表二的數據在網路上搜尋時，我們意外地找到 OEIS(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences)A287316 的表格數據恰好和**四-2.-表**二相同，進而找到文獻 Counting Abelian Squares。

(二)Counting Abelian Squares 文獻概論:

引理 4: $f_D(\mathrm{n}) \approx D^{2\mathrm{n}+\mathrm{D}/2} \times (4\pi\mathrm{n})^{(1-\mathrm{D})/2}$

1. 摘要:

在集合$\cup_D$ (n)的元素為所有長度為 2n 的單字中，前 n 位是由 D 個字母任意排列(可以不要全部用到)，且後 n 位是前面出現的字母再經一次重新排列。**(**例:intestines $\in \cup_5$ (5)**)**。以$f_D(\mathrm{n})$表示這個集合中的元素個數。

(三)構造對應關係證明多為空間隨機漫步回到原點方法數$a_{(D,n)}$漸近式:

1. 因為 Counting Abelian Squares 中採用的推算方法過於繁複且困難，因此我們構造一一對應來說明，我們可以觀察到$a_{(D,n)} = f_D(n) \times C_n^{2n}$。
2. 轉換題目:

青蛙在 D 維度上移動時，可選擇E_1、e_1、E_2、$e_2 \cdots E_D$、e_D，共 2D 種方向進行移動，其中因為要回到原點，移動過程各方向:$J_1 = j_1, J_2 = j_2, \cdots J_D = j_D$,

且出現次數$J_1 + j_1 + J_2 + j_2, \cdots J_D + j_D = 2n$次，

因此我們不妨設集合A_D(n)的元素為所有長度為 2n 的單字中，有 n 位是由 D 個字母**大寫**任意排列，且其他 n 位是前面出現的字母**小寫**再經一次重新排列。

(例:INTestinES $\in A_5(5)$)，而$a_{(D,n)}$就是$A_D(n)$中的元素個數。

定理 10: $a_{(D,n)} = f_D(n) \times C_n^{2n}$

1.說明:

以e_{Dk}表示在單字前半第 k 位的字母，以e_{dk}表示在單字後半第 k 位的字母。

設$\cup_D$ (n)有一元素(單字)為$e_{D1}e_{D2}e_{D3}\cdots e_{Dn}$(前半)$e_{d1}e_{d2}e_{d3}\cdots e_{dn}$(後半)。

而我們再從 2n 個位子中，取 n 個位置放由左向右依序放置e_{Dk}，並將他們寫成大寫，剩下 n 個位置放由左向右依序放置e_{dk}，並維持小寫那麼我們就可以寫出一$A_D(n)$中的元素。

2. 舉例:

有一元素(單字)為aabc(前半)caba(後半)

則將在這 8 個位子中取 4 個位置放由左向右依序放置aabc，(以第 1、2、5、7 為舉例)並將他們寫成大寫，剩下 4 個位置放由左向右依序放置e_{dk}，並維持小寫那麼我們就可以寫出一$A_3(4)$中的元素AAcaBbCa。

因此，可推得每個在集合$\cup_D$ (n)中的元素都可以在集合$A_D(n)$中皆可製造C_n^{2n}個不重複的元素，即$a_{(D,n)} = f_D(n) \times C_n^{2n}$。

(四) 代入結論:

引理 5: $C_n^{2n} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ (由斯特靈漸近式$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$)

$$C_n^{2n} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \times \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

定理 11: $a_{(D,n)} \approx 2^{2n-D+1} \times D^{2n+\frac{D}{2}} \times (\pi n)^{\frac{-D}{2}}$

$$f_D(n) \approx D^{2n+D/2} \times (4\pi n)^{(1-D)/2}$$

$$a_{(D,n)} = f_D(n) \times C_n^{2n} \approx D^{2n+\frac{D}{2}} \times (4\pi n)^{\frac{1-D}{2}} \times \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\approx 2^{2n-D+1} \times D^{2n+\frac{D}{2}} \times (\pi n)^{\frac{-D}{2}}$$

(五) 代入數值比較並觀察漸近式之誤差即可行性:

將數值代入以漸近式推出的數值:

表 4:

D=	1	2	3	4	5	6	7
0							
1	2.25676	5.092958	8.3984585	12.96911151	19.97240419	31.34849147	50.57020137
2	6.38308	40.74367	106.89493	207.5057841	353.065561	564.2728464	876.0840417
3	20.847	434.5991	2094.7042	5902.386748	12812.30326	24075.64145	41541.52487
4	72.2163	5215.189	48979.81	212485.9229	624137.6309	1462595.218	2974766.81
5	258.369	66754.42	1261695.6	8703423.403	35727722.75	107834220.2	267007803
6	943.429	890059	34552956	386818817.9	2264916630	8986185019	27646850458
7	3493.78	12206523	987114490	18188378703	1.54058E+11	8.14887E+11	3.15928E+12

