2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010024**

參展科別　數學

作品名稱　*m×n* 圖改造成一座森林的探討

得獎獎項　大會獎 一等獎

青少年科學獎

美國ISEF正選代表

就讀學校　臺北市立建國高級中學

指導教師　黃世穎、褚雪惠

作者姓名　蘇庭昀

關鍵詞　<u>*m×n* 圖、森林、連通圖</u>

作者簡介

我是蘇庭昀，就讀臺北市立建國高中科學班。

探索數學相關問題的過程是我的樂趣，針對相關性質與定理追索再三，並廣博搜索課外數學以求能融會貫通，常因此而廢寢忘食。希望未來能以此領域建立之知識為基礎，進而深入探索它領域的知識。個人能力上的天賦－只要是想學習的就會學習得很快。

摘要

本研究試圖找出一些策略，以了解在$m\times n$的格狀街道中，最少應該放入幾個吸螞蟻的裝置，便保證能抓到所有螞蟻。這問題等價於在**圖**$G(m,n)$中，最少應放入幾個**紅點**後，便能使G中的所有環都能碰到至少一個紅點。更等價於在圖$G(m,n)$中，最少應扣除幾個點後，便可形成一**森林**。

我們將這些點數記作$k(m,n)$。特別地，當$m=n$時記作$k(n)$。本文推得：$k(m,n)\geq\left\lceil\frac{mn+1}{3}\right\rceil$，並將等號成立時的$k(m,n)$稱為**完美的**。經過構造後發現$k(2^n)$、$k(3,n)$、$k(3n,m)$、$k(2+6m,2+6n)$,$k(4+6m,4+6n)$亦為完美的，並且將$k(m,n)$壓到只剩兩種可能。也得知了在無限擴張的格子圖中被移除點的密度為$\frac{1}{3}$。

Abstract

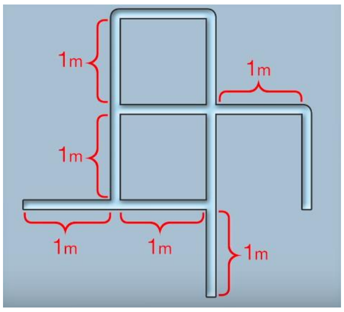
This research aims to find out strategies to solve the following problem: how many ant-sucking machines are needed to guarantee the capture of all ants on an $m\times n$ grid $G(m,n)$. This problem is equivalent to how many red dots are needed on $G(m,n)$ so that the perimeter of each cell contains at least one red dot, or how many dots can be removed on such a grid so that the grid can form a forest.

The number of the remaining dots on a forest derived from $G(m,n)$ is noted as $k(m,n)$, and is specifically noted as $k(n)$ if $m=n$. Our research shows that $k(m,n)\geq\left\lceil\frac{mn+1}{3}\right\rceil$, and we further define that $k(m,n)$ is *perfect* if equality holds for the inequation. After finding a constructive solution, we discovered that $k(2^n)$, $k(3n)$, $k(3n,m)$, $k(2+6m,2+6n)$ and $k(4+6m,4+6n)$ are perfect, and changed the possibilities of $k(m,n)$ to at most 2 and that the density of removed dots, i.e. the number of removed dots over the number of all dots on $G(m,n)$, approaches $\frac{1}{3}$ on an infinite grid.

壹、前言

一、研究動機

在 Ted 網站上有一部影片上說到一個問題：有一管子如下圖，管子中有一些螞蟻在行進，螞蟻行進的規則有 4 個：



[1] TED-ED:Can you solve the killer robo-ants riddle?

1. 行進的速率固定每分鐘走 1 公尺。
2. 不會走出這一管子且只會向前走或轉彎，且只有遇到岔路、螞蟻或前面沒路時才會轉彎。
3. 遇到岔路時會瞬間隨機走一條岔路。
4. 遇到螞蟻時兩隻螞蟻都會瞬間轉 180 度往回走，沒路時也會瞬間轉 180 度往回走。

現在有 2 個吸螞蟻的裝置，只有當螞蟻走到吸螞蟻的裝置下時才會被吸走，求吸螞蟻的裝置要放在哪會使得不論任一螞蟻初始位置和面相方向為何都會在 4 分鐘內就被吸走。

當去掉時間的限制後，其實也就是在問使圖中沒有環的取點法，那如果將圖改成 $G(m,n)$ 方格街道，則最少需要幾個吸螞蟻的裝置？以及有哪些策略來進行這些吸螞蟻裝置的配置呢？

本問題引起我研究的動機，想試圖找出一些策略，了解在 $m\times n$ 的格狀街道中，最少應該放入幾個吸螞蟻的裝置，便保證能抓到所有螞蟻。一開始我發現這問題等價於在**圖** $G(m,n)$ 中，最少應放入幾個**紅點**後，便能使 G 中得所有環都能碰到至少一個紅點。經過一兩個月的摸索與討論，發現更等價於在圖 $G(m,n)$ 中，最少應扣除幾個點後，便可形成一**森林**。因此本研究將致力於找紅點與森林之間的關係，並從中整理出一些有效的判斷方式。

二、研究目的

原始想解決的問題為：「給定 $m\times n$ 的格狀街道，找到最少放置吸螞蟻的裝置數，及其放置策略。」

我們選擇以離散圖論的觀點來進行分析，並應用於配置最少的裝置，以最低成本的策略抓到所有螞蟻。基於此，本研究目的為：

(一) 找到原始問題的等價問法。

(二) 探討形成森林的相關性質。

1. 找到適合本研究所需要的名稱定義與數學工具。
2. 找到判斷樹與森林的性質。
3. 估計出最佳紅點數的上界與下界。

(三) 探討圖 $G(n)$ 的最佳解 $k(n)$

1. 研究 n 較小時的最佳解結構。
2. 研究 $k(n)$ 是否具備遞迴關係或特殊結構。

(四) 探討圖 $G(m,n)$ 的最佳解 $k(m,n)$

1. 固定 m ，研究 n 較小時的最佳解結構。
2. 固定 m ，研究 $k(m,n)$ 是否具備遞迴關係或特殊結構。

(五) 探討無限擴張的格狀街道

1. 了解圖形的結構與密度。
2. 找到有用的訊息來說明 $k(n)$ 與 $k(m,n)$ 。

三、研究設備及器材

硬體部分：紙、筆、觸控式 SurfaceGo 平板、白板。

軟體部分：C++編譯器 Codeblock、幾何軟體 Geogebra、文書處理軟體 OneNote、Word、方程式編輯器 Mathtype。

貳、研究過程

一、定義

邊 AB

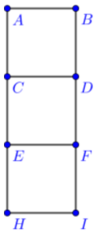
[圖 G_1]

為了使研究的過程能有清楚的表達，特此定義一些名詞，詳述如下：

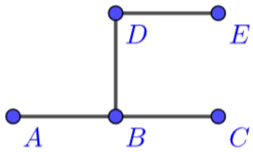
(一) 點集合與邊集合

考慮圖 G_1 中有 2 個點 A,B 和一條連接 A,B 的邊，我們將連接 A,B 兩點的邊記作 AB。為了方便起見，我們常以集合的方式討論圖中的點和邊，以 $V(G_1)$ 來表示**圖 G_1 中「所有點」的集合**，並將 G_1 的所有點個數記作 $|V(G_1)|$ ，即 $V(G_1)=\{A,B\}$ 且 $|V(G_1)|=2$ 。同樣的，以 $E(G_1)$ 來表示**圖 G_1 中「所有邊」的集合**，並將 G_1 所有邊的個數記作 $|E(G_1)|$，即 $E(G_1)=\{AB\}$ 且 $|E(G_1)|=1$。

考慮圖G_2，圖中有8個點A,B,C,D,E,F,H,I，由10邊$AB,CD,EF,HI,AC,CE,EH,BD,DF,FI$相連接。同理，以$V(G_2)$來表示圖$G_2$中「所有點」的集合，以$E(G_2)$來表示圖$G_2$中「所有邊」的集合，即有$V(G_2)=\{A,B,C,D,E,F,H,I\}$與
$E(G_2)=\{AB,CD,EF,HI,AC,CE,EH,BD,DF,FI\}$。



[圖G_2]



[圖G_3]

(二) 點的相鄰

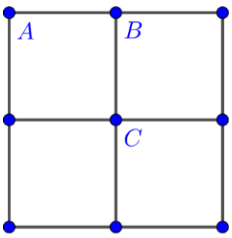
考慮圖G_3，點A與點B有一邊AB相連接，則我們稱A和B**相鄰**。點C與點E沒有一邊CE相連接，則我們稱C和E**不相鄰**。

舉例來說：在圖G_3中，除了點A和點B相鄰以外，點B與點C、點B與點D、點D與點E也相鄰。相反的，除了點C和點E不相鄰以外，點A與點C、點A與點D、點A與點E、點B與點E、點C與點D也不相鄰。

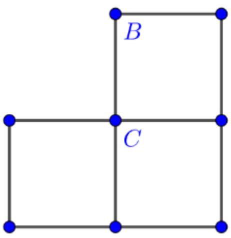
(三) 圖扣除點

我們想知道當圖G_4沒有點A後會變成什麼圖，即將圖G_4去掉點A與所有和A相連接的兩邊後所剩的圖，我們稱這個圖為**G_4扣除$\{A\}$**，並記作$G_4-\{A\}$，並把與A相接一起被去掉的邊數稱為**點A所佔的邊數**，即**A佔2邊**。

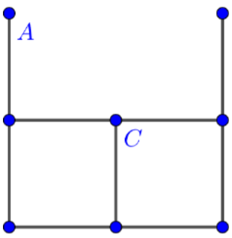
舉例來說：$G_4-\{A\}=G_5$，此時A佔2邊。$G_4-\{B\}=G_6$，此時B佔3邊。$G_4-\{A,B\}=G_7$，此時可能是先扣除A再扣除B，即A佔2邊B佔2邊，也有可能是先扣除B在扣除A，即A佔1邊B佔3邊，但不論順序如何，總佔的邊數皆為佔4邊。



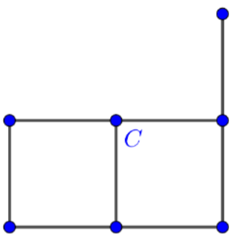
[圖G_4]



[圖G_5]



[圖G_6]



[圖G_7]

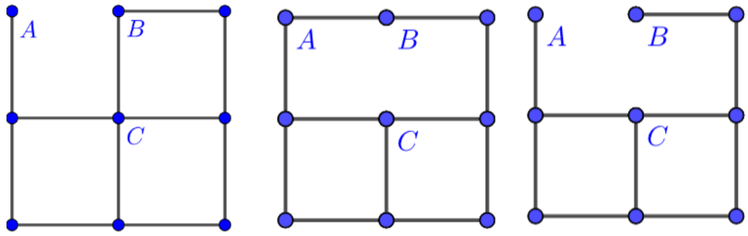
由上述定義，顯然得知以下性質：

性質 1： A 為圖 G 中一點，考慮 $G-\{A\}$，若 A 是 G 外圍的的點，則 A 所佔的邊數小於 4。

(四) 圖扣除邊

我們也會想知道當圖 G_4 沒有邊 AB 後會變成什麼圖，即將圖 G_4 去掉邊 AB 後所剩的圖，我們稱這個圖為 G_4 **扣除** $\{AB\}$，並記作 $G_4-\{AB\}$。

舉例來說：$G_4-\{AB\}=G_8$。$G_4-\{BC\}=G_9$。$G_4-\{AB,BC\}=G_{10}$。



[圖 G_8]　　[圖 G_9]　　[圖 G_{10}]

