2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010023**

參展科別　數學

作品名稱　三角形可變動的外西瓦線之共點問題

得獎獎項　大會獎 四等獎

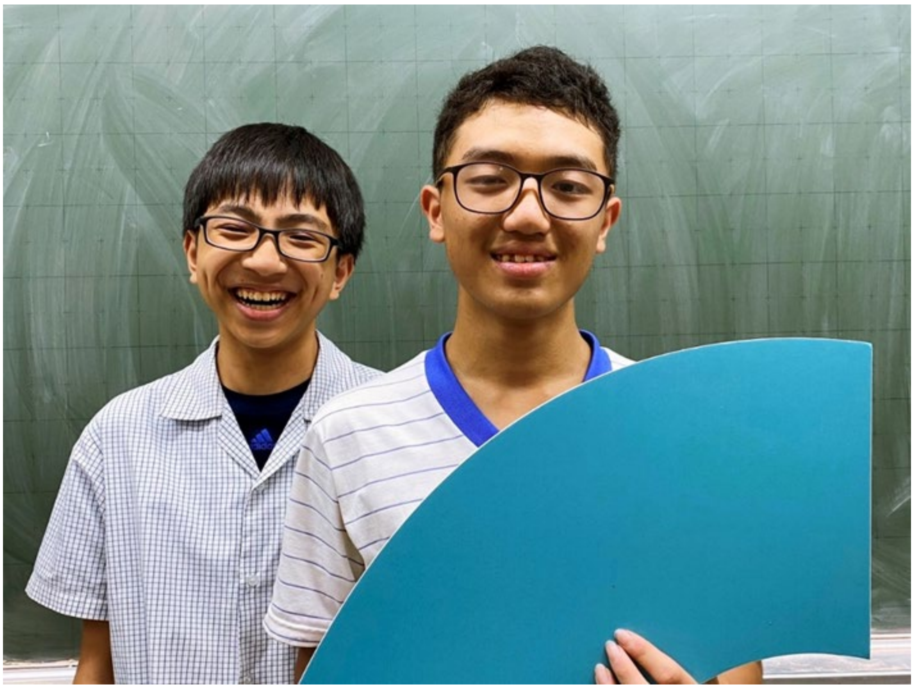
就讀學校　新北市立文山國民中學

指導教師　蕭偉智

作者姓名　許崇煒、張齊軒

關鍵詞　**共點共線、Barycentric Coordinate、Kiepert 雙曲線**

作者簡介



作者合照（右起：許崇煒、張齊軒）

我是許崇煒，就讀新北市立文山國中，喜愛計算研究數學、閱讀科學書籍。自小就樂於解出或證明需要思考許久的數學問題，那使我感到非常有成就感。課餘時間，我會打籃球、溜冰等。我另外一個身份是滑輪溜冰選手，榮獲全中運、會長盃全國溜冰錦標賽、中正盃全國溜冰錦標賽等前三名佳績。國小時，我便在各種數學競賽中嶄露頭角，雖然其中遭遇過挫折，但是重整心態後出發，多次獲得冠軍。國中起，我轉為進行數學研究，這次蕭老師指導我們三角學問題，花費了一年半的時間，經過不斷的嘗試、討論和修改，得出了許多漂亮的性質。我升上高中後，希望接觸大學數學，學習更多知識。

我是張齊軒，我生性樂觀，沒有太多特殊才能，不過比別人有天分的便是數理方面的理解力，而且享受解決問題所帶來的成就感，我常常陶醉其中，於是數學和物理便成為我的樂趣。國小就讀資優班，當時沒有發展數理專長。進入國中數理資優班後，身邊出現了競爭與合作的同學們，以及專業且熱心的老師們，於是在兩年多的學習成長下，我了解到了許多有趣、神奇、漂亮的理論。八年級起，我和同學在蕭老師的指導下進行幾何研究，以重心坐標為工具，找出不少漂亮性質，希望我們所找尋出的結論能讓後人在這個議題上有所幫助。

摘要

2001 年 Larry Hoehn 提出了 $\triangle ABC$ 的三個旁接三角形的西瓦線之共點性質，近年的相關研究都是探討邊上作正方形或矩形而構造三個旁接三角形。本研究不限於直角，創新探討角度一般化情形。考慮以 $\triangle ABC$ 頂點為旋轉中心，將三邊分別旋轉實數 φ 後，構造出可變動的三個旁接三角形。我們發現可變動的三條外中線交於一點、三條外高交於一點、三條外中垂線交於一點。我們先探討前述三個動點的軌跡，發現著名的 Kiepert 雙曲線，本研究為 Kiepert 雙曲線的新構造法。接續研究任選兩點所構成的直線性質，有趣的是，外高交點與外中垂線交點連線恆通過重心；外高交點與外中線交點連線恆通過九點圓圓心，我們給出共線三點的有向線段比例常數。最後，我們再探討角度與長度同時可變動的三個外西瓦線共點情形。

Abstract

Larry Hoehn considered the classical geometric configuration with squares AC_1C_2B, BA_1A_2C, and CB_1B_2A attached to each side of a triangle ABC and studied relationships among the cevians of the extriangles AB_2C_1 , BC_2A_1, and CA_2B_1[4]. In recent papers [1, 2, 3, 9], the configurations have been studied in which rectangles are attached to the sides of a triangle ABC. In the paper, we explored variable extriangles constructed from variable directed angle φ such that $\angle A_1BC=\angle BCA_2=\angle B_1CA=\angle CAB_2=\angle C_1AB=\angle ABC_2=\varphi$ for some real number φ. The results are as follows: (1) We found out that three medians are concurrent $X_{M(\varphi)}$; three altitudes are concurrent $X_{H(\varphi)}$; three perpendicular bisectors are concurrent $X_{P(\varphi)}$. (2) We further studied the relationships among $X_{M(\varphi)}$, $X_{H(\varphi)}$, and $X_{P(\varphi)}$. It is interesting that the loci of $X_{M(\varphi)}$ / $X_{H(\varphi)}$ are well-known Kiepert hyperbola. (3) It is worth mentioning that the line $X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}$ passes through the centroid G; the line $X_{H(\varphi)}X_{M(\varphi)}$ passes through the nine-point center N. Furthermore, we investigated variable extriangles constructed from co-variable angle and length.

壹、 研究背景

一、 研究背景

我們都知道任意 $\triangle ABC$ 的三條中線交於一點（重心）、三條高交於一點（垂心）、三條中垂線交於一點（外心），然而我們在數學獨立研究課時，蒐尋資料發現 Larry Hoehn 於 2001 年曾發表的一篇論文〈Extriangles and excevians〉提出另類新奇的性質。

以下簡述 Larry Hoehn 於 2001 年的研究關於旁接三角形（Extriangles）與外西瓦線（Excevians）的結果[4]。他從畢氏定理的構圖延伸，分別以任意 $\triangle ABC$ 的三邊向外作三個正方形 BAC_1C_2、正方形 CBA_1A_2、正方形 ACB_1B_2，連接線段 $\overline{A_1C_2}$、$\overline{B_1A_2}$、$\overline{C_1A_2}$。

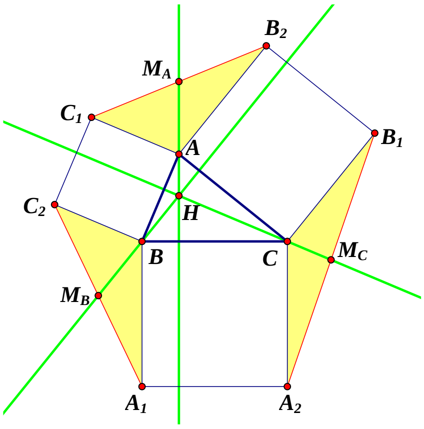


圖 0-1：外西瓦線為中線。

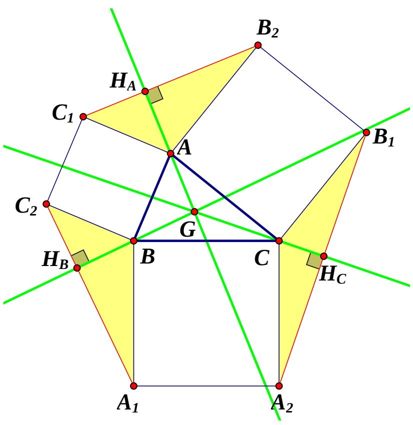


圖 0-2：外西瓦線為高。

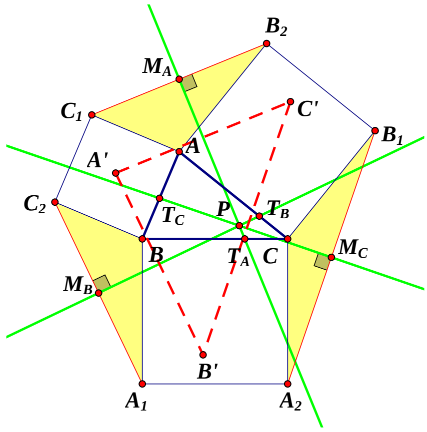


圖 0-3：外西瓦線為中垂線。

（一）外西瓦線為中線

如圖 0-1，分別過點 A、B、C 作三個旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 的中線，發現各自的中線 $\overline{AM_A}$、$\overline{BM_B}$、$\overline{CM_C}$ 恰為 $\triangle ABC$ 的三條高，因此三個旁接三角形的中線必交於一點，即為 $\triangle ABC$ 的垂心。

（二）外西瓦線為高

如圖 0-2，分別過點 A、B、C 作三個旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 的高，發現各自的高 $\overline{AH_A}$、$\overline{BH_B}$、$\overline{CH_C}$ 恰為 $\triangle ABC$ 的三條中線，因此三個旁接三角形的高必交於一點，即為 $\triangle ABC$ 的重心。

（三）外西瓦線為中垂線

如圖 0-3，分別過點 A、B、C 作三個旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 的中垂線。有趣的是，Larry Hoehn 以 $\triangle ABC$ 的三條中線長度的兩倍作為邊，透過平移與旋

轉巧妙構造相似三角形 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$，最後發現各自的三條中垂線 $\overline{AT_A}$、$\overline{BT_B}$、$\overline{CT_C}$ 恰為 $\triangle A'B'C'$ 的三條中垂線，因此三個旁接三角形的中垂線必交於一點 P，即為 $\triangle A'B'C'$ 的外心。

我們好奇「怎麼不是向外構造正三角形」呢？理應先從構造最少邊的正多邊形進行研究，但是 Larry Hoehn 並沒有針對構造正三角形進行說明或進一步研究，相較正方形，正三角形的難度比較高？還是較容易呢？

二、 相關文獻

我們利用 Google Scholar 網站搜尋資料，先以作者 Larry Hoehn 以及篇名〈Extriangles and excevians〉進行搜尋，我們找到近幾年的相關數學論文後，再以這些作者與篇名再次搜尋，一直重複此搜尋流程，盡可能找尋所有相關論文。

我們將找到的文獻進行整理，針對其研究的構造方法，以及主要研究發現進行表列。在平面上給定任意三角形 $\triangle ABC$，其旁接三角形的相關研究發現都是外（內）接正方形或矩形而構造出的旁接三角形之性質[1, 2, 3, 4, 9]，本研究則是推廣新的方向——角度。

我們分別以 $\triangle ABC$ 的三個頂點為旋轉中心，將三邊向外旋轉任意角 φ，其中 $0 \le \varphi < 2\pi$，形成三個變動的旁接三角形，研究旁接三角形的三種外西瓦線共點性質（詳見本文第 8 頁）且討論其關聯性，最後給出更多有趣發現。

貳、 研究目的

在任意 $\triangle ABC$ 的外部分別取點 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 使得有向角 $\angle A_1BC = \angle BCA_2 = \angle B_1CA = \angle CAB_2 = \angle C_1AB = \angle ABC_2 = \varphi$，其中 $0 \le \varphi < 2\pi$ 且 $\overline{AC_1} = \overline{BC_2} = \overline{AB}$、$\overline{BA_1} = \overline{CA_2} = \overline{BC}$、$\overline{CB_1} = \overline{AB_2} = \overline{CA}$，連接線段 $\overline{A_1C_2}$、$\overline{B_1A_2}$、$\overline{C_1B_2}$ 構造 $\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$，再作$\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 的中線、高、中垂線，這些西瓦線稱為 $\triangle ABC$ 的（可變動的）外西瓦線。

本研究有以下幾個研究目的。

一、證明任意 $\triangle ABC$ 的三條外中線交於一點 $X_{M(\varphi)}$（動點）及其性質探究。

二、證明任意 $\triangle ABC$ 的三條外高交於一點 $X_{H(\varphi)}$（動點）及其性質探究。

三、證明任意 $\triangle ABC$ 的三條外中垂線交於一點 $X_{P(\varphi)}$（動點）及其性質探究。

四、探究 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 彼此的共線性質，及其共線直線的三線極點軌跡。

第二部分的研究，我們不僅是讓「角度」可變，同時再讓「長度」可變，即有向角 $\angle A_1'BC=\angle BCA_2'=\angle B_1'CA=\angle CAB_2'=\angle C_1'AB=\angle ABC_2'=\varphi$，且 $\overline{BA_1'}=\overline{CA_2'}=\lambda_1\overline{BC}$、$\overline{CB_1'}=\overline{AB_2'}=\lambda_2\overline{CA}$、$\overline{AC_1'}=\overline{BC_2'}=\lambda_3\overline{AB}$，連接線段 $\overline{A_1'C_2'}$、$\overline{B_1'A_2'}$、$\overline{C_1'B_2'}$ 構造 $\triangle AC_1'B_2'$、$\triangle BA_1'C_2'$、$\triangle CB_1'A_2'$。因而以下研究目的五。

