2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010020

參展科別　數學

作品名稱　距離便是美—多維空間的支配數之討論

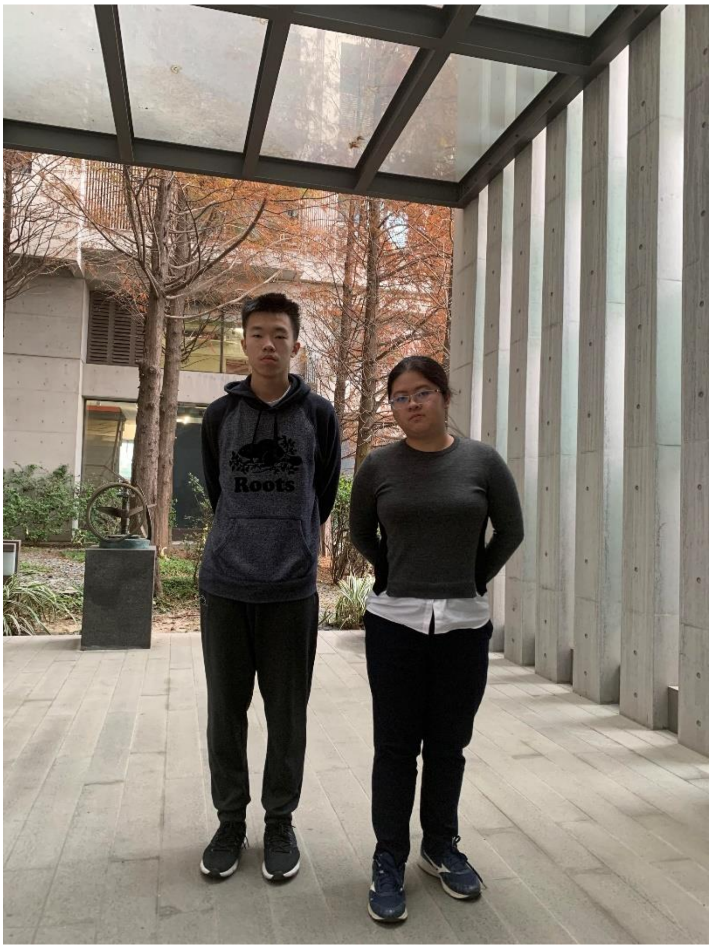
就讀學校　國立臺南第一高級中學

指導教師　蕭健忠

作者姓名　黃芷宣、買楷翔

關鍵詞　支配數、社交距離

作者簡介



我是黃芷宣，就讀於臺南一中二年 19 班，目前參與高中科學班計畫。我喜歡思考數學問題，當中富變化性的思維以及靈光乍現的快樂都是我所喜愛的。自高一下開始進行數學專題研究，對支配數的性質有一些結論，過程中也遇到許多問題，或是不知道下一步該如何走，但也了解做研究的艱難和自身熱忱的重要性。

我是買楷翔，就讀於臺南一中二年 19 班，目前參與高中科學班計畫。自高一下開始進行數學專題研究，因著新冠肺炎疫情想到了這樣的題目，並加以研究。這次有機會參加國際科展，雖然疫情正嚴峻，失去了與國外同學交流的機會，我仍希望能與數學同好交流並拓展自己的國際視野，期許自己在數學研究方面中能更上一層樓，感謝大會給我這個機會。

Abstract

Starting with social distancing, this research explores the domination numbers of multidimensional space, from two-dimensional situations where three squares with same color are not neighbor, then expand to one-dimensional, two-dimensional, and three-dimensional situations where m squares with same color are not neighbor. We draw inspiration from the paper: The Domination Number of Grids, by Daniel Gonçalves, Alexandre Pinlou, Michaël Rao, Stéphan Thomassé. We define that $\mathcal{L}_{nt} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t\ (mod\ m), x_1 \in [1, \ell_1], x_2 \in [1, \ell_2], \dots \dots, x_n \in [1, \ell_n]\}$. For any of the m of one dimension, the domination numbers $|A_{1\mathrm{m}}| = \left\lfloor \frac{\ell_1}{\mathrm{m}} \right\rfloor$; by enumerate and testing, we found that for m=3 of two-dimension, the domination numbers $|A_2| = \left\lfloor \frac{\ell_1 \ell_2}{3} \right\rfloor$. Same, we can figure out the domination number of any numbers m, but we change the way of researching, we apply set and congruence modulo carry on research, by these we reduce the time of exhausting, meanwhile also can discuss the case where m is an arbitrary number.

摘要

本研究保持社交距離為發想，探討從一維到多維空間的支配數。我們從使得三個同色單位方格不相連的二維情況，拓展至 m 個同色單位方格不相連的一維、二維、三維情況。本研究從 The Domination Number of Grids 這篇論文中汲取靈感，其中”Domination Number”也是「支配數」此名詞的由來。我們定義 $\mathcal{L}_{nt} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t\ (mod\ m), x_1 \in [1, \ell_1], x_2 \in [1, \ell_2], \dots \dots, x_n \in [1, \ell_n]\}$，此處的$\ell_n$是邊長。對於一維情形的任意 m，其支配數 $|A_{1\mathrm{m}}| = \left\lfloor \frac{\ell_1}{\mathrm{m}} \right\rfloor$；對於二維情形且 m=3 時，我們經由列舉和畫圖證明其支配數 $|A_2| = \left\lfloor \frac{\ell_1 \ell_2}{3} \right\rfloor$。同樣的二維和三維情況在 m=任意數時的支配數也可求得，不過在此我們改變了研究的方法，我們應用集合與同餘進行運算，除了減少窮舉將花費的時間，也可一次討論 m=任意數的情況。

壹、研究動機

新冠肺炎的疫情駭人聽聞，各國也紛紛推出了不同的應變措施，對於我們台灣，最重要的要素莫不過是保持社交距離，在咖啡廳、餐廳、教室……處處可見座位區每固定距離便會設立防疫座位。這樣的規律的現象也引起了我們的好奇：如果在固定長度內，每固定距離就要設置防疫座位，那該如何使防疫座位的數量最少，也就是普通座位最多？若是推廣到一定面積內、一定體積內，甚至多維度的情形又會如何？諸如此類的猜測，使我們著手於這樣的問題。

貳、研究目的

一、在二維平面，探討所有座位中至少需要幾個防疫座位方能滿足沒有任何3個普通座位相連的要求。

二、在一維長度，探討所有座位中至少需要幾個防疫座位方能滿足沒有任何m個普通座位相連的要求。

三、在二維平面，探討所有座位中至少需要幾個防疫座位方能滿足沒有任何m個普通座位相連的要求。

四、在三維空間，探討所有座位中至少需要幾個防疫座位方能滿足沒有任何m個普通座位相連的要求。

五、在 n 維空間，探討所有座位中至少需要幾個防疫座位方能滿足沒有任何m個普通座位相連的要求。

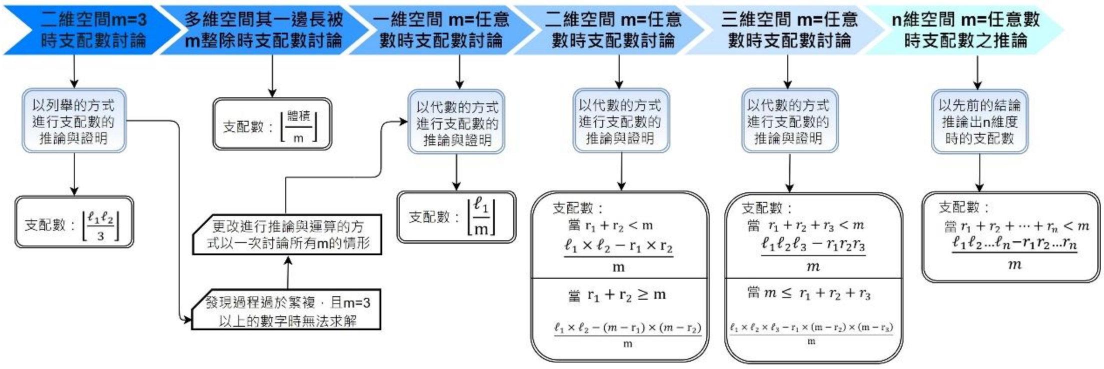
參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、EXCEL。

