2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010005**

參展科別　數學

作品名稱　多邊形的剖分圖形數量之探討

得獎獎項　大會獎二等獎

美國ISEF正選代表

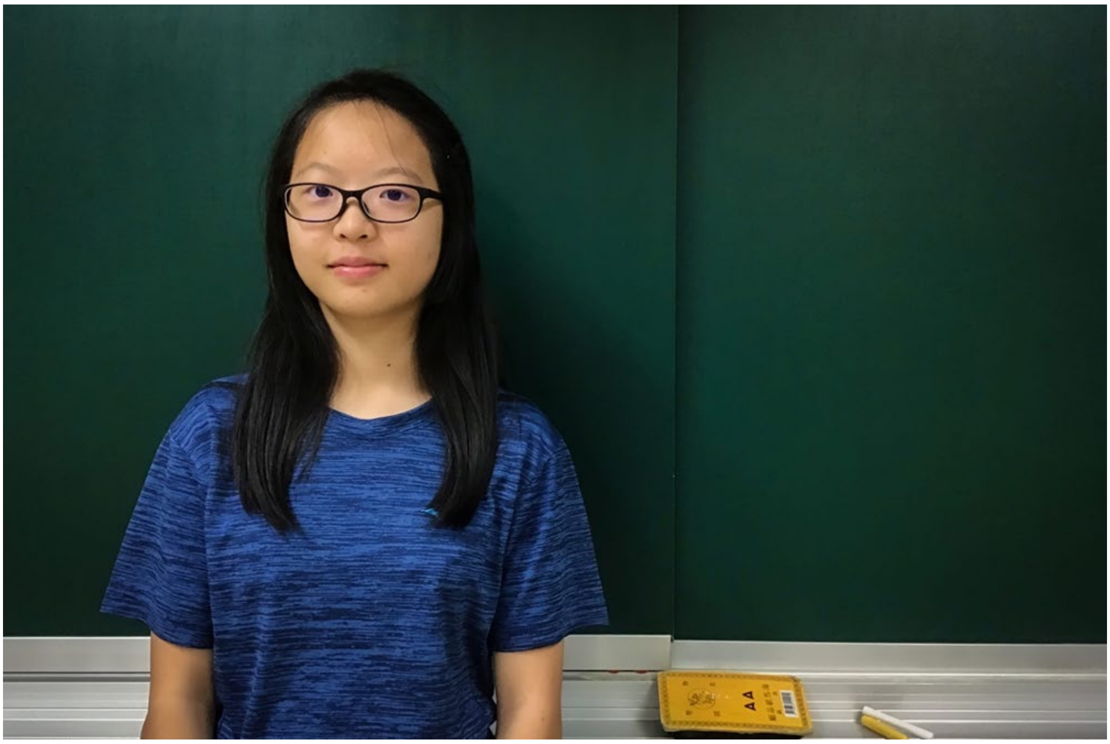
就讀學校　臺北市立第一女子高級中學

指導教師　廖培凱

作者姓名　邱梓瑄

關鍵詞　卡特蘭數、組合、生成函數

作者簡介



我是邱梓瑄，就讀北一女中二年級。數學一直是我最喜歡也最擅長的科目，所以在進入數資班之後，就選了數學科作為專題研究的科目，研究的過程我也樂在其中。雖然常常遇到瓶頸，但是最後再想到解決問題的方法並成功破解難關的時候，總是讓我特別有成就感！

摘要

從参考資料[1]可知，將凸 $n+2$ 邊形利用 $n-1$ 條不相交的對角線剖分成 n 個三角形的圖形數量即為卡特蘭數 c_n。而我利用不相交的對角線把 $n+2$ 邊形剖分成數個多邊形和三角形的組合，並從此類的剖分圖形與三角剖分圖形之關聯，進而由卡特蘭數的一般式推導出此類剖分圖形數量的一般式。在本研究中可得，若到把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和多個三角形的圖形數量是 $\binom{2n-k+1}{n+1}$；把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形、一個 $m+2$ 邊形和多個三角形的圖形數量，當 $m\neq k$，數量為 $(n+2)\binom{2n-k-m+2}{n+2}$，當 $m=k$ 時，數量為 $\frac{n+2}{2}\binom{2n-2k+2}{n+2}$；把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、和 $n-k_1-k_2-k_3$ 個三角形的剖分圖形，當 k_1,k_2,k_3 兩兩相異時，數量為 $(n+2)(n+3)\binom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$；把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的剖分圖形當 k_1,k_2,k_3,k_4 兩兩相異，數量為 $(n+2)(n+3)(n+4)\binom{2n-k_1-k_2-k_3-k_4+4}{n+4}$。並猜測若 $k_1,k_2,\cdots,k_i$ 兩兩相異時，把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、…、一個 k_i+2 邊形、和 $n-\sum_{j=1}^{i}k_j$ 個三角形的剖分圖形數量為 $\frac{(n+i)!}{(n+1)!}\binom{2n-\sum_{j=1}^{i}k_j+i}{n+i}$。

Abstract

It has been known that the amount of the figures dividing $(n+2)$-gons into n triangles with $n-1$ diagonal lines is the Catalan Numbers [1]. In this thesis, I have generalized the results that the amount of the figures dividing ($n+2$)-sided polygon into a ($k+2$)-sided polygon and $n-k$ triangles is $\binom{2n-k+1}{n+1}$; the amount of the figures dividing ($n+2$)-sided polygon into a ($k+2$)-sided polygon, a ($m+2$)-sided polygon and many triangles is $(n+2)\binom{2n-k-m+2}{n+2}$ with different *k* and *m*; the amount of the figures dividing ($n+2$)-sided polygon into two ($k+2$)-sided polygon and many

triangles is $\frac{n+2}{2}\binom{2n-2k+2}{n+2}$; the amount of the figures dividing ($n+2$)-sided polygon into a (k_1+2)-sided polygon, a (k_2+2)-sided polygon, a (k_3+2)sided polygon and ($n-k_1-k_2-k_3$) triangles is $(n+2)(n+3)\binom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$.