五、探究 $X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$、$X_{H(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$、$X_{P(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$ 的性質。

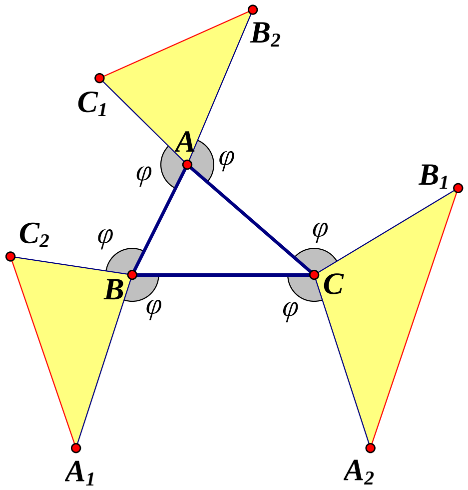


圖 1：角度可變的旁接三角形。

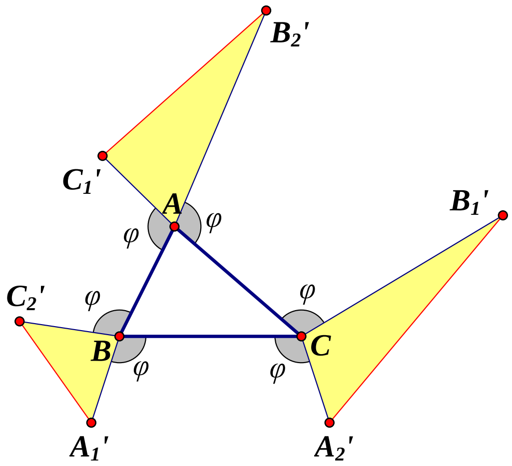


圖 2：角度與長度可變的旁接三角形。

參、 研究設備及器材

一、軟體：幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0

二、網站：WolframAlpha、The Encyclopedia of Triangle Centers

肆、 預備知識

一、 重心坐標 Barycentric Coordinates

平面上任一點 P 與 $\triangle ABC$ 三頂點形成三個子三角形 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$，其中 ΔPBC 的頂點 P、B、C 為逆時鐘方向，則定義面積為正；順時鐘方向，則定義面積為負，其餘亦同。利用這些三角形有向面積比來定義此點的位置，就稱為 P 點的重心坐標（Barycentric Coordinates），即 $P(x:y:z)=P(\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB)$。

若三個實數序對 (x,y,z) 滿足 $x+y+z=1$ 時，我們就用逗號表示 P 點的中心坐標之三個分量，此時稱 $P(x,y,z)$ 為正規化的重心坐標（Normalized Barycentric

Coordinates)。因此，我們有三個頂點的坐標 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$。

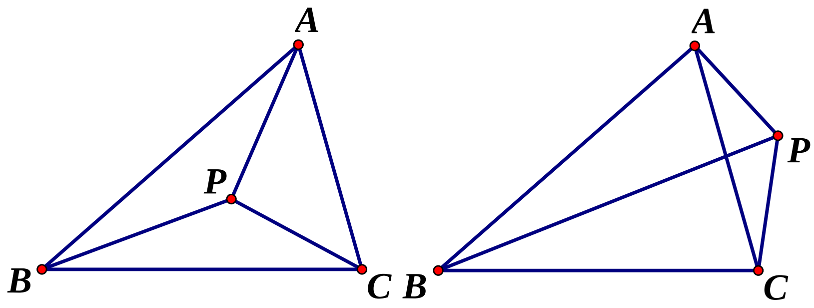


圖 3：重心坐標 Barycentric Coordinates。

二、 重心坐標下的直線方程式（見[8], p.41~p.53）

若點坐標 $P(x:y:z)$ 滿足一次方程 $\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = 0$，則全體點 $(x:y:z)$ 為一直線，其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 為常數。

此外，平面上給定兩點 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$、$Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，則通過此兩點的直線方程式可以用三階行列式表示

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

此外，正規化的重心坐標下，垂直線的方程式為兩向量 $\overrightarrow{MN} = (x_1 : y_1 : z_1)$、$\overrightarrow{PQ} = (x_2 : y_2 : z_2)$。$\overline{MN} \perp \overline{PQ}$ 的充要條件為

$$a^2(z_1 y_2 + y_1 z_2) + b^2(x_1 z_2 + z_1 x_2) + c^2(y_1 x_2 + x_1 y_2) = 0$$

其中，約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC} = a$、$\overline{AC} = b$、$\overline{AB} = c$。

三、 三線極點（tripole）與三線極線（tripolar）（見[8], p.42~p.43）

平面上 P 點坐標為 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$，直線 L 方程式為 $\frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} + \frac{z}{\mu_3} = 0$，則 P 點稱為直線 L 的三線極點（Tripole），直線 L稱為 P 點的三線極線（Tripolar）。

四、 二次曲線方程式

若點坐標 $P(x:y:z)$ 滿足二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0.$$

則全體點 $(x:y:z)$ 稱為二次曲線，其中 A, B, C, D, E, F 為常數。

五、 極點與極線極點（pole）與極線（polar line）

給定二次曲線 $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=0$，對平面上任意給定點 $P(x_1,x_2,x_3)$，下述直線稱為 P 點對 Γ 的極線，而 P 點稱作極點：

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0.$$

伍、 研究結果

本文約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$。

在任意 $\triangle ABC$ 的外部分別取點 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 使得有向角 $\angle A_1BC=\angle BCA_2=\angle B_1CA=\angle CAB_2=\angle C_1AB=\angle ABC_2=\varphi$，其中 $0\leq\varphi<2\pi$，而且 $\overline{AC_1}=\overline{BC_2}=\overline{AB}$、$\overline{BA_1}=\overline{CA_2}=\overline{BC}$、$\overline{CB_1}=\overline{AB_2}=\overline{CA}$，再連接線段 $\overline{A_1C_2}$、$\overline{B_1A_2}$、$\overline{C_1B_2}$。

定義 1 (旁接三角形) 本文稱 $\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 為 $\triangle ABC$ 的原旁接三角形。

定義 2 (外西瓦線) 本文將過旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 頂點 A 的西瓦線 $\overleftrightarrow{AD}$ 稱為 $\triangle ABC$ 的外西瓦線。其餘兩個旁接三角形 $\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 亦同。

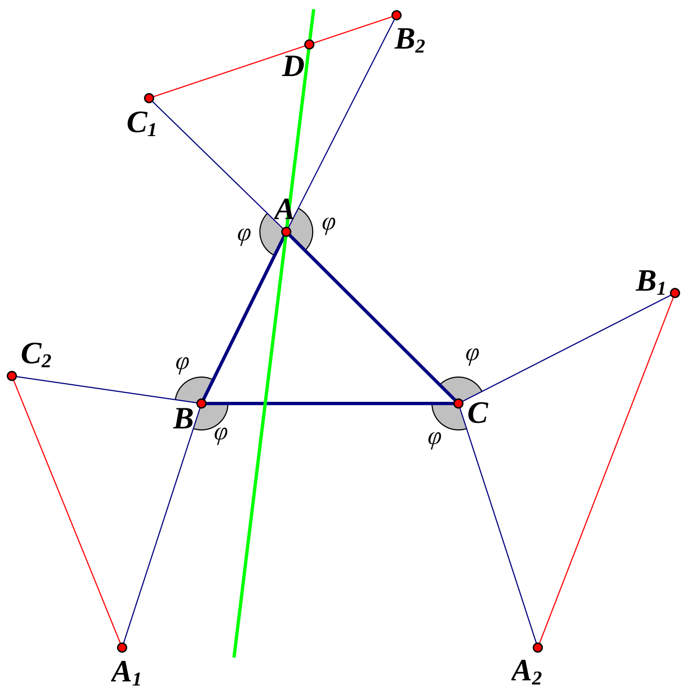


圖 4：$\triangle ABC$ 的三個旁接三角形與外西瓦線。

考慮一些特殊外西瓦線。如圖 5，若 $\overleftrightarrow{AM_A}$ 為 $\triangle AC_1B_2$ 的中線時，稱為 $\triangle ABC$ 的外中線；如圖 6，若 $\overleftrightarrow{AH_A}$ 為 $\triangle AC_1B_2$ 的高時，稱為 $\triangle ABC$ 的外高；如圖 7，若 $\overleftrightarrow{M_AT_A}$ 為 $\triangle AC_1B_2$ 的中垂線時，稱為 $\triangle ABC$ 的外中垂線（雖然外中垂線不通過頂點，但本研究仍納入討論）。注意到，因為 $0 \le \varphi < 2\pi$，所以 $\triangle ABC$ 的旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 都是可變動的。

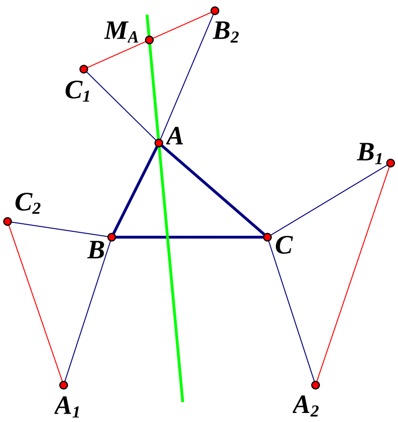


圖 5：外中線。

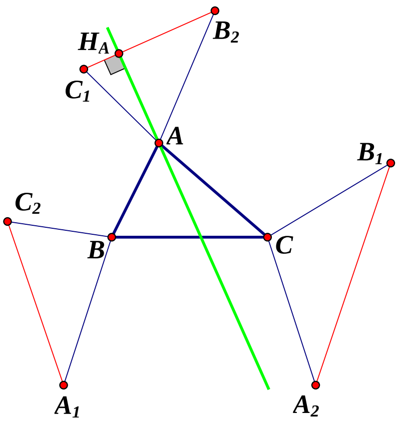


圖 6：外高。

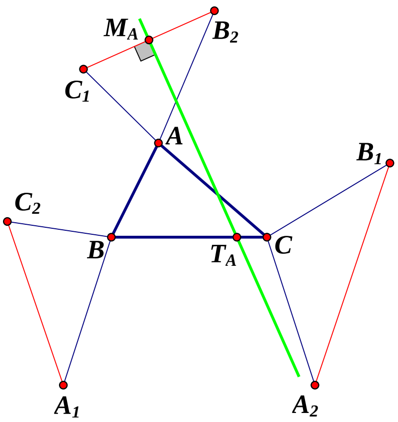


圖 7：外中垂線。

一、 一般化：φ 為任意實數下，外西瓦線為中線（利用重心坐標）

本文約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC} = a$、$\overline{AC} = b$、$\overline{AB} = c$，並採用「Conway 符號」，用 S 表示 $\triangle ABC$ 的兩倍面積，對於實數 θ 將「$S \cdot \cot\theta$」記為「S_θ」，對於任意的實數 θ 與 φ，把 $S_\theta \times S_\varphi$ 簡記為「$S_{\theta\varphi}$」[6][8]。我們可得以下引理 3 和引理 4。

引理 3 (Conway 符號) (見[8], p.33) 對於任意 $\triangle ABC$ 有

(1) $S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$、$S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}$、$S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$。

(2) $S_A + S_B = c^2$、$S_B + S_C = a^2$、$S_C + S_A = b^2$。

(3) $S_A - S_B = b^2 - a^2$、$S_B - S_C = c^2 - b^2$、$S_C - S_A = a^2 - c^2$。

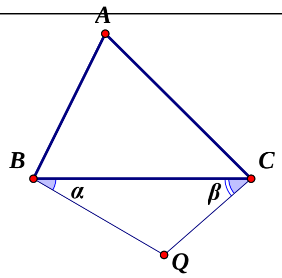
(4) $S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2$。

引理 4(坐標) (見[8], p.34) 若點 Q 在 $\triangle ABC$ 平面上，

滿足有向角 $\angle CBQ = \alpha$ 和 $\angle BCQ = \beta$，則 Q 點的重心坐標為

$$Q(-a^2 : (S_C + S_\beta) : (S_B + S_\alpha))$$

其中，有向角 $\angle CBQ$ 與 $\angle CBA$ 方向相反時，定義 $\angle CBQ$ 為正；



方向相同時，定義為負。同理，$\angle BCQ$ 與 $\angle BCA$ 方向相反時，

定義 $\angle BCQ$ 為正；方向相同時，定義為負。

在任意 $\triangle ABC$ 的外部分別取點 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 使得有向角 $\angle A_1BC = \angle BCA_2 = \angle B_1CA = \angle CAB_2 = \angle C_1AB = \angle BBC_2 = \varphi$，其中 $\varphi \in R$。且滿足 $\overline{AC_1} = \overline{BC_2} = \overline{AB}$、$\overline{BA_1} = \overline{CA_2} = \overline{BC}$、$\overline{CB_1} = \overline{AB_2} = \overline{CA}$，則我們可以令 $\theta = \frac{\pi-\varphi}{2}$，根據引理 3 而有點 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 的重心坐標。

$$A_1\left(-a^2\colon(S_C+S_\theta)\colon\left(S_B+S_\varphi\right)\right)、A_2\left(-a^2\colon\left(S_C+S_\varphi\right)\colon(S_B+S_\theta)\right)$$

$$B_1\left(\left(S_C+S_\varphi\right)\colon -b^2\colon(S_A+S_\theta)\right)、B_2\left((S_C+S_\theta)\colon -b^2\colon\left(S_A+S_\varphi\right)\right)$$

$$C_1\left((S_B+S_\theta)\colon\left(S_A+S_\varphi\right)\colon -c^2\right)、C_2\left(\left(S_B+S_\varphi\right)\colon(S_A+S_\theta)\colon -c^2\right)$$

性質 5 點 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 的重心坐標之三個分量和皆相同。

證明.