肆、研究過程

現實生活中的二維座位多是每三個座位就有一個被畫上叉，表示此座位禁止坐人，而 m=1,2 的情況皆較容易，因此我們決定先考慮 m=3 的情況。

一、研究架構圖



二、m=3 時的二維情況分析

(一)自訂名詞與代號解釋

斜行：矩形中，以左下角頂點之角平分線為計算方向，最靠近左上角頂點的為第 1 斜行，其次為第 2 斜行(如圖 4-1，方格內的數字為其所在的斜行次序)，以此類推。可知斜行數為兩邊長和-1，另外第 x 斜行的方格數目為$n_x=\begin{cases}x,\ 1\leq x\leq\ell_1\\ \ell_1,\ \ell_1<x\leq\ell_2\\ \ell_1+\ell_2-x,\ell_2<x\end{cases}$

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12

圖 4-1

ℓ_1、ℓ_2分別為矩形的二邊長。不失一般性，令$\ell_1\leq\ell_2$。q_1、q_2分別為二邊長除以 3 後的商，其中q_1、$q_2\geq1$。A 為面積。

(二)下界推導

為使三個相同者不相連，因此將邊長依除以 3 的餘數分類討論。

1. ℓ_1和ℓ_2中，至少一個為 3 的倍數

在方格中擺上長度為 3 的木條，每個方格至多只被一支木條覆蓋，被同一支木

條覆蓋的方格為同一組。由於ℓ_1和ℓ_2至少有一個為 3 的倍數，可知用$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$支木條，可恰將所有方格覆蓋。而同一組的三個方格中，必至少有一個方格為黑色，否則有三個相同方格相連，矛盾。故黑色方格數量不小於木條數量，至少為$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$個。

2. $\ell_1 = 3\mathrm{q}_1 + 1, \ell_2 = 3\mathrm{q}_2 + 1$

可先將長、寬分別為ℓ_1-1、ℓ_2-1 的矩形以長度為 3 的木條完全覆蓋，此時剩下部分可視為一個(ℓ_1-1)×1 的矩形、一個(ℓ_2-1)×1 的矩形，以及一個小方格。由於ℓ_1-1、ℓ_2-1 皆為 3 的倍數，可將剩下的兩個矩形完全填滿，只餘下一個小方格。同理可知，同一組的三個方格中，必至少有一個方格為黑色，故至少需$\frac{\ell_1\ell_2-1}{3}$個。

3. $\ell_1 = 3\mathrm{q}_1 + 1, \ell_2 = 3\mathrm{q}_2 + 2$

可先將長、寬分別為ℓ_1-1、ℓ_2-2 的矩形以長度為 3 的木條完全覆蓋，此時剩下部分可視為一個(ℓ_1-1)×1 的矩形、一個(ℓ_2-2)×1 的矩形，以及兩個小方格。由於ℓ_1-1、ℓ_2-2 皆為 3 的倍數，可將剩下的兩個矩形完全填滿，只餘下兩個小方格。同理可知，同一組的三個方格中，必至少有一個方格為黑色，故至少需$\frac{\ell_1\ell_2-2}{3}$個。

4. $\ell_1 = 3\mathrm{q}_1 + 2, \ell_2 = 3\mathrm{q}_2 + 1$

由對稱性知與 3.類似。

可先將長、寬分別為ℓ_1-2、ℓ_2-1 的矩形以長度為 3 的木條完全覆蓋，此時剩下部分可視為(ℓ_1-2)×1 的矩形、一個(ℓ_2-1)×1 的矩形，以及兩個小方格。由於ℓ_1-2、ℓ_2-1 皆為 3 的倍數，可將剩下的兩個矩形完全填滿，只餘下兩個小方格。同

理可知，同一組的三個方格中，必至少有一個方格為黑色，故至少需$\frac{\ell_1\ell_2-2}{3}$個。

5. $\ell_1 = 3q_1 + 2, \ell_2 = 3q_2 + 2$

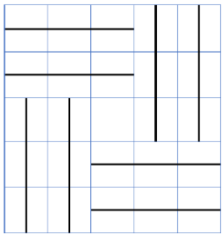


圖 4-2

考慮一個 5×5 的正方形，可依圖 4-2 之方式用長度為 3 的木條覆蓋，僅餘下一個小方格。由於$q_1, q_2 \geq 1$，故$\ell_1, \ell_2 \geq 5$。

於$\ell_1 \times \ell_2$的矩形中任選一角落，將該處的 5×5 正方形以上述方式覆蓋。剩下的部分可分為三個區塊：(ℓ_1-5)×5 的矩形、(ℓ_2-5)×5 的矩形，以及(ℓ_1-5)×(ℓ_2-5)的矩形(如圖 4-3)。由於ℓ_1-5、ℓ_2-5 皆為 3 的倍數，因此可將餘下部分完全填滿。此時只有一個小方格未被覆蓋，故至少需$\frac{\ell_1\ell_2-1}{3}$個。

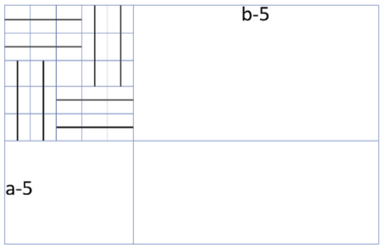


圖 4-3

綜合上述討論，知下界為$\left\lfloor\frac{\ell_1\ell_2}{3}\right\rfloor$，即$\left\lfloor\frac{A}{3}\right\rfloor$。

(三)證明下界可達成

此處提供一種方法，其黑格數量恰為下界。

1. ℓ_1=3q_1, ℓ_2=3q_2

將第 1 斜行、第 4 斜行、第 7 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-2 斜行的方格塗黑，由自訂名詞解釋中，第 x 斜行的方格數目公式可知，黑格總數=1+4+7+…+(3q_1-2)+3q_1*(q_2-q_1)+(3q_1-1)+(3q_1-4)+…+5+2=3q_1q_2=$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$

2. ℓ_1=3q_1, ℓ_2=3$q_2 + 1$

將第 1 斜行、第 4 斜行、第 7 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-2 斜行的方格塗黑，由自訂名詞解釋中，第 x 斜行的方格數目公式可知，黑格總數=1+4+7+…+(3q_1-2)+3q_1*(q_2-q_1)+3q_1+(3q_1-3)+(3q_1-6)+…+3+0=3q_1q_2+q_1=$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$

3. ℓ_1=3q_1, ℓ_2=3$q_2 + 2$

將第 2 斜行、第 5 斜行、第 8 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-3 斜行的方格塗黑，由自訂名詞解釋中，第 x 斜行的方格數目公式可知，黑格總數=2+5+8+…+($3q_1$-1)+$3q_1$*(q_2-q_1)+$3q_1$+($3q_1$-3)+($3q_1$-6)+…+3+0=$3q_1q_2$+$2q_1$=$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$

4. ℓ_1=$3q_1 + 1$, ℓ_2=$3q_2$

將第 1 斜行、第 4 斜行、第 7 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-2 斜行的方格塗黑，由自訂名詞解釋中，第 x 斜行的方格數目公式可知，黑格總數=1+4+7+…+($3q_1$-2)+$3q_1$*(q_2-q_1)+$3q_1$+($3q_1$-3)+($3q_1$-6)+…+3+0=$3q_1q_2$+q_1=$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$

5. ℓ_1=$3q_1 + 1$, ℓ_2=$3q_2 + 1$

將第 2 斜行、第 5 斜行、第 8 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-3 斜行的方格塗黑，可知黑格總數=2+5+8+…+($3q_1$-1)+($3q_1$+1)*(q_2-q_1)+$3q_1$+($3q_1$-3)+($3q_1$-6)+…+3+0=$3q_1q_2$+q_1+q_2=$\frac{\ell_1\ell_2-1}{3}$