以程式運算出的正確數值:

表 5:

	原始						
0							
1	2	4	6	8	10	12	14
2	6	36	90	168	270	396	546
3	20	400	1860	5120	10900	19920	32900
4	70	4900	44730	190120	551950	1281420	2570050
5	252	63504	1172556	7939008	32232060	96807312	238935564
6	924	853776	32496156	357713664	2070891900	8175770064	25142196156
7	3432	11778624	936369720	16993726464	1.42317E+11	7.48316E+11	2.89898E+12

誤差

表 6:

	相除後						
1	1.12838	1.27324	1.3997431	1.621138938	1.997240419	2.612374289	3.612157241
2	1.06385	1.131768	1.1877214	1.235153477	1.307650226	1.42493143	1.604549527
3	1.04235	1.086498	1.126185	1.152809912	1.175440666	1.208616539	1.26266033
4	1.03166	1.064324	1.0950103	1.117641084	1.13078654	1.141386289	1.157474294
5	1.02527	1.051185	1.0760216	1.09628601	1.108452974	1.113905737	1.117488743
6	1.02103	1.042497	1.0632936	1.08136439	1.093691385	1.099123991	1.099619551
7	1.018	1.036328	1.0541931	1.070299604	1.082499632	1.088961788	1.089789491

由表格可以發現隨著 n 值越來越大，以漸近式推出的數值越來越準確。因此在 n 值很大時利用此漸近式求回到原點的方法數是快速且準確的。

八、探討青蛙在二維平面有限範圍內移動特定次數回到原點的方法數

定理 13. $b_{m(2,n)}=(C_n^{2n})^2+4\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=1}^{t-i}C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n}\times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n}\times(-1)^{i+j}$

$,\mathrm{t}(\mathrm{m}+1\le \mathrm{n}<(t+1)(m+1)$

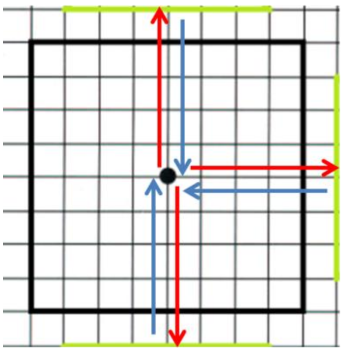
(一)情境背景

限定青蛙在二維平面中的移動範圍為$\{(\mathrm{x},\mathrm{y})|-\mathrm{m}\le \mathrm{x}\le \mathrm{m},-\mathrm{m}\le \mathrm{y}\le \mathrm{m}\}$，

並假設青蛙總共移動 2n 次，

則在限定範圍移動回到原點的方法數 = 所有方法數減去移動超出範圍的方法數。

因此我們先討論在何種情況下，青蛙可能會移動出限定範圍。我們可以將移動範圍看成一個邊長為 $2m$ 的正方形，青蛙從其正中央出發，超出範圍可能有 5 種情況:分別為過程中曾經超出 0 到 4 個邊。(例:曾經超出上邊與右邊與下邊就是超出 3 個邊，如下圖 1)。



紅色及藍色的移動長度皆為 m+1

圖 1

由圖我們可以看出，過程中要最多超出幾個邊，n 值就要大於等於幾個$\mathrm{m}+1$，也就是超過幾個半邊長。(例:若要超出上、下、右三個邊那 n 至少要等於$3m+3$)。

(二) 一路領先問題

以下我們將以$\mathrm{k}=9$，$\mathrm{m}+1=2$為例，並且只針對移動超過上下兩個相對的邊的情況進行討論:

令$\mathrm{J}_1=\mathrm{j}_1=\mathrm{k}$、$\mathrm{J}_2=\mathrm{j}_2=\mathrm{n}-\mathrm{k}$，

1. 要超出 1 次上邊的條件是某個時刻出現個數$E_1-e_1\ge m$+1，

我們可將E_1、e_1排列順序畫成棋盤式道路捷徑走法(如圖 2，向上移動表示E_1，向右移動表示e_1，從起點移動到終點就決定了E_1、e_1的排列順序)，又因為必須滿足出現個數$E_1-e_1\ge m$+1 的條件，我們可以發現途中必定經過藍色的界線。而我們對這條

