2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010014**

參展科別　數學

作品名稱　超不單純的群體旋轉

就讀學校　新北市立林口高級中學

指導教師　潘尚怡、胡裕仁

作者姓名　黃子恩

關鍵詞　<u>線性變換、*n* 維度、保距變換</u>

作者簡介

我是黃子恩，自幼生長在經濟窘迫的單親家庭中，雖能運用的資源有限，但又擔心自己輸在起跑點，因此，我加入管樂團、擔任學校司儀及投入科展，其中，挑戰科展的過程，最是讓我受益良多，透過各式各樣的賽程，讓我深刻體悟「堅持」的重要性，藉由此信念，讓我取得複賽的入場卷，也期盼我能在複賽拔得頭籌、前進國際。

摘要

本研究透過遞迴式及數學歸納法探討 n 維空間中正多胞體（單純形、超方形、正軸形）之點、線、面的一般化結果。本研究利用頂點圖及線性變換－行列式的方法探討三維空間正多面體至 n 維空間中凸正多胞體之保距變換方式並使其一般化。另外，本研究也嘗試透過特徵多項式及棣美弗定理分析正多胞體旋轉之旋轉角度。

In this study, we use the recursion and mathematical induction to explore the generalized results of points, lines, and surfaces of regular polycells (Simplex, Hypercube, and Regular-axis)
in n-dimensional space. This study probes into regular polyhedron in three-dimensional space to n-dimensional space convex regular polyhedron the distance-preserving transformation and generalizes employ vertex graph and determinant of linear transformation. In addition, this research also attempts to analyze the rotation angle of the regular polycells rotation through the characteristic multiplicity and the subordination of Demoiver' theorem.

壹、　研究動機

我們從文獻上得知二維空間正 n 邊形、三維空間正多面體是利用代數及幾何的方法探討其保距變換方式，本研究嘗試用不一樣的方式探討三維空間中正多面體的保距變換種數是否與文獻上的結果相同。另外，我們也嘗試用其他種方法探討四維空間正多胞體的對稱旋轉方式，進而推廣到 n 維空間。

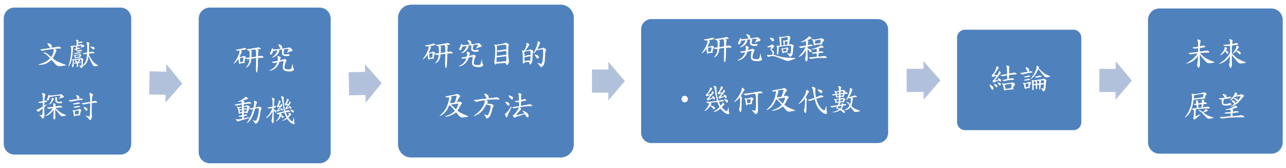


圖 1：研究流程圖

貳、　研究目地及研究問題

一、藉由遞迴式及數學歸納法探討並證明 n 維空間中正多胞體－點、線、面的一般化結果。

二、藉由幾何－頂點圖的方法探討三維空間至 n 維空間中的圖形之保距變換方式。

三、藉由代數－線性變換(行列式)的方法探討三維空間至 n 維空間中的圖形之保距變換方式。

四、藉由特徵多項式及隸美弗定理分析凸正多胞體之旋轉角度。

參、　研究設備及器材

紙、筆、大腦、電腦、動態幾何軟體 Geogebra

肆、　研究過程或方法及進行步驟

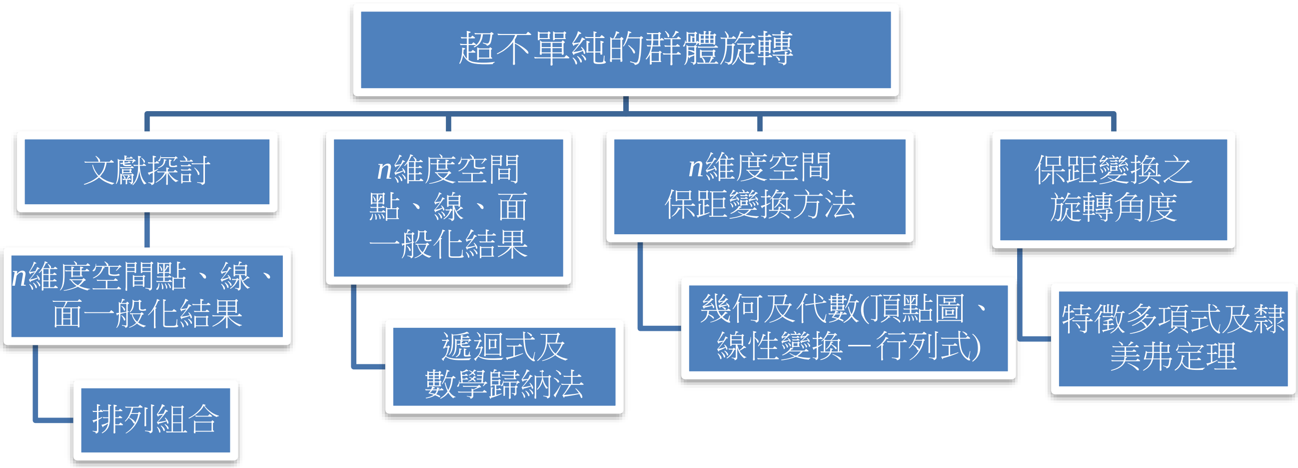


圖 2：研究架構圖

一、藉由遞迴式及數學歸納法探討並證明n維空間中正多胞體－點、線、面的一般化結果。

n 維空間中的正多胞體為三種，分別是單純形、超方形及正軸形，由文獻可知三種圖形之點、線、面的一般化結果是透過排列組合的方式，但本研究是利用遞迴式及數學歸納法。

(一) 單純形：$S_n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}) \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1，\forall i \in N，t_i \geq 0\}$。

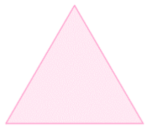
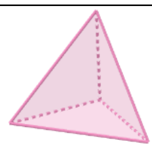
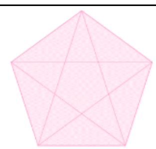
以下是一維至八維單純形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論性質 1、2、3：

*(a)*一維單純形 (一條線)　*(b)*二維單純形 (一正三角形)　*(c)*三維單純形 (一正四面體)　*(d)*四維單純形 (一正五胞體)

*(e)*五維單純形　*(f)*六維單純形　*(g)*七維單純形　*(h)*八維單純形

圖 3：一維至八維單純形

表 1：文獻上單純形－點的一般化結果

維度	*1*	*2*	*3*	*4*		*n*
圖形					…	
點的個數	*1+1*	*2+1*	*3+1*	*4+1*		*n+1*

性質 1：*n* 維單純形的點 $a_n=n+1$

(1). 遞迴式：

$$\times)\quad a_3=4，a_4=\frac{5\times a_3}{4}，a_5=\frac{6\times a_4}{5}，\cdots，a_n=\frac{(n+1)\times a_{n-1}}{n}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n=\frac{4\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times\prod_{k=5}^{n+1}k}{4\times5\times\cdots\times n}$$

$$\therefore a_n=n+1$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知 $\begin{cases}a_3=4\\ a_n=\dfrac{(n+1)\times a_{n-1}}{n}\end{cases}$，$n\geq3$，求證：$a_n=n+1$。