先討論點 A_1 坐標，$A_1\left(-a^2\colon(S_C+S_\theta)\colon\left(S_B+S_\varphi\right)\right)$，依據引理 4 可得三個分量和為

$$-a^2+S_C+S_\theta+S_B+S_\varphi = -a^2+a^2+S_\theta+S_\varphi = S_\theta+S_\varphi$$

同理，其餘五個點各自的三個分量和均為 $S_\theta+S_\varphi$

■

定理 6 對於任意實數 φ，外中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、$\overleftrightarrow{BM_B}$、$\overleftrightarrow{CM_C}$ 交於一點 $X_{M(\varphi)}$。

證明.

如圖，先討論外中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$，點 M_A 是 $\overline{C_1B_2}$ 的中點，由性質 5 可知點 C_1、點 B_2 坐標的分量和相同，所以 $M_A\left(\frac{S_B+S_C+2S_\theta}{2}\colon\frac{S_A+S_\varphi-b^2}{2}\colon\frac{S_A+S_\varphi-c^2}{2}\right)$，又 $A(1\colon 0\colon 0)$，再得出

$$\overleftrightarrow{AM_A}\colon\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{S_B+S_C+2S_\theta}{2} & \dfrac{S_A+S_\varphi-b^2}{2} & \dfrac{S_A+S_\varphi-c^2}{2} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

注意到，$S_A+S_B=c^2$、$S_B+S_C=a^2$、$S_C+S_A=b^2$

化簡可得 $\overleftrightarrow{AM_A}\colon\left(S_\varphi-S_B\right)y-\left(S_\varphi-S_C\right)z=0$

同理，可得另外兩條外中線

$$\overleftrightarrow{M_BB}: (S_\varphi - S_A)x - (S_\varphi - S_C)z = 0$$

$$\overleftrightarrow{M_CC}: (S_\varphi - S_A)x - (S_\varphi - S_B)y = 0$$

注意到，$\overleftrightarrow{AM_A}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 D_A，則 $\overline{BD_A}:\overline{D_AC} = (S_\varphi - S_B):(S_\varphi - S_C)$，同理 $\overline{CD_B}:\overline{D_BA} = (S_\varphi - S_C):(S_\varphi - S_A)$、$\overline{AD_C}:\overline{D_CB} = (S_\varphi - S_A):(S_\varphi - S_B)$，所以可得有向線段比值乘積

$$\frac{\overline{BD_A}}{\overline{D_AC}} \times \frac{\overline{CD_B}}{\overline{D_BA}} \times \frac{\overline{AD_C}}{\overline{D_CB}} = 1$$

由 Ceva 逆定理可得 $\overleftrightarrow{AM_A}$、$\overleftrightarrow{BM_B}$、$\overleftrightarrow{CM_C}$ 交於點 $X_{M(\varphi)}\left(\frac{1}{S_\varphi - S_A}:\frac{1}{S_\varphi - S_B}:\frac{1}{S_\varphi - S_C}\right)$

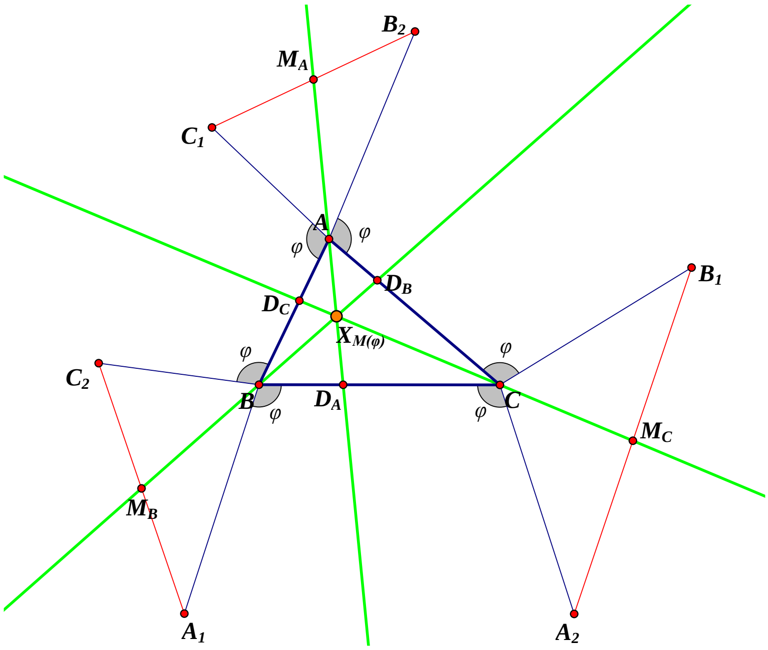


圖 8：外中線交於一點。

■

二、 一般化：φ 為任意實數下，外西瓦線為高（利用重心坐標）

我們利用一樣的方式處理 $\triangle ABC$ 的三條外高共點情形。

定理 7 對於任意實數 φ，外高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、$\overleftrightarrow{BH_B}$、$\overleftrightarrow{CH_C}$ 交於一點 $X_{H(\varphi)}$。

證明.

如圖，先討論外高 $\overleftrightarrow{AH_A}$，設垂足點 $H_A(x:y:z)$，點 $A\left((S_\varphi + S_\theta):0:0\right)$，則可得到向量

$\overrightarrow{AH_A} = \left((x - S_\varphi - S_\theta):y:z\right)$、$\overrightarrow{C_1B_2} = \left((S_C - S_B):(-b^2 - S_A - S_\varphi):(S_A + S_\varphi + c^2)\right)$，又

$S_A + S_C = b^2$、$S_A + S_B = c^2$，所以 $\overrightarrow{C_1B_2} = \left((S_C - S_B):(-2S_A - S_C - S_\varphi):(2S_A + S_B + S_\varphi)\right)$

因為 $\overline{AH_A}\perp\overline{C_1B_2}$，依據重心坐標下的垂直線充要條件可得直線 $\overleftrightarrow{AH_A}$ 方程式

$$a^2\left(z(-2S_A-S_C-S_\varphi)+y(2S_A+S_B+S_\varphi)\right)+b^2\left((x-S_\varphi-S_\theta)(2S_A+S_B+S_\varphi)+z(S_C-S_B)\right)+c^2\left(y(S_C-S_B)+(x-S_\varphi-S_\theta)(-2S_A-S_C-S_\varphi)\right)=0.$$

注意到，$x+y+z=S_\varphi+S_\theta$

化簡可得 $\overleftrightarrow{AH_A}:(S^2+S_{B\varphi})y-(S^2+S_{C\varphi})z=0$

同理，可得另外兩條外高

$$\overleftrightarrow{BH_B}:(S^2+S_{C\varphi})z-(S^2+S_{A\varphi})x=0$$

$$\overleftrightarrow{CH_C}:(S^2+S_{A\varphi})x-(S^2+S_{B\varphi})y=0$$

注意到，$\overleftrightarrow{AH_A}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 D_A，則有向線段比 $\overline{BD_A}:\overline{D_AC}=(S^2+S_{B\varphi}):(S^2+S_{C\varphi})$，同理 $\overline{CD_B}:\overline{D_BA}=(S^2+S_{C\varphi}):(S^2+S_{A\varphi})$、$\overline{AD_C}:\overline{D_CB}=(S^2+S_{A\varphi}):(S^2+S_{B\varphi})$，所以我們有

$$\frac{\overline{BD_A}}{\overline{D_AC}}\times\frac{\overline{CD_B}}{\overline{D_BA}}\times\frac{\overline{AD_C}}{\overline{D_CB}}=1$$

由 Ceva 逆定理可得 $\overleftrightarrow{AH_A}$、$\overleftrightarrow{BH_B}$、$\overleftrightarrow{CH_C}$ 交於點 $X_{H(\varphi)}\left(\frac{1}{S^2+S_{A\varphi}}:\frac{1}{S^2+S_{B\varphi}}:\frac{1}{S^2+S_{C\varphi}}\right)$

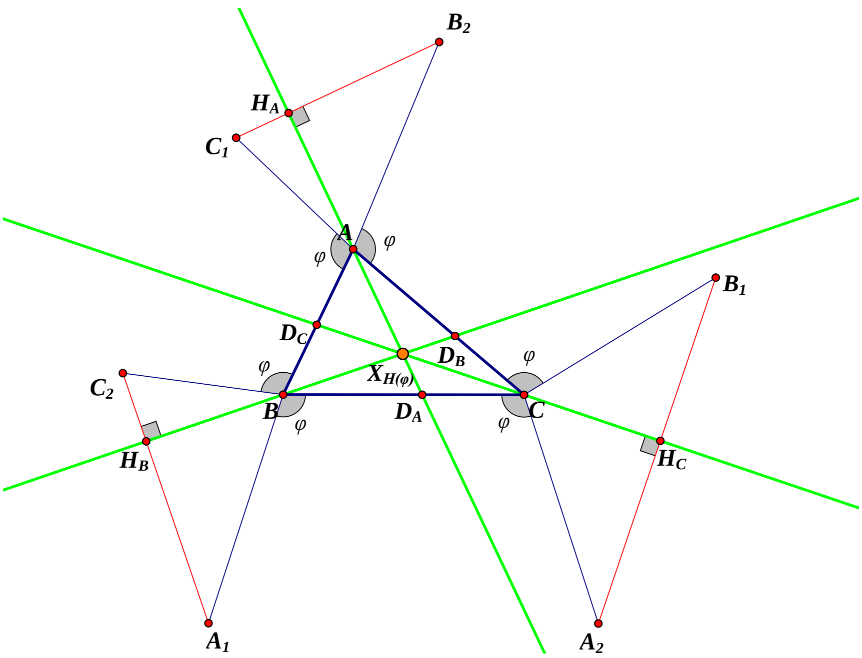


圖 9：外高交於一點。

■

我們令 φ_M 為構造外中線的角度、φ_H 為構造外高的角度。依據定理 6 和定理 7，我們發現有趣的外西瓦線重合現象，如下性質 8。我們對照 The Encyclopedia of Triangle

Centers 網站發現此性質是一個新的結果！

性質 8 對於任意實數 φ，$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi\pm\frac{\pi}{2})}$ 重合。

證明.

先考慮 $X_{M(\varphi)}\left(\frac{1}{S_\varphi-S_A}:\frac{1}{S_\varphi-S_B}:\frac{1}{S_\varphi-S_C}\right)$ 與 $X_{H(\varphi+\frac{\pi}{2})}\left(\frac{1}{S^2+S_{A(\varphi+\frac{\pi}{2})}}:\frac{1}{S^2+S_{B(\varphi+\frac{\pi}{2})}}:\frac{1}{S^2+S_{C(\varphi+\frac{\pi}{2})}}\right)$ 的 x 分量 $\frac{1}{S_\varphi-S_A}$ 與 $\frac{1}{S^2+S_{A(\varphi+\frac{\pi}{2})}}$ 的關係。因為 $\cot\varphi=-\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$，進行代換可得

$$S_\varphi-S_A=S\times\cot\varphi-S_A=-S\times\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)-S_A=-\left(S\times\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+S_A\right)$$

$$=\frac{S\times\cot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\left(S\times\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+S_A\right)}{-S\times\cot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{S^2+S_{A(\varphi+\frac{\pi}{2})}}{-S\times\cot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

同理，可得坐標中其他兩個分量情形，即 $S_\varphi-S_B=\frac{S^2+S_{B(\varphi+\frac{\pi}{2})}}{-S\times\cot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$、$S_\varphi-S_C=\frac{S^2+S_{C(\varphi+\frac{\pi}{2})}}{-S\times\cot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$

所以，$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi+\frac{\pi}{2})}$ 重合。再考慮 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi-\frac{\pi}{2})}$，因為 $\cot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cot\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $X_{H(\varphi+\frac{\pi}{2})}=X_{H(\varphi-\frac{\pi}{2})}$。因此，$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi\pm\frac{\pi}{2})}$ 重合。

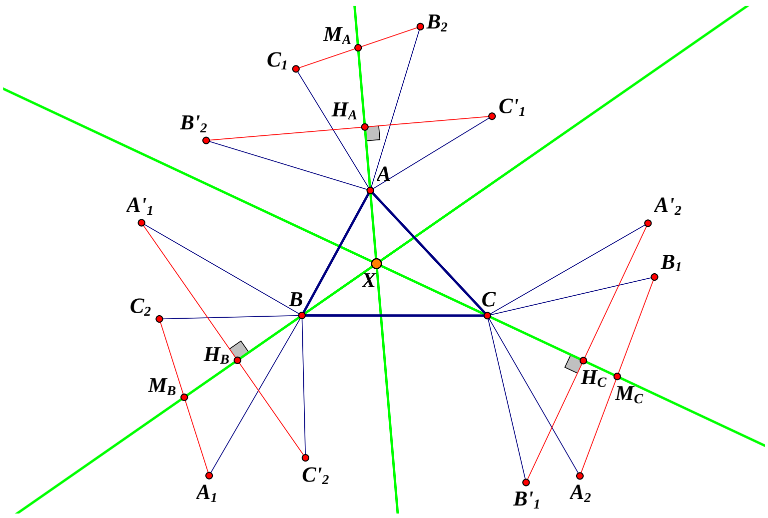


圖 10：$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi-\frac{\pi}{2})}$ 重合。

■

性質 8 是很重要的關係式，是我們後續幾個定理證明的重要代換關鍵。

三、 一般化：φ 為任意實數下，外西瓦線為中垂線（利用重心坐標）

我們繼續討論 $\triangle ABC$ 的三條外中垂線的共點情形。因為外中垂線沒有通過 $\triangle ABC$ 的頂點，導致求出外中垂線的方程式比外中線、外高困難許多。

引理 9(三線共點) (見[8], p.46) 三條直線 $\sigma_1 x+\sigma_2 y+\sigma_3 z=0$、$\varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+\varepsilon_3 z=0$、$\eta_1 x+\eta_2 y+\eta_3 z=0$ 的充要條件為 $\begin{vmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}=0$。

定理 10 對於任意實數 φ，外中垂線 $\overleftrightarrow{M_A T_A}$、$\overleftrightarrow{M_B T_B}$、$\overleftrightarrow{M_C T_C}$ 交於一點 $X_{P(\varphi)}$。

證明.