由上述定義，顯然可得知以下性質：

性質 2： ① A 為圖 G 中一點，則 $|V(G-\{A\})|=|V(G)|-1$。

② $A_1,A_2,\ldots,A_i$ 為圖 G 中 i 個相異點，則 $|V(G-\{A_1,A_2,\ldots,A_i\})|=|V(G)|-i,\forall i\in\mathbf{N}$。

③ e 為圖 G 中一邊，則 $|V(G-\{e\})|=|V(G)|$ 且 $|E(G-\{e\})|=|E(G)|-1$。

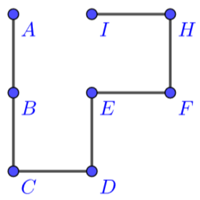
④ $e_1,e_2,\ldots,e_i$ 為圖 G 中的 i 個相異邊，

則 $|V(G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\})|=|V(G)|$ 且 $|E(G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\})|=|E(G)|-i,\forall i\in\mathbf{N}$。

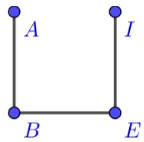
(五) 路徑與環

考慮圖 G_{11}，點 A 只與點 B 相鄰、點 B 只與點 A 和點 C 相鄰、點 C 只與點 B 和點 D 相鄰、…、點 H 只與點 F 和點 I 相鄰、點 I 只與點 H 相鄰，其中點 $A,B,\cdots,I$ 皆不相同，則稱圖 G_{11} 為一個**路徑**。並將所有兩端點為 A,I 的路徑蒐集成一集合 $Path(A,I)$，也記作 $Path(I,A)$，即 $G_{11}\in Path(A,I)$。圖 G_{11} 為圖 G_{15} 的其中一路徑，則我們稱圖 G_{15} 中**有路徑**。

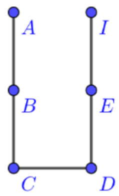
說明：圖 $G_{11},G_{12},G_{13},G_{14}$ 皆為圖 G_{15} 中的路徑，且皆 $\in Path(A,I)$。



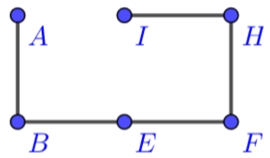
[圖 G_{11}]



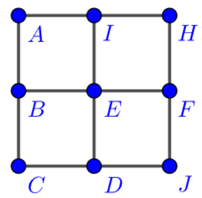
[圖 G_{12}]



[圖 G_{13}]



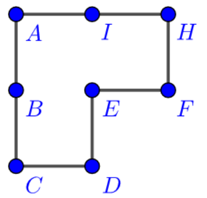
[圖 G_{14}]



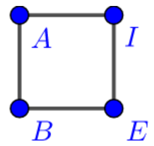
[圖 G_{15}]

若一路徑的兩端點再加上一邊使得兩端點相鄰，則我們稱加完邊後的圖為一**環**。

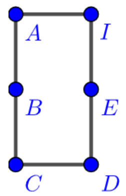
舉例來說：圖 $G_{16},G_{17},G_{18},G_{19}$ 皆為圖 G_{15} 中一環，並稱圖 G_{15} 中**有環**。



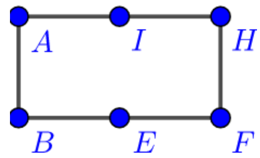
[圖 G_{16}]



[圖 G_{17}]



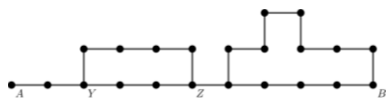
[圖 G_{18}]



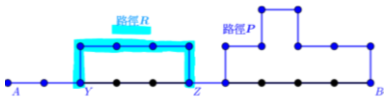
[圖 G_{19}]

性質 3： A,B 為圖 G 中兩點，
若圖 G 中有兩條不同的路徑 P,Q 且 $P,Q\in Path(A,B)$，則 $P\cup Q$ 中有環。

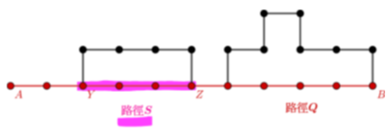
證明： 在圖 G 中，設在 $P\cap Q$ 中的點 Y 為使得 P 中比點 Y 更靠近點 A 的點皆在 Q 中的點，設在 $P\cap Q$ 中的點 Z 為使得 P 中在點 Y,Z 之間的點皆不在 Q 中，設路徑 R 為在路徑 P 中的路徑且 $R\in Path(Y,Z)$，設路徑 S 為在路徑 Q 中的路徑且 $S\in Path(Y,Z)$，則 $R\cup S$ 為 $P\cup Q$ 中的一環，得證。如圖 G_{20} 所示。



[圖 G_{20}]



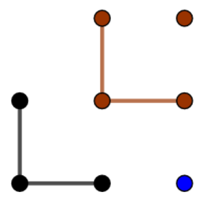
[圖 G_{20} 的路徑 P,R]



[圖 G_{20} 的路徑 Q,S]

(六) 互斥

考慮圖 G_{21}，圖 G_{21} 可視為黑圖 $\cup$ 棕圖 $\cup$ 藍圖。黑圖中的點皆不在棕圖中，即 $V(\text{黑圖})\cap V(\text{棕圖})=\varnothing$，則我們稱黑圖和棕圖**互斥**。同理，黑圖、棕圖和藍圖皆**兩兩互斥**。

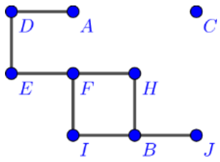


[圖 G_{21}]

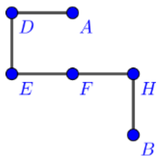
(七) 連通

考慮圖 G_{22} 中的兩點 A,B，在圖 G_{22} 中有一條路徑 G_{23}，且 $G_{23}\in Path(A,B)$，則我們稱點 A 和點 B **連通**。

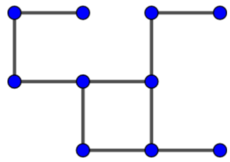
舉例來說：在圖 G_{22} 中，點 A,D,E,F,H,I,B,J 皆兩兩連通。相反的，點 A,D,E,F,H,I,B,J 皆與點 C **不連通**。



[圖 G_{22}]



[圖 G_{23}]



[圖 G_{24}]

此外，若有一圖中任兩相異點均連通，則我們稱此圖為**連通圖**，如圖 G_{24} 所示。

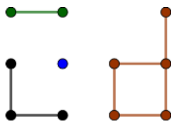
由連通圖的定義，可得下面的性質：

性質 4： 若連通圖 G 中有一環 C，邊 e 為 C 中任一邊，則 $G-\{e\}$ 為連通圖。

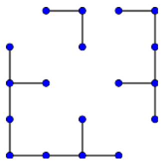
(八) 連通塊與連通塊的數量

在圖 G 中，若我們能將圖 G 分為 $k_1,k_2,...,k_n$ 個部分，使得 $k_1,k_2,...,k_n$ 均為連通圖且兩兩互斥，則我們稱 $k_1,k_2,...,k_n$ 為圖 G 的**連通塊**，並以 $\omega(G)$ 表示圖 G 中**連通塊的數量**，即 $\omega(G)=n$。

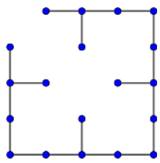
舉例來說：圖 G_{25} 中的黑圖、棕圖、綠圖和藍圖為圖 G_{25} 的連通塊，並以 $\omega(G_{25})$ 代表圖 G_{25} 的連通塊數量，即 $\omega(G_{25})=4$。



[圖 G_{25}]



[圖 G_{26}]



[圖 G_{27}]

由連通塊的定義，可得以下性質：

性質 5 若 e 為圖 G 的一邊，則 $\omega(G-e)=\omega(G)$ 或 $\omega(G)+1$。

(九) 森林

若圖 G 中沒有環，則我們稱圖 G 為一座**森林**。例如如圖 G_{26} 即為一座森林。

(十) 樹

若圖 G 中沒有環且為一連通圖，則我們稱圖 G 為一棵**樹**，顯然 $\omega(G)=1$。特別地，若圖 G 為一棵樹，則圖 G 也是一座森林。如圖 G_{27} 為一棵樹，也為一座森林。

另外，圖 G_{26} 為一座森林，此森林連通塊的數量為 3，且每個連通塊皆為一棵樹，即圖 G_{26} 為一座擁有 3 棵樹的森林。

性質 6： 設 G 為連通圖，A,B 為 G 中任兩相異點，若圖 $G-\{AB\}$ 為連通圖，則圖 G 不為樹。 換言之，若圖 G 為樹，則圖 $G-\{AB\}$ 不為連通圖。

證明： 圖 $G-\{AB\}$ 為連通圖，即圖 G 中有異於圖 G_{28} 的路徑 P，且 $P\in Path(A,B)$，根據性質 3 得知圖 G 中有環，即圖 G 不是樹，得證。

[圖 G_{28}]

性質 7： 圖 G 為森林 $\Leftrightarrow$ 圖 G 的連通塊皆為樹。

證明： $(\Rightarrow)$ 用反證法，設圖 G 為森林，若 G 中存在不為樹的連通塊 W，則 W 中有環，也就是說 G 中有環，矛盾。得證。

$(\Leftarrow)$ 設圖 G 的連通塊皆為樹，因為圖 G 的連通塊中沒有環，所以圖 G 沒有環，即 G 為森林，得證。

(十一) $m\times n$ 圖

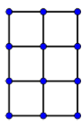
若有一方格圖為 m 列 n 行，且 $m,n\in\mathbb{N}$，則我們稱此圖為 $m\times n$ **圖**，記作 $G(m,n)$。特別地，當 $m=n$ 時，簡記作 $G(n)$。由此定義，可得知以下性質：

性質 8： $|V(G(m,n))|=(m+1)(n+1)$， $|E(G(m,n))|=m(n+1)+n(m+1)$，

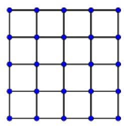
$|V(G(n))|=(n+1)^2$， $|E(G(n))|=2n(n+1)$。

舉例來說： 圖 G_{29} 可記為 $G(3,2)$，且 $|V(G(3,2))|=12$，$|E(G(3,2))|=17$。

圖 G_{30} 可記為 $G(4)$，且 $|V(G(4))|=25$，$|E(G(4))|=40$。



[圖 G_{29}]



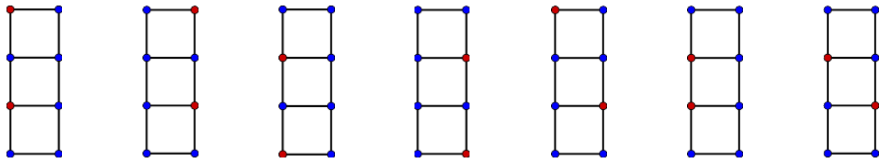
[圖 G_{30}]

(十二) $k(m,n)$、$X(m,n)$、紅點

現在終於要進入本文想探討的核心問題：「$G(m,n)$ 最少應扣除多少點後，即可形成一座森林？」，我們將 $G(m,n)$ 最少應扣的點數記作 $k(m,n)$，同時將這些扣除的點均染上紅色，並蒐集成一集合，則稱此集合紅點集，同時也是 $G(m,n)$ 的一組最佳解。

此外，若有兩組紅點集經由上、下、左、右互相對稱後可重合，則我們將這兩組紅點集視為同一組紅點集。最後我們將所有紅點集蒐集成一個集合，記作 $X(m,n)$。特別地，當 $m=n$ 時，$k(m,n)$ 簡記作 $k(n)$，$X(m,n)$ 簡記作 $X(n)$。