藍色界線做原本圖形的對稱圖形後，可將原本的圖 2 的黑色棋盤轉換成圖 3 中的綠色棋盤，

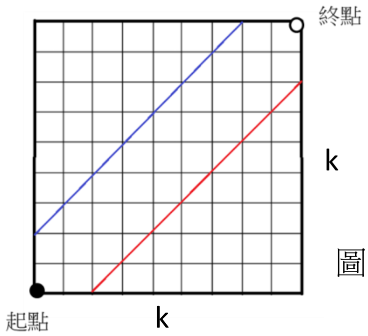


圖 2

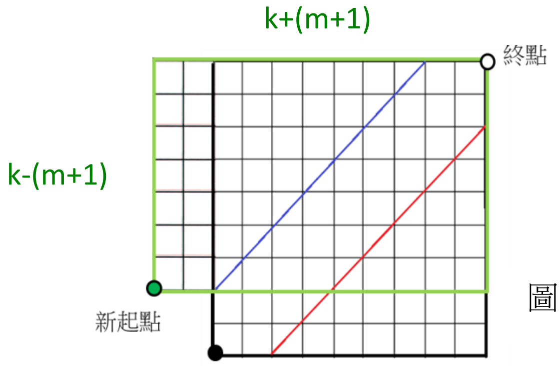


圖 3

而從綠色棋盤中新起點到終點的每一種走法剛好可完全對應從原黑色棋盤起點過藍線到終點的每一種走法。

由上述可得E_1、e_1由前到後的排列組合數$C^{2k}_{k-(m+1)}$。

2. 要超出 1 次上邊再超出 1 次下邊的條件是某個時刻出現個數$E_1 - e_1 \geq m$+1，且某個時刻出現個數$e_1 - E_1 \geq m$+1，我們可延續(1)知道，因為必須滿足出現個數$E_1 - e_1 \geq m$+1 的條件，途中必定經過藍色的界線，又必須滿足在那之後某個時刻出現個數$e_1 - E_1 \geq m$+1 的條件，途中必定經過紅色的界線。

   而我們對這條紅色界線做綠色棋盤的對稱圖形後，可將原本的圖 3 的綠色棋盤轉換成圖 4 中的黃色棋盤，

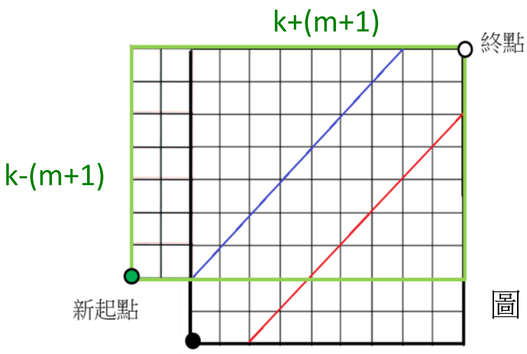


圖 3

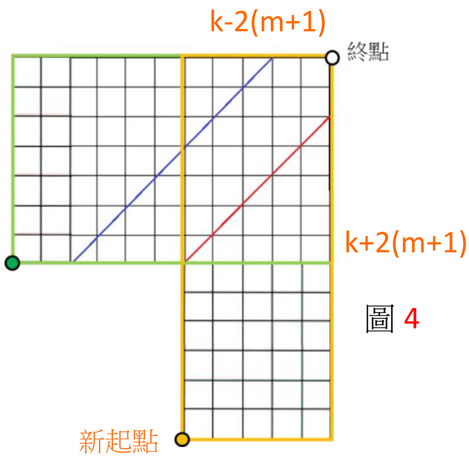


圖 4

而從黃色棋盤中新起點到終點的每一種走法剛好可完全對應從原黑色棋盤起點過藍線再過紅線再到終點的每一種走法。

由上述可得E_1、e_1由前到後的排列組合數$C^{2k}_{k-2(m+1)}$。

3. 要超出 1 次上邊，超出 1 次下邊後再超出 1 次上邊的條件是某個時刻出現個數$E_1 - e_1 \geq m+1$，且某個時刻出現個數$e_1 - E_1 \geq m+1$，在那之後又有某個時刻出現個數

$E_1 - e_1 \geq$ m+1，我們可以發現決定E_1、e_1移動過程途中，經過紅色的界線，而我們對這條藍色界線做黃色棋盤的對稱圖形後，可將原本的圖 4 的黃色棋盤轉換成圖 5 中的紫色棋盤，