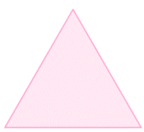
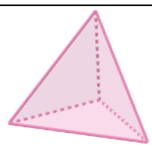
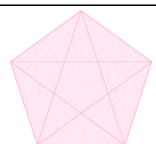
證明：1：$n=3$，$a_3=3+1=4$ 成立。

2：設 $n=k$，原式成立，也就是說 $a_k=k+1$

當 $n=k+1$，$a_{k+1}=\dfrac{(k+2)\times a_k}{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{k+1}=n+1$

由數學歸納法得知，原式成立。

表 2：文獻上單純形－線的一般化結果

維度	*1*	*2*	*3*	*4*		*n*
圖形					…	
線的個數	*1*	C_2^3 (*3* 個頂點任選 *2* 個組成線)	C_2^4 (*4* 個頂點任選 *2* 個組成線)	C_2^5 (*5* 個頂點任選 *2* 個組成線)		C_2^{n+1} (*n+1* 個頂點任選 *2* 個組成線)

性質 2：n 維單純形的線 $\boldsymbol{a_n}=\dfrac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)}{2}$

(1). 遞迴式：

$$\times)\qquad a_3=6\text{，}a_4=\frac{5\times a_3}{3}\text{，}a_5=\frac{6\times a_4}{4}\text{，}\cdots\text{，}a_n=\frac{(n+1)\times a_{n-1}}{n-1}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n=\frac{6\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times\prod_{k=5}^{n+1}k}{3\times 4\times\cdots\times(n-1)}$$

$$\therefore a_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知 $\begin{cases}a_3=6\\ a_n=\dfrac{(n+1)\times a_{n-1}}{n-1}\end{cases}$，$n\geq 3$，求證：$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 。

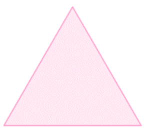
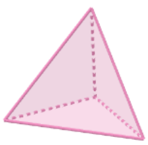
證明：1：$n=3$，$a_3=\dfrac{3\times 4}{2}=6$成立。

2：設$n=k$，原式成立，也就是說$a_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

當$n=k+1$，$a_{k+1}=\dfrac{(k+2)\times a_k}{(k+1)-1}=\dfrac{(k+2)\times\dfrac{k(k+1)}{2}}{k}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

由數學歸納法得知，原式成立。

表 3：文獻上單純形－面的一般化結果

維度	圖形	面的個數
1		*0*
2		$\dfrac{3\times 1}{3}=1$(每條線相鄰 *1* 個面， 且正三角形有 *3* 個邊，重複計算 *3* 次)
3		$\dfrac{6\times 2}{3}=4$(每條線相鄰2個面， 且正三角形有 *3* 個邊，重複計算 *3* 次)
4		$\dfrac{10\times 3}{3}=10$(每條線相鄰 *3* 個面， 且正三角形有 *3* 個邊，重複計算 *3* 次)

…		
n		$\frac{C_2^{n+1}\times(n-1)}{3}$(每條線相鄰 *n-1* 個面，且正三角形有 *3* 個邊，重複計算 *3* 次)

性質 3： $\boldsymbol{n}$ **維單純形的面** $\boldsymbol{a_n}=\frac{(\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)}{6}$

(1). 遞迴式：

$$\times)\qquad a_3=4\text{，}a_4=\frac{5\times a_3}{2}\text{，}a_5=\frac{6\times a_4}{3}\text{，}\cdots\text{，}a_n=\frac{(n+1)\times a_{n-1}}{n-2}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n=\frac{4\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times\prod_{k=5}^{n}k}{2\times3\times\cdots\times(n-2)}$$

$$\therefore a_n=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知 $\begin{cases}a_3=4\\ a_n=\frac{(n+1)\times a_{n-1}}{n-2}\end{cases}$，$n\geq3$，求證：$a_n=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ 。

證明：1：$n=3$，$a_3=\frac{2\times3\times4}{6}=4$ 成立。

2：設 $n=k$，原式成立，也就是說 $a_k=\frac{(k-1)k(k+1)}{6}$

當 $n=k+1$，$a_{k+1}=\frac{(k+2)\times a_k}{(k+1)-2}=\frac{(k+2)\times\frac{(k-1)k(k+1)}{6}}{k-1}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

由數學歸納法得知，原式成立。

表 4：單純形點、線、面一般化結果

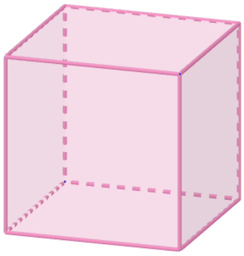
點	線	面
n+1	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

(二) 超方形：$H_n=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n \,\|\, |t_i|=1，\forall i\in\mathbb{N}，i\geq0\}$ 。

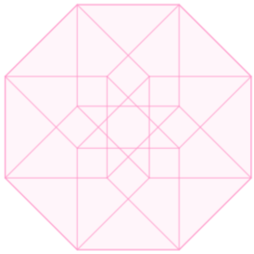
以下是一維至八維超方形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論性質 4、5、6：

*(a)*一維超方形
(一條線)

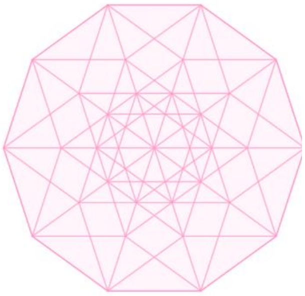
*(b)*二維超方形
(一正方形)



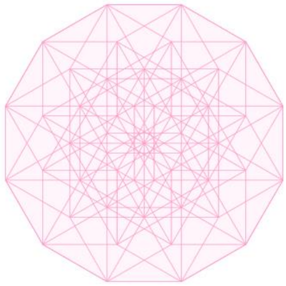
*(c)*三維超方形
(一正六面體)



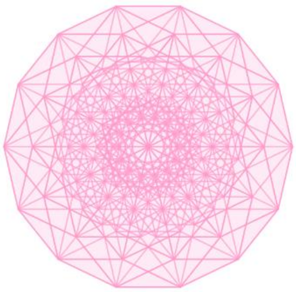
*(d)*四維超方形
(一正八胞體)



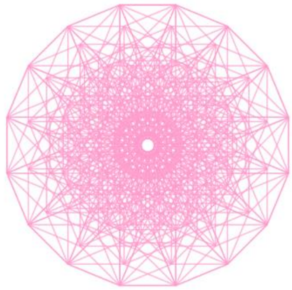
*(e)*五維超方形



*(f)*六維超方形



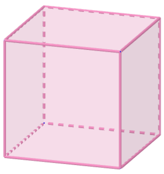
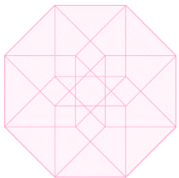
*(g)*七維超方形