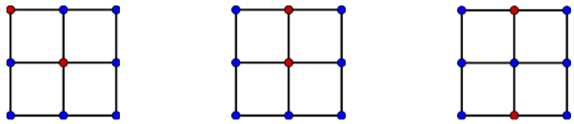
舉例來說：已知圖 G_{31} 到圖 G_{37} 等七個圖的紅點集均為 $G(3,1)$ 的最佳解，其中，圖 G_{31}, G_{32}, G_{33}, G_{34} 為同一組紅點集，若我們以圖 G_{31} 為代表，則 $X(3,1)=\{$ G_{31} 的紅點集, G_{35} 的紅點集, G_{36} 的紅點集, G_{37} 的紅點集 $\}$。



[圖 G_{31}] [圖 G_{32}] [圖 G_{33}] [圖 G_{34}] [圖 G_{35}] [圖 G_{36}] [圖 G_{37}]

再舉一例：　若 G_{38}, G_{39}, G_{40} 的紅點集皆為 $G(2)$ 的最佳解，

則 $X(2)=\{$ G_{38} 的紅點集, G_{39} 的紅點集, G_{40} 的紅點集 $\}$。



[圖 G_{38}] [圖 G_{39}] [圖 G_{40}]

由上述定義，顯然可得以下兩個性質：

性質 9： 若 $x\in X(m,n)$，則 $G(m,n)-x$ 為一森林。
性質 10： 若 $x\in X(m,n)$，則 $|V(x)|=k(m,n)$ 且 $|E(x)|=0$。
性質 10.1： 若 $x\in X(m,n)$，則 $\forall A\in x$ A 佔的邊數小於等於 4 大於等於 2。

二、判斷森林與樹的相關定理

經過對離散數學相關書籍[2]、[3]中圖論對樹、森林、連通的介紹，我們整理出簡要判斷數、森林的方法，如本節之[定理 1]、[定理 2]。

[引理 1] 圖 T 為樹 $\Rightarrow |V(T)|=|E(T)|+1$

證明： 對 $|V(T)|$ 做歸納法，欲證 $|V(T)|=|E(T)|+1$

① 當 $|V(T)|=1$ 時 $|E(T)|=0$，成立。

② 假設對於所有 $|V(T)|<p$ 的 T 皆成立。

設 T 為 $|V(T)|=p$ 的樹，e 為其中一邊，根據性質 6 得知 $T-e$ 不為連通圖，

即 $\omega(T-e)=2$，根據性質 7 得知 $T-e$ 的連通塊為兩個樹 T_1,T_2，

其中 $|V(T_1)|<p$ 且 $|V(T_2)|<p$，　即 $|V(T_1)|=|E(T_1)|+1$ 且 $|V(T_2)|=|E(T_2)|+1$，

也就是 $|V(T)|=|V(T_1)|+|V(T_2)|=|E(T_1)|+|E(T_2)|+2=|E(T-e)|+2=|E(T)|+1$，

亦成立。

由數學歸納法得證。

[引理 2] 若G為連通圖，則$|V(G)|\le|E(G)|+1$。等號成立的條件是G為一樹。

證明： ① 當G為樹時，根據[引理 1]得知$|E(G)|=|V(G)|-1$，成立。

② 當G不為樹時，G中有環，去除其中一環的一邊e_1，

若$G-\{e_1\}$不為樹，再去除其中一環的一邊，

則去除i次後，直到$G-\{e_1,e_2,...,e_i\}$沒有環為止，其中$i\ge 1$。

根據性質 4 可知$G-\{e_1,e_2,...,e_i\}$為連通圖，所以$G-\{e_1,e_2,...,e_i\}$為樹，

根據[引理 1]得知$|V(G-\{e_1,e_2,...,e_i\})|=|E(G-\{e_1,e_2,...,e_i\})|+1$，

由性質 2 得知$|V(G)|=|E(G)|-i+1$， 所以$|V(G)|<|E(G)|+1$。

由①、②得證。

[引理 3] 連通圖T滿足$|V(T)|=|E(T)|+1 \Rightarrow T$為樹

證明： 用反證法，當連通圖T不為樹，則T為有環的連通圖，

由[引理 2]得知$|V(T)|<|E(T)|+1$，矛盾。

[定理 1] 圖T為樹$\Leftrightarrow$連通圖T滿足$|V(T)|=|E(T)|+1$

證明： 根據[引理 1]、[引理 3]得證。

[定理 2] 圖F為森林圖$\Leftrightarrow$ F滿足$|V(F)|=|E(F)|+\omega(F)$

證明： $(\Rightarrow)$ 設森林F的$\omega(F)$個連通塊為$T_1,T_2,...,T_{\omega(F)}$，

根據性質 7 得知$T_1,T_2,...,T_{\omega(F)}$皆為樹，

所以根據[引理 1]得知$|V(T_i)|=|E(T_i)|+1, i=1,2,...,\omega(F)$，

將前式相加得知$\sum_{i=1}^{\omega(F)}|V(T_i)|=\sum_{i=1}^{\omega(F)}(|E(T_i)|+1)=\sum_{i=1}^{\omega(F)}|E(T_i)|+\omega(F)$，

即$|V(F)|=\sum_{i=1}^{\omega(F)}|V(T_i)|=\sum_{i=1}^{\omega(F)}|E(T_i)|+\omega(F)=|E(F)|+\omega(F)$，得證。

$(\Leftarrow)$設圖F的$\omega(F)$個連通塊為$T_1,T_2,...,T_{\omega(F)}$，其中有$z$個不是樹，

若T_i不是樹，根據[引理 2]得知$|V(T_i)|<|E(T_i)|+1$，即$|V(T_i)|\le|E(T_i)|$，

若T_i是樹，根據[引理 1]得知$|V(T_i)|=|E(T_i)|+1$，

因此$|E(F)|+\omega(F)=|V(F)|=\sum_{i=1}^{\omega(F)}|V(T_i)|=\sum_{T_i\text{非樹}}|V(T_i)|+\sum_{T_i\text{是樹}}|V(T_i)|$

$\le\sum_{T_i\text{非樹}}|E(T_i)|+\sum_{T_i\text{是樹}}(|E(T_i)|+1)=\sum_{i=1}^{\omega(F)}|E(T_i)|+\sum_{T_i\text{是樹}}1=|E(F)|+\omega(F)-z$，

得知$z=0$，即F中的連通塊皆為樹，根據性質 6 得知F為森林，得證。

三、討論 $k(n)$ 與 $k(m,n)$

回到本研究核心問題：「$G(m,n)$ 最少應扣除多少點後，即可形成一森林？」，我們將此點數記作 $k(m,n)$，此時將所有扣除的點均染上**紅點**，並蒐集成一集合，稱為 $G(m,n)$ 的一組最佳解。我們把所有上、下、左、右互相對稱的 $G(m,n)$ 最佳解視為同一種，再把所有的 $G(m,n)$ 最佳解蒐集成一集合，記作 $X(m,n)$，當 $m=n$ 時 $k(m,n)$ 簡記作 $k(n)$ 、 $X(m,n)$ 記作 $X(n)$ 。

設 $x\in X(m,n)$，根據性質 9 得知 $G(m,n)-x$ 為森林，根據[定理 2]得知

$$|V(G(m,n)-x)|=|E(G(m,n)-x)|+\omega(G(m,n)-x)\ (*)，$$

為求方便，我們定義 $e'(m,n):=|E(G(m,n))|-|E(G(m,n)-x)|$，即 **$G(m,n)-x$ 時 x 的總佔邊數**，當 $m=n$ 時記為 $e'(n)$ 。

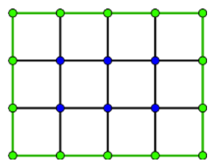
根據性質 2 得知 $|V(G(m,n)-x)|=|V(G(m,n))|-|V(x)|=|V(G(m,n))|-k(m,n)$ ，

根據性質 8 得知 $|V(G(m,n))|=(m+1)(n+1)$ 且 $|E(G(m,n))|=m(n+1)+n(m+1)$ ，

將其代入(*) $|V(G(m,n))|-k(m,n)=|E(G(m,n))|-e'(m,n)+\omega(G(m,n)\text{-}x)$

$\Rightarrow mn+m+n+1-k(m,n)=2mn+m+n-e'(m,n)+\omega(G(m,n)-x)$

$\Rightarrow e'(m,n)=mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1\,(**)$，



[圖 G_{41}]

因為一個紅點最多佔 4 邊，所以 $e'(m,n)\le 4k(m,n)\ (***)$，等號成立時 x 中的每個紅點都要佔 4 邊。因為 $G(m,n)-x$ 不能有環，所以 $G(m,n)$ 的最外圍那環(即圖 G_{41} 綠色處)至少要有一點被拿掉，所以 x 中至少有一個點所佔的邊數少於 4 。

因此(***)的等號不會成立，可改成 $e'(m,n)\le 4k(m,n)-1\,(****)$。

由(**),(****)可知 $mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1=e'(m,n)\le 4k(m,n)-1$ 。

因此將以上的結果，整理成[定理 3]。

[定理 3] 設 $x\in X(m,n)$，則 $mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1=e'(m,n)\le 4k(m,n)-1,\forall m,n\in\mathbf{N}$， 等號成立時 $m\times n$ 最佳解中的點中，1 個紅點佔 3 邊、其他紅點佔 4 邊。

由[定理 3]可知 $mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1\le 4k(m,n)-1$ ，

將上式移項化簡後可得 $3k(m,n)\ge mn+\omega(G(m,n)-x)\ge mn+1$ ，

也就是說 $k(m,n)\ge\dfrac{mn+1}{3}\,(*****)$，等號成立時 $G(m,n)-x$ 為連通圖且 x 中有 $k(m,n)-1$ 個紅點佔 4 邊、最外圍只有一個紅點佔 3 邊。

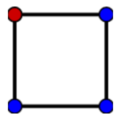
因為 $k(m,n)\in\mathbf{N}_0$ ，所以(*****)可改成 $k(m,n)\ge\left\lceil\dfrac{mn+1}{3}\right\rceil$ ，

說明：$\lceil x\rceil$ 表示大於等於 x 的最小整數，即 $\lceil\ \ \rceil$ 為上高斯符號。因此得到以下的[定理 4]，並提供了 $k(m,n)$ 的一個下界。

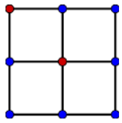
[定理 4] $k(m,n) \ge \left\lceil \frac{mn+1}{3} \right\rceil, \forall m,n \in \mathbf{N}$ 。

若 $k(m,n) = \left\lceil \frac{mn+1}{3} \right\rceil, \forall m,n \in \mathbf{N}$ ，則我們稱此 $k(m,n)$ 是**完美的**。

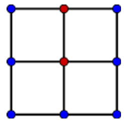
(一)、討論 $k(n)$ 之值



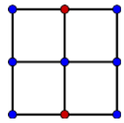
[圖 G_{42}]



[圖 G_{43}]



[圖 G_{44}]



[圖 G_{45}]

1、**$k(1)=1$ 是完美的**

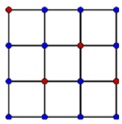
證明： 顯然 $k(1)=1$ ，如圖 G_{42} 。

2、**$k(2)=2$ 是完美的**

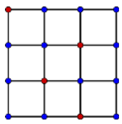
證明： 顯然 $k(2)=2$ ，如圖 G_{43}, G_{44}, G_{45} 。

3、**$k(3)=4$ 是完美的**

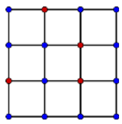
證明： 根據[定理 4]得知 $k(3) \ge 4$ ，經構造得知 $k(3)$=4 ，如圖 $G_{46}, G_{47}, \cdots, G_{52}$ 。



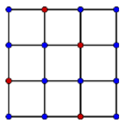
[圖 G_{46}]



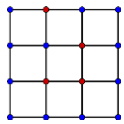
[圖 G_{47}]



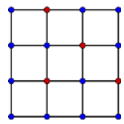
[圖 G_{48}]



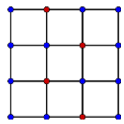
[圖 G_{49}]



[圖 G_{50}]