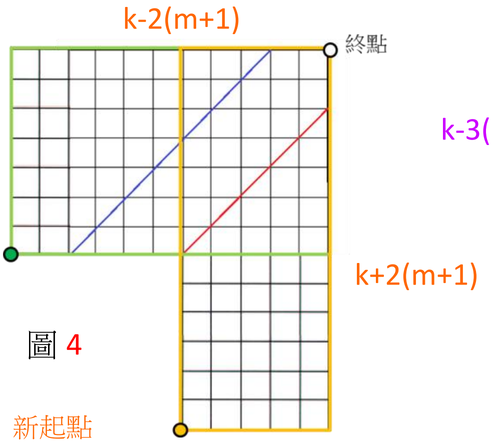


圖 4

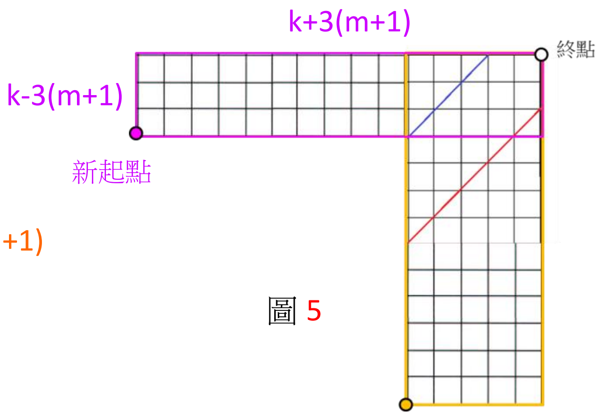


圖 5

而從紫色棋盤中新起點到終點的每一種走法剛好可完全對應從原黑色棋盤起點經過藍線再經過紅線再經過藍線再到終點的每一種走法。

4. 要超出交替 j 次的上下邊，由(1)(2)(3)我們可以得知決定E_1、e_1排列順序，移動過程途中必定經過交替 j 次的藍色、紅色的界線，也就是將原本的棋盤對藍、紅線做 j 次對稱的新棋盤(長乘寬=$[k-j(m+1)] \times [k+j(m+1)]$)中全部的道路捷徑走法。

$$\text{總共的排列方法數為} C^{2k}_{k-j(m+1)}$$

(三) 計算方法數

假設某移動情形超出交替 j 次上下邊、交替 i 次左右邊，

令$J_1 = j_1 = k$、$J_2 = j_2 = n-k$，其中 $j(m+1) \leq k \leq n-i(m+1)$。

由一路領先問題，

$$\text{移動方法數} = \sum_{k=j(m+1)}^{n-i(m+1)} C^{2k}_{k-j(m+1)} \times C^{2n-2k}_{n-k-i(m+1)} \times C^{2n}_{2k}$$

$$= \sum_{k=j(m+1)}^{n-i(m+1)} \frac{(2n)!}{[k+j(m+1)]![k-j(m+1)]![n-k+i(m+1)]![n-k-i(m+1)]!}$$

令$n' = n-(i+j)(m+1)$、$k_1 = k-j(m+1)$、

$F_1 = 2j(m+1)$、$F_2 = 2i(m+1)$

$$\text{原式} = \sum_{k1=0}^{n'} \frac{(2n'+F_1+F_2)!}{(k_1+F_1)!k_1!(n'-k_1+F_2)!(n'-k_1)!}$$

$$= a_{(T(F_1,F_2),n)} \text{(定理 5)}$$

$$= C_{n'+F_1}^{2n'+F_1+F_2} \times C_{n'}^{2n'+F_1+F_2}$$

$$= C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n} \times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n}$$

(四)分類討論

若先找出移動超出範圍的方法數，即能得出在限定範圍移動回到原點的方法數。

因此我們先討論以下幾種不同的 n、m 關係:

1. $n < m+1$

移動超出範圍的方法數 = 0，

此時青蛙任意移動必不超出範圍，故限定範圍移動回到原點的方法數= $a_{(2,n)}$。

2. $m+1 \le n < 2m+2$

移動超出範圍的方法數 = 最遠移動至下圖綠色三角形範圍的方法數。

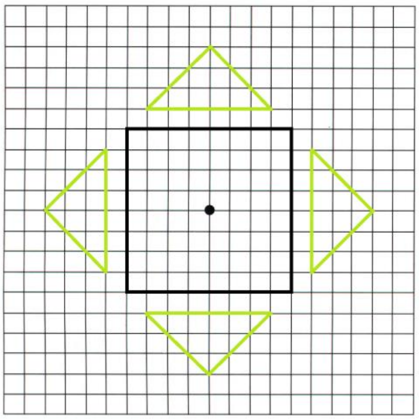


圖 6

因為上下左右四個三角形是對稱的，方法數相同，我們取上三角形來做討論。

在此情況下，任意移動最多只能超出 1 次上邊界

方法數= $C_{n-(1-0)(m+1)}^{2n} \times C_{n-(1+0)(m+1)}^{2n} = (C_{n-(m+1)}^{2n})^2$，

考慮上下左右共有 4 種選法，

故移動超出範圍的方法數= $4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2$，

得出結論: 限定範圍移動回到原點的方法數

$$= a_{(2,n)} - 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 = (C_n^{2n})^2 - 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 \quad (m+1 \le n < 2m+2)$$

3. $2m+2 \le n < 3m+3$

青蛙可能在移動路徑中超出 2 種不同的邊界(如上邊和右邊)，

在計算移動超出範圍的方法數時會被重複計算，依據排容原理，

移動超出範圍的方法數= $4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2$ −超出 2 種不同邊界的方法數，

而在討論超出 2 種不同的邊界時，又可依照邊界間的相對位置，

分為下列兩種情況:

(1) 走到相鄰邊界:

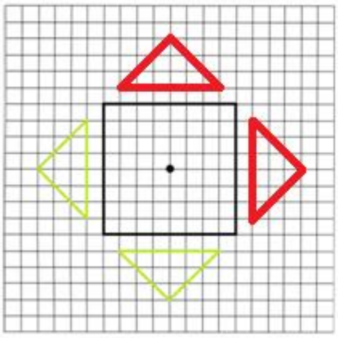


圖 7

在此移動情形會超出 1 次上下邊、1 次左右邊，

方法數= $\mathrm{C}_{\mathrm{n-(1-1)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-(1+1)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}}$，

考慮上下、左右有 4 種選法，

走到相鄰邊界的方法數= $4\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}}$

(2)走到相對邊界:

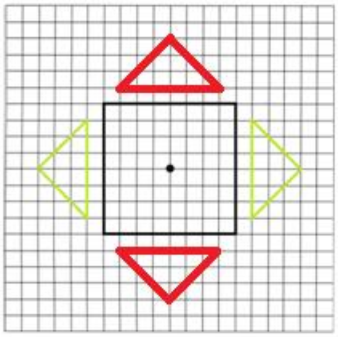


圖 8

在此移動情形會超出交替 2 次上下邊、0 次左右邊，

方法數= $\mathrm{C}_{\mathrm{n-(2-0)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-(2+0)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} = \left(\mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}}\right)^2$，

考慮上下、左右有 4 種選法，

走到相鄰邊界的方法數= $4\left(\mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}}\right)^2$

移動超出範圍的方法數= $4 \times \left(\mathrm{C}_{\mathrm{n-(m+1)}}^{\mathrm{2n}}\right)^2 - 4(\mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}})^2 - 4\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}}$，

故限定範圍移動回到原點的方法數

$$= a_{(2,n)} - 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 + 4(C_{n-2(m+1)}^{2n})^2 + 4C_n^{2n} \times C_{n-2(m+1)}^{2n}$$

$$= (C_n^{2n})^2 - 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 + 4(C_{n-2(m+1)}^{2n})^2 + 4C_n^{2n} \times C_{n-2(m+1)}^{2n}$$

4. $3\mathrm{m} + 3 \leq n < 4m + 4$

在此情況下，青蛙移動最多超出 3 種不同邊界，在扣除超出 2 種邊界時會被多扣，

而超出交替 3 次相對邊界時，也會在扣除超過交替 2 次相對邊界時被多扣(如依序經過上下上邊，會被同時視為上下、下上邊)，此時需加回。依據排容原理，移動超出範圍的方法數

$$= 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 - 4C_n^{2n} \times C_{n-2(m+1)}^{2n} - 4(C_{n-2(m+1)}^{2n})^2 + \text{超出 3 種邊界的方法數}$$

(1)超出 3 種不同邊界:

在此移動情形會超出交替 2 次上下邊、1 次左右邊，

方法數$= \mathrm{C}_{\mathrm{n-(2-1)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-(2+1)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n-(m+1)}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-3(m+1)}}^{\mathrm{2n}}$，

考慮上下、左右有 4 種選法，上下、左右邊超出次數有 2 種選法，共 8 種，

超出 3 種不同邊界的方法數$= 8\mathrm{C}_{\mathrm{n-(m+1)}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-3(m+1)}}^{\mathrm{2n}}$

(2)超出交替 3 次相對邊界:

在此移動情形會超出交替 3 次上下邊、0 次上下邊，

方法數$= \mathrm{C}_{\mathrm{n-(3-0)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-(3+0)(m+1)}}^{\mathrm{2n}} = (\mathrm{C}_{\mathrm{n-3(m+1)}}^{\mathrm{2n}})^2$，

考慮上下、左右有 4 種選法

超出交替 3 次相對邊界的方法數$= 4(\mathrm{C}_{\mathrm{n-3(m+1)}}^{\mathrm{2n}})^2$

移動超出範圍的方法數$= 4 \times \left(\mathrm{C}_{\mathrm{n-(m+1)}}^{\mathrm{2n}}\right)^2 - 4\left(\mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}}\right)^2 + 4(\mathrm{C}_{\mathrm{n-3(m+1)}}^{\mathrm{2n}})^2$

$+8\mathrm{C}_{\mathrm{n-(m+1)}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-3(m+1)}}^{\mathrm{2n}} - 4\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{2n}} \times \mathrm{C}_{\mathrm{n-2(m+1)}}^{\mathrm{2n}}$，

(3)故限定範圍移動回到原點的方法數

$$= a_{(2,n)} - 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 + 4\left(C_{n-2(m+1)}^{2n}\right)^2 - 4(C_{n-3(m+1)}^{2n})^2$$
$$-8C_{n-(m+1)}^{2n} \times C_{n-3(m+1)}^{2n} + 4C_n^{2n} \times C_{n-2(m+1)}^{2n}$$
$$= (C_n^{2n})^2 - 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 + 4\left(C_{n-2(m+1)}^{2n}\right)^2 - 4(C_{n-3(m+1)}^{2n})^2$$
$$-8C_{n-(m+1)}^{2n} \times C_{n-3(m+1)}^{2n} + 4C_n^{2n} \times C_{n-2(m+1)}^{2n}$$