如圖，先討論外中垂線 $\overleftrightarrow{M_A T_A}$（$\overleftrightarrow{M_A T_A}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 T_A 點），$\overline{C_1 B_2}$ 的中點為 $M_A\left(\left(\frac{S_B+S_C+2S_\theta}{2}\right):\left(\frac{S_A+S_\varphi-b^2}{2}\right):\left(\frac{S_A+S_\varphi-c^2}{2}\right)\right)$。設 $\overleftrightarrow{M_A T_A}$ 上任意一點 $P(x:y:z)$，其中正規化 $x+y+z=S_\varphi+S_\theta$，可得向量 $\overrightarrow{B_2C_1}=\left((S_B-S_C):(2S_A+S_C+S_\varphi):(-2S_A-S_B-S_\varphi)\right)$、$\overrightarrow{PM_A}=\left(\left(\frac{S_B+S_C+2S_\theta-2x}{2}\right):\left(\frac{S_\varphi-S_C-2y}{2}\right):\left(\frac{S_\varphi-S_B-2z}{2}\right)\right)$

因為 $\overline{PM_A}\perp\overline{C_1B_2}$，依據重心坐標下的垂直線充要條件可得直線 $\overleftrightarrow{M_A T_A}$ 方程式

$$\begin{aligned}
&a^2\left((-2S_A-S_B-S_\varphi)\left(\frac{S_\varphi-S_C-2y}{2}\right)+(2S_A+S_C+S_\varphi)\left(\frac{S_\varphi-S_B-2z}{2}\right)\right)+\\
&b^2\left((S_B-S_C)\left(\frac{S_\varphi-S_B-2z}{2}\right)+(-2S_A-S_B-S_\varphi)\left(\frac{S_B+S_C+2S_\theta-2x}{2}\right)\right)+\\
&c^2\left((2S_A+S_C+S_\varphi)\left(\frac{S_B+S_C+2S_\theta-2x}{2}\right)+(S_B-S_C)\left(\frac{S_\varphi-S_C-2y}{2}\right)\right)=0.
\end{aligned}$$

化簡可得 $\overleftrightarrow{M_A T_A}$ 的直線方程式為

$$(S_\varphi+S_\theta)(S_B-S_C)x+\left(-2S^2-S_{B\varphi}-S_{C\varphi}+S_{B\theta}-S_{C\theta}\right)y+\left(2S^2+S_{B\varphi}+S_{C\varphi}+S_{B\theta}-S_{C\theta}\right)z=0$$

同理，分別可得 $\overleftrightarrow{M_B T_B}$ 與 $\overleftrightarrow{M_C C}$ 的直線方程式

$$\left(2S^2+S_{A\varphi}+S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta}\right)x+(S_\varphi+S_\theta)(S_C-S_A)y+\left(-2S^2-S_{A\varphi}-S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta}\right)z=0$$

$$\left(-2S^2-S_{A\varphi}-S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta}\right)x+\left(2S^2+S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta}\right)y+(S_\varphi+S_\theta)(S_A-S_B)z=0$$

考慮

$$\begin{vmatrix}
(S_\varphi+S_\theta)(S_B-S_C) & -2S^2-S_{B\varphi}-S_{C\varphi}+S_{B\theta}-S_{C\theta} & 2S^2+S_{B\varphi}+S_{C\varphi}+S_{B\theta}-S_{C\theta}\\
2S^2+S_{A\varphi}+S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta} & (S_\varphi+S_\theta)(S_C-S_A) & -2S^2-S_{A\varphi}-S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta}\\
-2S^2-S_{A\varphi}-S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta} & 2S^2+S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta} & (S_\varphi+S_\theta)(S_A-S_B)
\end{vmatrix}$$

將第 2 列、第 3 列加入第 1 列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2S^2+S_{A\varphi}+S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta} & (S_\varphi+S_\theta)(S_C-S_A) & -2S^2-S_{A\varphi}-S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta} \\ -2S^2-S_{A\varphi}-S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta} & 2S^2+S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta} & (S_\varphi+S_\theta)(S_A-S_B) \end{vmatrix}=0$$

即行列式值為 0，所以 $\overleftrightarrow{M_AT_A}$、$\overleftrightarrow{M_BT_B}$、$\overleftrightarrow{M_CT_C}$ 交於一點 $X_{P(\varphi)}$

$$X_{P(\varphi)}\begin{pmatrix} \left((S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{A\varphi}+S_{A\theta}-S_{C\theta})+(S^2+S_{C\varphi})(S^2+S_{A\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta})\right) \\ :\left((S^2+S_{C\varphi})(S^2+S_{B\varphi}+S_{B\theta}-S_{A\theta})+(S^2+S_{A\varphi})(S^2+S_{B\varphi}+S_{B\theta}-S_{C\theta})\right) \\ :\left((S^2+S_{A\varphi})(S^2+S_{C\varphi}+S_{C\theta}-S_{B\theta})+(S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{C\varphi}+S_{C\theta}-S_{A\theta})\right) \end{pmatrix}$$

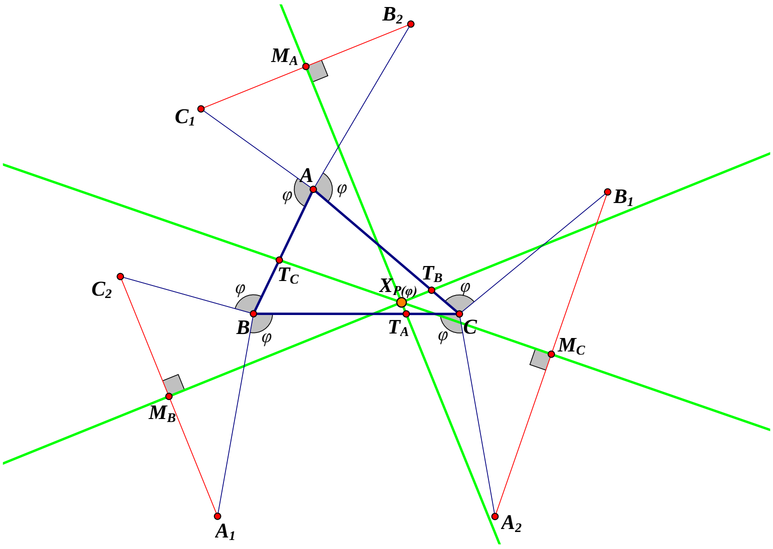


圖 11：外中垂線交於一點。

■

比較有趣的是，我們發現當 $\varphi=60°$ 時，外高交於 X_{17}、外中垂線交於 X_{627}，滿足「Anticomplement 逆互補」關係[4]，即 X_{17}、X_{627} 與重心 G 三點共線，且滿足向量 $\overrightarrow{X_{627}G}=2\overrightarrow{GX_{17}}$，如下圖 12。我們在下下節將一般化推廣這個有趣的共線性質。

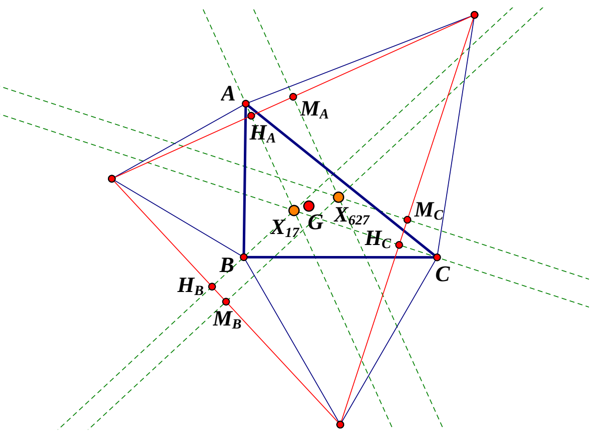


圖 12：Anticomplement 點。

四、 動點 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 各自的軌跡

為了方便表示，以下將三條外中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、$\overleftrightarrow{BM_B}$、$\overleftrightarrow{CM_C}$ 的交點，稱作 $X_{M(\varphi)}$。三條外高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、$\overleftrightarrow{BH_B}$、$\overleftrightarrow{CH_C}$ 的交點，稱作 $X_{H(\varphi)}$。$\overleftrightarrow{M_AT_A}$、$\overleftrightarrow{M_BT_B}$、$\overleftrightarrow{M_CT_C}$ 的交點，稱作 $X_{P(\varphi)}$。

$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 都是動點，我們觀察它們的軌跡是否具有規律？利用幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 繪製其軌跡分別如下圖 13-1、圖 13-2、圖 13-3。

我們不討論 $X_{P(\varphi)}$ 的軌跡。有趣的是，$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 的軌跡相同！它是通過 $\triangle ABC$ 三頂點的二次曲線，幾何學中著名的 Kiepert 雙曲線。以下定理 16 是我們給出的證明。

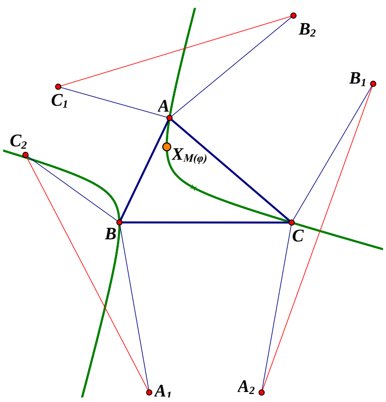


圖 13-1：$X_{M(\varphi)}$的軌跡。

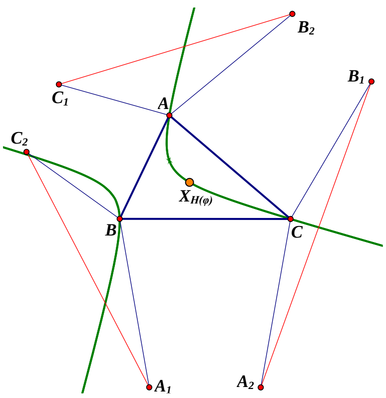


圖 13-2：$X_{H(\varphi)}$的軌跡。

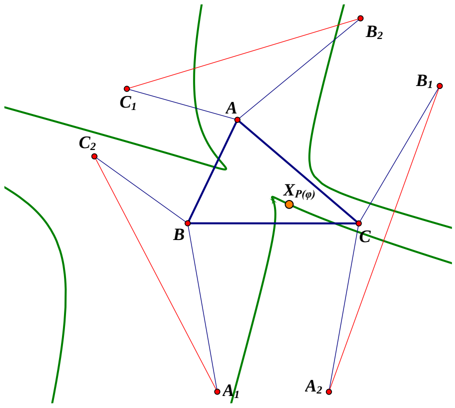


圖 13-3：$X_{P(\varphi)}$的軌跡。

定義 11 (Kiepert 雙曲線) (見[5]) 若分別以 $\triangle ABC$ 的三邊為底邊作任意的相似等腰三角形 $\triangle A'BC$、$\triangle B'CA$、$\triangle C'AB$，則 $\overleftrightarrow{A'A}$、$\overleftrightarrow{B'B}$、$\overleftrightarrow{C'C}$ 交於一點，此點軌跡為 Kiepert 雙曲線，其重心坐標方程式為 $(S_A - S_B)xy + (S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx = 0$。

定理 12 點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 都在 Kiepert 雙曲線上。

證明.