*(h)*八維超方形

圖 4：一維至八維超方形

表 5：文獻上超方形－點的一般化結果

維度	*1*	*2*	*3*	*4*		*n*
圖形					…	
點的個數	*2*	$4=2^2$(從一維圖形各點連接出去)	$8=2^3$(從二維圖形各點連接出去)	$16=2^4$(從三維圖形各點連接出去)		2^n (從 *n-1* 維圖形各點連接出去)

性質 4：*n* 維超方形的點 $a_n=2^n$

(1). 遞迴式：

$$\times)\qquad a_3=8\ ,\ a_4=\frac{8\times a_3}{4}\ ,\ a_5=\frac{10\times a_4}{5}\ ,\ \cdots\ ,\ a_n=\frac{2n\times a_{n-1}}{n}=2a_{n-1}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n=8\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times 2^{n-3}$$

$$\therefore a_n=2^3\times 2^{n-3}=2^n$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知$\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}$，$n \geq 3$，求證：$a_n = 2^n$ 。

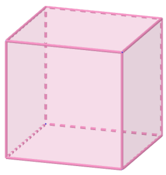
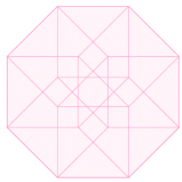
證明：1：$n=3$，$a_3 = 2^3 = 8$成立。

2：設$n=k$，原式成立，也就是說$a_k = 2^k$

當$n=k+1$，$a_{k+1} = 2a_k = 2^k \times 2 = 2^{k+1}$

由數學歸納法得知，原式成立。

表 6：文獻上超方形－線的一般化結果

維度	*1*	*2*	*3*	*4*		*n*
圖形					…	
線的個數	*1*	$\frac{4\times 2}{2}=4$ (每個點連接 *2* 條線，且重複計算)	$\frac{8\times 3}{2}=12$ (每個點連接 *3* 條線，且重複計算)	$\frac{16\times 4}{2}=32$ (每個點連接 *4* 條線，且重複計算)		$\frac{2^n\times n}{2}=2^{n-1}\times n$ (每個點連接 *n* 條線，且重複計算)

性質 5：*n* 維超方形的線 $a_n=2^{n-1}$

(1). 遞迴式：

$$\times)\quad a_3 = 12，a_4 = \frac{8\times a_3}{3}，a_5 = \frac{10\times a_4}{4}，\cdots，a_n = \frac{2n\times a_{n-1}}{n-1} = 2a_{n-1}$$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n = \frac{12\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times 2^{n-3}\times\prod_{k=4}^{n}k}{3\times 4\times\cdots\times(n-1)}$$

$$\therefore a_n = 4\times 2^{n-3}\times n = 2^{n-1}\times n$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知$\begin{cases} a_3 = 12 \\ a_n = \dfrac{2n\times a_{n-1}}{n-1} \end{cases}$，$n \geq 3$，求證：$a_n = 2^{n-1}\times n$ 。

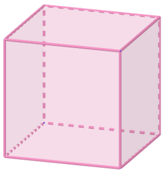
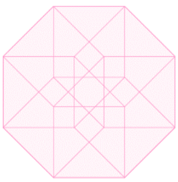
證明：1：$n=3$，$a_3 = 2^3\times 3 = 12$成立。

2：設 $n=k$，原式成立，也就是說 $a_k=2^{k-1}\times k$

當 $n=k+1$，$a_{k+1}=\dfrac{2\left(k+1\right)\times a_k}{(k+1)-1}=\dfrac{2\left(k+1\right)\times 2^{k-1}\times k}{k}=2^k(k+1)$

由數學歸納法得知，原式成立。

表 7：文獻上超方形－面的一般化結果

維度	圖形	面的個數
1		*0*
2		$\dfrac{4\times 1}{4}=1$(每條線相鄰 *1* 個面， 且正方形有 *4* 條邊，重複計算 *4* 次)
3		$\dfrac{12\times 2}{4}=6$(每條線相鄰 *2* 個面， 且正方形有 *4* 條邊，重複計算 *4* 次)
4		$\dfrac{32\times 3}{4}=24$(每條線相鄰 *3* 個面， 且正方形有 *4* 條邊，重複計算 *4* 次)
…		
n		$\dfrac{2^{n-1}\times \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}-1)}{4}=2^{n-3}\times \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}-1)$ (每條線相鄰 *n-1* 個面， 且正方形有 *4* 條邊，重複計算 *4* 次)

性質 6：*n* 維超方形的面 $a_n=2^{n-3}\times n\times(n-1)$

(1). 遞迴式：

×)　　$a_3=6$，$a_4=\dfrac{8\times a_3}{2}$，$a_5=\dfrac{10\times a_4}{3}$，…，$a_n=\dfrac{2n\times a_{n-1}}{n-2}$

$$a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_n=\frac{6\times a_3\times a_4\times a_5\times\cdots\times a_{n-1}\times 2^{n-3}\times\prod_{k=4}^{n}k}{2\times 3\times 4\times\cdots\times(n-2)}\quad \therefore a_n=2^{n-3}\times n\times(n-1)$$

(紅色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

(2). 已知 $\begin{cases} a_3 = 6 \\ a_n = \dfrac{2n \times a_{n-1}}{n-2} \end{cases}$，$n \geq 3$，求證：$a_n = 2^{n-3} \times n \times (n-1)$ 。

證明：1 ：$n = 3$，$a_3 = 2^{3-3} \times 3 \times (3-1) = 6$ 成立。

2 ：設 $n = k$，原式成立，也就是說 $a_k = 2^{k-3} \times k \times (k-1)$

當 $n = k+1$，$a_{k+1} = \dfrac{2(k+1) \times a_k}{(k+1)-2} = \dfrac{2(k+1) \times 2^{k-3} \times k \times (k-1)}{k-1} = 2^{k-2} \times k \times (k+1)$

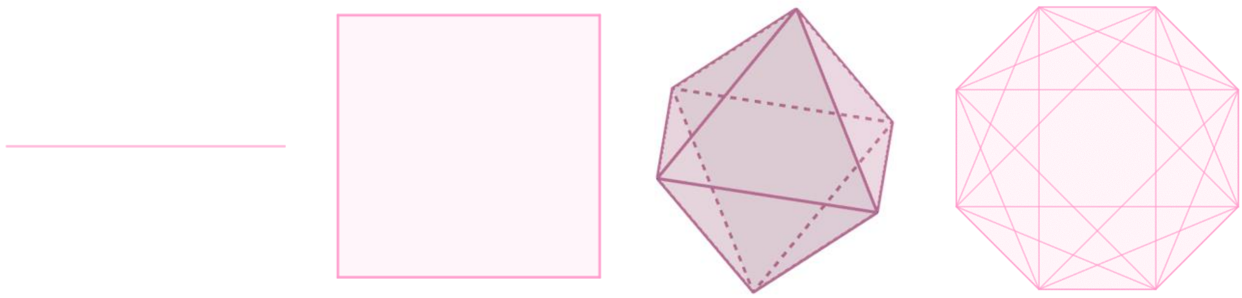
由數學歸納法得知，原式成立。

表 8：超方形點、線、面一般化結果

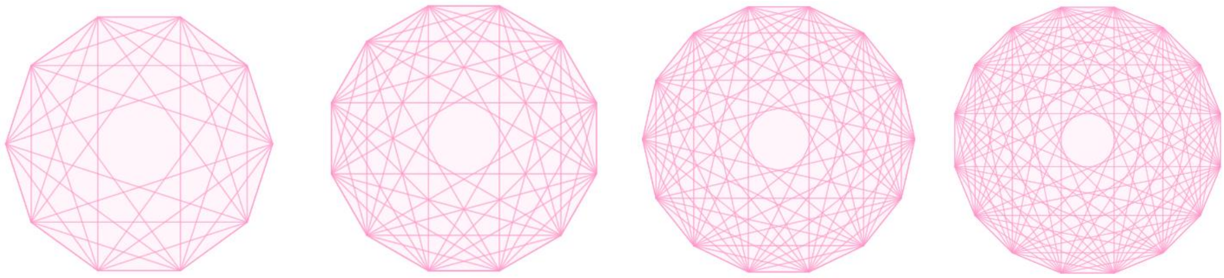
點	線	面
2^n	$2^{n-1} \times n$	$2^{n-3} \times n \times (n-1)$