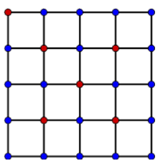
[圖 G_{51}]



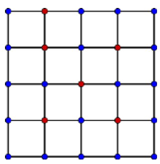
[圖 G_{52}]

4、**$k(4)=6$ 是完美的**

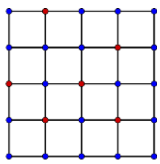
證明： 根據[定理 4]可知 $k(4) \ge 6$ ，經構造得知 $k(4)=6$ ，如圖 $G_{56}, G_{57}, \cdots, G_{60}$ 。



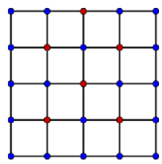
[圖 G_{56}]



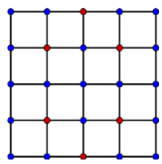
[圖 G_{57}]



[圖 G_{58}]



[圖 G_{59}]



[圖 G_{60}]

5、**$k(5)=10$ 不是完美的**

證明： 根據[定理 4]得知 $k(5) \ge 9$ ，

接下來我們要用反證法，假設 $k(5)=9$ ，即有 9 個紅點。

則根據[定理 3]得知 $e'(5) = 33 + \omega(G(5)-x) \le 35$ ，其中 $x \in X(5)$ ，

可知 $\omega(G(5)-x)=1$ 或 2 ，接下來根據 $\omega(G(5)-x)$ 分開討論如下：

case 1 當 $\omega(G(5)-x)=1$ 時：

可知 $e'(5)=34$，考慮 x 中的 9 個紅點，

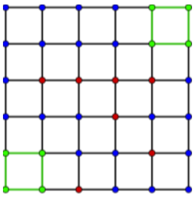
因為至少1個紅點在最外圍那環，所以佔4邊的紅點最多8個。

若有8個紅點佔4邊，顯然8個紅點佔4邊只可能為圖G_{61}中的紅點，剩下的1個紅點，但至少共要2個紅點在綠色環中，所以不可能沒環，矛盾。

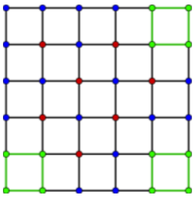
若只有7個紅點佔4邊，窮舉後得知7個紅點佔4邊只可能為圖$G_{62},G_{63},G_{64},G_{65}$中的紅點，剩下的2個紅點則要位於最外圍的環上，但至少共要3個紅點在綠色環中，所以不可能沒有環，矛盾。

若只有6個紅點佔4邊，則剩3個紅點和10邊，也就是說還有1個紅點佔4邊，矛盾。

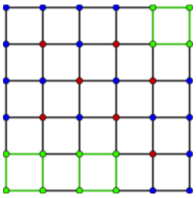
同理，佔4邊的紅點數小於6皆會矛盾。



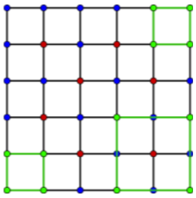
[圖G_{61}]



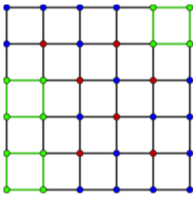
[圖G_{62}]



[圖G_{63}]



[圖G_{64}]



[圖G_{65}]

case 2　當$\omega(G(5)-x)=2$時，考慮x中的9個紅點，

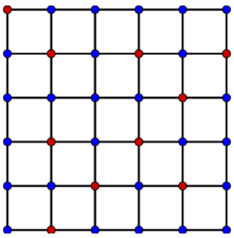
因為至少1個紅點在最外圍那環，所以佔4邊的紅點最多8個。

若有8點佔4邊，同*case* 1的討論得知這是不可能的，矛盾。

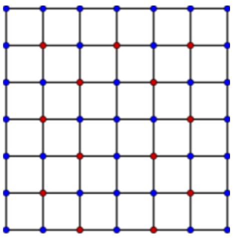
若只有7個紅點佔4邊，則剩2個紅點和7邊，也就是說還有1個紅點佔4邊，矛盾。

同理，佔4邊的紅點數小於7皆會矛盾。

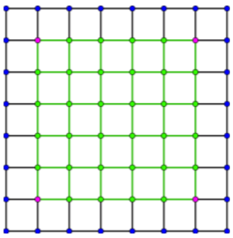
由*case* 1及*case* 2得知$k(5)\neq 9$，即$k(5)\geq 10$，經構造得知$k(5)=10$，如圖G_{66}，我使用了程式語言 C++(如附錄)進行窮舉，驗證了$k(5)\neq 9$，且找到共有1384種不同的$G(5)$的最佳解均符合$k(5)=10$的結論，這裡只舉出其中1種$k(5)=10$的圖，如圖G_{66}。



[圖G_{66}]



[圖G_{67}]



[圖G_{68}]

6、$k(6)=13$是完美的

證明：　根據[定理 4]得知$k(6)\geq 13$，經構造得知$k(6)$=13，如圖G_{67}。

7、$k(7)=18$ 不是完美的

證明：　礙於總頁數限制，本證明詳見完整版的作品說明書。

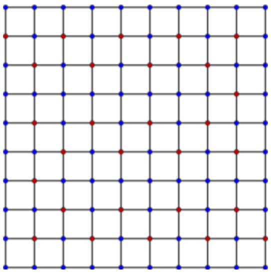
8、$k(8)=22$ 是完美的

證明：　根據[定理 4]得知 $k(8)\geq 22$，經構造得知 $k(8)$=22，如圖 G_{80}。

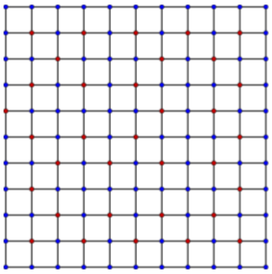
事實上，圖 G_{80} 是由 $G(4)$ 的最佳解改造而成，那麼是否所有的 $G(2^n)$ 都可以由 $G(2^{n-1})$ 改造而成呢？答案是可以的，甚至會發現 $k(2^n)$ 皆是完美的，我們將在(三)、$k(2m,2n)$ 中證明出來。

9、$k(9)=28$ 是完美的

證明：　根據[定理 4]得知 $k(9)\geq 28$，經構造得知 $k(9)$=28，如圖 G_{81}



[圖 G_{81}]



[圖 G_{82}]

10、$k(10)=34$ 是完美的

證明：　根據[定理 4]得知 $k(10)\geq 34$，經構造得知 $k(10)$=34，如圖 G_{82}。

說明：圖 G_{82} 是由 L 構造法的策略所構造出來，詳見(六)、$k(n)$ 的上界估計與 L 構造法。

這幾個月我們試了非常多的構造策略，一度猜測 $k(10)$ 不是完美的 35。但就在交稿前夕，發現新的構造法(詳見(六)、上界的估計與 L 構造法)，終於順利構造出圖 G_{82}。

接下來當 $n\geq 10$ 時，找尋 $k(n)$ 的圖困難度大增，勢必要藉由一些規則或策略，試圖找出些更好的性質與策略。所以接下來我們轉而討論 $k(m,n)$，看看會不會有什麼新的發現。

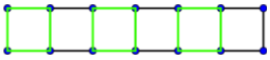
(二)、討論 $k(m,n)$ 之值

1、$k(1,n)=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 不皆是完美的

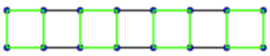
證明：　考慮 n 為偶數，如圖 G_{83}，或 n 為奇數，如圖 G_{84}。

因為每個綠環中至少要有一紅點在 $G(1,n)$ 最佳解中，均有 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 個綠環，所以

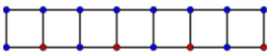
$k(1,n)\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$，經構造後得知 $k(1,n)=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$，如圖 G_{85}, G_{86}。



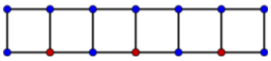
[圖 G_{83}]



[圖 G_{84}]



[圖 G_{85}]



[圖 G_{86}]

2、$k(2,n)=\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$不皆是完美的

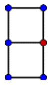
證明： ① 當$n=1$時，因為$k(2,1)=k(1,2)=1$，所以$k(2,1)=1=\left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil$是完美的，如圖$G_{87}$。

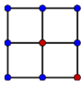
② 當$n=2$時，因為$k(2,2)=k(2)=2$，所以$k(2,2)=2=\left\lceil \frac{6}{4} \right\rceil$是完美的，如圖$G_{88}$。

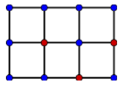
③ 當$n=3$時，根據[定理 4]得知$k(2,3)\ge\left\lceil \frac{2\times3+1}{3} \right\rceil=3$，

經構造得知$k(2,3)=3=\left\lceil \frac{9}{4} \right\rceil$是完美的，如圖$G_{89}$。


[圖G_{87}]


[圖$G_{87.1}$]

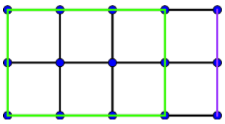

[圖G_{88}]

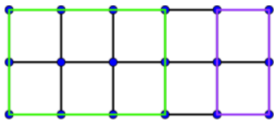

[圖G_{89}]

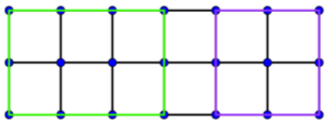
④ 當$n>3$時，根據除以 4 的餘數依序為 0，1，2，3 來討論。如圖$G_{90},G_{91},G_{92},G_{93}$。因為每個綠$G(2,3)$中至少要有$k(2,3)=3$個紅點在$G(2,n)$最佳解中，且分別共有$\frac{n}{4},\frac{n-1}{4},\frac{n-2}{4},\frac{n+1}{4}$個綠$G(2,3)$，所以綠$G(2,3)$至少要$\frac{3n}{4},\frac{3n-3}{4},\frac{3n-6}{4},\frac{3n+3}{4}$個紅點在$G(2,n)$最佳解中，紫圖分別至少需要$0,k(2,1)=1,k(2,2)=2,0$個紅點。

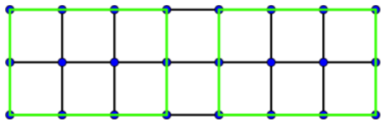
因為$k(2,n)$分別至少要綠$G(2,3)$的$\frac{3n}{4},\frac{3n-3}{4},\frac{3n-6}{4},\frac{3n+3}{4}$個紅點，再加上紫圖的$0,1,2,0$個紅點，所以$k(2,n)$至少要$\frac{3n}{4},\frac{3n+1}{4},\frac{3n+2}{4},\frac{3n+3}{4}$個紅點，合併後得$k(2,n)\ge\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$，經構造得知$k(2,n)=\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$，如圖$G_{94},G_{95},G_{96},G_{97}$。

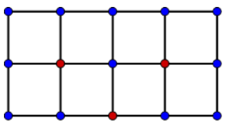
由①、②、③、④得證。

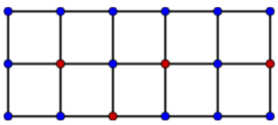

[圖G_{90}]

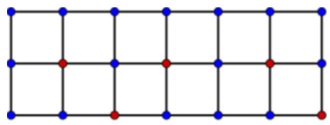

[圖G_{91}]

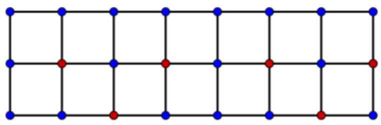

[圖G_{92}]


[圖G_{93}]


[圖G_{94}]

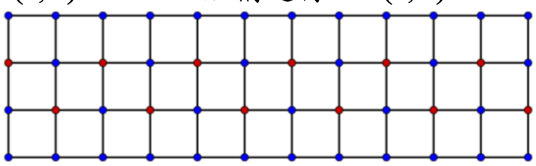

[圖G_{95}]


[圖G_{96}]