5. $4\mathrm{m} + 4 \leq n < 5m + 5$

在此情況下，青蛙移動最多超出 4 種不同邊界、超出交替 3 次相對邊界及 1 次相鄰邊界時，在加回超出 3 種邊界時會被多加，而超出交替 4 次相對邊界時，也會在加回超過交替 3 次相對邊界時被多加(如依序經過上下上下邊，會被同時視為上下上、下上下邊)，此時需扣除。依據排容原理，移動超出範圍的方法數

$$= 4 \times \left(C_{n-(m+1)}^{2n}\right)^2 - 4\left(C_{n-2(m+1)}^{2n}\right)^2 + 4(C_{n-3(m+1)}^{2n})^2$$
$$+8C_{n-(m+1)}^{2n} \times C_{n-3(m+1)}^{2n} - 4C_n^{2n} \times C_{n-2(m+1)}^{2n} - \text{超出 4 種邊界的方法數，}$$

(1)超出 4 種不同邊界:

在此移動情形會超出交替 2 次上下邊、2 次左右邊，

方法數$=C^{2n}_{n-(2-2)(m+1)}\times C^{2n}_{n-(2+2)(m+1)}=C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}$，

考慮上下、左右有 4 種選法

超出 4 種不同邊界的方法數$=4C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}$

(2)超出交替 3 次相對邊界及 1 次相鄰邊界:

在此移動情形會超出交替 3 次上下邊、1 次左右邊，

方法數$=C^{2n}_{n-(3-1)(m+1)}\times C^{2n}_{n-(3+1)(m+1)}=C^{2n}_{n-2(m+1)}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}$，

考慮上下、左右有 4 種選法，上下、左右邊超出次數有 2 種選法，共 8 種，

超出交替 3 次相對邊界及 1 次相鄰邊界的方法數$=8C^{2n}_{n-2(m+1)}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}$

(3)超出交替 4 次相對邊界:

在此移動情形會超出交替 4 次上下邊、0 次上下邊，

方法數$=C^{2n}_{n-(4-0)(m+1)}\times C^{2n}_{n-(4+0)(m+1)}=(C^{2n}_{n-4(m+1)})^2$，

考慮上下、左右有 4 種選法

超出交替 4 次相對邊界的方法數$=4(C^{2n}_{n-4(m+1)})^2$

(4)移動超出範圍的方法數

$$
\begin{aligned}
&=4\left(C^{2n}_{n-(m+1)}\right)^2-4\left(C^{2n}_{n-2(m+1)}\right)^2+4\left(C^{2n}_{n-3(m+1)}\right)^2-4\left(C^{2n}_{n-4(m+1)}\right)^2\\
&\quad+8C^{2n}_{n-(m+1)}\times C^{2n}_{n-3(m+1)}-8C^{2n}_{n-2(m+1)}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}\\
&-4C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-2(m+1)}-4C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}
\end{aligned}
$$
，

故限定範圍移動回到原點的方法數

$$
\begin{aligned}
&=a_{(2,n)}-4\left(C^{2n}_{n-(m+1)}\right)^2+4\left(C^{2n}_{n-2(m+1)}\right)^2-4\left(C^{2n}_{n-3(m+1)}\right)^2+4\left(C^{2n}_{n-4(m+1)}\right)^2\\
&\quad-8C^{2n}_{n-(m+1)}\times C^{2n}_{n-3(m+1)}+8C^{2n}_{n-2(m+1)}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}\\
&\quad\quad+4C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-2(m+1)}+4C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}\\
&=(C^{2n}_{n})^2-4\left(C^{2n}_{n-(m+1)}\right)^2+4\left(C^{2n}_{n-2(m+1)}\right)^2-4\left(C^{2n}_{n-3(m+1)}\right)^2+4\left(C^{2n}_{n-4(m+1)}\right)^2\\
&\quad-8C^{2n}_{n-(m+1)}\times C^{2n}_{n-3(m+1)}+8C^{2n}_{n-2(m+1)}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}\\
&\quad\quad+4C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-2(m+1)}+4C^{2n}_{n}\times C^{2n}_{n-4(m+1)}
\end{aligned}
$$

6. $t(m+1)\le n<(t+1)(m+1),t\in N$

(1)我們假設在某情況青蛙移動超過交替 j 次以上上下邊、交替i 次以上左右邊，在 i、j 皆為非 0 整數時($i+j\le t$，$1\le i$、$j\le t$):