(三) 正軸形：$p_n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |t_i| \leq 1，\forall i \in \mathbb{N}\}$ 。

以下是一維至八維正軸形的例子，其中四維至八維為正交投影圖，並可推論性質 7、8、9：



*(a)*一維正軸形 (一條線)　*(b)*二維正軸形 (一正方形)　*(c)*三維正軸形 (一正八面體)　*(d)*四維正軸形 (一正八胞體)

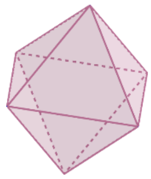
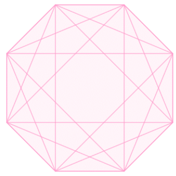


*(e)*五維正軸形　*(f)*六維正軸形　*(g)*七維正軸形　*(h)*八維正軸形

圖 5：一維至八維正軸形

利用降一維度的單純形去做，紅色標示-1 表示降一維度。

表 9：文獻上正軸形－點的一般化結果

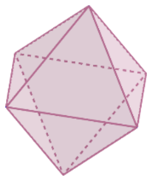
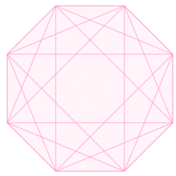
維度	*1*	*2*	*3*	*4*		*n*
圖形					…	
點的個數	*2*	*4=2×2*	*6=2×3*	*8=2×4*		*2n*

性質 7：*n* 維正軸形的點 $a_n=2n$

$$a_3=6，a_4=\frac{16\times(3+1)}{2^3}，a_5=\frac{32\times(4+1)}{2^4}，a_n=\frac{2^n\times(n+1-1)}{2^{n-1}}=2n$$

(綠色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

表 10：文獻上正軸形－線的一般化結果

維度	*1*	*2*	*3*	*4*		*n*
圖形					…	
線的個數	*1*	$\frac{4\times2}{2}=4$ (每個點連接 *2* 條線，且重複計算)	$\frac{6\times4}{2}=12$ (每個點連接 *4* 條線，且重複計算)	$\frac{8\times6}{2}=24$ (每個點連接 *6* 條線，且重複計算)		$\frac{2n\times2(n-1)}{2}=$ *2n×(n-1)* (每個點連接 *2(n-1)*條線，且重複計算)

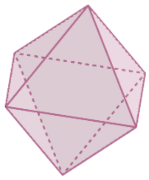
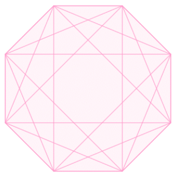
性質 8：*n* 維正軸形的線 $a_n=2n\times(n-1)$

$$a_3=12，a_4=\frac{16\times6}{4}，a_5=\frac{32\times10}{8}，a_n=\frac{2^n\times\frac{(n-1)(n+1-1)}{2}}{2^{n-2}}=2n(n-1)$$

(綠色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

表 11：文獻上正軸形－面的一般化結果

維度	圖形	面的個數
1		*0*

2		$\frac{4\times1}{4}=1$(每條線相鄰 *1* 個面， 且正方形有 *4* 條邊，重複計算 *4* 次)
3		$\frac{12\times2}{3}=8$(每條線相鄰 *2* 個面， 且正三角形有 *3* 條邊，重複計算 *3* 次)
4		$\frac{24\times4}{3}=32$(每條線相鄰 *4* 個面， 且正三角形有 *3* 條邊，重複計算 *3* 次)
	…	
n		$\frac{2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)\times2(\boldsymbol{n}-2)}{3}=\frac{4\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)}{3}$ (每條線相鄰 2^{n-2} 個面， 且正三角形有3條邊，重複計算3次)

性質 9：$\boldsymbol{n}$維正軸形的面$\boldsymbol{a_n}=2^3\times\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)}{6}$

$$a_3=8\text{，}a_4=\frac{16\times4}{2}\text{，}a_5=\frac{32\times10}{4}\text{，}a_n=\frac{2^n\times\frac{(n+1-1)(n-1)(n-1-1)}{6}}{2^{n-3}}=2^3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(綠色標示：幾個維單純形組成，藍色標示：幾個點會重疊在一起)

表 12：正軸形點、線、面一般化結果

點	線	面
$2n$	$2n(n-1)$	$2^3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

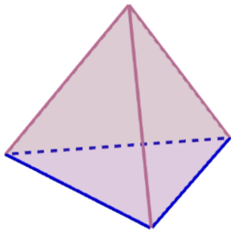
二維正 s 邊形保距變換方式有 s 種，三維立體圖形至 n 維正多胞體是否可用同一種方法來探討保距變換方式呢？保距變換意指「點與點之間保持一定距離轉換」。