6. ℓ_1=$3q_1 + 1$, ℓ_2=$3q_2 + 2$

將第 3 斜行、第 6 斜行、第 9 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-3 斜行的方格塗黑，可知黑格總數=3+6+9+…+$3q_1$+($3q_1$+1)*(q_2-q_1)+$3q_1$+($3q_1$-3)+($3q_1$-6)+…+3+0=$3q_1q_2$+$2q_1$+q_2=$\frac{\ell_1\ell_2-2}{3}$

7. ℓ_1=$3q_1 + 2$, ℓ_2=$3q_2$

將第 2 斜行、第 5 斜行、第 8 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-3 斜行的方格塗黑，可知黑格總數=2+5+8+…+($3q_1$-1)+($3q_1$+2)*(q_2-q_1)+$3q_1$+($3q_1$-3)+($3q_1$-6)+…+3+0=$3q_1q_2$+$2q_2$=$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$

8. ℓ_1=$3q_1 + 2$, ℓ_2=$3q_2 + 1$

將第 3 斜行、第 6 斜行、第 9 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-3 斜行的方格塗黑，可知黑格總數

數=3+6+9+…+$3q_1$+($3q_1$+2)*(q_2-q_1)+$3q_1$+($3q_1$-3)+($3q_1$-

6)+…+3+0=$3q_1q_2$+$2q_2$+q_1=$\frac{\ell_1\ell_2-2}{3}$

9. ℓ_1=$3q_1+2$, ℓ_2=$3q_2+2$

將第 3 斜行、第 6 斜行、第 9 斜行...... 第ℓ_1+ℓ_2-1 斜行的方格塗黑，可知黑格總

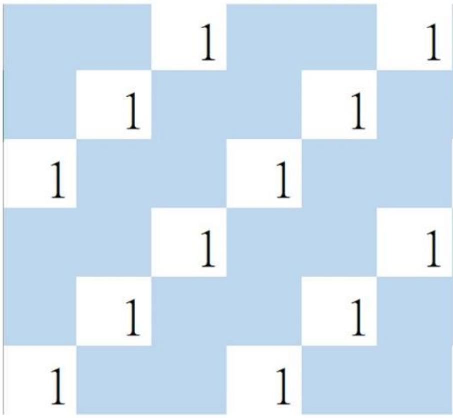
數=3+6+9+…+$3q_1$+($3q_1$+2)*(q_2-q_1)+$3q_1$+($3q_1$+1)+($3q_1$-

2)+…+4+1=$3q_1q_2$+$2q_1$+$2q_2$+1=$\frac{\ell_1\ell_2-1}{3}$

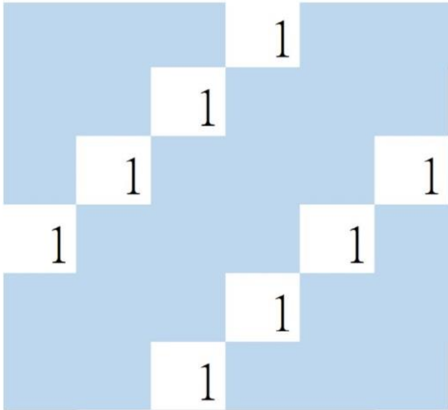
綜合上述討論，知$\left\lfloor\frac{\ell_1\ell_2}{3}\right\rfloor$的下界是可達成的，即最少需要$\left\lfloor\frac{A}{3}\right\rfloor$個黑格。

在進行 m 的改變的相關研究時，我們發現當 m=4 以上，以這個方法進行研究將變得沒有效率，並出現許多不符合$\left\lfloor\frac{A}{m}\right\rfloor$此結論的特例，如下圖 m=4 時，推論結果原應是$\left\lfloor\frac{36}{4}\right\rfloor = 9$，而我們找出只需 8 個的畫法。於是我們改變了研究的方法，從窮舉法變成偏向代數的方法，不但比較快，也能一次討論到所有 m 的情形，我們也推導到多維度的情形。

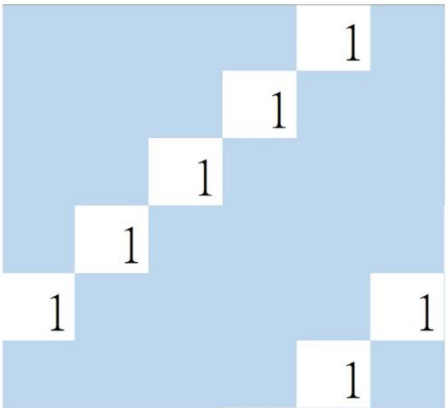
以下四圖為$\ell_1 = \ell_2 = 6$時，m 分別為 3~6 的情況



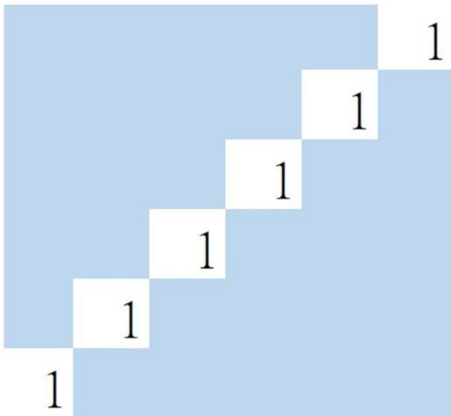
m=3 時



m=4 時



m=5 時



m=6 時

三、以代數方法處理一般性問題

在處理 m=3 的二維情況時，我們發現可用斜線方式塗黑方格，即滿足要求。而在嘗試進行推廣至 m=其他數字或是三維情況時，也發現能夠以斜線或是平面方式塗色，於是我們想要找出能表達此種塗色方式的數學表示式。

(一)自訂名詞與代號解釋

(1)**方格顏色定義：**為方便後續證明及推導，定義所有矩形、長方體單位邊長皆為 1。個數較多的方格令為白色，較少者令為黑色。

(2)**合法區塊：**對於一個 n 維體，其邊長為$\ell_1, \ell_2 \dots \ell_n(\ell_i \in \mathbb{N}, \mathrm{i} \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{i} \in [1, \mathrm{n}])$。定義$\prod_{i=1}^{n} \ell_i = \mathfrak{R}$，稱$\mathfrak{R}$為該 n 維體之體積，並將該 n 維體切成$\mathfrak{R}$個邊長均為 1 的 n 維體，稱其為單位方格。若該物體滿足對於其中任意 m 個連續的方

格均不為同色，則稱該物體為合法區塊。在本研究中所指涉方格均為單位方格。

(3)**N 維體邊長($\boldsymbol{\ell_k}$)**：令$\ell_k = q_k \times m + r_k, r_k < m, r_k, q_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k$ 為從 1 到 n 之正整數。不失一般性，令$r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_{n-1} \leq r_n$。

(4)**集合元素個數($|\boldsymbol{\mathcal{L}}|$)**：在本研究中，經常出現$A_{nt}$及$B_{nt}$，其中 n 表維度，t 表$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$模 m 的餘數。另外，若$\mathcal{L}$為一集合，令$|\mathcal{L}|$為$\mathcal{L}$的元素個數。

(5)**支配數**：使得一 n 維體成為合法區塊所需填入之最少塗黑方格的數量即稱為該 n 維體之支配數。

(二)邊長含 m 的倍數之情況討論及題目簡化

藉由以下引理，我們將能夠處理至少有一邊長為 m 的倍數的情形。

【引理 4-1】

考慮集合$A_{nt} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t \ (mod\ m), x_1 \in [k, k_1 m + k - 1], x_2 \in [1, k_2], \dots\dots, x_n \in [1, k_n]\}$，其中$k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{N}$。
則$|A_{nt}|$=$\prod_{i=1}^{n} k_i$ 。
也就是說，考慮一個 n 維體，若其至少有一邊長為 m 的倍數，則其所有的$|A_{nt}|$值皆等於其體積除以 m。