分別將 $X_{M(\varphi)}\left(\frac{1}{S_\varphi - S_A}:\frac{1}{S_\varphi - S_B}:\frac{1}{S_\varphi - S_C}\right)$ 與 $X_{H(\varphi)}\left(\frac{1}{S^2 + S_A\varphi}:\frac{1}{S^2 + S_B\varphi}:\frac{1}{S^2 + S_C\varphi}\right)$ 代入 Kiepert 雙曲線的重心坐標方程式即可證明點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡即為 Kiepert 雙曲線。

■

【討論與分析】

從定義 11 上來看，Kiepert 雙曲線是在三邊上構造相似等腰三角形構造法與本研究的外西瓦線構造法看似不同作法，但是我們在定理 12 卻也證明兩者（的點軌跡）是相同的二

次曲線，我們以下提出兩者在幾何的相同本質。

因為根據性質 8，可得 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi\pm\frac{\pi}{2})}$，所以我們只需要討論 $X_{M(\varphi)}$ 即可，考慮外中線 $\overleftrightarrow{AM_A}:(S_\varphi-S_B)y-(S_\varphi-S_C)z=0$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線

$$\begin{cases}(S_\varphi-S_B)y-(S_\varphi-S_C)z=0\\(b^2-c^2)x+a^2y-a^2z=0\end{cases}$$

解聯立得交點坐標

$$A'\left(\frac{a^2(S_C-S_B)}{b^2-c^2}:(S_\varphi-S_C):(S_\varphi-S_B)\right)$$

又因為 $b^2-c^2=(S_C-S_B)$，所以

$$A'\left(-a^2:\left(S_{(\pi-\varphi)}+S_C\right):\left(S_{(\pi-\varphi)}+S_B\right)\right)$$

由 Conway 坐標符號可知 $\triangle A'BC$ 是等腰三角形，其底角為有向角 $\pi-\varphi$。

輪轉對稱性得知，另外兩條外中線分別與對邊中垂線的交點 B' 點與 C' 點坐標

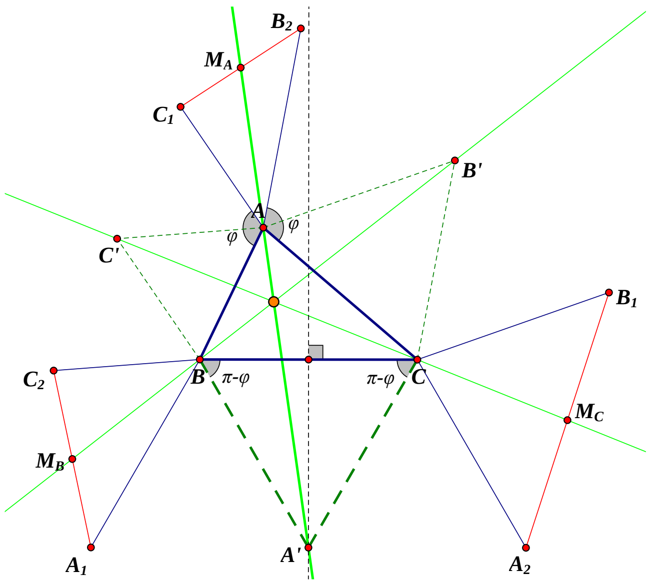


圖 14：外西瓦線與等腰三角形。

$B'\left(\left(S_{(\pi-\varphi)}+S_C\right):-b^2:\left(S_{(\pi-\varphi)}+S_A\right)\right)$、$C'\left(\left(S_{(\pi-\varphi)}+S_B\right):\left(S_{(\pi-\varphi)}+S_A\right):-c^2\right)$，因此本研究的外西瓦線構造法可以看作 Kiepert 雙曲線的新構造法。

五、 動點 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點的綜合性質

前一節我們探討動點 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 各自的軌跡，接下來我們研究三個動點 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 彼此的關聯性。

（一）直線 $\overleftrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點呢？

進行探究觀察，如下圖，我們發現 φ 為任意實數時，重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線，這個性質讓我們覺得很雀躍！

此性質沒有被 ETC 收錄，探究其原因是因為本研究的點並非定點，會受到變數 φ 所影響，而 ETC 收錄的都是三角形的固定特殊點。關於重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線的證明如以下定理 14。

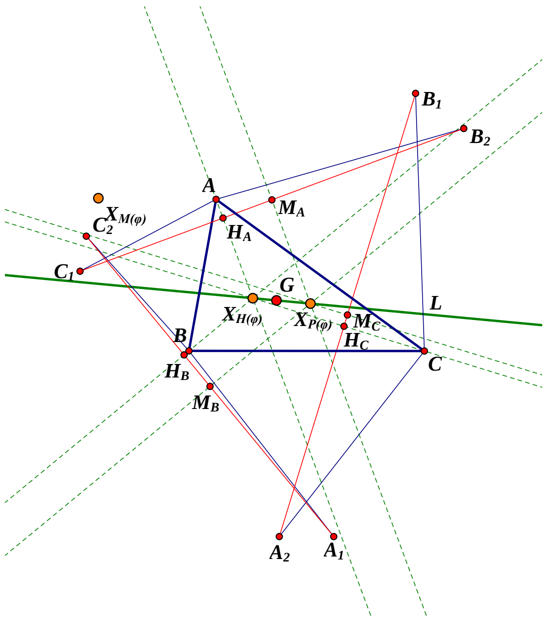


圖 15-1：$\varphi=50°$。

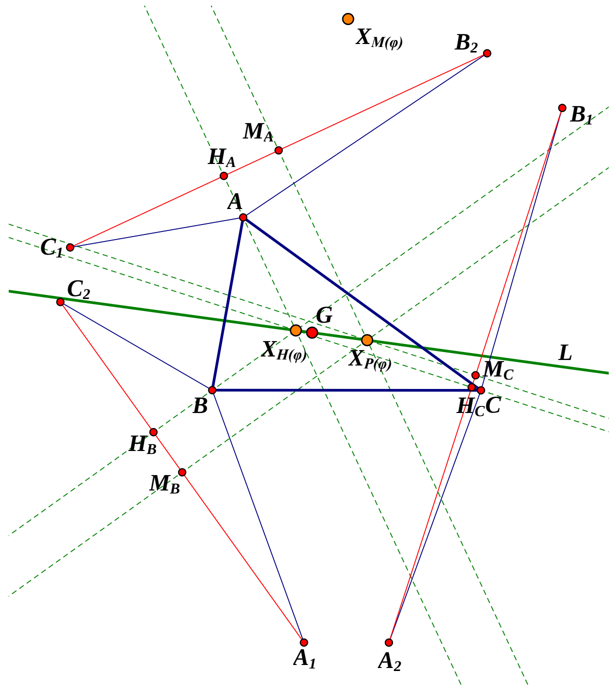


圖 15-2：$\varphi=70°$。

引理 13 (三點共線) (見[8], p.41) $P(x_1{:}y_1{:}z_1)$、$Q(x_2{:}y_2{:}z_2)$、$R(x_3{:}y_3{:}z_3)$ 三點共線的充要條件為 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$。

定理 14 對於任意實數 φ，重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點恆共線。

證明.

令 $S^2+S_{A\varphi}=A$、$S^2+S_{B\varphi}=B$、$S^2+S_{C\varphi}=C$

考慮重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點坐標的行列式值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ BC & CA & AB \\ \begin{pmatrix} B(A+S_{A\theta}-S_{C\theta}) \\ +C(A+S_{A\theta}-S_{B\theta}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C(B+S_{B\theta}-S_{A\theta}) \\ +A(B+S_{B\theta}-S_{C\theta}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A(C+S_{C\theta}-S_{B\theta}) \\ +B(C+S_{C\theta}-S_{A\theta}) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$=(AB+BC+CA)\big(A(S_{C\theta}-S_{B\theta})+B(S_{A\theta}-S_{C\theta})+C(S_{B\theta}-S_{A\theta})\big)$$

$$+2ABC(S_{B\theta}-S_{A\theta}+S_{C\theta}-S_{B\theta}+S_{A\theta}-S_{C\theta})$$

$$=(AB+BC+CA)\big(S_{A\theta}(B-C)+S_{B\theta}(C-A)+S_{C\theta}(A-B)\big)$$

$= (AB+BC+CA)\Big(S_{A\theta}\big(S_{B\varphi}-S_{C\varphi}\big)+S_{B\theta}\big(S_{C\varphi}-S_{A\varphi}\big)+S_{C\theta}\big(S_{A\varphi}-S_{B\varphi}\big)\Big)=0$

即行列式值為 0，所以重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線，其直線方程式為

$$L_{HP(\varphi)}: (S^2+S_{A\varphi})(S_B-S_C)x+(S^2+S_{B\varphi})(S_C-S_A)y+(S^2+S_{C\varphi})(S_A-S_B)z=0$$

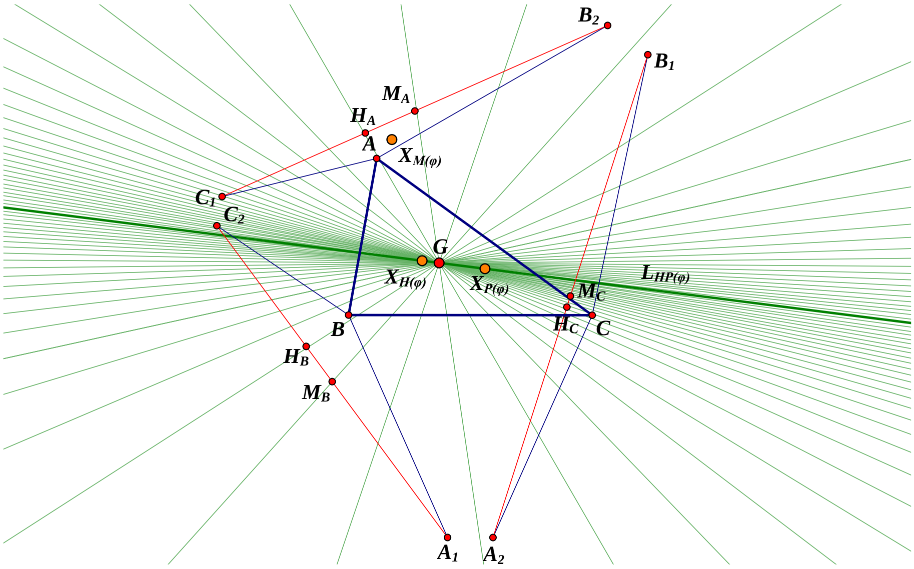


圖 16：$\overleftrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 恆通過重心 G。

■

定理 15 (比例常數) 共線的三點重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 的有向線段比為

$$\frac{\overline{X_{P(\varphi)}X_{H(\varphi)}}}{\overline{GX_{H(\varphi)}}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

證明.

由定理 14 得知重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線，分別考慮三個點的分量和

(1) 重心 G其分量和為 3

(2) $X_{H(\varphi)}$ 的分量和為

$(S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{C\varphi})+(S^2+S_{C\varphi})(S^2+S_{A\varphi})+(S^2+S_{A\varphi})(S^2+S_{B\varphi})$

$=S^2\big(3S^2+2(S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{C\varphi})+{S_\varphi}^2\big)$

(3) $X_{P(\varphi)}$ 其分量和為

$(S^2+S_{B\varphi})(2S^2+S_{A\varphi}+S_{C\varphi})+(S^2+S_{C\varphi})(2S^2+S_{A\varphi}+S_{B\varphi})+(S^2+S_{A\varphi})(2S^2+S_{B\varphi}+S_{C\varphi})$

$=2S^2\big(3S^2+2(S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{C\varphi})+{S_\varphi}^2\big)$

因為計算三點的比例，必須讓重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 的分量和相同，所以讓分量和為

$6S^2\big(3S^2+2(S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{C\varphi})+{S_\varphi}^2\big)$，可得出有向線段比

$$\frac{\overline{X_{P(\varphi)}X_{H(\varphi)}}}{\overline{GX_{H(\varphi)}}}$$

$$=\frac{6(S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{C\varphi})-3(S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{A\varphi}+S_{A\theta}-S_{C\theta})-3(S^2+S_{C\varphi})(S^2+S_{A\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta})}{6(S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{C\varphi})-2S^2(3S^2+2(S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{C\varphi})+{S_\varphi}^2)}$$

$$=\frac{3(S^2+S_{B\varphi})(S_C-S_A)(S_\varphi+S_\theta)+3(S^2+S_{C\varphi})(S_B-S_A)(S_\varphi+S_\theta)}{6(S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{C\varphi})-2S^2(3S^2+2(S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{C\varphi})+{S_\varphi}^2)}$$

$$=\frac{3(S_\varphi+S_\theta)\left((S_C-S_A)(S^2+S_{B\varphi})+(S_B-S_A)(S^2+S_{C\varphi})\right)}{2\left((S_{C\varphi}-S_{A\varphi})(S^2+S_{B\varphi})+(S_{B\varphi}-S_{A\varphi})(S^2+S_{C\varphi})\right)}$$

$$=\frac{3(S_\varphi+S_\theta)\left((S_C-S_A)(S^2+S_{B\varphi})+(S_B-S_A)(S^2+S_{C\varphi})\right)}{2S_\varphi\left((S_C-S_A)(S^2+S_{B\varphi})+(S_B-S_A)(S^2+S_{C\varphi})\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{S_\theta}{S_\varphi}\right)=\frac{3}{2}\left(1+\frac{\cot\theta}{\cot\varphi}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

■

關於本研究發現的重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線定理，Larry Hoehn 為什麼沒有發現呢？因為他的研究是 $\varphi=90°$（外接正方形）的特例情況，此時重心 G 和 $X_{H(\varphi)}$ 會重合，所以僅剩兩點，因此他沒發現重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線的有趣性質！

（二）直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點呢？

我們繼續討論 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點？以下定理 18，我們證明了直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過九點圓圓心 N。

定理 16 對於任意實數 φ，九點圓圓心 N、$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 三點恆共線。

證明.