二、藉由幾何－頂點圖的方法探討三維空間至 n 維空間中的圖形之保距變換方式。

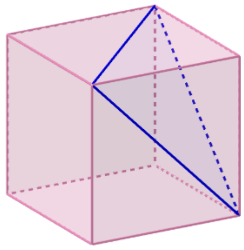
頂點圖是由一個頂點連接出去的線所圍成的圖形為該圖形的頂點圖。

保距變換種數可透過頂點×頂點圖去計算。

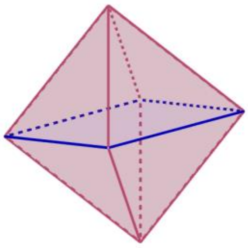
三維空間正多面體：



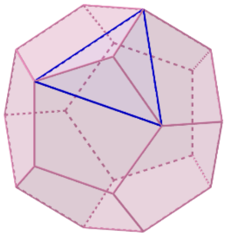
(a)正四面體$4\times3=12$



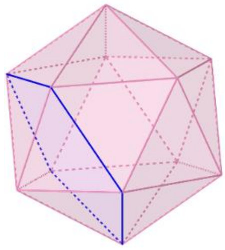
(b)正六面體$8\times3=24$



(c)正八面體$6\times4=24$



(d)正十二面體$20\times3=60$



(e)正二十面體$12\times5=60$

圖 6：正多面體之頂點圖圖形及保距變換方式

四維空間正多胞體：

一、 正五胞體：正五胞體的頂點圖為正四面體，

正四面體的旋轉方式為12種，其保距變換方式有$5\times12=60$種。

二、 正八胞體：正八胞體的頂點圖為正四面體，

正四面體的旋轉方式為12種，其保距變換方式有$16\times12=192$種。

三、 正十六胞體：正十六胞體的頂點圖為正六面體，

正六面體的旋轉方式為24種，其保距變換方式有$8\times24=192$種。

四、 正二十四胞體：正二十四胞體的頂點圖為正六面體，

正六面體的旋轉方式為24種，其保距變換方式有$24\times24=576$種。

五、 正一百二十胞體：正一百二十胞體的頂點圖為正四面體，

正四面體的旋轉方式為12種，其保距變換方式有$600\times12=7200$種。

六、 正六百胞體：正六百胞體的頂點圖為正二十面體，

正二十面體的旋轉方式為60種，其保距變換方式有$120\times60=7200$種。

以下為n維空間正多胞體之保距變換方式

定理 1：n維空間中正多胞體－單純形的保距變換方式：$\frac{(n+1)!}{2}$

$$\times)\qquad a_1 = 1，a_2 = 3\times a_1，a_3 = 4\times a_2，\cdots，a_n = (n+1)\times a_{n-1}$$

$$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(n+1)\times a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{(n+1)!}{2}$$

已知$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = (n+1)\times a_{n-1} \end{cases}$，$n\ge 1$，求證：$a_n = \frac{(n+1)!}{2}$ 。

證明：1：$n=1$，$a_1 = \frac{2!}{2} = 1$成立。

2：設$n=k$，原式成立，也就是說$a_k = \frac{(k+1)!}{2}$

當$n=k+1$，$a_{k+1} = (k+1+1)\times a_k = (k+2)\times\frac{(k+1)!}{2} = \frac{(k+1+1)!}{2}$

由數學歸納法得知，原式成立。

定理 2：n維空間中正多胞體－超方形的保距變換方式：$2^{n-1}\times n!$

$$b_1 = 1，b_2 = 4\times 1 = 4\times a_1 = 2^2\times\frac{(1+1)!}{2} = 2^1\times 2! = b_1\times 4，$$

$$b_3 = 8\times 3 = 8\times a_2 = 2^3\times\frac{(2+1)!}{2} = 2^2\times 3! = b_2\times 6，$$

$$\times)\qquad b_4 = 16\times 12 = 16\times a_3 = 2^4\times\frac{(3+1)!}{2} = 2^3\times 4! = b_3\times 8，\cdots，b_n = 2n\times b_{n-1}$$

$$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_n = 1\times 4\times 6\times\cdots\times 2n\times b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{n-1}\quad\therefore b_n = 2^{n-1}\times n!$$

已知$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = 2n\times b_{n-1} \end{cases}$，$n\ge 1$，求證：$b_n = 2^{n-1}\times n!$ 。

證明：1：$n=1$，$b_1 = 2^{1-1}\times 1! = 1$成立。

2：設$n=k$，原式成立，也就是說$b_k = 2^{k-1}\times k!$

當$n=k+1$，$b_{k+1} = 2(k+1)\times b_k = 2(k+1)\times 2^{k-1}\times k! = 2^{k+1-1}\times(k+1)!$

由數學歸納法得知，原式成立。

定理 3：$\boldsymbol{n}$維空間中正多胞體－正軸形的保距變換方式：$2^{n-1}\times \boldsymbol{n}!$

$$
\begin{array}{rl}
\times) & c_1=1，c_2=4=4\times c_1，c_3=6\times 4=6\times c_2，c_4=8\times 6\times 4=8\times c_3，\cdots，c_n=2n\times c_{n-1} \\
\hline
& c_1\times c_2\times c_3\times\cdots\times c_n=1\times 4\times 6\times\cdots\times 2n\times c_1\times c_2\times c_3\times\cdots\times c_{n-1}
\end{array}
$$

$$\therefore c_n=2^{n-1}\times n!$$

已知$\begin{cases} c_1=1 \\ c_n=2n\times c_{n-1} \end{cases}$，$n\geq 1$，求證：$c_n=2^{n-1}\times n!$。

證明：1：$n=1$，$c_1=2^{1-1}\times 1!=1$成立。

2：設$n=k$，原式成立，也就是說$c_k=2^{k-1}\times k!$

當$n=k+1$，$c_{k+1}=2(k+1)\times c_k=2(k+1)\times 2^{k-1}\times k!=2^{k+1-1}\times (k+1)!$

由數學歸納法得知，原式成立。

本研究透過頂點圖×頂點＝保距變換方式，其中，為什麼保距變換方式可以完全算出來，沒有少也沒有多呢？可以從以下正六面體的證明說明，1~8號為正六面體之頂點編號，σ_0為不動，σ_1為轉$120°$，σ_2為轉$240°$。

表 13：正六面體各點之轉角

1	2	3	4
$\sigma_0=I$	$T_2\circ\sigma_0$	$T_3\circ\sigma_0$	$T_4\circ\sigma_0$
$\sigma_1:120^\circ$	$T_2\circ\sigma_1$	$T_3\circ\sigma_1$	$T_4\circ\sigma_1$
$\sigma_2:240^\circ$	$T_2\circ\sigma_2$	$T_3\circ\sigma_2$	$T_4\circ\sigma_2$
5	6	7	8
$T_5\circ\sigma_0$	$T_6\circ\sigma_0$	$T_7\circ\sigma_0$	$T_8\circ\sigma_0$
$T_5\circ\sigma_1$	$T_6\circ\sigma_1$	$T_7\circ\sigma_1$	$T_8\circ\sigma_1$
$T_5\circ\sigma_2$	$T_6\circ\sigma_2$	$T_7\circ\sigma_2$	$T_8\circ\sigma_2$

$T_3 \circ \sigma_i = T_3 \circ \sigma_j, i \in 0,1,2, j \notin 0,1,2, T_3^{-1} \circ (T_3 \circ \sigma_i) = T_3^{-1} \circ (T_3 \circ \sigma_j)$

$(T_3^{-1} \circ T_3) \circ \sigma_i = (T_3^{-1} \circ T_3) \circ \sigma_j, \sigma_i = \sigma_j, i\text{=j}$

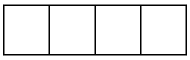
三、藉由代數－線性變換(行列式)的方法探討三維空間至n維空間中的圖形之保距變換方式。