證明

將集合$A_{nt} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t \ (mod\ m), x_1 \in [k, k_1 m + k - 1], x_2 \in [1, k_2], \dots\dots, x_n \in [1, k_n]\}$分為$k_1$個集合，分別為

$A_{nt1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t \ (mod\ m), x_1 \in [k, m + k - 1], x_2 \in [1, k_2], \dots\dots, x_n \in [1, k_n]\}$、

$A_{nt2} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t \ (mod\ m), x_1 \in [m + k, 2m + k - 1], x_2 \in [1, k_2], \dots\dots, x_n \in [1, k_n]\}$、……、

$A_{ntk_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t \ (mod\ m), x_1 \in [(k_1 - 1)m + k, k_1 m + k - 1], x_2 \in [1, k_2], \dots \dots, x_n \in [1, k_n]\}$。

由於$k \equiv m + k \equiv 2m + k \equiv \cdots \equiv (k_1 - 1)m + k$、$k + 1 \equiv m + k + 1 \equiv 2m + k + 1 \equiv \cdots \equiv (k_1 - 1)m + k + 1$、 ... 、$m + k - 1 \equiv 2m + k - 1 \equiv 3m + k - 1 \equiv \cdots \equiv k_1 m + k - 1$，知$|A_{nt1}| = |A_{nt2}| = \cdots = |A_{ntk_1}|$。因此只須計算$|A_{nt1}|$再乘以$k_1$，即為$|A_{nt}|$。

對於集合A_{nt1}，當$x_2, \dots, x_n$為任意固定且符合條件數字，而$x_1 \in [1, m]$時，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$共有 m 種可能，且此 m 個值為連續自然數。由於 m 個自然數為 m 的完全剩餘系，故其中必恰有一數滿足$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv t \ (mod\ m)$。而$x_2, \dots, x_n$共有$k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$種情況，而每種情況中皆恰有一數符合條件，故$A_{nt1}$中共有$k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$個元素，$|A_{nt1}| = \prod_{i=2}^{n} k_i$ 。因而我們推得，$|A_{nt}| = |A_{nt1}| \times k_1 = (\prod_{i=2}^{n} k_i) \times k_1 = \prod_{i=1}^{n} k_i$ 。

1.下界推導

與引理證明類似，若$x_1 \in [k, k_1 m + k - 1], x_2 \in [1, k_2], \dots \dots, x_n \in [1, k_n]$，此物體可被分為$k_1$個$m \times k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$的 n 維體，而每個 n 維體又可被分為$k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$個長度為 m 的線段，此物體之支配數為 $k_1 \times k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$ 。

2.證明下界可達成

由引理知對於任意整數 t 介於 1 到 m 之間，$|A_{nt}|$=$\prod_{i=1}^{n} k_i$。而將符合A_{nt}的方格均塗黑即符合條件，因考慮 m 個相連方格，其中必恰有一個方格屬於A_{nt}，故此物體為合法區塊。

綜上述知，對於至少有一邊長為 m 倍數的 n 維體，其支配數為 $|A_{nt}|$，也就是其

體積除以 m。

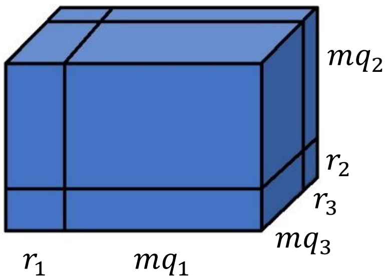
3.對後續研究之簡化

(1)對r_k, q_k之定義

由於$r_k = 0$的情況已在上方討論過並得出結論，之後的研究中令r_k為從 1 到$m-1$的整數。另外在 n 維體中若$q_k = 0$，則在該維度$\ell_k = r_k < m$，不可能有 m 個同色方格相連，可簡化為 n − 1 維體，故令$q_k \in \mathbb{N}$。

(2)對任意 n 維體之簡化

對一$\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3 \times \ldots \times \ell_n$之物體，可將其切割成多塊，其中有邊長為 m 的倍數者即可直接計算其體積除以 m，不需討論。



例如：將$\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3$分為八個部分，分別為$mq_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times mq_2 \times r_3$、$mq_1 \times r_2 \times mq_3$、$r_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times r_2 \times r_3$、$r_1 \times mq_2 \times r_3$、$r_1 \times r_2 \times mq_3$、$r_1 \times r_2 \times r_3$的長方體。則只有$r_1 \times r_2 \times r_3$需進一步討論。

(三)一維情況分析與討論

將長度為ℓ_1的線段座標化，如圖 4-4。

1.下界推導

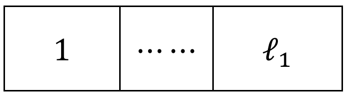


圖 4-4

對於線段中每m個方格中，將方格 1 到方格m視為一組，方格$m+1$到方格$2m$視為一組…… 方格$(q_1-1)\times m+1$到方格$q_1 \times m$視為一組，由於物體為合法區塊，每組中至少有一格黑色，故其支配數為$\left\lfloor\frac{\ell_1}{m}\right\rfloor$個。

2.證明下界可達成

將符合$\mathrm{A}_{1\mathrm{m}}=\{\mathrm{x}_1|\mathrm{x}_1\equiv\mathrm{m}\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{m}),\mathrm{x}_1\in[1,\ell_1]\}$之方格塗黑，則該物體為合法區塊。

證明

考慮 m 個相連方格，各方格之座標除以 m 之餘數為 m 的完全剩餘系，其中必有一方格除以 m 的餘數為 m，故任意 m 個方格都不完全同色，此物體為合法區塊。

而符合$\mathrm{A}_{1\mathrm{m}}=\{\mathrm{x}_1|\mathrm{x}_1\equiv\mathrm{m}\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{m}),\mathrm{x}_1\in[1,\ell_1]\}$之$\mathrm{x}_1=\mathrm{k}\times\mathrm{m}\ ,\mathrm{k}\in[1,\mathrm{q}_1]$，所以總共有$\mathrm{q}_1$個，即$\left\lfloor\frac{\ell_1}{\mathrm{m}}\right\rfloor$個。

3.二維情況使用性質之推導

以下性質於討論二維情況時會出現，因屬於一維情況，故在此先行推導。

考慮 2m 個集合

$A_{11}=\{x_1|x_1\equiv 1\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1]\}$ $B_{11}=\{x_2|x_2\equiv 1\ (mod\ m),x_2\in[1,\ell_2]\}$

$A_{12}=\{x_1|x_1\equiv 2\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1]\}$ $B_{12}=\{x_2|x_2\equiv 2\ (mod\ m),x_2\in[1,\ell_2]\}$

$\vdots$ $\vdots$

$A_{1k}=\{x_1|x_1\equiv k\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1]\}$ $B_{1k}=\{x_2|x_2\equiv k\ (mod\ m),x_2\in[1,\ell_2]\}$

$\vdots$ $\vdots$

$A_{1m}=\{x_1|x_1\equiv m\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1]\}$ $B_{1m}=\{x_2|x_2\equiv m\ (mod\ m),x_2\in$
$[1,\ell_2]\}$

【性質 4-2】一維集合的元素個數

(1)$\lvert A_{11}\rvert = \left\lfloor \frac{l_1+m-1}{m} \right\rfloor$，$\lvert A_{12}\rvert = \left\lfloor \frac{l_1+m-2}{m} \right\rfloor \cdots\cdots \lvert A_{1m}\rvert = \left\lfloor \frac{l_1}{m} \right\rfloor$，其中$\lvert A_{1k}\rvert = \begin{cases} q_1+1, k \le r_1 \\ q_1, k > r_1 \end{cases}$
(2)$\lvert B_{11}\rvert = \left\lfloor \frac{l_2+m-1}{m} \right\rfloor$，$\lvert B_{12}\rvert = \left\lfloor \frac{l_2+m-2}{m} \right\rfloor \cdots\cdots \lvert B_{1m}\rvert = \left\lfloor \frac{l_2}{m} \right\rfloor$，其中$\lvert B_{1k}\rvert = \begin{cases} q_2+1, k \le r_2 \\ q_2, k > r_2 \end{cases}$