根據性質 8 可將 $X_{H(\varphi)}$ 的坐標代換，令 $\omega=\varphi+\frac{\pi}{2}$，可得 $X_{H(\varphi)}$ 的坐標為

$X_{H(\varphi)}\left((S_\omega-S_B)(S_\omega-S_C):(S_\omega-S_C)(S_\omega-S_A):(S_\omega-S_A)(S_\omega-S_B)\right)$

注意到，$S_{\varphi\omega}=-S^2$。考慮九點圓圓心 N、$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 坐標的行列式值

$$\begin{vmatrix} S^2+S_{BC} & S^2+S_{CA} & S^2+S_{AB} \\ (S_\varphi-S_B)(S_\varphi-S_C) & (S_\varphi-S_C)(S_\varphi-S_A) & (S_\varphi-S_A)(S_\varphi-S_B) \\ (S_\omega-S_B)(S_\omega-S_C) & (S_\omega-S_C)(S_\omega-S_A) & (S_\omega-S_A)(S_\omega-S_B) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (S_\omega-S_\varphi)[(S^2+S_{BC})(S_\varphi-S_A)(S_\omega-S_A)(S_B-S_C) \\ &\qquad + (S^2+S_{CA})(S_\varphi-S_B)(S_\omega-S_B)(S_C-S_A) \\ &\qquad + (S^2+S_{AB})(S_\varphi-S_C)(S_\omega-S_C)(S_A-S_B)] \end{aligned}$$

展開 $[(S^2+S_{BC})(S_\varphi-S_A)(S_\omega-S_A)(S_B-S_C)+(S^2+S_{CA})(S_\varphi-S_B)(S_\omega-S_B)(S_C-S_A)+(S^2+S_{AB})(S_\varphi-S_C)(S_\omega-S_C)(S_A-S_B)]$ 可得其值為 0

所以行列式值為 0，即九點圓圓心 N、$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 三點共線，其直線方程式為

$$L_{MH(\varphi)}: (S_\varphi-S_A)(S_\omega-S_A)(S_B-S_C)x+(S_\varphi-S_B)(S_\omega-S_B)(S_C-S_A)y$$
$$+(S_\varphi-S_C)(S_\omega-S_C)(S_A-S_B)z=0$$

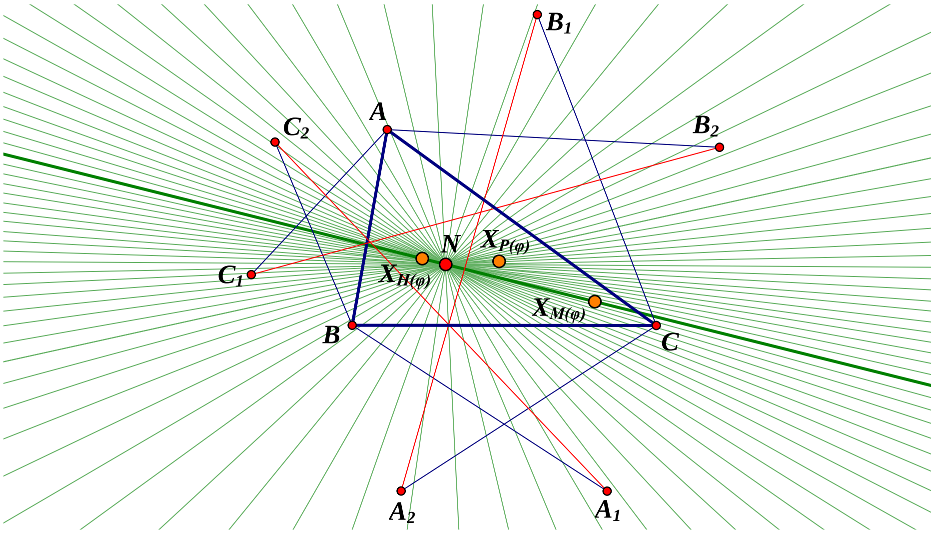


圖 17：$\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過九點圓圓心 N。

■

定理 17(比例常數) 共線的九點圓圓心 N、$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 的有向線段比為

$$\frac{\overline{X_{H(\varphi)}N}}{\overline{X_{M(\varphi)}N}}=\frac{3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}{-3S^2-S_\varphi^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}。$$

證明.

九點圓圓心 N、$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 三點共線，分別考慮三個點的分量和

(1) 九點圓圓心 N 其分量和為 $(S^2+S_{BC})+(S^2+S_{AC})+(S^2+S_{AB})=4S^2$

(2) $X_{M(\varphi)}$ 其分量和為 $3{S_\varphi}^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)+S^2$

(3) $X_{H(\varphi)}$ 其分量和為 $3{S_\omega}^2-2S_\omega(S_A+S_B+S_C)+S^2$

其中，$\omega=\varphi+\frac{\pi}{2}$。因為計算三點的比例，必須讓 N、$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 的分量和相同，所以

讓分量和為 $4S^2\left(3S_\varphi-S_\omega-2(S_A+S_B+S_C)\right)\left(3S_\omega-S_\varphi-2(S_A+S_B+S_C)\right)$，可得有向線段比

$$\frac{\overline{X_{H(\varphi)}N}}{\overline{X_{M(\varphi)}N}}=\frac{\left(3S_\varphi-S_\omega-2(S_A+S_B+S_C)\right)}{\left(3S_\omega-S_\varphi-2(S_A+S_B+S_C)\right)}=\frac{3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}{-3S^2-S_\varphi^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}$$

■

定理 12 中，知道動點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡就是 Kiepert 雙曲線，不考慮雙曲線的兩個無窮遠點時，即在歐氏平面上，我們好奇何時動點 $X_{M(\varphi)}$ 與動點 $X_{H(\varphi)}$ 分別在 Kiepert 雙曲線的兩支？何時動點 $X_{M(\varphi)}$ 與動點 $X_{H(\varphi)}$ 在 Kiepert 雙曲線的同一支？

我們發現一個非常有趣的結果，判別動點 $X_{M(\varphi)}$ 與點 $X_{H(\varphi)}$ 位置就是定理 17 的比例常數！

性質 18 $\left(3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)\right)$ 與 $\left(3S^2+S_\varphi^2+2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)\right)$ 同號時，$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 在雙曲線的同一支；異號時，$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 分別在雙曲線的兩支。

證明.

1.因為無窮遠點可看為雙曲線兩支的分界點，先考慮 $X_{M(\varphi)}\left(\frac{1}{S_\varphi-S_A}:\frac{1}{S_\varphi-S_B}:\frac{1}{S_\varphi-S_C}\right)$ 為無窮遠點時，即 $\frac{1}{S_\varphi-S_A}+\frac{1}{S_\varphi-S_B}+\frac{1}{S_\varphi-S_C}=0$，化簡可得 $3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)=0$，再考慮 $X_{H(\varphi)}\left(\frac{1}{S^2+S_{A\varphi}}:\frac{1}{S^2+S_{B\varphi}}:\frac{1}{S^2+S_{C\varphi}}\right)$ 為無窮遠點時，即 $\frac{1}{S^2+S_{A\varphi}}+\frac{1}{S^2+S_{B\varphi}}+\frac{1}{S^2+S_{C\varphi}}=0$，化簡可得 $3S^2+S_\varphi^2+2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)=0$。

2.討論 $3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)\neq 0$ 以及 $3S^2+S_\varphi^2+2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)\neq 0$ 時，動點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的位置關係。這是困難的問題，為了解決這個問題，我們花了不少時間。注意到，此式子與定理 18 的有向線段比 $\frac{\overline{X_{H(\varphi)}N}}{\overline{X_{M(\varphi)}N}}=\frac{3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}{-3S^2-S_\varphi^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}$ 有關連。

3.令包含雙曲線焦點的區域稱為雙曲線內部，先證明九點圓圓心 N 恆在 Kiepert 雙曲線內部。考慮過九點圓圓心 N 關於 Kiepert 雙曲線的極線

$$\begin{bmatrix}S^2+S_{BC} & S^2+S_{CA} & S^2+S_{AB}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & S_A-S_B & S_C-S_A\\ S_A-S_B & 0 & S_B-S_C\\ S_C-S_A & S_B-S_C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0$$

化簡可得九點圓圓心 N 的極線

$$(S^2+{S_A}^2)(S_C-S_B)x+(S^2+{S_B}^2)(S_A-S_C)y+(S^2+{S_C}^2)(S_B-S_A)z=0$$

再考慮極線與 Kiepert 雙曲線相交情形。根據定理 6 與定理 12，令 Kiepert 雙曲線上的點為 $\left((S_\varphi-S_B)(S_\varphi-S_C):(S_\varphi-S_C)(S_\varphi-S_A):(S_\varphi-S_A)(S_\varphi-S_B)\right)$ 代回 N 的極線可得

$$(S^2+{S_\varphi}^2)(S_A-S_B)(S_B-S_C)(S_C-S_A)=0$$

又 S_A、S_B、S_C 任意兩者相等時，Kiepert 雙曲線會退化，所以排除，最後得出方程式 $(S^2+{S_\varphi}^2)(S_A-S_B)(S_B-S_C)(S_C-S_A)=0$ 無實數解。故點 N 的極線與 Kiepert 雙曲線無交點，即點 N 恆在 Kiepert 雙曲線內部。

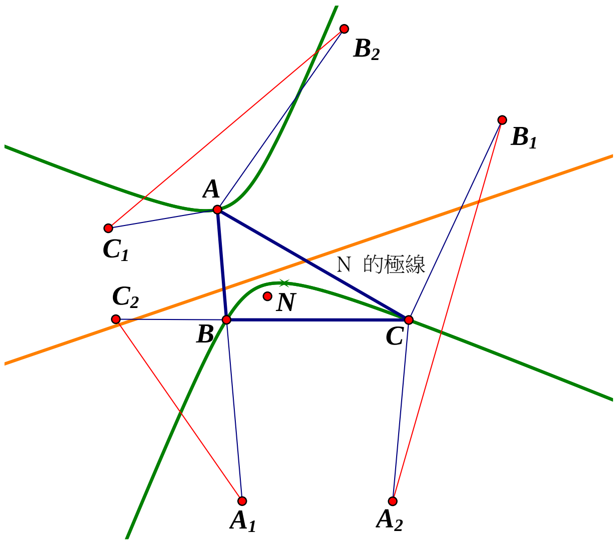


圖 18-1：九點圓圓心 N 恆在 Kiepert 雙曲線內部。

4.因為九點圓圓心 N 恆在 Kiepert 雙曲線內部，再依據定理 19 可知 $\frac{\overline{X_{H(\varphi)}N}}{\overline{X_{M(\varphi)}N}}=\frac{3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}{-3S^2-S_\varphi^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}$，所以有向線段 $\overline{X_{M(\varphi)}N}$ 與 $\overline{X_{H(\varphi)}N}$ 同向時，$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 分別在雙曲線的兩支，即 $\frac{3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}{-3S^2-S_\varphi^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}>0$，也就是 $3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)$ 與 $3S^2+S_\varphi^2+2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)$ 異號。

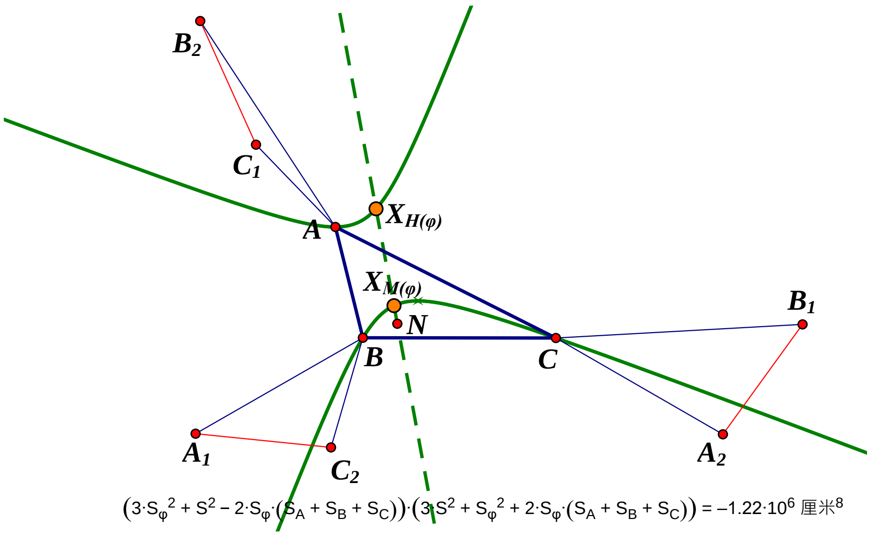


圖 18-2：$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 在雙曲線的兩支。

同理，有向線段 $\overline{X_{M(\varphi)}N}$ 與 $\overline{X_{H(\varphi)}N}$ 異向時，$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 分別在雙曲線的同一支，即 $\frac{3S_\varphi^2+S^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)}{-3S^2-S_\varphi^2-2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)} < 0$，也就是 $3S_\varphi^2 + S^2 - 2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)$ 與 $3S^2 + S_\varphi^2 + 2S_\varphi(S_A+S_B+S_C)$ 同號。

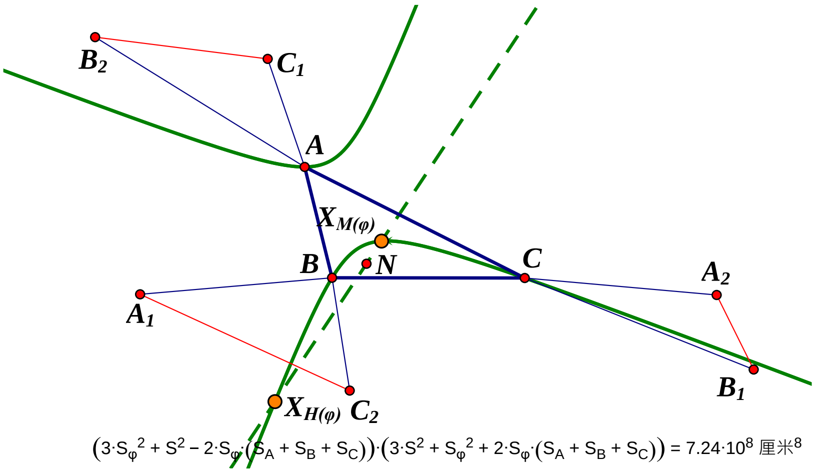


圖 18-3：$X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 在雙曲線的同一支。

■

（三）直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點呢？

$\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點？我們使用幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 實驗發現，$\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 並不是線束，所以直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 不會通過一定點。

（四）$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線的充要條件

前面我們分別討論 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點任取兩點共線的性質，接著繼續討論

$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線的充要條件是什麼呢？以下進行證明。

定理 19 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 共線充要條件為 $\triangle ABC$ 為等腰三角形或 $\varphi = k\pi$，$k \in N$。

證明.