本研究以線性變換－行列式的方式探討保距變換方式，若行列式為正，即旋轉，若行列式為負，即非旋轉，有可能為鏡射抑或是鏡射加旋轉等等。

(一)三維空間至n維空間中單純形線性變換方法之保距變換方式：

本研究利用方格的方式描述圖形之各頂點旋轉，以下舉例正四面體：

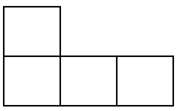
1.下列方格為$4+0$(四個點互相旋轉)，其行列式為負。



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

圖 7：有四個點互相旋轉

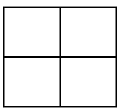
2.下列方格為 1+3(一個點不動，三個點互相轉)，其行列式為正。



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

圖 8：三個點互相轉，一個點不動

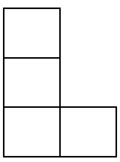
3.下列方格為$2+2$(兩個兩個點互相轉)，其行列式為正。



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

圖 9：兩組兩個點互相轉

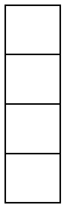
4.下列方格為 1+1+2(兩個一個點不動，兩個點互相轉)，其行列式為負。



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

圖 10：兩個點互相轉，兩個點不動

5.下列方格為1+1+1+1(全部都不動)，其行列式為正。



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

圖 11：全部都不動

以下利用數字的加法表示各圖形之點與點的關聯性。

舉例來說：正四面體有四個頂點，

4+0為四個點互相轉；3+1為三個點互相轉，一個點不動。

1.三維單純形(正四面體)：

正四面體有四個頂點，其方法有五種，分別為 4=4+0=1+3=2+2=1+1+2=1+1+1+1。

表 14：正四面體線性變換方法之保距變換方式

頂點旋轉之情況	4+0： 四個點互相轉	1+3： 一個點不動，三個點互相轉
行列式	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
行列式正(＋)或負(－)	－	＋
保距變換種數		$C_1^4 \times \frac{1!}{1} \times C_3^3 \times \frac{3!}{3} = 8$
2+2： 兩組兩個點互相轉	1+1+2：兩組一個點不動， 兩個點互相轉	1+1+1+1：全部都不動
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
＋	－	＋
$\frac{C_2^4}{2!} \times C_2^2 \times \frac{2!}{2} \times \frac{2!}{2} = 3$		$C_4^4 = 1$

其保距變換方式有8+3+1=12種。

2.四維單純形(正五胞體)：

正五胞體有五個頂點，其方法有七種，分別為

5=5+0=1+4=2+3=1+1+3=1+2+2=1+1+1+2=1+1+1+1+1

表 15：正五胞體線性變換方法之保距變換方式

<table>
<tr><td colspan="2">頂點旋轉之情況</td><td colspan="2">5+0：
五個點互相轉</td><td colspan="2">1+4：一個點不動，四個點互相轉</td></tr>
<tr><td colspan="2">行列式</td><td colspan="2">$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$</td><td colspan="2">$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">行列式正(＋)或負(－)</td><td colspan="2">＋</td><td colspan="2">－</td></tr>
<tr><td colspan="2">保距變換種數</td><td colspan="2">$C_0^5 \times \frac{5!}{5} = 24$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2+3：兩個點互相轉，三個點互相轉</td><td colspan="2">1+1+3：兩個點不動，三個點互相轉</td><td colspan="2">1+2+2：一個點不動，兩組兩個點互相轉</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$</td><td colspan="2">$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$</td><td colspan="2">$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">－</td><td colspan="2">＋</td><td colspan="2">＋</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$C_3^5 \times \frac{C_1^2}{2!} \times \frac{3!}{3} = 20$</td><td colspan="2">$\frac{C_2^5 \times C_2^3}{2!} \times \frac{2!}{2} \times \frac{2!}{2} = 15$</td></tr>
<tr><td colspan="3">1+1+1+2：
三個點不動，兩個點互相轉</td><td colspan="3">1+1+1+1+1：全部都不動</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$</td><td colspan="3">$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">－</td><td colspan="3">＋</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3">$C_5^5 = 1$</td></tr>
</table>

其保距變換方式有 $24+20+15+1=60$ 種。

3.五維單純形：

五維單純形有六個頂點，其方法有十一種，分別為

6=6+0=1+5=2+4=1+1+4=3+3=1+2+3=1+1+1+3=2+2+2=1+1+2+2=1+1+1+1+2=1+1+1+1+1+1

表 16：五維單純形線性變換方法之保距變換方式

頂點旋轉之情況	6+0： 六個點互相轉	1+5： 一個點不動，五個點互相轉
行列式	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$
行列式正(＋)或負(－)	－	＋
保距變換種數		$C_1^6 \times \frac{1!}{1} \times C_5^5 \times \frac{5!}{5} = 144$
2+4：兩個點互相轉，四個點互相轉	1+1+4：兩個點不動，四個點互相轉	3+3：兩組三個點互相轉
$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$
＋	－	＋
$C_2^6 \times \frac{2!}{2} \times \frac{4!}{4} = 90$		$\frac{C_3^6}{2!} \times C_3^3 \times \frac{3!}{3} \times \frac{3!}{3} = 40$
1+2+3：一個點不動，兩個點互相轉，三個點互相轉	1+1+1+3：三個點不動，三個點互相轉	2+2+2： 三組兩個點互相轉
$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$
－	＋	－

	$C_3^6 \times \frac{C_1^3 \times C_1^2 \times C_1^1}{3!} \times \frac{3!}{3} = 40$	
1+1+2+2：兩個點不動，兩組兩個點互相轉	1+1+1+1+2：四個點不動，兩個點互相轉	1+1+1+1+1+1：六個點不動
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
＋	－	＋
$\frac{C_2^6 \times C_2^4}{2!} \times \frac{C_1^2 \times C_1^1}{2!} = 45$		$C_6^6 = 1$

其保距變換方式有$144+40+90+40+45+1$=360種。

4.六維單純形：

六維單純形有七個頂點，其方法有十五種，分別為

7=7+0=1+6=2+5=1+1+5=3+4=1+2+4=1+1+1+4=1+3+3=2+2+3=1+1+2+3=1+1+1+1+3=1+2+2+2

=1+1+1+2+2=1+1+1+1+1+2=1+1+1+1+1+1+1

以下為行列式為正的保距變換方式，包含：

7+0=1+1+5=1+2+4=1+3+3=2+2+3=1+1+1+1+3=1+1+1+2+2=1+1+1+1+1+1+1

表 17：六維單純形線性變換方法之保距變換方式

頂點旋轉之情況	7+0：七個點互相轉	1+1+5：兩個點不動，五個點互相轉
行列式	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
保距變換種數	$C_0^7 \times \frac{7!}{7} = 720$	$C_5^7 \times \frac{5!}{5} = 504$

1+2+4：一個點不動，兩個點互相轉，四個點互相轉	1+3+3：一個點不動，兩個三個點互相轉	2+2+3：兩個點互相轉，三個點互相轉
$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$
$C_2^7\times C_4^5\times\frac{4!}{4}=630$	$\frac{C_3^7\times C_3^4}{2!}\times\frac{3!}{3}\times\frac{3!}{3}=280$	$\frac{C_2^7\times C_2^5}{2!}\times\frac{2!}{2}\times\frac{2!}{2}\times\frac{3!}{3}=210$
1+1+1+1+3：四個點不動，三個點互相轉	1+1+1+2+2：三個點不動，兩個兩個點互相轉	1+1+1+1+1+1+1：七個點不動
$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$
$C_3^7\times\frac{3!}{3}=70$	$\frac{C_2^7\times C_2^5}{2!}\times\frac{2!}{2}\times\frac{2!}{2}=105$	$C_7^7=1$