證明

1.$k > r_1$

符合 $A_{1k} = \{x_1 \mid x_1 \equiv k \ (mod\ m), x_1 \in [1, \ell_1]\}$ 的元素為 k，$m+k$，$2m+k, \ldots\ldots (q_1-1)m+k$，共$q_1$個，此時$\lvert A_{1k}\rvert = q_1 = \left\lfloor \frac{l_1+m-k}{m} \right\rfloor$。

2.$k \le r_1$

符合 $A_{1k} = \{x_1 \mid x_1 \equiv k \ (mod\ m), x_1 \in [1, \ell_1]\}$ 的元素為 k，$m+k$，$2m+k, \ldots\ldots, q_1 m+k$，共$q_1+1$個，此時$\lvert A_{1k}\rvert = q_1+1 = \left\lfloor \frac{l_1+m-k}{m} \right\rfloor$。

$\lvert B_{1k}\rvert$同理可證。

(四)二維情況分析與討論

將長為ℓ_1，寬為ℓ_2的長方形座標化，各點座標為(x_1, x_2)，如圖 4-5。

$(1,1)$	$\cdots\cdots$	$(1,\ell_1)$
$\vdots$ $\vdots$	$\ddots$	$\vdots$ $\vdots$
$(\ell_2,1)$	$\cdots\cdots$	(ℓ_1,ℓ_2)

圖 4-5

1.下界推導

(1) $r_1 + r_2 < m$

如圖 4-6，在左上方的$q_1 m$乘以$q_2 m$的區域中，

從(1,1)到(1, m)，從(1, m+1)到(1,2m) … 從(1,$(q_1-1)m+1$)到(1, $q_1 m$)，可分為q_1條；

從(2,1)到(2, m)，從(2, m+1)到(2,2m) … 從(2,$(q_1-1)m+1$)到(2, $q_1 m$)，可再分為q_1條 …

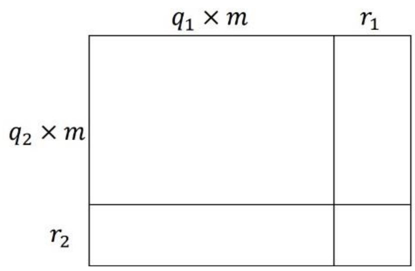


圖 4-6

從$(q_2,1)$到(q_2, m)，從$(q_2, m+1)$到$(q_2,2m)$ … 從$(q_2,(q_1-1)m+1)$到$(q_2, q_1 m)$，可再分為q_1條。

總共有mq_1q_2條長度為m之線段，可得知塗黑的個數為q_1q_2，同理在q_1m乘以r_2、r_1乘以q_2m的區域中，分別可分為q_1r_2和r_1q_2條線段，分別有q_1r_2和r_1q_2個塗黑的方塊，總共有$q_1r_2+q_2r_1+mq_1q_2=\frac{\ell_1\times\ell_2-r_1\times r_2}{m}$條，其支配數為$\frac{\ell_1\times\ell_2-r_1\times r_2}{m}$。

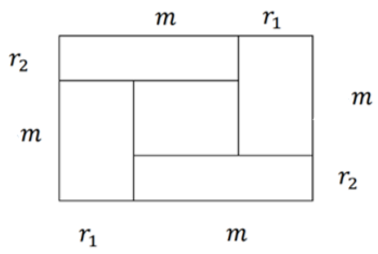


圖 4-7

(2) $r_1+r_2\geq m$

將此矩形以類似圖 4-6 方式分為四部分，分別為$(q_1-1)m\times(q_2-1)m$、$(q_1-1)m\times(m+r_2)$、$(q_2-1)m\times(m+r_1)$、$(m+r_1)\times(m+r_2)$。而前三部分皆至少有一邊長為 m 的倍數，故只需考慮最後一部份。再將最後一部份以如圖 4-7 方式切割，則在左上方和右下方的m乘以r_2的區域中，可分為r_2條；在左下方和右上方的m乘以r_1的區域中，可分為r_1條。

總共有$2(r_2+r_1)=2r_1+2r_2$條，又每條至少需 1 格塗黑，加上此矩形的其他部分，其支配數為$\frac{\ell_1\times\ell_2-(m+r_1)\times(m+r_2)}{m}+2r_1+2r_2=\frac{\ell_1\times\ell_2-(m-r_1)\times(m-r_2)}{m}=(q_1q_2-1)m+q_1r_2+q_2r_1+r_2+r_1$格。

2.證明下界可達成

將符合$A_{21}=\{(x_1,x_2)|x_1+x_2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m), x_1\in[1,\ell_1], x_2\in[1,\ell_2]\}$之方格塗黑，則該物體為合法區塊。

證明

考慮連成一線的 m 個方格，x_1+x_2是 m 的完全剩餘系，故其中必有一方格除

以 m 的餘數為 1，從而任意 m 個方格都不完全同色，此物體為合法區塊。

由加法及乘法原理知$|A_{21}| = |A_{11}| \times |B_{1m}| + |A_{12}| \times |B_{1(m-1)}| + \cdots + |A_{1m}| \times |B_{11}|$。

(1) $r_1 + r_2 < m$

$$|A_{21}| = |A_{11}| \times |B_{1m}| + |A_{12}| \times |B_{1(m-1)}| + \cdots + |A_{1m}| \times |B_{11}|$$

$$= \left\lfloor \frac{l_1 + m - 1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{l_1 + m - 2}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + 1}{m} \right\rfloor + \cdots$$

$$+ \left\lfloor \frac{l_1 + m - r_1 + 1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - r_2 - 1}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{l_1 + m - r_1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - r_2}{m} \right\rfloor$$

$$+ \left\lfloor \frac{l_1 + m - r_1 - 1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - r_2 + 1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{l_1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - 1}{m} \right\rfloor$$

$$= r_2 q_1 (q_2 + 1) + r_1 (q_1 + 1) q_2 + (m - r_1 - r_2) q_1 q_2$$

$$= q_1 r_2 + q_2 r_1 + m q_1 q_2$$

$|A_{21}|$與(四)1.(1)中所推導的下界相同，故此下界為可達成的。

(2) $r_1 + r_2 \geq m$

$$|A_{21}| = |A_{11}| \times |B_{1m}| + |A_{12}| \times |B_{1(m-1)}| + \cdots + |A_{1m}| \times |B_{11}|$$

$$= \left\lfloor \frac{l_1 + m - 1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{l_1 + m - 2}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + 1}{m} \right\rfloor + \cdots$$

$$+ \left\lfloor \frac{l_1 + m - r_1 + 1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - r_2 - 1}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{l_1 + m - r_1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - r_2}{m} \right\rfloor$$

$$+ \left\lfloor \frac{l_1 + m - r_1 - 1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - r_2 + 1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{l_1}{m} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{l_2 + m - 1}{m} \right\rfloor$$

$$= (m - r_1) q_1 (q_2 + 1) + (m - r_2)(q_1 + 1) q_2$$

$$+ (r_1 + r_2 - m)(q_1 + 1)(q_2 + 1)$$

$$= (q_1 q_2 - 1) m + q_1 r_2 + q_2 r_1 + r_2 + r_1$$

$|A_{21}|$與(四)1.(2)中所推導的下界相同，故此下界為可達成的。

綜合上述，知對於$\ell_1 \times \ell_2$的矩形，最少需要塗黑$|A_{21}|$個方格才可使該物體為合

法區塊。

3.三維情況使用工具推導

以下性質於討論三維情況時會出現，因屬於二維情況，故在此先行推導。

考慮 m 個集合

$A_{21}=\{(x_1,x_2)|x_1+x_2\equiv 1\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1],x_2\in[1,\ell_2]\}$