由前得知重心 G、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 必共線，其直線方程式為

$$(S^2+S_{A\varphi})(S_B-S_C)x+(S^2+S_{B\varphi})(S_C-S_A)y+(S^2+S_C)(S_{A\varphi}-S_B)z=0$$

因此我們只需要考慮 $X_{M(\varphi)}$ 在直線 $\overleftrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$上的充要條件即可，可得知

$$\begin{bmatrix}(S_\varphi-S_B)(S_\varphi-S_C) & (S_\varphi-S_C)(S_\varphi-S_A) & (S_\varphi-S_A)(S_\varphi-S_B)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(S^2+S_{A\varphi})(S_B-S_C)\\(S^2+S_{B\varphi})(S_C-S_A)\\(S^2+S_{C\varphi})(S_A-S_B)\end{bmatrix}=0$$

化簡可得 $(S^2+{S_\varphi}^2)(S_A-S_B)(S_B-S_C)(S_C-S_A)=0$

因此，$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點共線的充要條件有兩種情況：

(1) $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 共線，此直線是底邊上的中線。

(2) $\varphi = k\pi$ 時，因為 S_φ 未定義，所以我們從幾何作圖定義上去探討，可得出 $X_{M(\varphi)}$ 恰為重心、$X_{H(\varphi)}$ 恰為垂心 、$X_{P(\varphi)}$ 恰為外心或 X_{382}，此直線是 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

■

陸、 推廣：角度與長度同時可變動

一、 相同的長度比例：λ 倍

在推廣研究部分，我們不僅是讓「角度」可變，同時再讓「長度」可變，即有向角 $\angle A_1'BC=\angle BCA_2'=\angle B_1'CA=\angle CAB_2'=\angle C_1'AB=\angle ABC_2'=\varphi$，且 $\overline{BA_1'}=\overline{CA_2'}=\lambda_1\overline{BC}$、$\overline{CB_1'}=\overline{AB_2'}=\lambda_2\overline{CA}$、$\overline{AC_1'}=\overline{BC_2'}=\lambda_3\overline{AB}$，連接線段 $\overline{A_1'C_2'}$、$\overline{B_1'A_2'}$、$\overline{C_1'B_2'}$ 構造可變動的三個 $\triangle AC_1'B_2'$、$\triangle BA_1'C_2'$、$\triangle CB_1'A_2'$。

首先，我們先考慮相同的長度比例 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$ 的情況。

定理 20 對於任意實數 φ 與 λ，我們有

(1) 外中線 $\overleftrightarrow{AM_A'}$、$\overleftrightarrow{BM_B'}$、$\overleftrightarrow{CM_C'}$ 交於一點 $X_{M(\varphi,\lambda)}$。

(2) 外高 $\overleftrightarrow{AH_A'}$、$\overleftrightarrow{BH_B'}$、$\overleftrightarrow{CH_C'}$ 交於一點 $X_{H(\varphi,\lambda)}$。

(3) 外中垂線 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$、$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$、$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 交於一點 $X_{P(\varphi,\lambda)}$。

證明. 利用平行線與相似三角形即可證明，在此省略過程。

二、 長度比例不相同時：λ_1、λ_2、λ_3 倍

我們利用原旁接 $\triangle AC_1B_2$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 的點 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 的重心坐標，透過分點公式得出點 A_1'、A_2'、B_1'、B_2'、C_1'、C_2' 坐標。

$A_1'\left(-\lambda_1 a^2:(1-\lambda_1)S_\varphi+\lambda_1 S_C+S_\theta:\lambda_1(S_B+S_\varphi)\right)$、$A_2'(-\lambda_1 a^2:\lambda_1(S_C+S_\varphi):(1-\lambda_1)S_\varphi+\lambda_1 S_B+S_\theta)$

$B_1'(\lambda_2(S_C+S_\varphi):-\lambda_2 b^2:(1-\lambda_2)S_\varphi+\lambda_2 S_A+S_\theta)$、$B_2'\left((1-\lambda_2)S_\varphi+\lambda_2 S_C+S_\theta:-\lambda_2 b^2:\lambda_2(S_A+S_\varphi)\right)$

$C_1'\left((1-\lambda_3)S_\varphi+\lambda_3 S_B+S_\theta:\lambda_3(S_A+S_\varphi):-\lambda_3 c^2\right)$、$C_2'(\lambda_3(S_B+S_\varphi):(1-\lambda_3)S_\varphi+\lambda_3 S_A+S_\theta:-\lambda_3 c^2)$

（一）相異實數 φ、λ_1、λ_2、λ_3 所構造的外中線共點性質

先討論外中線的情形，計算出邊 $\overline{B_2'C_1'}$、$\overline{C_2'A_1'}$、$\overline{A_2'B_1'}$ 之中點 M_A'、M_B'、M_C' 坐標。

再分別給出外中線 $\overleftrightarrow{AM_A'}$、$\overleftrightarrow{BM_B'}$、$\overleftrightarrow{CM_C'}$ 的方程式：

$$\overleftrightarrow{AM_A'}:\left(\lambda_2(S_A+S_\varphi)-\lambda_3(S_A+S_B)\right)y-\left(\lambda_3(S_A+S_\varphi)-\lambda_2(S_A+S_c)\right)z=0$$

$$\overleftrightarrow{BM_B'}:\left(\lambda_3(S_B+S_\varphi)-\lambda_1(S_B+S_C)\right)z-\left(\lambda_1(S_B+S_\varphi)-\lambda_3(S_A+S_B)\right)x=0$$

$$\overleftrightarrow{CM_C'}:\left(\lambda_1(S_C+S_\varphi)-\lambda_2(S_A+S_C)\right)x-\left(\lambda_2(S_C+S_\varphi)-\lambda_1(S_B+S_C)\right)y=0$$

根據西瓦正逆定理可得 $\overleftrightarrow{AM_A'}$、$\overleftrightarrow{BM_B'}$、$\overleftrightarrow{CM_C'}$ 共點的充要條件如下式。

$$\frac{\lambda_2(S_A+S_\varphi)-\lambda_3(S_A+S_B)}{\lambda_3(S_A+S_\varphi)-\lambda_2(S_A+S_c)}\times\frac{\lambda_3(S_B+S_\varphi)-\lambda_1(S_B+S_C)}{\lambda_1(S_B+S_\varphi)-\lambda_3(S_A+S_B)}\times\frac{\lambda_1(S_C+S_\varphi)-\lambda_2(S_A+S_C)}{\lambda_2(S_C+S_\varphi)-\lambda_1(S_B+S_C)}=1$$

式（1）

觀察上式可以發現由於長度參數 λ_1、λ_2、λ_3 皆為變數，角度參數 S_φ 也是變數，要找出滿足上式的四個參數是困難的。然而，本研究給出一個漂亮的三線共點的充分條件「$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)$」，其中 φ、λ_1、λ_2、λ_3 皆為實數。

定理 21 若實數 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)$，則外中線 $\overleftrightarrow{AM_A'}$、$\overleftrightarrow{BM_B'}$、$\overleftrightarrow{CM_C'}$ 交於一點 $X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$。

證明.

令 $\lambda_1=(S_A+S_\varphi)t$、$\lambda_2=(S_B+S_\varphi)t$、$\lambda_3=(S_C+S_\varphi)t$ 代回，發現其滿足式（1），即證明外中線 $\overleftrightarrow{AM_A'}$、$\overleftrightarrow{BM_B'}$、$\overleftrightarrow{CM_C'}$ 交於一點 $X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$，其坐標為

$$X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}\left((-S_{AB}+S_{BC}-S_{CA}+S_\varphi^2):(-S_{AB}-S_{BC}+S_{CA}+S_\varphi^2):(S_{AB}-S_{BC}-S_{CA}+S_\varphi^2)\right)$$

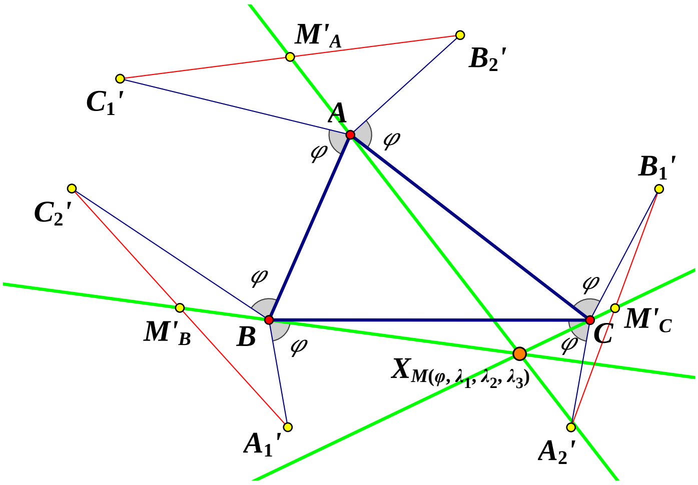


圖 19：外中線交於一點 $X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$。

■

定理 22 動點 $X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$ 的軌跡為 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

證明. 與前證明相同方法，在此省略。

令旁接三角形 $\triangle AC_1'B_2'$、$\triangle BA_1'C_2'$、$\triangle CB_1'A_2'$ 的重心為 G_A'、G_B'、G_C' 點。

值得一提的是，在 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)$ 的條件下，我們發現了「平行與相似」，這個性質與前面的 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 條件下的是完全不同的性質。

性質 23 重心三角形 $\triangle G_A'G_B'G_C'$ 與 $\triangle ABC$ 相似。

證明. 利用 G_A'、G_B'、G_C' 的重心作標極可證明，在此省略。

（二）相異實數 λ_1、λ_2、λ_3 所構造的外高共點性質

關於外高，比較有趣的是，長度比例 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)$ 的條件下，我們用幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 改變角度 φ 而發現，當 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$，其

中 $k\in N$，則外中垂線 $\overleftrightarrow{AH_A'}$、$\overleftrightarrow{BH_B'}$、$\overleftrightarrow{CH_C'}$ 才會交於定點垂心 X_4，以下是我們證明。

> 性質 24 若實數 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)$ 且 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$，$k\in N$，則外高 $\overleftrightarrow{AH_A'}$、$\overleftrightarrow{BH_B'}$、$\overleftrightarrow{CH_C'}$ 交於定點垂心 X_4。

證明.

1.我們先討論 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$，k 為奇數時

考慮 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 即可（$\frac{3\pi}{2}$ 視同 $-\frac{\pi}{2}$），可得 B_2' 與 C_1' 坐標 $B_2'\big((S_BS_C+S_\theta):-b^2S_B:S_AS_B\big)$、$C_1'\big((S_BS_C+S_\theta):S_AS_C:-c^2S_C\big)$，其分量和皆為 S_θ，再得向量 $\overrightarrow{C_1'B_2'}=(0:1:-1)$，所以 $\overline{B_2'C_1'}\parallel\overline{BC}$。同理，$\overline{C_2'A_1'}\parallel\overline{CA}$、$\overline{A_2'B_1'}\parallel\overline{AB}$，所以 $\overleftrightarrow{AH_A'}$、$\overleftrightarrow{BH_B'}$、$\overleftrightarrow{CH_C'}$ 即為 $\triangle ABC$ 的高，恆交於垂心 X_4。

2.再討論 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$，k 為偶數時，我們同樣可以證明 $\overline{B_2'C_1'}\parallel\overline{BC}$、$\overline{C_2'A_1'}\parallel\overline{CA}$、$\overline{A_2'B_1'}\parallel\overline{AB}$，因此省略證明過程。

■

（三）相異實數 λ_1、λ_2、λ_3 所構造的外中垂線共點性質

我們利用一樣的方式處理由相異實數 λ_1、λ_2、λ_3 所構造的三條外中垂線共點情形。

> 性質 25 若實數 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)$ 且 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$，$k\in N$，則外中垂線 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$、$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$、$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 交於一點 $X_{P(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$。

證明.