其保距變換方式有 $720+504+603+280+210+70+105+1$=2520種。

5. n **維單純形：**

$$A=\begin{pmatrix}|&|&&|\\c_1&c_2&\dots&c_{n+1}\\|&|&&|\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

n 維單純形的頂點有 $n+1$ 個，A 的元素為 1 或 0 且各行、列出現 1 的地方不可重複。

保距變換方式= $(n+1)!$，又#det(A)= #(−det(A))，故單純形的保距變換方式有 $\frac{(n+1)!}{2}$ 個。

(二)n 維空間中超方形及正軸形線性變換方法之保距變換方式：

超方形以及正軸形互為對偶多胞體，本研究先探討正軸形的保距變換方式。

$$A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{n\times n}$$

n 維正軸形的頂點有 $2n$ 個，其保距變換方式有 $\frac{n!}{2}$ 個，每個座標位置都有兩種可能，其保距變換方式有 2^n 個，總合起來，正軸形的保距變換方式有 $2^n\times\frac{n!}{2}=2^{n-1}\times n!$ 個。

舉例來說：三維空間中正八面體(正軸形)

設 $(1,0,0)$、$(-1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,-1,0)$、$(0,0,1)$、$(0,0,-1)$ 形成一正八面體，

保距變換方式為 $\frac{3!}{2}=3$ 種；又每個座標都有正、負兩個，故保距變換方式有 $2\times2\times2=8$ 個，總合起來，正八面體的保距變換方式總共有 $8\times3=24$ 個。

四、藉由特徵多項式及棣美弗定理分析凸正多胞體之旋轉角度。

單純形：四維空間中正五胞體五個點互相轉的旋轉角度，如圖 12。

(一)四維空間中正五胞體五個點互相轉、三個點互相轉，兩個點不動、兩個兩個點互相轉，一個點不動以及全部都不動。

1.五個點互相轉：

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, AZ=\lambda Z, \begin{pmatrix} Z_5\\ Z_1\\ Z_2\\ Z_3\\ Z_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda Z_1\\ \lambda Z_2\\ \lambda Z_3\\ \lambda Z_4\\ \lambda Z_5 \end{pmatrix}, \begin{cases} Z_5=\lambda Z_1\\ Z_1=\lambda Z_2\\ Z_2=\lambda Z_3\\ Z_3=\lambda Z_4\\ Z_4=\lambda Z_5 \end{cases}, Z_5=\lambda^5 Z_5, \lambda^5=1,$$

藉由棣美弗定理可知 $\lambda=\cos\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right), k=0,1,2,3,4$

$$\begin{cases}\lambda_1 = A \\ \lambda_2 = B \\ \lambda_3 = C \\ \lambda_4 = D \\ \lambda_5 = E\end{cases}, \begin{cases} A = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ B = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ C = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \\ D = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \\ E = \cos\left(\frac{10\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{5}\right) = 1 \end{cases}, \begin{cases} A\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) \\ B\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \\ C\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right) \\ D\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) \\ E\left(\cos\left(\frac{10\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{10\pi}{5}\right)\right) \end{cases}$$

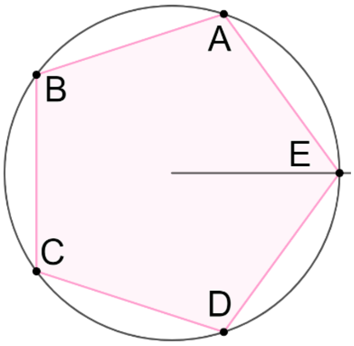


圖 12：正五胞體五個點旋轉角度

2.三個點互相轉：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, AZ = \lambda Z, \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_5 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda Z_1 \\ \lambda Z_2 \\ \lambda Z_3 \\ \lambda Z_4 \\ \lambda Z_5 \end{pmatrix}, \begin{cases} Z_1 = \lambda Z_1 \\ Z_2 = \lambda Z_2 \\ Z_5 = \lambda Z_3, Z_5 = \lambda^3 Z_5, \lambda^3 = 1, \\ Z_3 = \lambda Z_4 \\ Z_4 = \lambda Z_5 \end{cases}$$

藉由棣美弗定理可知 $\lambda = \cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right), k = 0,1,2$

$$\begin{cases}\lambda_1 = A \\ \lambda_2 = B \\ \lambda_3 = C, A\text{、}B\text{ 固定不動} \\ \lambda_4 = D \\ \lambda_5 = E\end{cases}, \begin{cases} C = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ D = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ E = \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \begin{cases} C = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ D = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\ E = \left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right) \end{cases}$$

3. 一個點不動，兩個兩個點互相轉：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}, AZ=\lambda Z, \begin{pmatrix}Z_1\\Z_3\\Z_2\\Z_5\\Z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda Z_1\\\lambda Z_2\\\lambda Z_3\\\lambda Z_4\\\lambda Z_5\end{pmatrix}, \begin{cases}Z_1=\lambda Z_1\\Z_3=\lambda Z_2\\Z_2=\lambda Z_3\\Z_5=\lambda Z_4\\Z_4=\lambda Z_5\end{cases}, \begin{cases}Z_3=(\lambda_1)^2Z_3\\Z_5=(\lambda_2)^2Z_5\end{cases}, \begin{cases}(\lambda_1)^2=1\\(\lambda_2)^2=1\end{cases}$$

藉由棣美弗定理可知 $\lambda=\cos\left(\frac{0+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{2}\right), k=0,1$

A 固定不動 B、C 互相旋轉 D、E 互相旋轉

$$\begin{cases}\lambda_1=A\\\lambda_2=B\\\lambda_3=C\\\lambda_4=D\\\lambda_5=E\end{cases}, \begin{cases}B=\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\\C=\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)\\D=\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\\E=\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)\end{cases}, \begin{cases}B=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right)\\C=\left(\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)\right)\\D=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right)\\E=\left(\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)\right)\end{cases}$$

4.全部都不動

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}, AZ=\lambda Z, \begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\\Z_4\\Z_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda Z_1\\\lambda Z_2\\\lambda Z_3\\\lambda Z_4\\\lambda Z_5\end{pmatrix},$$ 全部都不動旋轉角度為零。

(二) n 維空間的旋轉角度，n 個點互相轉、三個點互相轉，n 個點不動、兩個兩個點互相轉，n 個點不動以及全部都不動：

1. n 個點互相轉

$$A\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_{n+1}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_{n+1}\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_{n+1}\end{pmatrix}=\lambda I\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_{n+1}\end{pmatrix}, (A-\lambda I)\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_{n+1}\end{pmatrix}=0$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\ddots&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\ AZ=\lambda Z,\ \begin{pmatrix}Z_{n+1}\\Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda Z_1\\\lambda Z_2\\\lambda Z_3\\\vdots\\\lambda Z_{n+1}\end{pmatrix},\ \begin{cases}Z_{n+1}=\lambda Z_1\\Z_1=\lambda Z_2\\Z_2=\lambda Z_3\\\quad\vdots\\Z_n=\lambda Z_{n+1}\end{cases},Z_{n+1}=\lambda^{n+1}Z_{n+1},\ \lambda^{n+1}=1,$$

藉由棣美弗定理可知 $\lambda=\cos\left(\frac{0+2k\pi}{n+1}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{n+1}\right),k=0,1,2,\cdots,n$

$$,\begin{cases}\lambda_1=\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)\to\frac{2\pi}{n+1}\\\lambda_2=\cos\left(\frac{4\pi}{n+1}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{n+1}\right)\to\frac{4\pi}{n+1}\\\lambda_3=\cos\left(\frac{6\pi}{n+1}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{n+1}\right)\to\frac{6\pi}{n+1}\\\qquad\vdots\\\lambda_n=\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)=1\to2\pi\end{cases}$$