我們就單一 i 值去討論所有$1\le j\le t-i$的情形，

走 2k 步超過交替 j 次對邊以上排列數 $= C_{k-jm-j}^{2k}$ (j 次一路領先)。

此時會將超過恰交替 j 次對邊的情形算到 1 次，

超過交替 j+1 次對邊的情形算到 2 次(如依序超過上下上對邊，會同時符合依序超過上下、下上對邊而重複計算)，根據排容原理:

$$\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{t-i}}(\text{經過交替恰 j 次對邊排列數})$$

$$= \text{經過交替 1 次對邊以上} - \text{經過交替 2 次對邊以上}$$

$$+\text{經過交替 3 次對邊以上} - \text{經過交替 4 次對邊以上}$$

$$+\cdots+(-1)^{\mathrm{t-i+1}}\times\text{經過交替 t} - \text{i 次對邊以上}$$

$$= \sum_{\mathrm{k=m+1}}^{\mathrm{n-i(m+1)}} C_{k-\mathrm{(m+1)}}^{2k} - \sum_{\mathrm{k=2(m+1)}}^{\mathrm{n-i(m+1)}} C_{k-2\mathrm{(m+1)}}^{2k} + \sum_{\mathrm{k=3(m+1)}}^{\mathrm{n-i(m+1)}} C_{k-3\mathrm{(m+1)}}^{2k}$$

$$- \sum_{\mathrm{k=4(m+1)}}^{\mathrm{n-i(m+1)}} C_{k-4\mathrm{(m+1)}}^{2k} + \cdots + (-1)^{\mathrm{t-i+1}} \sum_{\mathrm{k=(t-i)(m+1)}}^{\mathrm{n-i(m+1)}} C_{k-\mathrm{(t-i)(m+1)}}^{2k}$$

$$= \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{t-i}} \sum_{\mathrm{k=j(m+1)}}^{\mathrm{n-i(m+1)}} \mathrm{C}_{\mathrm{k-j(m+1)}}^{\mathrm{2k}} \times (-1)^{\mathrm{j+1}}$$

(2)考慮到所有$1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{t}-1$

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{t-1}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{t-i}}\text{經過恰交替 i 次左右對邊、交替 j 次上下對邊方法數}$$

$$= -\sum_{j=1}^{t-1}\sum_{\mathrm{k=j(m+1)}}^{\mathrm{n-(m+1)}} C_{k-\mathrm{j(m+1)}}^{2k} \times C_{n-k-\mathrm{(m+1)}}^{2n-2k} \times C_{2k}^{2n} \times (-1)^{j+1}$$

$$+\sum_{j=1}^{t-2}\sum_{\mathrm{k=j(m+1)}}^{\mathrm{n-2(m+1)}} C_{k-\mathrm{j(m+1)}}^{2k} \times C_{n-k-2\mathrm{(m+1)}}^{2n-2k} \times C_{2k}^{2n} \times (-1)^{j+1}$$

$$-\sum_{j=1}^{t-3}\sum_{\mathrm{k=j(m+1)}}^{\mathrm{n-3(m+1)}} C_{k-\mathrm{j(m+1)}}^{2k} \times C_{n-k-3\mathrm{(m+1)}}^{2n-2k} \times C_{2k}^{2n} \times (-1)^{j+1}$$

$$+\sum_{j=1}^{t-4}\sum_{\mathrm{k=j(m+1)}}^{\mathrm{n-4(m+1)}} C_{k-\mathrm{j(m+1)}}^{2k} \times C_{n-k-4\mathrm{(m+1)}}^{2n-2k} \times C_{2k}^{2n} \times (-1)^{j+1}$$

$$-\cdots+(-1)^{t-1}\sum_{j=1}^{1}\sum_{\mathrm{k=j(m+1)}}^{\mathrm{n-(t-1)(m+1)}} C_{k-\mathrm{j(m+1)}}^{2k} \times C_{n-k-(t-1)\mathrm{(m+1)}}^{2n-2k} \times C_{2k}^{2n} \times (-1)^{j+1}$$

$$=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}-1}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}-\mathrm{i}}\sum_{k=j(m+1)}^{n-i(m+1)} C_{k-\mathrm{j}(\mathrm{m}+1)}^{2k}\times C_{n-k-i(\mathrm{m}+1)}^{2n-2k}\times C_{2k}^{2n}\times(-1)^{i+j+1}$$

$$=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}-1}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}-\mathrm{i}} C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n}\times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n}\times(-1)^{i+j+1}$$

(3)考慮上下、左右次序

所有情形方法數$=4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}-1}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}-\mathrm{i}} C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n}\times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n}\times(-1)^{i+j+1}$

而在 i=0 時($i=0$、$1\le j\le t$):

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}}\text{交替經過恰 0 次左右對邊、j 次上下對邊方法數}$$

$$=\sum_{j=1}^{t}\sum_{\mathrm{k}=\mathrm{j}(m+1)}^{\mathrm{n}} C_{k-\mathrm{j}(m+1)}^{2k}\times C_{n-k}^{2n-2k}\times C_{2k}^{2n}\times(-1)^{j+1}$$

$$=\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} C_{n-j(m+1)}^{2n}\times C_{n-j(m+1)}^{2n}\times(-1)^{j+1}$$

$$=\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} {C_{n-j(m+1)}^{2n}}^{2}\times(-1)^{j+1}$$