$A_{22}=\{(x_1,x_2)|x_1+x_2\equiv 2\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1],x_2\in[1,\ell_2]\}$

$$\vdots$$

$A_{2k}=\{(x_1,x_2)|x_1+x_2\equiv k\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1],x_2\in[1,\ell_2]\}$

$$\vdots$$

$A_{2m}=\{(x_1,x_2)|x_1+x_2\equiv m\ (mod\ m),x_1\in[1,\ell_1],x_2\in[1,\ell_2]\}$

【性質 4-3】二維集合的元素個數

$$|A_{2k}|=\begin{cases} mq_1q_2+q_1r_2+q_2r_1+r_1, 1\le k<r_2+1, \\ mq_1q_2+q_1r_2+q_2r_1+r_1+r_2-k+1, r_2+1\le k<r_1+r_2+1 \\ mq_1q_2+q_1r_2+q_2r_1, r_1+r_2+1\le k\le m \end{cases}$$

證明

由加法及乘法原理知$|A_{21}|=|A_{11}|\times|B_{1m}|+|A_{12}|\times|B_{1(m-1)}|+\cdots+|A_{1m}|\times|B_{11}|$。

同理可知，

$$|A_{22}|=|A_{11}|\times|B_{11}|+|A_{12}|\times|B_{1m}|+|A_{13}|\times|B_{1(m-1)}|+\cdots+|A_{1m}|\times|B_{12}|$$

$$\vdots$$

$$|A_{2k}|=|A_{11}|\times|B_{1(k-1)}|+|A_{12}|\times|B_{1(k-2)}|+|A_{13}|\times|B_{1(k-3)}|+\cdots+|A_{1(k-1)}|\times|B_{11}|$$
$$+|A_{1k}|\times|B_{1m}|+|A_{1(k+1)}|\times|B_{1(m-1)}|+\cdots+|A_{1m}|\times|B_{1k}|$$

$$\vdots$$

$|A_{2m}| = |A_{11}| \times |B_{1(m-1)}| + |A_{12}| \times |B_{1(m-2)}| + |A_{13}| \times |B_{1(m-3)}| + \cdots + |A_{1m}| \times |B_{11}|$

計算$|A_{2k}|$時，可分為以下情況：

(1)$r_1 + r_2 < k$

則$r_1 + r_2 \leq k - 1$，$|A_{2k}| = |A_{11}| \times |B_{1(k-1)}| + |A_{12}| \times |B_{1(k-2)}| + |A_{13}| \times |B_{1(k-3)}| + \cdots + |A_{1(k-1)}| \times |B_{11}| + |A_{1k}| \times |B_{1m}| + |A_{1(k+1)}| \times |B_{1(m-1)}| + \cdots + |A_{1m}| \times |B_{1k}| = (q_1 + 1)q_2 r_1 + q_1(q_2 + 1)r_2 + (m - r_1 - r_2)q_1 q_2 = mq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1.$

(2) $r_1 + r_2 \geq k$

$(i)$$r_2 \leq k - 1$

則$r_1 \leq r_2 \leq k - 1$。

$$
\begin{aligned}
|A_{2k}| &= |A_{11}| \times |B_{1(k-1)}| + |A_{12}| \times |B_{1(k-2)}| + |A_{13}| \times |B_{1(k-3)}| + \cdots + |A_{1(k-1)}| \times |B_{11}| \\
&\quad + |A_{1k}| \times |B_{1m}| + |A_{1(k+1)}| \times |B_{1(m-1)}| + \cdots + |A_{1m}| \times |B_{1k}| \\
&= (q_1 + 1)q_2(k - r_2 - 1) + q_1(q_2 + 1)(k - r_1 - 1) \\
&\quad + (q_1 + 1)(q_2 + 1)(r_1 + r_2 - k + 1) + q_1 q_2(m - k + 1) \\
&= mq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1 + r_1 + r_2 - k + 1.
\end{aligned}
$$

$(ii)$$r_2 > k - 1$

$$
\begin{aligned}
|A_{2k}| &= |A_{11}| \times |B_{1(k-1)}| + |A_{12}| \times |B_{1(k-2)}| + |A_{13}| \times |B_{1(k-3)}| + \cdots + |A_{1(k-1)}| \times |B_{11}| \\
&\quad + |A_{1k}| \times |B_{1m}| + |A_{1(k+1)}| \times |B_{1(m-1)}| + \cdots + |A_{1m}| \times |B_{1k}| \\
&= (q_1 + 1)(q_2 + 1)r_1 + q_1(q_2 + 1)(r_2 - r_1) + q_1 q_2(m - r_2) \\
&= mq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1 + r_1.
\end{aligned}
$$

綜合上述，知若$1 \leq k < r_2 + 1, |A_{2k}| = mq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1 + r_1;$若$r_2 + 1 \leq k < r_1 + r_2 + 1, |A_{2k}| = mq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1 + r_1 + r_2 - k + 1;$若$r_1 + r_2 + 1 \leq$

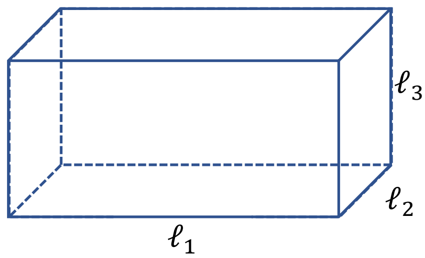
$k \le m, |A_{2k}| = mq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1.$

也就是說，

$$|A_{2k}| = \begin{cases} mq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1 + r_1, 1 \le k < r_2 + 1, \\ mq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1 + r_1 + r_2 - k + 1, r_2 + 1 \le k < r_1 + r_2 + 1 \\ mq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1, r_1 + r_2 + 1 \le k \le m \end{cases}$$

(五)三維情況分析與討論

將$\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3$的長方體座標化，各點座標為$(x_1, x_2, x_3)$.

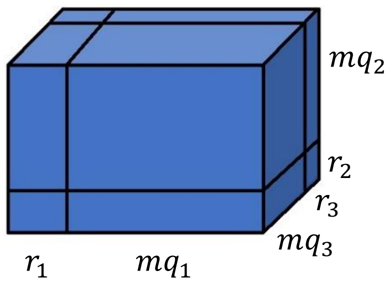


1.尋找下界

(1) $r_1 + r_2 + r_3 < m$

可知$r_1 + r_2 \le r_1 + r_3 \le r_2 + r_3 < m.$

將長方體以$x_1 \le mq_1$、$x_2 \le mq_2$、$x_3 \le mq_3$為分界，分為八個部分，分別為$mq_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times mq_2 \times r_3$、$mq_1 \times r_2 \times mq_3$、$r_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times r_2 \times r_3$、$r_1 \times mq_2 \times r_3$、$r_1 \times r_2 \times mq_3$、$r_1 \times r_2 \times r_3$的長方體。以$mq_1 \times r_2 \times r_3$為例，可分為



r_3個$mq_1 \times r_2 \times 1$的長方體，即相當為$mq_1 \times r_2$的矩形。由三(一)2.知該矩形可被分為q_1r_2個長度為 m 的線段，故該$mq_1 \times r_2 \times r_3$的長方體至少需要$q_1r_2 \times r_3 = q_1r_2r_3$個塗黑的方格。同理可知，七個長方體$mq_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times mq_2 \times r_3$、$mq_1 \times r_2 \times mq_3$、$r_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times r_2 \times r_3$、$r_1 \times mq_2 \times r_3$、$r_1 \times r_2 \times mq_3$其支配數為$mq_1 \times mq_2 \times q_3 + mq_1 \times q_2 \times r_3 + mq_1 \times r_2 \times q_3 + r_1 \times q_2 \times mq_3 + q_1 \times r_2 \times r_3 + r_1 \times q_2 \times r_3 + r_1 \times r_2 \times q_3 = m^2q_1q_2q_3 + mq_1q_2r_3 + mq_1r_2q_3 + mr_1q_2q_3 + q_1r_2r_3 + r_1q_2r_3 + r_1r_2q_3 = \frac{\ell_1\ell_2\ell_3 - r_1r_2r_3}{m}$。