[圖G_{97}]

3、$k(3,n)=n+1$皆是完美的

證明： 根據[定理 4]得知$k(3,n)\ge n+1$，經構造得知$k(3,n)=n+1$，得證。如圖G_{98}。


[圖G_{98}]

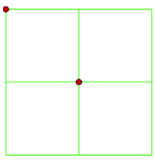
事實上，$G(9)$ 的最佳解就是用圖 G_{98} 排列而成的，那是不是所有 $G(9,n)$ 都是都可以用這種方法排列而成呢？答案是可以的，以這種方式排列甚至可得 $k(9,n)$ 是完美的，我們將在(四)、$k(3m,n)$ 中給出完整證明。

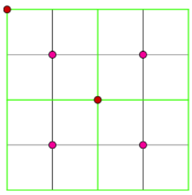
(三)、討論 $k(2m,2n)$ 之值

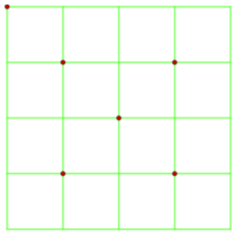
經過幾個月的討論與分類，終於觀察到 $G(2),G(4),G(8)$ 之間的遞迴關係、$G(3),G(6)$ 的遞迴關係與 $G(1,2)$, $G(2,4)$ 的遞迴關係。我們發現把 $G(2)$ 的每格看成 $G(2)$ 後即為 $G(4)$，把 $G(4)$ 的每格看成 $G(2)$ 後即為 $G(8)$，把 $G(3)$ 的每格看成 $G(2)$ 後即為 $G(6)$，把 $G(1,2)$ 的每格看成 $G(2)$ 後即為 $G(2,4)$。

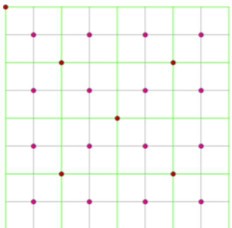
我們又發現 $G(2)$ 只要扣除中間的點後就只剩最外圍，所以可以把 $G(2m,2n)$ 看成 $G(m,n)$，但每格都是 $G(2)$，扣除完每格 $G(2)$ 中間的點(粉紅點)後就只剩 $G(m,n)$ 的環(綠圖)了，所以只要再扣除 $G(m,n)$ 最佳解(紅點)即為 $G(2m,2n)$ 的一組解，即構造出了 $k(2m,2n)$ 的一個上界。

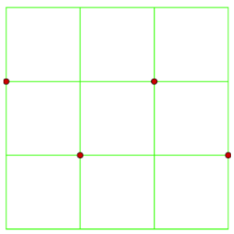
舉例來說：G_{99} 推得 G_{100}、G_{101} 推得 G_{102}、G_{103} 推得 G_{104}、G_{105} 推得 G_{106}。(為方便辨認，圖 $G_{99},G_{100},\ldots,G_{106}$ 僅顯示最佳解點的位置)

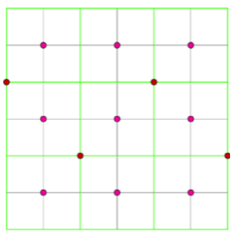

[圖 G_{99}]

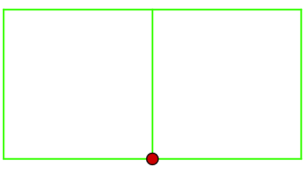

[圖 G_{100}]

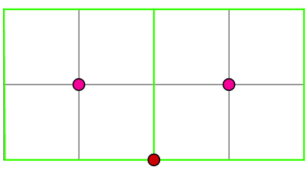

[圖 G_{101}]


[圖 G_{102}] .


[圖 G_{103}]


[圖 G_{104}]


[圖 G_{105}]


[圖 G_{106}] .

由以上的說明，即可推論出一個重要的遞迴關係的不等式 $k(2m,2n)\le k(m,n)+mn$，也就是得到[定理 5]：

[定理 5] $k(2m,2n)\le k(m,n)+mn,\forall m,n\in\mathbf{N}$

注意到倘若此時的 $k(m,n)$ 為完美的，即 $k(m,n)=\left\lceil\dfrac{mn+1}{3}\right\rceil$，由[定理 5]的結論可推得 $\left\lceil\dfrac{4mn+1}{3}\right\rceil=k(m,n)+mn\ge k(2m,2n)\ge\left\lceil\dfrac{4mn+1}{3}\right\rceil$，得知 $k(2m,2n)$ 也是完美的。因此我們可以整理成[定理 6]：

[定理 6] $k(m,n)$ 是完美的 $\Rightarrow k(2m,2n)$ 是完美的 $,\forall m,n\in\mathbf{N}$

即 $k(m,n)$ 是完美的 $\Rightarrow k(2^i m,2^i n)$ 是完美的，其中 $i,m,n\in\mathbf{N}$ 。

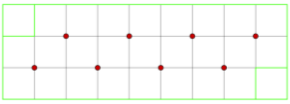
注意到 $k(1),k(1,2)$ 是完美的，根據[定理 6]得知 $k(2^n),k(2^{n-1},2^n)$ 皆是完美的。可得以下定理：

[定理 7] $k(2^n)$ 是完美的 $,\forall n\in\mathbf{N}$ 。

[定理 8] $k(2^{n-1},2^n)$ 是完美的 $,\forall n\in\mathbf{N}$ 。

(四)、討論 $k(3m,n)$ 之值

注意到 $G(3,n)$ ，當我們用圖 G_{107},G_{108} 的方式放置紅點時，整張圖就只剩綠色會有環，也就是說，當我放完這 $n-1$ 個紅點後，整張圖剩下的環等價於圖 G_{109},G_{110} 的環，即圖 G_{107},G_{108} 的紅點數加上 G_{109},G_{110} 的最佳解即為 $G(3,n)$ 的解。(為方便辨認，圖 $G_{107},G_{108},G_{109},G_{110}$ 僅顯示最佳解點的位置)


[圖 G_{107}]


[圖 G_{108}]

[圖 G_{109}]

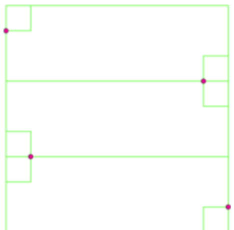
[圖 G_{110}]

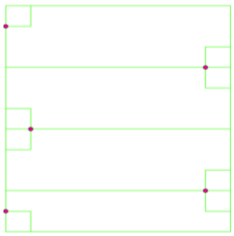
那當我們把 m 個 $G(3,n)$ 往下接起來合併成 $G(3m,n)$ 時，會有什麼策略呢？

依照前面的方法放完 $m(n-1)$ 個紅點後的圖等價於圖 $G_{111},G_{112},G_{113},G_{114}$ ，其中圖 G_{111},G_{112} 代表 n 為奇數， G_{113},G_{114} 代表 n 為偶數。

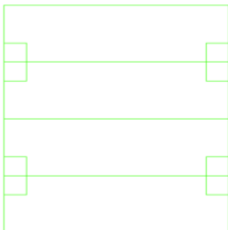
同理， $m(n-1)$ 個紅點再加上 $G_{111},G_{112},G_{113},G_{114}$ 的最佳解，即為 $G(3m,n)$ 的一組解，也就是說 $k(3m,n)\le m(n-1)+$ $G_{111},G_{112},G_{113},G_{114}$ 的最佳解紅點數(*)。

根據[定理 4]得知 $mn+1\le k(3m,n)$，我們希望 $k(3m,n)=mn+1$ 是完美的，即 G_{111}, G_{112}, G_{113}, G_{114} 的最佳解的紅點數均為 $m+1$，若 $G_{111},G_{112},G_{113},G_{114}$ 的最佳解紅點數均為 $m+1$，代入(*)得 $mn+1\le k(3m,n)\le m(n-1)+m+1=mn+1$ ，即 $k(3m,n)=mn+1$ ，所以我們希望 $G_{111},G_{112},G_{113},G_{114}$ 的最佳解點數均為 $m+1$。(為方便辨認，圖 $G_{111},G_{112},G_{113},G_{114}$ 僅顯示最佳解點的位置)


[圖 G_{111}]


[圖 G_{112}]

[圖 G_{113}]


[圖 G_{114}]

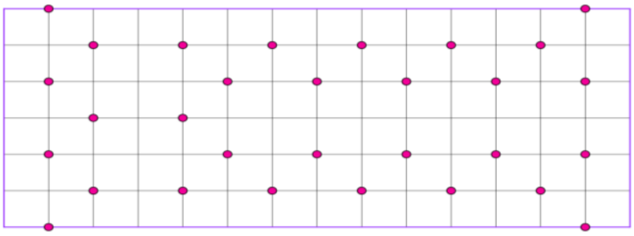
顯然圖G_{111},G_{112}的最佳解為粉紅點，共$m+1$個點，注意到，此時n為奇數所以$k(3m,n)$是完美的，整理成[引理 4]：

> [引理 4] $k(3m,n)=mn+1$是完美的,$\forall n\geq 3$為奇數,$\forall m\in\mathbf{N}$。

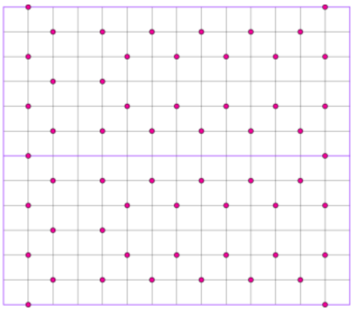
顯然圖G_{113},G_{114}的最佳解點數大於$m+1$，所以用這種方法得到的解還不能說$k(3m,2n)$是完美的，那麼$k(3m,2n)$之中有些不是完美的嗎？答案是$k(3m,2n)$都是完美的，但在證明之前還要再完成一個引理：$k(3m,n)=mn+1$是完美的，其中m為奇數、n是偶數。

因為原本的構造法無法得知此引理，所以讓我們用另一種構造法：

考慮$G(6,n)$，其中n為偶數(因為n是奇數已被[引理 4]證過了)，當我們用圖G_{115}的方式放紅點時，整張圖沒有環，此時共$2n+2$個粉紅點。(為方便辨認，圖G_{115}僅顯示最佳解點的位置)



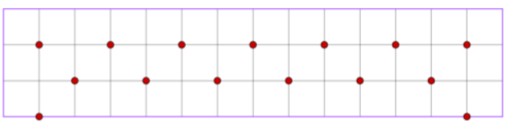
[圖G_{115}]



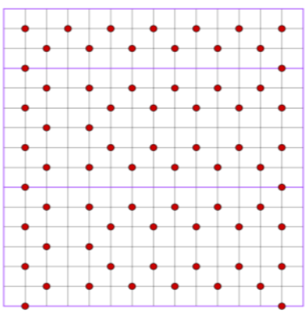
[圖G_{116}]

當我們把m個$G(6,n)$往下合併成$G(6m,n)$時，用同圖G_{115}的方法放置紅點也會使整張圖沒有環，此時$G(6m,n)$已經被放置共$2mn+2$個粉紅點($m(2n+2)-(2m-2$個重疊多算的點$)=2mn+2$)，和下界差了1點，如圖G_{116}。(為方便辨認，圖G_{116}僅顯示最佳解點的位置)

這時如果在$G(6m,n)$的上方再接個$G(3,n)$的其中一個最佳解(即圖G_{117}，共$n+1$個紅點)，合併成$G(3+6m,n)$的一個解(圖G_{118})，此時共$2mn+n+1$個粉紅點(有$2mn+2+n+1-2$個重疊多算的點$=2mn+n+1$)，即$\boxed{k(6m+3,n)\leq 2mn+n+1}$。但根據[定理 4]得$\boxed{k(6m+3,n)\geq 2mn+n+1}$，因此推得$k(3(2m+1),n)=k(6m+3,n)=2mn+n+1=(2m+1)n+1$是完美的，其中$n$是偶數。將此結論整理成[引理 5]。(為方便辨認，圖G_{117},G_{118}僅顯示最佳解點的位置)