2. n-2 個點不動，三個點互相轉：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\ AZ=\lambda Z,\ \begin{pmatrix}Z_1\\\vdots\\Z_{n-2}\\Z_{n+1}\\Z_{n-1}\\Z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda Z_1\\\vdots\\\lambda Z_{n-2}\\\lambda Z_{n-1}\\\lambda Z_n\\\lambda Z_{n+1}\end{pmatrix},\ \begin{cases}Z_1=\lambda Z_1\\\quad\vdots\\Z_{n-2}=\lambda Z_{n-2}\\Z_{n+1}=\lambda Z_{n-1}\\Z_{n-1}=\lambda Z_n\\Z_n=\lambda Z_{n+1}\end{cases},Z_{n+1}=\lambda^3Z_{n+1},\ \lambda^3=1,$$

藉由棣美弗定理可知 $\lambda=\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right),k=0,1,2$

$$\begin{cases}\lambda_1=A\\\lambda_{\vdots}=B\\\lambda_{n-2}=C\\\lambda_{n-1}=D\\\lambda_n=E\\\lambda_{n+1}=F\end{cases},A\text{、}B\text{、}C\text{ 固定不動},\begin{cases}D=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\E=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\F=\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)=1\end{cases}\begin{cases}D=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\E=\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\\F=\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right)\end{cases}$$

3. n-3 個點不動，兩個兩個點互相轉：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}, AZ=\lambda Z, \begin{pmatrix}Z_1\\\vdots\\Z_{n-3}\\Z_{n-1}\\Z_{n-2}\\Z_{n+1}\\Z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda Z_1\\\vdots\\\lambda Z_{n-3}\\\lambda Z_{n-2}\\\lambda Z_{n-1}\\\lambda Z_n\\\lambda Z_{n+1}\end{pmatrix}, \begin{cases}Z_1=\lambda Z_1\\\vdots\\Z_{n-3}=\lambda Z_{n-3}\\Z_{n-1}=\lambda Z_{n-2}\\Z_{n-2}=\lambda Z_{n-1}\\Z_{n+1}=\lambda Z_n\\Z_n=\lambda Z_{n+1}\end{cases}, \begin{cases}Z_{n-1}=(\lambda_1)^2 Z_{n-1}\\Z_{n+1}=(\lambda_2)^2 Z_{n+1}\end{cases},$$

$(\lambda_1)^2=1, (\lambda_2)^2=1$藉由隸美弗定理可知$\lambda=\cos\left(\dfrac{0+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{0+2k\pi}{2}\right), k=0,1$

$$\begin{cases}\lambda_1=A\\\lambda_{\vdots}=B\\\lambda_{n-3}=C\\\lambda_{n-2}=D, A、B、C\text{ 固定不動 }D、E\text{ 互相旋轉 }F、G\text{ 互相旋轉}\\\lambda_{n-1}=E\\\lambda_n=F\\\lambda_{n+1}=G\end{cases}$$

$$,\begin{cases}D=\cos\left(\dfrac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{2}\right)\\E=\cos\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)\\F=\cos\left(\dfrac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{2}\right)\\G=\cos\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)\end{cases},\begin{cases}D=\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{2}\right),\sin\left(\dfrac{2\pi}{2}\right)\right)\\E=\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{2}\right),\sin\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)\right)\\F=\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{2}\right),\sin\left(\dfrac{2\pi}{2}\right)\right)\\G=\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{2}\right),\sin\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)\right)\end{cases}$$

4.全部都不動：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}, AZ=\lambda Z, \begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\\\vdots\\Z_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda Z_1\\\lambda Z_2\\\lambda Z_3\\\vdots\\\lambda Z_{n+1}\end{pmatrix}, \text{ 全部都不動旋轉角度為零。}$$

伍、 結論與未來展望

一、n 維空間中單純形、超方形、正軸形點、線、面的一般化結果

（透過遞迴式以及數學歸納法）。

表 18：單純形、超方形、正軸形點線面的一般化結果

	單純形	超方形	正軸形
點	$n+1$	2^n	$2n$
線	$\frac{n(n+1)}{2}$	$2^{n-1}\times n$	$2n(n-1)$
面	$\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$	$2^{n-3}\times n\times(n-1)$	$2^3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

二、二維空間至 n 維空間中的正多(面)胞體的保距變換方式如下：

表 19：二維空間至 n 維空間中的正多(面)胞體的保距變換種方式

二維(正 n 邊形)	正四面體	正立方體
n	12	24
正八面體	正十二面體	正二十面體
24	60	60
正五胞體	正八胞體	正十六胞體
60	192	192
正二十四胞體	正一百二十胞體	正六百胞體
576	7200	7200
單純形	超方形	正軸形
$\frac{(n+1)!}{2}$	$2^{n-1}\times n!$	

三、n 維凸正多胞體之旋轉角度。

表 19：n 維凸正多胞體之旋轉角度

單純形	旋轉角度
n 個點不動	$\frac{2k\pi}{n},k=0,1,2,\cdots,(n-1)$
三個點互相轉，$n-3$ 個點不動	$\frac{2k\pi}{3},k=0,1,2$
兩個兩個點互相轉，$n-4$ 個點不動	$\frac{2k\pi}{2},k=0,1$
全部都不動	$0°$

四、未來可探討超方形及正軸形之旋轉角度。

五、未來可藉由線性變換－行列式的方式探討四維空間中的正二十四胞體、正一百二十胞體、正六百胞體的保距變換方式。

五、未來可探討非正多胞體但擁有保距變換圖形之保距變換方式。

六、未來可探討線性變換－行列式為-1的圖形及旋轉角度。

陸、 參考文獻

[1]Laura Mancinska(2008).Regular Polytopes.

http://home.lu.lv/~sd20008/papers/essays/Regular%20Polytopes%20%5bpresentation%5d.pdf.

[2]Eie, Minking and Chang, Shou-Te(2010) . A Course on Abstract Algebra. World Scientific Publishing Compan.

[3]H. S. M. Coxeter(1973) . Regular Polytopes. New York: Dover publication.

[4]康明昌(2000)。近世代數。台灣台北市。聯經出版公司。

[5] "What Is Isometric Projection | Principle of Isometric Projections | Isometric Scale".CivilJungle. 2020-04-25.Retrieved2020-10-24.

[6] Algebraic Groups The theory of group schemes of finite type over a field. J.S. Milne Version 2.00 December 20, 2015

[7] Narici, Lawrence; Beckenstein, Edward (2011). Topological Vector Spaces. Pure and applied mathematics (Second ed.). Boca Raton, FL: CRC Press. ISBN 978-1584888666. OCLC 144216834.

【評語】010014

此研究主要是討論正多胞體在空間中的變換，包括旋轉、鏡射、…等。一般而言，如果採用置換排列的概念會比較具體地描述研究中所希望得到的成果。如此也更能看出何種變換是可行的變換。