考慮上下次序，所有情形方法數 = $2\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} {C_{n-j(m+1)}^{2n}}^{2}\times(-1)^{j+1}$

同理，在 j=0 時($j=0$、$1\le i\le t$)時：

所有情形方法數 = $2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}} {C_{n-i(m+1)}^{2n}}^{2}\times(-1)^{i+1}$

(4)移動超出範圍方法數

$$=4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}-1}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}-\mathrm{i}} C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n}\times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n}\times(-1)^{i+j+1}$$

$$+2\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} {C_{n-j(m+1)}^{2n}}^{2}\times(-1)^{j+1}+\ 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}} {C_{n-i(m+1)}^{2n}}^{2}\times(-1)^{i+1}$$

$$=4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}-1}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}-\mathrm{i}} C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n}\times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n}\times(-1)^{i+j+1}$$

$$+\ 4\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}} {C_{n-j(m+1)}^{2n}}^{2}\times(-1)^{j+1}$$

$$=4\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=1}^{t-i} C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n}\times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n}\times(-1)^{i+j+1}$$

故限定範圍移動回到原點的方法數

$$= (C_n^{2n})^2 + 4\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=1}^{t-i} C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n} \times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n} \times (-1)^{i+j}$$

(五) 電腦運算

為方便觀察規律與驗證關係式的正確性，我們使用電腦撰寫程式枚舉所有移動方式來進行計算，以下為電腦程式計算出的數值(僅列出部分)。

表 7:

m=	1	2	3	4	5	6
n=1 :	4					
n=2 :	32	36				
n=3 :	256	396	400			
n=4 :	2048	4644	4896	4900		
n=5 :	16384	55404	63104	63500	63504	
n=6 :	131072	663876	836352	853200	853772	853776

用 a(2,n)減去原數值後:

表 8:

m=	1	2	3	4	5	6
n=1 :	0					
n=2 :	4	0				
n=3 :	144	4	0			
n=4 :	2852	256	4	0		
n=5 :	47120	8100	400	4	0	
n=6 :	722704	189900	17424	576	4	0

伍、研究結果與討論

一、對於青蛙在一、二、三維空間上移動回原點的方法數:

$$a_{(1,n)} = C_n^{2n}、a_{(2,n)} = (C_n^{2n})^2、a_{(3,n)} = C_n^{2n}\sum_{k=0}^{n} C_k^{2k} \times (C_k^n)^2。$$

二、對於青蛙在一、二、三維空間上移動到特定點的方法數:

$$a_{(T(F_1),n)} = C_n^{2n+F_1}、a_{(T(F_1,F_2),n)} = C_{n+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2} \times C_{n+F_1}^{2n+F_1+F_2}、a_{(T(F_1,F_2,F_3),n)} =$$

$$C_{n+F_1+F_2}^{2n+F_1+F_2}\sum_{k=0}^{n} C_{k+F_1}^{2k+F_1+F_2} \times C_{k+F_1+F_2}^{n+F_1+F_2+F_3} \times C_k^n。$$

三、探討青蛙在不同維度中移動回到原點的方法數之間的關係:

$$a_{(D,n)} = \sum_{k=0}^{n} a_{(D-1,k)} \times C_{2k}^{2n} \times C_{n-k}^{2n-2k}。$$

四、對任意維度移動回原點的方法數漸進式:

$$a_{(D,n)} \approx 2^{2n-D+1} \times D^{2n+\frac{D}{2}} \times (\pi n)^{\frac{-D}{2}}。$$

五、探討青蛙在二維平面有限範圍內，移動特定次數回到原點的方法數。

$$b_{m(2,n)} = (C_n^{2n})^2 + 4\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=1}^{t-i} C_{n-(i-j)(m+1)}^{2n} \times C_{n-(i+j)(m+1)}^{2n} \times (-1)^{i+j}。$$

$$(\mathrm{t}(\mathrm{m}+1) \leq \mathrm{n} < (\mathrm{t}+1)(\mathrm{m}+1))$$

陸、參考資料

Counting Abelian Squares:https://arxiv.org/abs/0807.5028

范德蒙公式:https://w3.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=32407

斯特靈公式(Stirling's formula):https://www.britannica.com/science/Stirlings-formula

醉漢問題:http://140.127.223.1/senior/speech/93/940514-wu/940514-wu.pdf

卡塔蘭數:https://www.itread01.com/content/1547048900.html

賭徒問題:https://w3.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=38308

【評語】010030

此作品討論在一、二及三維空間，移動方式為：每一次移動皆為一單位長且移動方向為標準基底的正向或負向，移動目標設定後，討論其移動方法數。此為組合量的探討，問題可轉譯成組合數列計算，可得所需的走法總數，也可視為二項式係數的推廣應用。有論證與討論，獲得不錯的成果。