[圖G_{117}]



[圖G_{118}]

[引理 5]　$k(3m,n)=mn+1$ 是完美的，其中 m 為奇數、$n\geq 6$ 是偶數

現在只要再證明 $k(3m,n)=mn+1$ 是完美的，其中 m 是偶數，則可與[引理 4]和[引理 5]推得 $k(3m,n)$ 是完美的了！！

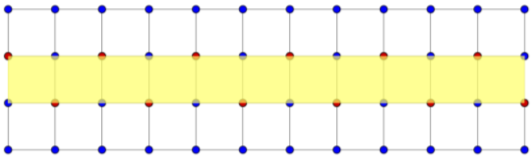
[定理 9]　$k(3m,n)=mn+1$ 是完美的，$\forall m,n\in\mathbb{N}$、$n\neq 1,2,4$

證明　　其實依照[引理 5]的構造法在去掉最下面 3 列後紅點數也會是下界，
即當 m 是奇數且 $n\geq 6$ 是偶數時，$k(3m-3,n)$ 也是完美的。

也就是說，當 m,n 均為偶數且 $n\geq 6$ 時，$k(3m,n)$ 是完美的，如圖 G_{122}。

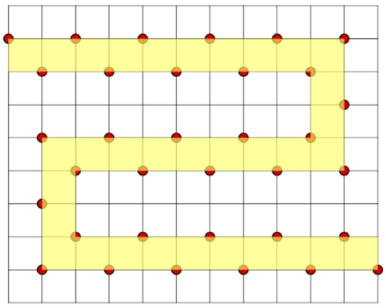
[引理 5]與此方法加起來就是[定理 9]。

注意 $k(3,n)$ 的其中一種紅點放法圖 $G_{122.1}$

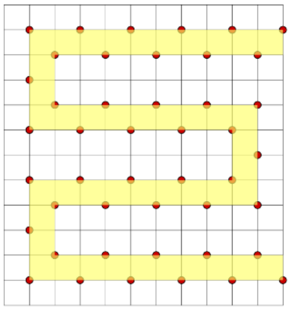


[圖 $G_{122.1}$]

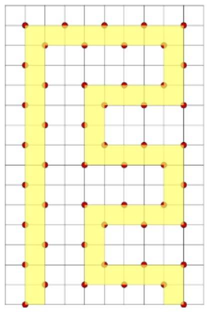
紅點沿著黃色這條上下上下放著。用同樣的方法對上面的 $k(3m,n), n\neq 1,2,4$ 構造法畫黃線後會變成 $G_{122.2}, G_{122.3}, G_{122.4}, G_{122.5}$。



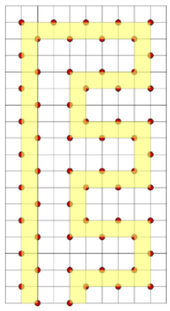
[圖 $G_{122.2}$]



[圖 $G_{122.3}$]



[圖 $G_{122.4}$]



[圖 $G_{122.5}$]

當加上了黃色後就很明顯地看的出來其實這種紅點放法就是把 $G_{122.1}$ 折完後所形成的。
注意到黃色很像是寬度為 3 的一筆畫，那如果我們用別種畫法可不可以得到一些 $k(m,n)$ 呢?
是可以的，在(六)、L 構造法與 $k(m,n)$ 的上界估計　的後半部會用到

(五)、討論無限擴張的方格街道

1.　無限擴張方格街道的紅點密度

顯然 $\lim\limits_{m,n\to\infty} k(m,n)$ 是發散的，所以我們似乎不能討論 $\lim\limits_{m,n\to\infty} k(m,n)$ 的值，那我們來試著討論另一個東西：密度。

在圖 G 中的點集 P 的密度定義為 $\dfrac{|P|}{|V(G)|}$，並定義 $D(m,n)$ 為 $G(m,n)$ 的最佳解在 $G(m,n)$ 的密度，即 $D(m,n):=\dfrac{k(m,n)}{|V(G(m,n))|}=\dfrac{k(m,n)}{(m+1)(n+1)}$。特別地，當 $m=n$ 時，簡記作 $D(n)$。我們整理成以下定義，方便之後使用之。

定義　　(1)　圖 G 中的點集 P 的密度為 $\dfrac{|P|}{|V(G)|}$ 。

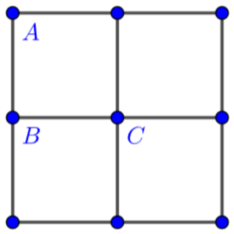
(2)　$D(m,n):=\dfrac{k(m,n)}{|V(G(m,n))|}=\dfrac{k(m,n)}{(m+1)(n+1)}$ ，

並稱為 $G(m,n)$ 的最佳解在 $G(m,n)$ 上的密度。

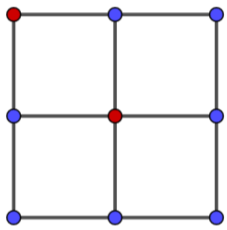
(3)　當 $m=n$ 時，簡記為 $D(n)$ ，即 $D(n)=\dfrac{k(n)}{(n+1)^2}$ 。

舉例來說：在圖 G_{123} 中的點集 $P=\{A,B,C\}$ 的密度為 $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ 。

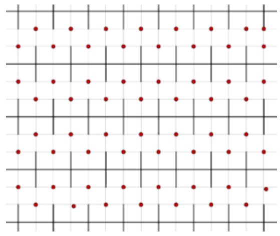
又如圖 G_{124} ，可得 $D(2)=\dfrac{2}{9}$ 。



[圖 G_{123}]



[圖 G_{124}]



[圖 G_{125}] .

現在我們感興趣的是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(m,n)$ 之值為何？其實很容易看出是 $\dfrac{1}{3}$ ，如[定理 10]的證明。

[定理 10]　$\lim\limits_{m,n\to\infty} D(m,n)=\dfrac{1}{3}$

證明：　根據[定理 9]得知

$$\lim_{p,n\to\infty} D(3p,n)=\lim_{p,n\to\infty}\frac{k(3p,n)}{(3p+1)(n+1)}=\lim_{p,n\to\infty}\frac{pn+1}{3pn+p+n+1}=\lim_{p,n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{pn}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{pn}}=\frac{1}{3},$$

又 $\lim\limits_{p,n\to\infty} D(3p,n)=\lim\limits_{m,n\to\infty} D(m,n)$ ，所以 $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(m,n)=\dfrac{1}{3}$ 。得證。

(如圖 G_{125} ，為方便辨認，僅顯示最佳解點的位置)

註：這裡的黑色邊是沒被紅色的點扣除的邊，也就是某棵樹的部份圖形。

2. 四向樹構造法

這裡再舉另一種構造法，於無限擴張街道，放上此構造出來的紅點後，所形成的這座森林內，只有一棵從中心點向上下左右四個方向生長的樹，因此將之稱為四向樹。構造步驟詳述如下：

(1)　考慮圖 G_{126} ，圖 G_{126} 中沒有環，

此時紅點數 $a_0=1$ 、總點數 $b_0=2$ 、紅點密度 $\dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2\times 3}$ 。

(2)　在 G_{126} 的左上、右上，正上方各放 1 個圖 G_{126} 後在中間偏上的紅點去掉(即綠點)即為圖 G_{127}，

圖 G_{127} 中也沒有環，

此時紅點數 $a_1 = a_0 \times 4 - 1$、總點數 $b_1 = b_0 \times 4$、紅點密度 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{2\times 4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times 4\times 3}$ 。

(3) 同理，在 G_{127} 的左上、右上，正上方各放 1 個圖 G_{127} 後在中間偏上的紅點去掉(即綠點)即為圖 G_{128} ，圖 G_{128} 中也沒有環，

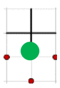
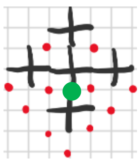
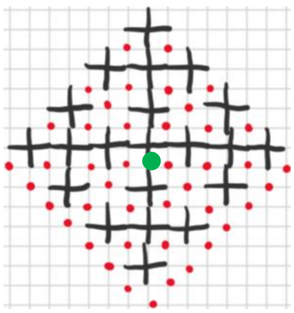
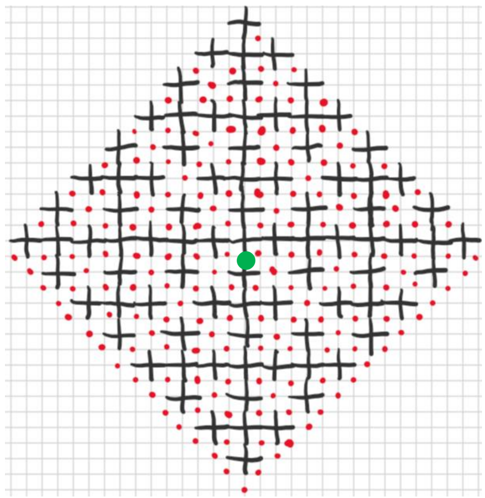
此時紅點數 $a_2 = a_1 \times 4 - 1$、總點數 $b_2 = b_1 \times 4$、紅點密度 $\frac{a_2}{b_2} = \frac{11}{2\times 4^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times 4^2\times 3}$ 。

(4) 同理，圖 G_{129} 中也沒有環，

此時紅點數 $a_3 = a_2 \times 4 - 1$、總點數 $b_3 = b_2 \times 4$、紅點密度 $\frac{a_3}{b_3} = \frac{43}{2\times 4^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times 4^3\times 3}$ 。

(5) 同理，圖 G_{130} 中也沒有環，

此時紅點數 $a_4 = a_3 \times 4 - 1$、總點數 $b_4 = b_3 \times 4$、紅點密度 $\frac{a_4}{b_4} = \frac{171}{2\times 4^4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times 4^4\times 3}$ 。

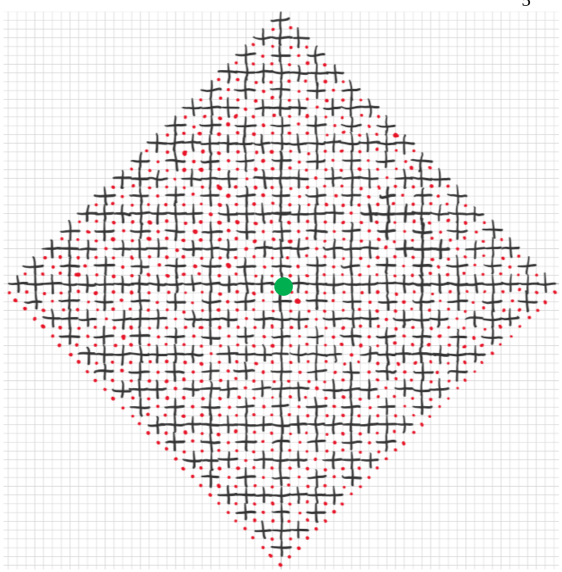





[圖 G_{126}] [圖 G_{127}][圖 G_{128}] [圖 G_{129}] [圖 G_{130}]

註：這裡的黑色邊是沒被紅色的點扣除的邊。

(6) 同理，圖 G_{131} 中也沒有環，

此時紅點數 $a_5 = a_4 \times 4 - 1$、總點數 $b_5 = b_4 \times 4$、紅點密度為 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{683}{2\times 4^5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times 4^5\times 3}$ 。



[圖 G_{131}]

(7) 繼續用同樣的方式操作 n 次所構造出來的圖，我們稱為四向樹，記作 H_n。

> [定理 11] 設 $|V(H_n)|=b_n$，則紅點數 $a_n=\dfrac{2\times4^n+1}{3}$ 且 $b_n=2\times4^n$，$\forall n\in\mathbb{N}$。
>
> 因此四向樹的紅點密度為 $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2\times4^n\times3}$，$\forall n\in\mathbb{N}$。