$(2) m \leq\ r_1 + r_2 + r_3$

將長方體以$\mathrm{x_1 \leq mq_1}$、$\mathrm{x_2 \leq m(q_2 - 1)}$、$\mathrm{x_3 \leq m(q_3 - 1)}$為分界，分為八個部分，分別為$\mathrm{mq_1 \times m(q_2 - 1) \times m(q_3 - 1)}$、$\mathrm{mq_1 \times m(q_2 - 1) \times (m + r_3)}$、$\mathrm{mq_1 \times (m + r_2) \times m(q_3 - 1)}$、$\mathrm{r_1 \times m(q_2 - 1) \times m(q_3 - 1)}$、$\mathrm{mq_1 \times (m + r_2) \times (m + r_3)}$、$\mathrm{r_1 \times m(q_2 - 1) \times (m + r_3)}$、$\mathrm{r_1 \times (m + r_2) \times m(q_3 - 1)}$、$\mathrm{r_1 \times (m + r_2) \times (m + r_3)}$的長方體。與 1.相同，前七個長方體$\mathrm{mq_1 \times m(q_2 - 1) \times m(q_3 - 1)}$、$\mathrm{mq_1 \times m(q_2 - 1) \times (m + r_3)}$、$\mathrm{mq_1 \times (m + r_2) \times m(q_3 - 1)}$、$\mathrm{r_1 \times m(q_2 - 1) \times m(q_3 - 1)}$、$\mathrm{mq_1 \times (m + r_2) \times (m + r_3)}$、$\mathrm{r_1 \times m(q_2 - 1) \times (m + r_3)}$、$\mathrm{r_1 \times (m + r_2) \times m(q_3 - 1)}$

皆可分為許多長度為 m 的線段，故其支配數為 $\mathrm{mq_1 \times m(q_2 - 1) \times (q_3 - 1) + q_1 \times m(q_2 - 1) \times (m + r_3) + q_1 \times (m + r_2) \times m(q_3 - 1) + r_1 \times (q_2 - 1) \times m(q_3 - 1) + q_1 \times (m + r_2) \times (m + r_3) + r_1 \times (q_2 - 1) \times (m + r_3) + r_1 \times (m + r_2) \times (q_3 - 1) = \frac{\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3 - r_1 \times (m - r_2) \times (m - r_3)}{m} = q_1 q_2 q_3 m^2 + q_1 q_2 r_3 m + q_1 q_3 r_2 m + q_2 q_3 r_1 m + q_1 r_2 r_3 + q_2 r_1 r_3 + q_3 r_1 r_2 - r_1 m - r_1 r_2 - r_1 r_3}$。

2.證明下界可達成

將此長方體以$\mathrm{x_1 \leq mq_1}$、$\mathrm{x_2 \leq mq_2}$、$\mathrm{x_3 \leq mq_3}$為分界，分為八個部分，分別為$mq_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times mq_2 \times r_3$、$mq_1 \times r_2 \times mq_3$、$r_1 \times mq_2 \times mq_3$、$mq_1 \times r_2 \times r_3$、$r_1 \times mq_2 \times r_3$、$r_1 \times r_2 \times mq_3$、$r_1 \times r_2 \times r_3$的長方體。而前七個長方體皆至少有一邊長為 m 的倍數，由引理知其$|A_{32}|$值為其體積除以 m。

因此，整個長方體的$|A_{32}|$值 $= \frac{\ell_1 \ell_2 \ell_3 - r_1 r_2 r_3}{m} + r_1 \times r_2 \times r_3$的$|A_{32}|$值。

以下討論$r_1 \times r_2 \times r_3$的$|A_{32}|$值。

$(1) r_1 +\ r_2 + r_3 < m$

將符合$A_{32}=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3\equiv 1\ (mod\ m), x_1\in[1,\ell_1], x_2\in[1,\ell_2], x_3\in[1,\ell_3]\}$之方格塗黑，則該物體為合法區塊。

證明

考慮連成一線的 m 個方格，$x_1+x_2+x_3$是 m 的完全剩餘系，故其中必有一方格除以 m 的餘數為 2，從而任意 m 個方格都不完全同色，此物體為合法區塊。

在$A_{32}=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3\equiv 2\ (mod\ m), x_1\in[1,r_1], x_2\in[1,r_2], x_3\in[1,r_3]\}$中，因$r_1+\ r_2+r_3<m$，$x_1+x_2+x_3\le r_1+\ r_2+r_3<m$，又$x_1+x_2+x_3\ge 1+1+1=3\Rightarrow$若$x_1+x_2+x_3\equiv 2\ (mod\ m)$，則$(x_1,x_2,x_3)$無解。故$r_1\times r_2\times r_3$的$|A_{32}|$值$=0\Rightarrow$整個長方體的$|A_{31}|$值$=\frac{\ell_1\ell_2\ell_3-r_1r_2r_3}{m}$，與(五)1.(1)中下界相同。

(2)$m\le r_1+\ r_2+r_3$

將符合$A_{32}=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3\equiv 2\ (mod\ m), x_1\in[1,\ell_1], x_2\in[1,\ell_2], x_3\in[1,\ell_3]\}$之方格塗黑，則該物體為合法區塊。

證明

考慮連成一線的 m 個方格，$x_1+x_2+x_3$是 m 的完全剩餘系，故其中必有一方格除以 m 的餘數為 2，從而任意 m 個方格都不完全同色，此物體為合法區塊。

由乘法與加法原理知$|\mathrm{A}_{32}|=|\mathrm{A}_{21}|\times|\mathrm{B}_{11}|+|\mathrm{A}_{22}|\times|\mathrm{B}_{1m}|+\cdots+|\mathrm{A}_{2m}|\times|\mathrm{B}_{12}|$

其中A_{2k}考慮r_1、r_2，B_{1k}考慮r_3。

$\Rightarrow|\mathrm{A}_{32}|=|\mathrm{A}_{21}|\times|\mathrm{B}_{11}|+|\mathrm{A}_{22}|\times|\mathrm{B}_{1m}|+\cdots+|\mathrm{A}_{2m}|\times|\mathrm{B}_{12}|$

$$= |A_{21}| \times |B_{11}| + |A_{22}| \times |B_{1m}| + \cdots + |A_{2(m-r_3)}| \times |B_{1(r_3+2)}| + |A_{2(m-r_3+1)}| \times |B_{1(r_3+1)}|$$

$$+ |A_{2(m-r_3+2)}| \times |B_{1r_3}| + \cdots + |A_{2m}| \times |B_{12}|$$

$$= r_1 \times 1 + r_1 \times 0 + \cdots + |A_{2(m-r_3)}| \times 0 + |A_{2(m-r_3+1)}| \times 0$$

$$+ |A_{2(m-r_3+2)}| \times 1 + \cdots + |A_{2m}| \times 1$$

$$= (r_1 + r_2 + r_3 - m - 1) + (r_1 + r_2 + r_3 - m - 2) + \cdots + 1$$

$$= \frac{(r_1 + r_2 + r_3 - m - 1)(r_1 + r_2 + r_3 - m)}{2}$$

$\Rightarrow$ 整個長方體的$|A_{32}|$值 $= \frac{\ell_1\ell_2\ell_3 - r_1r_2r_3}{m} + \frac{(r_1 + r_2 + r_3 - m - 1)(r_1 + r_2 + r_3 - m)}{2} =$

$\frac{\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3 - r_1 \times (m - r_2) \times (m - r_3)}{m}$，與(五)1.(2)中下界相同。

綜合上述，知對於$\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3$的矩形，最少需要塗黑$|A_{32}|$個方格才可使該物體為合法區塊。

(六)n 維情況分析與討論

目前我們仍未推導出對於 n 維情況的一般化公式，但有部分情況我們已經得出公式。

1.尋找下界

(1)$r_1 + r_2 + \cdots + r_n < m$

將此 n 維體以$x_1 \le mq_1$、$x_2 \le mq_2$、$x_3 \le mq_3$、 … 、$x_n \le mq_n$為分界，分為2^n個部分。可知除$r_1 \times r_2 \times \ldots \times r_n$外其他部分至少皆有一邊長為 m 的倍數，由引理知其他$2^n - 1$個部分支配數為$\frac{\ell_1\ell_2\ldots\ell_n - r_1r_2\ldots r_n}{m}$個。因此至少需要