1.我們先討論 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$，k 為奇數時

考慮 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 即可（有向角 $\frac{3\pi}{2}$ 即為 $-\frac{\pi}{2}$），可得出向量 $\overrightarrow{C_1'B_2'}=(0:1:-1)$ 且 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)=S_A:S_B:S_C$，所以令 $\lambda_1=t\cot A$、$\lambda_2=t\cot B$、$\lambda_3=t\cot C$，$t\in R$，代入可得 M_A' 坐標

$$M_A'\begin{pmatrix}2(SS_\theta+S_BS_Ct):(S_CS_A-S_AS_B-S_BS_C)t\\:(S_AS_B-S_BS_C-S_CS_A)t\end{pmatrix}$$

注意到，此時 $S_\theta = S\times\cot\frac{\pi}{4} = S$，所以中點 M_A' 的分量和為 $2S^2$

再設 $\overline{C_1'B_2'}$ 的中垂線 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$ 上任意一點 $P(x{:}y{:}z)$，其中 $x+y+z=2S^2$，向量 $\overrightarrow{PM_A'} =$

$\Big((2S^2+2S_BS_Ct-x){:}\big((S_CS_A-S_AS_B-S_BS_C)t-y\big){:}\big((S_AS_B-S_BS_C-S_CS_A)t-z\big)\Big)$

因為 $\overline{PM_A'}\perp\overline{C_1'B_2'}$，依據重心坐標下的垂直線充要條件可得直線 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$ 方程式為

$$a^2\Big(\big((S_AS_B-S_BS_C-S_CS_A)t-z\big)-\big((S_CS_A-S_AS_B-S_BS_C)t-y\big)\Big)+$$
$$b^2\big(-(2S^2+2S_BS_Ct-x)\big)+c^2\big((2S^2+2S_BS_Ct-x)\big)=0$$

注意到，$x+y+z=2S^2$ 且 $a^2=S_B+S_C$、$b^2=S_C+S_A$、$c^2=S_A+S_B$

化簡可得中垂線 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$ 方程式

$$\overleftrightarrow{M_A'T_A'}: t(S_B-S_C)x+(t(S_B-S_C)+2S_B)y+(t(S_B-S_C)-2S_C)z=0$$

同理，再得出另外兩條中垂線 $\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$ 與 $\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 方程式

$$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}: (t(S_C-S_A)-2S_A)x+\big(t(S_C-S_A)\big)y+(t(S_C-S_A)+2S_C)z=0$$

$$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}: (t(S_A-S_B)+2S_A)x+(t(S_A-S_B)-2S_B)y+\big(t(S_A-S_B)\big)z=0$$

考慮

$$\begin{vmatrix} t(S_B-S_C) & t(S_B-S_C)+2S_B & t(S_C-S_A)+2S_C \\ t(S_C-S_A)-2S_A & t(S_C-S_A) & t(S_C-S_A)+2S_C \\ t(S_A-S_B)+2S_A & t(S_A-S_B)-2S_B & t(S_A-S_B) \end{vmatrix}$$

將第 2 列、第 3 列加入第 1 列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t(S_C-S_A)-2S_A & t(S_C-S_A) & t(S_C-S_A)+2S_C \\ t(S_A-S_B)+2S_A & t(S_A-S_B)-2S_B & t(S_A-S_B) \end{vmatrix}=0$$

即行列式值為 0，所以 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$、$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$、$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 交於一點 $X_{P(\frac{\pi}{2},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$

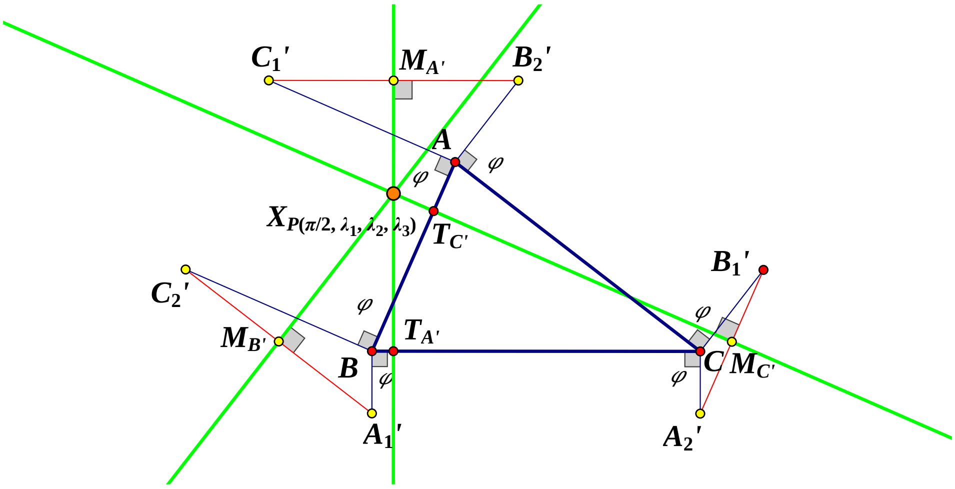


圖 20：$\varphi=\frac{\pi}{2}$ 時。

2.當 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ 且 k 為偶數時，因為 $S_\varphi=\pm\infty$，注意到，此時三個長度參數 λ_1、λ_2、λ_3 的比例為 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(S_A+S_\varphi):(S_B+S_\varphi):(S_C+S_\varphi)=1:1:1$，又由作圖知 $\overline{BA_1'}=\overline{CA_2'}=h\overline{BC}$ 與 $\overline{CB_1'}=\overline{AB_2'}=h\overline{CA}$，以及 $\overline{AC_1'}=\overline{BC_2'}=h\overline{AB}$，則可得中垂線方程式如下：

$$\overleftrightarrow{M_A'T_A'}: h(S_B-S_C)x+(h(S_B-S_C)+2S_B)y+(h(S_B-S_C)-2S_C)z=0$$

$$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}: (h(S_C-S_A)-2S_A)x+\big(t(S_C-S_A)\big)y+(h(S_C-S_A)+2S_C)z=0$$

$$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}: (h(S_A-S_B)+2S_A)x+(h(S_A-S_B)-2S_B)y+\big(h(S_A-S_B)\big)z=0$$

其方程式型態與 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 相同，因此 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$、$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$、$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 交於一點 $X_{P(\pi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$

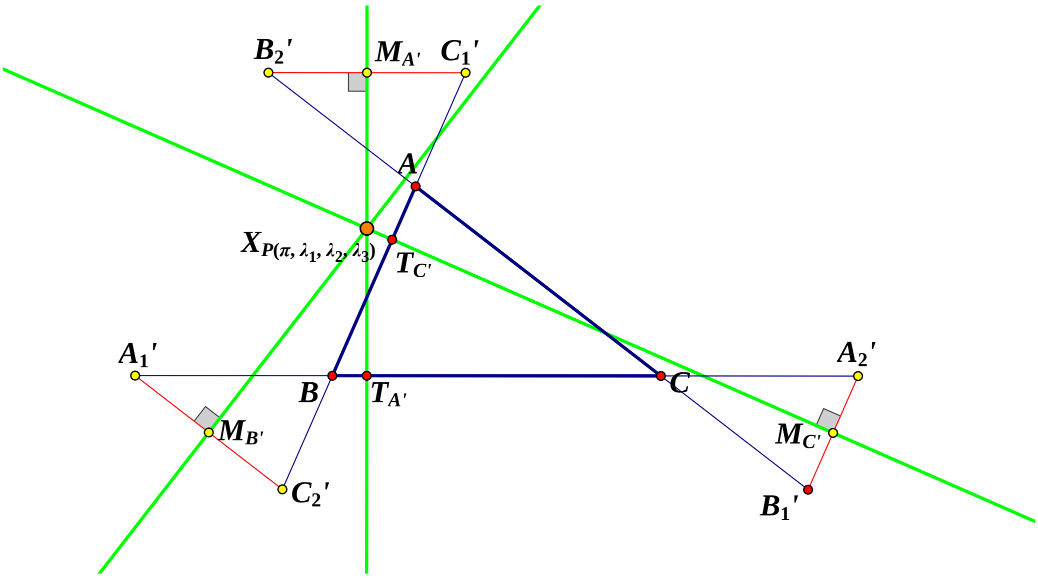


圖 21：$\varphi=\pi$ 時。

■

事實上，我們有更直觀的方法處理前述性質。當 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ 時，利用重心坐標不難得出 $\overline{C_1'B_2'}\parallel\overline{CB}$，所以 $\overline{C_1'B_2'}$ 的中垂線必然垂直於 $\overline{CB}$，其餘兩邊同理，再得出外中垂線 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$、$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$、$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 就是 $\triangle M_A'M_B'M_C'$ 的高，所以 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$、$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$、$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 必交於一點，但是我們想要求出動點 $X_{P(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$ 的軌跡，所以才需要分別求出外中垂線 $\overleftrightarrow{M_A'T_A'}$、$\overleftrightarrow{M_B'T_B'}$、$\overleftrightarrow{M_C'T_C'}$ 的方程式。

性質 26 動點 $X_{P(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$ 的軌跡為 $\triangle ABC$ 的歐拉線，其中 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$，$k\in N$。

證明. 與前證明相同方法，在此省略。

柒、 結論

本研究推廣 2001 年 Larry Hoehn 提出的旁接三角形的西瓦線之共點性質。相較近年相關研究，本研究是新的方向，我們先一般化了角度 φ，使用了重心坐標與 Conway 符號簡潔地找出豐富的性質，接著我們也同時將角度與長度為可變參數，完整研究外西瓦線共點之問題，其主要研究結果如下。

一、 φ 為任意實數，外西瓦線交於一點

對於任意實數 φ，有中線 $\overleftrightarrow{AM_A}$、$\overleftrightarrow{BM_B}$、$\overleftrightarrow{CM_C}$ 交於動點 $X_{M(\varphi)}$；高 $\overleftrightarrow{AH_A}$、$\overleftrightarrow{BH_B}$、$\overleftrightarrow{CH_C}$ 交於動點 $X_{H(\varphi)}$；中垂線 $\overleftrightarrow{M_AT_A}$、$\overleftrightarrow{M_BT_B}$、$\overleftrightarrow{M_CT_C}$ 交於動點 $X_{P(\varphi)}$。

二、 動點 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 各自的軌跡

我們接續研究動點 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 的軌跡，發現點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡即為著名的 Kiepert 雙曲線。由於 Kiepert 雙曲線的構造法與本研究不同，我們也繼續探討兩者的關聯，並給出證明，因此本研究的外西瓦線構造法可以看作 Kiepert 雙曲線的新構造法，這一點也是本研究很重要的價值之處。

三、 動點 $X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$、$X_{P(\varphi)}$ 三點的綜合性質

我們發現有趣的定性性質，對於任意實數 φ，$\overleftrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 恆通過 $\triangle ABC$ 的重心 G；$\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過 $\triangle ABC$ 九點圓圓心 N；值得一提的是，我們探討 Kiepert 雙曲線上的

$X_{M(\varphi)}$、$X_{H(\varphi)}$ 的位置關係，我們給出兩動點分別在雙曲線兩支，或在同支的判別條件，這是一個十分有趣的性質！

四、 可變的長度與角度：$X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$、$X_{H(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$、$X_{P(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$

我們對於旋轉角度 φ 所構造的旁接三角形的性質已給出完整刻劃。我們持續進行「不同比例」長度的推廣，即參數 λ_1、λ_2、λ_3，滿足 $\overline{BA_1'} = \overline{CA_2'} = \lambda_1\overline{BC}$ 與 $\overline{CB_1'} = \overline{AB_2'} = \lambda_2\overline{CA}$，以及 $\overline{AC_1'} = \overline{BC_2'} = \lambda_3\overline{AB}$ 所構造的旁接三角形與其外西瓦線性質。

首先，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ 時，利用等比例構造的相似三角形即可證明三條外中線交於一點 $X_{M(\varphi,\lambda)}$；三條外高交於一點 $X_{H(\varphi,\lambda)}$；三條外中垂線交於一點 $X_{P(\varphi,\lambda)}$。

第二，考慮 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = (S_A + S_\varphi):(S_B + S_\varphi):(S_C + S_\varphi)$ 的情形下，對於任意實數 φ，恆有三條外中線交於一點 $X_{M(\varphi,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$，其軌跡為歐拉線；三條外高與三條外中垂線就沒有那麼特殊，只有對於 $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ 時，三條外高交於一點、三條外中垂線交於一點。

捌、 參考文獻

[1] Z. Cerin (2003). Homology and Orthology with Triangles for Central Points of Variable Flanks. *Journal for Geometry and Graphics*, *7*(1), 1–21.

[2] N. Dergiades and F.V. Lamoen (2003). Rectangles Attached to Sides of a Triangle, *Forum Geom.*, *3*, 145–159.

[3] Floor van Lamoen (2018). Orthopoles and Variable Flanks, *Forum Geom.*, *18*, 349–351.

[4] L. Hoehn (2001). Extriangles and excevians. *Math. Magazine*, *67*, 188–205.

[5] Kiepert Hyperbola Website, https://mathworld.wolfram.com/KiepertHyperbola.html

[6] C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers Website, https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[7] Steiner Circumellipse Website, http://mathworld.wolfram.com/SteinerCircumellipse.html

[8] P. Yiu (2001). *Introduction to the Geometry of the Triangle*, available at http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf

[9] T. Zaharinov (2017). Orthopoles, Flanks, and Vecten Points, *Forum Geom.*, *17*, 401–410.

【評語】010023

這個作品是在討論平面幾何的問題，重點主要在旁接三角形（Extriangles）與外西瓦線（Excevians）的關係，並將其推廣。以作圖軟體協助表現定義與關係，是一個有趣的科展題目，整體表現良好。