證明： 對 n 作歸納法，欲證 $a_n=\dfrac{2\times4^n+1}{3},b_n=2\times4^n$。

① 當 $n\le5$ 時皆成立。(如四向樹構造法)

② 假設對於所有 $n<p$ 皆成立。

則 $b_p=4b_{p-1}=2\times4^p,a_p=4a_{p-1}-1=\dfrac{2\times4^p+1}{3}$，亦成立。

由數學歸納法得證。

將構造四向樹的方法持續不斷操作下去，可得 $\lim\limits_{m,n\to\infty}G(m,n)$ 的解，因為此時的紅點密度為 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2\times4^n\times3})=\dfrac{1}{3}$ 剛好與[定理 10]的結論相符，也就是四向樹的結構是密度最小的其中一種排法。

3.單一條狀構造法

接著我們又找到一種非常簡易的單一條狀構造法，來驗證[定理 10]的結論。

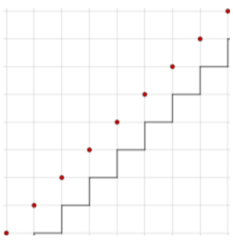
(1) 考慮無限擴張街道的部份圖 G_{132}，因為圖中沒有環，此時紅點密度為 $\dfrac{1}{3}$。

(2) 考慮將圖 G_{132} 的左上方和右下方再拼接 G_{132}，即合成圖 G_{133}，

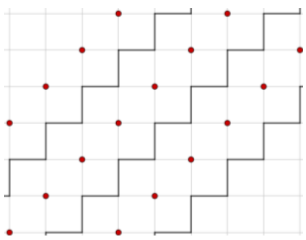
因為圖沒有環，因為沒有重疊，所以紅點密度依然為 $\dfrac{1}{3}$。

(3) 同理無限往左右放，即為密度為 $\dfrac{1}{3}$ 的排法，即圖 G_{134}。

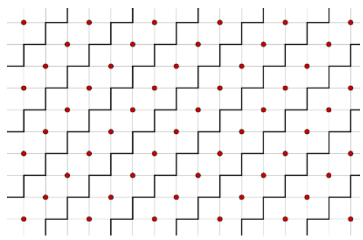
註：這裡的黑色邊是沒被紅色的點扣除的邊。



[圖 G_{132}]

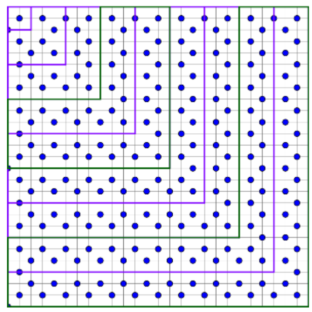


[圖 G_{133}]



[圖 G_{134}] .

(六)、L 構造法與 $k(n)$ 的上界估計



[圖 G_{135}]

1. L 構造法

考慮圖 G_{135} 的構造，我們以藍點試圖構造出 $G(n)$ 的一座森林(也就是 $k(n)$ 的上界)：

(1) 首先取圖的最左上角 $G(2)$ 區域，並放置 2 個藍點。

(2) 以 L 形區域置於最左上角 $G(2)$ 區域的右下方合併成 $G(5)$，並放將此 L 形區域內與外圍邊界處放置 8 個藍點。注意到，此時 $G(5)$ 扣除藍點集後沒有環。

(3) 以 L 形區域置於最左上角 $G(5)$ 區域的右下方合併成 $G(8)$，並放將此 L 形區域內與外圍邊界處放置 12 個藍點。注意到，此時 $G(8)$ 扣除藍點集後沒有環。

接著反覆依此規則操作下去，每次合併成新的街道圖時，扣除藍點集後都沒有環的出現，也就是形成一座森林，我們稱作 L 構造法所以此構造法可當成 $k(3m+2)$ 的上界。

此時藍點數為：$2+$【L 形區域內(不含邊)藍點數】+【L 形區域外圍重複點】

①當 m 是偶數時，藍點數 $=2+\sum_{i=1}^{m}6i+\left(m+\left\lceil\frac{m-3}{4}\right\rceil\right)=\left\lceil\frac{(3m+2)^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{m-3}{4}\right\rceil$，

其中 $\left\lceil\frac{m-3}{4}\right\rceil$ 為綠環上的藍點數。

將 m 用 $2m$ 替換後，可得：當 $n=6m+2$ 時，$\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil\le k(n)\le\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{m-1}{2}\right\rceil,\forall m\in\mathbf{N}$

②當 m 是奇數時，藍點數 $=2+\sum_{i=1}^{m}6i+\left(m+1+\left\lceil\frac{m-3}{4}\right\rceil\right)=\left\lceil\frac{(3m+2)^2+1}{3}\right\rceil+1+\left\lceil\frac{m-3}{4}\right\rceil$，

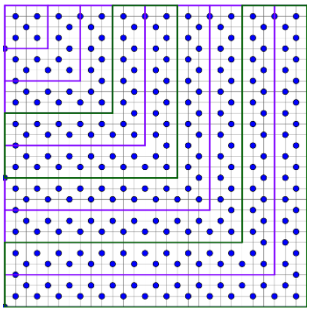
其中 $\left\lceil\frac{m-3}{4}\right\rceil$ 為綠環上的藍點數。

將 m 用 $2m-1$ 替換後，可得：當 $n=6m-1$ 時，$\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil\le k(n)\le\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil,\forall m\in\mathbf{N}$

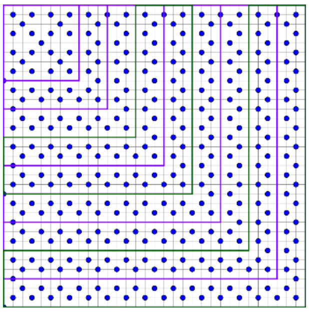
將此結論與[定理 4]合併可得[引理 6]

> [引理 6.1] 當 $n=6m+2$ 時，$\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil\le k(n)\le\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{m-1}{2}\right\rceil,\forall m\in\mathbf{N}$，
>
> 當 $n=6m-1$ 時，$\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil\le k(n)\le\left\lceil\frac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil,\forall m\in\mathbf{N}$。

如果我們把左上的$G(2)$換成$G(4)$，並使用L構造法，發現會變成圖G_{136}的形式，此時也沒有環，即形成一座森林，也就是說此構造法可當成$k(3n+4)$的上界。



[圖G_{136}]



[圖G_{137}]

用同樣的方法可得[引理 7.1]

[引理 7.1] 當$n=6m+4$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil, \forall m \in \mathbf{N}$，

當$n=6m+1$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \forall m \in \mathbf{N}$。

如果我們把左上的$G(4)$再換成$G(8)$，並使用L構造法，發現會變成圖G_{137}的形式，此時也沒有環，即形成一座森林，也就是說此構造法可當成$k(3n+8)$的上界。

用同樣的方法可得[引理 6.2]

[引理 6.2] 當$n=6m+8$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil, \forall m \in \mathbf{N}$，

當$n=6m+5$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \forall m \in \mathbf{N}$。

看起來[引理 6.2]和[引理 6.1]一樣都是求$k(n)$的上界，其中$n=6m+8$或$6m+5$而且[引理 6.2]還只能用在$n \ge 11$的情況之下，那為什麼要有[引理 6.2]呢？這是因為[引理 6.2]的上界比較小，你可能覺得都是下界加$\left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil$或$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$，上界並沒有變小，但仔細看我們用的$n$，其實對於同一數字$n$，[引理 6.2]和[引理 6.1]的$m$是不同的：[引理 6.1]的$m$是$\frac{n-2}{6}, \frac{n+1}{6}$，而[引理 6.2]的$m$是$\frac{n-8}{6}, \frac{n-5}{6}$，差了$1$，此時的$\left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$就有可能不同。

舉例來說：根據[引理 6.1]得知$k(14) \le 196+1$，但根據[引理 6.2]得知$k(14) \le 196+0$。

同理，將$G(8)$改成$G(16)$時顯然可得[引理 7.2]

[引理 7.2] 當$n=6m+16$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil, \forall m\in \mathbf{N}$，

當$n=6m+13$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \forall m\in \mathbf{N}$。

再這樣作下去可得[引理 6.i]、[引理 7.i]$,\forall i\in \mathbf{N}$

[引理 6.i] 當$n=6m+2^{2i-1}$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil, \forall m\in \mathbf{N}$，

當$n=6m+2^{2i-1}-3$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \forall m\in \mathbf{N}$

[引理 7.i] 當$n=6m+2^{2i}$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil, \forall m\in \mathbf{N}$，

當$n=6m+2^{2i}-3$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \forall m\in \mathbf{N}$。

把[引理 6.i]、[引理 7.i]合併後就是[定理 12]，這提供了一個估計上界的方法。

[定理 12] $k(n)$的上界與下界：

(1)當n是偶數且$n\equiv 1 \pmod 3$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-2^{2i}-6}{12} \right\rceil, \forall i\in$ □ $, n\ge 2^{2i}+6$。

(2)當n是偶數且$n\equiv 2 \pmod 3$時$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-2^{2i-1}-6}{12} \right\rceil, \forall i\in$ □ $, n\ge 2^{2i-1}+6$。

(3)當n是奇數且$n\equiv 1 \pmod 3$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-2^{2i}+3}{12} \right\rceil, \forall i\in$ □ $, n\ge 2^{2i}+3$。

(4)當n是奇數且$n\equiv 2 \pmod 3$時，$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-2^{2i-1}+3}{12} \right\rceil, \forall i\in$ □ $, n\ge 2^{2i-1}+3$。

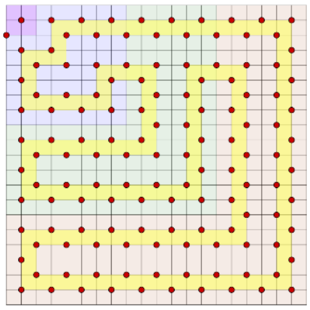
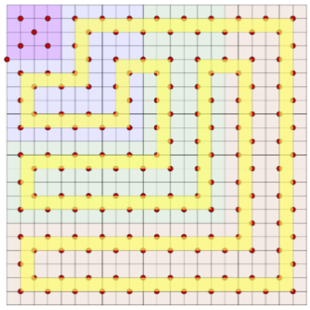
注意到$n=2^i+6$時$\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil + 0$，所以$k(2^n+6)$是完美的。

[定理 13] $k(2^n+6)$是完美的$,\forall n\in$ □ 。

2.一筆畫L構造法

注意到(四)、討論$k(3m,n)$之值 中最後的黃色一筆畫畫法，當我們如$G_{137.1},G_{137.2}$這樣畫時會發現$G_{137.1},G_{137.2}$扣掉紅點後剛好是森林，而且紅點數也剛好是[定理 4]的下界，也就是說我們有了引理 8

[引理 8] $k(2+6m),k(4+6m)$ 是完美的,$\forall m\in\mathbb{N}_0$。即 $k(n)$ 是完美的，其中 $n\equiv 2\vee 4 \pmod 6$

[圖 $G_{137.1}$]　　[圖 $G_{137.2}$]

那麼當 $n\equiv 0,1,3,5 \pmod 6$ 時 $k(n)$ 是多少呢?