$\frac{\ell_1\ell_2\ldots\ell_n - r_1r_2\ldots r_n}{m}$個塗黑方格。

2.證明下界可達成

(1)$r_1 + r_2 + \cdots + r_n < m$

將符合$A_{n1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv 1\ (mod\ m), x_1 \in [1, \ell_1], x_2 \in [1, \ell_2], x_3 \in [1, \ell_3]\}$之方格塗黑，則該物體為合法區塊。

證明

考慮連成一線的 m 個方格，$x_1+x_2+\cdots+x_n$是 m 的完全剩餘系，故其中必有一方格除以 m 的餘數為 1，從而任意 m 個方格都不完全同色，此物體為合法區塊。

在$B_{n1}=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|x_1+x_2+\cdots+x_n\equiv 1\ (mod\ m), x_1\in[1,r_1], x_2\in[1,r_2],\dots,x_n\in[1,r_n]\}$中，因$r_1+\ r_2+\cdots+r_n<m$，$x_1+x_2+\cdots+x_n\le r_1+r_2+\cdots+r_n<m$，又$x_1+x_2+\cdots+x_n\ge 1+1+\cdots+1=\mathrm{n}>1\Rightarrow$若$x_1+x_2+\cdots+x_n\equiv 1\ (mod\ m)$，則$(x_1,x_2,\dots,x_n)$無解。故$r_1\times r_2\times\dots\times r_n$的$|A_{n1}|$值$=0\Rightarrow$整個長方體的$|A_{n1}|$值$=\frac{\ell_1\ell_2\dots\ell_n-r_1r_2\dots r_n}{m}$，與(六)1.(1)中下界相同。

伍、研究結果與討論

一、對於二維的平面，當$m=3$時，其支配數為$\left\lfloor\frac{l_1l_2}{3}\right\rfloor$。

二、對於任意 n 維物體，若至少有一邊長為 m 的倍數，其支配數為$|\mathrm{A_{nt}}|=\frac{\Re}{m}$。

三、對於一維的直線，其支配數為$|\mathrm{A_{1m}}|=\left\lfloor\frac{\ell_1}{m}\right\rfloor$。

四、對於二維的平面，當$r_1+r_2<m$，其支配數為$|\mathrm{A_{21}}|=\frac{\ell_1\times\ell_2-r_1\times r_2}{m}$。

五、對於二維的平面，當 $r_1+r_2\ge m$，其支配數為$|\mathrm{A_{21}}|=\frac{\ell_1\times\ell_2-(m-\mathrm{r_1})\times(m-\mathrm{r_2})}{\mathrm{m}}$。

六、對於三維的空間，當$r_1+\ r_2+r_3<m$，其支配數為$|\mathrm{A_{32}}|=\frac{\ell_1\ell_2\ell_3-r_1r_2r_3}{m}$。

七、對於三維的空間，當$m\le r_1+\ r_2+r_3$，其支配數為$|\mathrm{A_{32}}|=\frac{\ell_1\times\ell_2\times\ell_3-\mathrm{r_1}\times(\mathrm{m}-\mathrm{r_2})\times(\mathrm{m}-\mathrm{r_3})}{\mathrm{m}}$。

八、對於一 n 維體，當$r_1+r_2+\cdots+r_n<m$，其支配數為$|A_{n1}|=\frac{\ell_1\ell_2\dots\ell_n-r_1r_2\dots r_n}{m}$。

m = 3 時之 2 維情況分析					
情況	情況 1	情況 2	情況 3	情況 4	情況 5
ℓ_1(長) ℓ_2(寬)	$3q_1$ q_2	$3q_1+1$ $3q_2+1$	$3q_1+1$ $3q_2+2$	$3q_1+2$ $3q_2+1$	$3q_1+2$ $3q_2+2$
面積A	$\ell_1\times\ell_2$				
支配數(未化簡版)	$\frac{\ell_1\ell_2}{3}$	$\frac{\ell_1\ell_2-1}{3}$	$\frac{\ell_1\ell_2-2}{3}$	$\frac{\ell_1\ell_2-2}{3}$	$\frac{\ell_1\ell_2-1}{3}$
支配數(化簡版)	$\left\lfloor\frac{\ell_1\ell_2}{3}\right\rfloor$ (即$\left\lfloor\frac{A}{3}\right\rfloor$)				

m = 任意數之 1 維情況分析	
長度ℓ_1	ℓ_1
支配數	$\left\lfloor\frac{\ell_1}{m}\right\rfloor$

m = 任意數之 2 維情況分析		
情況	$r_1+r_2<m$	$r_1+r_2\geq m$
ℓ_1(長) ℓ_2(寬)	q_1m+r_1 q_2m+r_2	
支配數(未化簡版)	$q_1r_2+q_2r_1+mq_1q_2$	$(q_1q_2-1)m+q_1r_2+q_2r_1+r_2+r_1$
支配數(化簡版)	$\frac{\ell_1\times\ell_2-r_1\times r_2}{m}$	$\frac{\ell_1\times\ell_2-(m-r_1)\times(m-r_2)}{m}$

m = 任意數之 3 維情況分析		
情況	$r_1+r_2+r_3<m$	$m\leq r_1+r_2+r_3$
ℓ_1(長) ℓ_2(寬) ℓ_3(高)	q_1m+r_1 q_2m+r_2 q_3m+r_3	

支配數(未化簡版)	$m^2 q_1 q_2 q_3 + m q_1 q_2 r_3$ $+ m q_1 r_2 q_3$ $+ m r_1 q_2 q_3 + q_1 r_2 r_3$ $+ r_1 q_2 r_3 + r_1 r_2 q_3$	$\mathrm{q_1q_2q_3m^2 + q_1q_2r_3m + q_1q_3r_2m}$ $\mathrm{+q_2q_3r_1m + q_1r_2r_3 + q_2r_1r_3 + q_3r_1r_2}$ $\mathrm{-r_1m - r_1r_2 - r_1r_3}$
支配數(化簡版)	$\dfrac{\ell_1\ell_2\ell_3 - r_1r_2r_3}{m}$	$\dfrac{\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3 - \mathrm{r_1} \times (\mathrm{m} - \mathrm{r_2}) \times (\mathrm{m} - \mathrm{r_3})}{\mathrm{m}}$

m = 任意數之 n 維情況分析		
情況	$r_1 + r_2 + \cdots + r_n < m$	仍在研究中
支配數(化簡版)	$\dfrac{\ell_1\ell_2 \ldots \ell_n - r_1r_2 \ldots r_n}{m}$	

陸、未來展望與應用

一、未來展望：本研究欲探討 n 維情況的支配數，但我們發現我們所用的方法在 n 維需要進行 n 次討論，可能需要更有效率的方式，以目前的研究方式，我們僅推導出 n 為時$r_1 + r_2 + \cdots + r_n < m$的情況。

二、應用：本研究關於二維情況的結果可供教育場所、展演競賽場所、餐廳等公共場所設置最少防疫座位，使空間利用最大化。

柒、參考資料及其他

1. Daniel Gonçalves, Alexandre Pinlou, Michaël Rao, Stéphan Thomassé. The Domination Number of Grids. 取自 https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00569256/document?fbclid=IwAR1hkzmau9VSGb3vUJ2HXGIY-gmbrXaa9VzzeLZkmkW0vce_Y8Ktwi_ICN8#:~:text=A%20dominating%20set%20i

n%20a,domination%20number%20of%20complete%20grids

2. Bounds on the k-domination number of a graph. 取自

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965911000188

3.普通高級中學數學課本第一冊第 1 章。國立編譯館

【評語】010020

基本上本研究可以看成一種類型的控制數（Domination number）之研究；在適當地定義下得到一些結果。本研究由於定義方式較強，所獲得的結果也相對較容易獲得。另外，座位沒有保持距離也和防疫的概念有些出入。