根據[定理 9]已經得知了 $n\equiv 0,3 \pmod 6$ 的 $k(n)$ 了，只剩 $n\equiv 1,5 \pmod 6$。

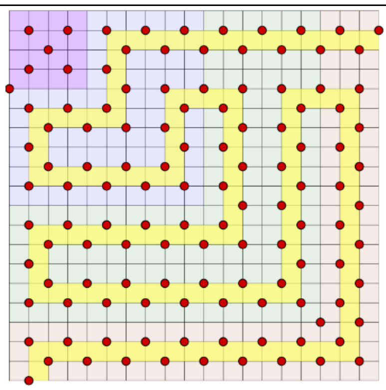
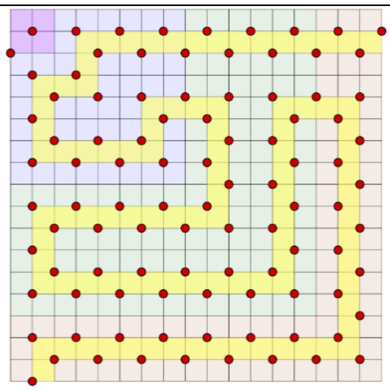
注意到當我們把 $G_{137.1},G_{137.2}$ 最右 3 行和最下 3 列拿掉，如 $G_{137.3},G_{137.4}$，

拿掉後剛好使得剩下的 $G(n),n\equiv 1,5 \pmod 6$ (即 $G_{137.3},G_{137.4}$)扣掉紅點後是森林，也就是

$k(n),n\equiv 1,5 \pmod 6$ 的上界，因為共 $\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil +1$ 個紅點，所以就有了引理 9

[引理 9] $\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \le k(n) \le \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil +1$，其中 $n\equiv 1,5 \pmod 6$。

即 $k(n)=\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \vee \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil +1$，其中 $n\equiv 1,5 \pmod 6$

[圖 $G_{137.3}$]　　[圖 $G_{137.4}$]

引理 8,引理 9,定理 9 合併可得[定理 18]

[定理 18](1)當 $n\equiv 0,2,3,4 \pmod 6$ 時，$k(n)=\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil$ 是完美的。

(2)當 $n\equiv 1,5 \pmod 6$ 時，$k(n)=\left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil \vee \left\lceil \frac{n^2+1}{3} \right\rceil +1$。

參、研究結果和討論

在離散數學中的圖論書籍，如[2][3]，通常都會介紹到判斷一圖是否為樹，我們將之簡化成下面兩個較具體的定理，以便用來判斷給定的圖是否為樹或森林。

[定理 1] 圖 T 為樹 $\Leftrightarrow$ 連通圖 T 滿足 $|V(T)|=|E(T)|+1$

[定理 2] 圖 F 為森林 $\Leftrightarrow$ 圖 F 滿足 $|V(F)|=|E(F)|+\omega(F)$

為了解決本研究核心問題：

「在 $m\times n$ 的格狀街道中，最少應該放入幾個吸螞蟻的裝置，便保證能抓到所有螞蟻？」

這等價於

「圖 $G(m,n)$ 中，最少應放入幾個紅點後，便能使 G 中的所有環都能碰到至少一個紅點？」

更等價於

「在圖 $G(m,n)$ 中，最少應扣除幾個點後，便可形成一森林？」

因此我們轉而找這個最佳的點數 $k(m,n)$，過程中找到重要關係式，以及一個非常關鍵的下界，如[定理 3]與[定理 4]。

[定理 3] 設 $x\in X(m,n)$，則 $mn+k(m,n)+\omega(G(m,n)-x)-1=e'(m,n)\le 4k(m,n)-1$，
等號成立時 $m\times n$ 最佳解的點中，1 個紅點佔 3 邊、其他紅點佔 4 邊。

[定理 4] $k(m,n)\ge\left\lceil\dfrac{mn+1}{3}\right\rceil$

等號成立時，即 $k(m,n)=\left\lceil\dfrac{mn+1}{3}\right\rceil$，則稱 $k(m,n)$ 是**完美的**。這提供了我們一個很棒的下界！

接著我們將討論 $k(n)$ 的研究結果整理如下：

n	$k(n)$	下界 $\left\lceil\dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil$	是否是完美的	說明
1	1	1	是完美的	已構造完成+[定理 7]
2	2	2	是完美的	已構造完成+[定理 7]
3	4	4	是完美的	已構造完成+[定理 9]
4	6	6	是完美的	已構造完成+[定理 7]
5	10	9	不是完美的	已構造完成+已證明
6	13	13	是完美的	已構造完成+[定理 9]

7	18	17	不是完美的	已構造完成+已證明
8	22	22	是完美的	已構造完成+[定理 7]
9	28	28	是完美的	已構造完成+[定理 9]
10	34	34	是完美的	已構造完成+已證明
11	42	41	不是完美的	已構造出上界為 42
12	49	49	是完美的	已構造完成+[定理 9]
13	58	57	不是完美的	已構造出上界為 58
14	66	66	是完美的	已構造完成+[定理 12]
15	76	76	是完美的	[定理 9]
16	86	86	是完美的	[定理 7]
2^m	$\frac{2^{2m}+2}{3}$	$\frac{2^{2m}+2}{3}$	是完美的	[定理 7]
$3m$	$3m^2+1$	$3m^2+1$	是完美的	[定理 9]
2^m+6	$\frac{2^{2m}+2}{3}+2^{m+1}+12$	$\frac{2^{2m}+2}{3}+2^{m+1}+12$	是完美的	[定理 13]

當$n\geq 9$時，$k(n)$討論的難度大增，所以我們轉而研究$k(m,n)$，並有一些具體發現，因此利用這些新發現，反過來推得$k(3m)=3m^2+1$與$k(2^m)=\frac{2^{2m}+2}{3}$均為完美的，於送件前證得$k(2^m+6)=\frac{2^{2m}+2}{3}+2^{m+1}+12$也是完美的，一併將此結論放入上表的最下方黃底。定理[12]給出了上界。接著我們將討論$k(m,n)$的研究結果整理如下：

m	$k(m,n)$	下界$\left\lceil \frac{m\times n+1}{3} \right\rceil$	是否是完美的	說明
1	$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$	不皆是完美的	已完成證明
2	$\left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$	不皆是完美的	已完成證明
3	$n+1$	$n+1$	是完美的	已構造+[定理 9]
$3t$	$tn+1$	$tn+1$	是完美的	[定理 9]
2^{t-1}	當$m=2^{t-1}$且$n=2^t$時：$k(2^{t-1},2^t)=\frac{2^{2t-1}+1}{3}$	$\frac{2^{2t-1}+1}{3}$	是完美的	[定理 8]

接著我們又找到$k(2m,2n)$很棒的上界，如[定理 5]：

[定理 5]　$k(2m,2n)\leq k(m,n)+mn$

在構造 $2m\times 2n$ 的過程中，發現了以下[定理 6]，這提供了「完美的」擴增方法。

[定理 6] $k(m,n)$ 是完美的 $\Rightarrow k(2m,2n)$ 是完美的

然後又用了定理 6 證出了[定理 7]與[定理 8]。

[定理 7] $k(2^n)$ 是完美的 $,\forall n\in \mathbf{N}$。

[定理 8] $k(2^{n-1},2^n)$ 是完美的 $,\forall n\in \mathbf{N}$。

在構造時構造出了極為強大的[定理 9]：

[定理 9] $k(3m,n)=k(n,3m)=mn+1$ 是完美的 $,\forall m,n\in \mathbf{N}$

根據定理 9 可知每 3 個連續的 $k(m,n)$ 就有一個是完美的。

在探討無限擴張街道時發現了[定理 10]：

[定理 10] $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(m,n)=\dfrac{1}{3}$

在構造四向圖時發現了[定理 11]：

[定理 11] 設 $|V(H_n)|=b_n$，則紅點數 $a_n=\dfrac{2\times 4^n+1}{3}$ 且 $b_n=2\times 4^n$，$\forall n\in \mathbb{N}$ 。

因此四向樹的紅點密度為 $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2\times 4^n\times 3}$，$\forall n\in \mathbb{N}$ 。

用 L 形構造法得出了不錯的上界，因此推得了[定理 12]：

[定理 12] $k(n)$ 的上界與下界：

(1) 當 n 是偶數且 $n\equiv 1 \pmod 3$ 時，$\left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil \le k(n)\le \left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil \dfrac{n-2^{2i}-6}{12}\right\rceil ,\forall i\in \mathbb{N},n\ge 2^{2i}+6$ 。

(2) 當 n 是偶數且 $n\equiv 2 \pmod 3$ 時 $\left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil \le k(n)\le \left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil \dfrac{n-2^{2i-1}-6}{12}\right\rceil ,\forall i\in \mathbb{N},n\ge 2^{2i-1}+6$ 。

(3) 當 n 是奇數且 $n\equiv 1 \pmod 3$ 時，$\left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil \le k(n)\le \left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil \dfrac{n-2^{2i}+3}{12}\right\rceil ,\forall i\in \mathbb{N},n\ge 2^{2i}+3$ 。

(4) 當 n 是奇數且 $n\equiv 2 \pmod 3$ 時，$\left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil \le k(n)\le \left\lceil \dfrac{n^2+1}{3}\right\rceil+\left\lceil \dfrac{n-2^{2i-1}+3}{12}\right\rceil ,\forall i\in \mathbb{N},n\ge 2^{2i-1}+3$ 。

然後用了定理 12 證出了[定理 13]：

[定理 13] $k(2^n+6)$ 是完美的 $,\forall n\in \mathbb{N}$ 。

肆、結論與未來展望

(一) 結論

本研究找到 $k(m,n)$ 的上下界，並成功解決了 $k(3m,n)$、$k(2^n)$、$k(1,n)$、$k(2,n)$、$k(2^n+6)$、$k(2^n,2^{n-1})$、等問題，並找到一些放置紅點的策略，更推出無限擴張街道中紅點的密度為 $\frac{1}{3}$，這對於剩下的 $k(3m\pm1,n)$ 提供了一種不錯的思考方向與策略。

(二) 應用

回到一開始的吸螞蟻問題，我們所求的就是螞蟻一定會碰到裝置的最小數量與其配置，那如果把螞蟻改成人的話，即人一定會碰到的最少點數與位置，那就有很多用處了。例如，在街道中將這些點放置監視器，一定存在某台監視器能拍攝到此人的去向，或許能應用於追蹤的相關問題，而且此時放置的監視器是最少的。

又例如，在佔地廣大的樂園裡，將這些點放置最少的地圖或服務人員，此時不斷向前移動的遊客必能遇到這些服務設施。

本研究要找的是最經濟的方式來設置紅點，而非最有效的方式。諸如：監視器配置、地圖路標的設置、網路節點的選擇、賣場服務人員的站點、遊樂場代幣機的設置、垃圾桶的安置、便利商店的開設、圍捕生物的策略等，提供了最經濟的一種策略。

(三) 未來展望

1. 找到所有不完美的 $k(3m\pm1,n)$ 的值，並證明之。
2. 找到不是 $G(m,n)$ 的圖(例如其他形狀，甚至是 3 維圖)的最佳解。

伍、參考資料及其他

[1] TED-ED RIDDLES 第 2 季・第 8 集 Can you solve the killer robo-ants riddle? - Dan Finkel

[2] 邵慰慈、潘建強(2015)。基礎離散數學。台北市：九章出版社。

[3] 鄧安文(2007)。離散數學。台北市：學貫行銷股份有限公司。

【評語】010024

這個作品以一個應用問題開始，將問題化為圖的 feedback vertex set 問題，也就是將一個圖 G 去掉最少的點，使其不含圈的點數 k(G)。主要結果是下面有關 m 列、n 行棋盤的對應最少點數 k(m, n)。作品中先給出了一個 k(m, n)的下界 lb(m, n)；並給出 m 或 n 為 1, 2, 3 的答案；而對於大的 m 和 n，也證出其值為 lb(m, n) 或 lb(m, n)+1 兩者之一，有一些情況已經確定是其中哪一個值了。整體來說，其結果比 2008 在 Discrerte Matrhematics 雜誌的一篇文章的結果好，是一篇極佳的作品。