壹、 前言

一、 研究動機

對於一個凸$n+2$邊形而言，能將其剖分成n個三角形的三角剖分圖形數量即為卡特蘭數c_n。因此，我想要探討把多邊形剖分成多個三角形和其他多邊形的圖形數量為何。例如，探討把多邊形剖分成一個四邊形和多個三角形、把多邊形剖分成一個五邊形和多個三角形、把多邊形剖分成兩個四邊形和多個三角形，再從中推導並一般化到計算「把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和多個三角形」的剖分圖形數量，「把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形、一個$m+2$邊形和多個三角形」的剖分圖形數量，「把$n+2$邊形剖分成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形、和$n-k_1-k_2-k_3$個三角形」，以及「把$n+2$邊形剖成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形、一個k_4+2邊形和$n-k_1-k_2-k_3-k_4$個三角形」的剖分圖形數量。

二、 研究目的

(一)、 探討利用$n-2$條不相交的對角線把$n+2$邊形剖分成一個四邊形和$n-2$個三角形的圖形總數量$a_{(n,2)}$與卡特蘭數c_n的關係，並找出$a_{(n,2)}$的一般式。

(二)、 探討利用$n-3$條不相交的對角線把$n+2$邊形做剖分，產生的圖形(一個五邊形和$n-3$個三角形的圖形、兩個四邊形和$n-4$個三角形的圖形)與三角剖分圖形的關係，並找出圖形數量$a_{(n,3)}$、$a_{(n,2,2)}$和卡特蘭數c_n的關係。

(三)、 探討利用$n-3$條把$n+2$邊形剖分成一個五邊形和$n-3$個三角形的圖形總數量$a_{(n,3)}$的一般式及把$n+2$邊形剖分成兩個四邊形和$n-4$個三角形的圖形總數量$a_{(n,2,2)}$的一般式。

(四)、 探討利用把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$個三角形的圖形總數量的一般式。

(五)、 探討把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形、一個$m+2$邊形和$n-k-m$個三角形的圖形總數量的一般式。

(六)、 探討把$n+2$邊形利用不相交的對角線剖分成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形、和$n-k_1-k_2-k_3$個三角形的剖分圖形數量。

(七)、 探討把$n+2$邊形剖成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形、一個k_4+2邊形和$n-k_1-k_2-k_3-k_4$個三角形的剖分圖形數量。

貳、 研究設計

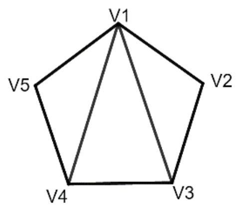
一、 名詞定義

(一)、 T_n和卡特蘭數c_n

將一個凸$n+2$邊形$V_1V_2......V_{n+2}$利用不相交的對角線剖分成n個三角形，稱為一個$n+2$邊形$V_1V_2......V_{n+2}$的一個三角剖分。定義T_n是$n+2$邊形$V_1V_2......V_{n+2}$的所有三角剖分圖形所構成的集合。由參考資料[1]知$|T_n|=c_n$，c_n是卡特蘭數(Catalan Numbers)。卡特蘭數的關係式為$c_n=\sum_{k=0}^{n-1}c_kc_{n-k-1}$，而卡特蘭數的一般式為$c_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。以下是卡特蘭數$c_1\sim c_7$的值：

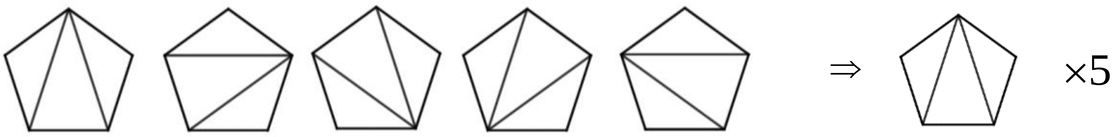
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
1	2	5	14	42	132	429

如右圖將凸五邊形$V_1V_2V_3V_4V_5$利用2條對角線$\overline{V_1V_3}$、$\overline{V_1V_4}$剖分成3個三角形$\Delta V_1V_2V_3$、$\Delta V_1V_3V_4$、$\Delta V_1V_4V_5$，稱為一個五邊形的三角剖分。



T_3是所有將五邊形$V_1V_2V_3V_4V_5$利用2條對角線剖分成3個三角形的集合。由下圖可知，要把一個五邊形剖分成三個三角形有5種方式，所以$|T_3|=c_3=5$，如右(以下省略頂點名稱)。

記錄剖分圖形的個數時，不考慮多邊形的不同邊長、角度的情況，可把重複的圖形只畫成一種，再標示數量。以T_3作為舉例：

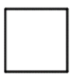
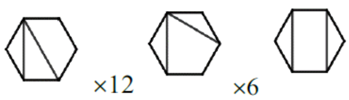
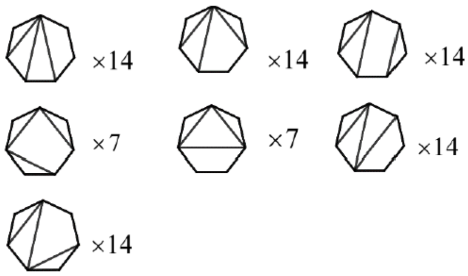


(二)、 $A_{(n,k)}$和$a_{(n,k)}$

定義集合$A_{(n,k)}$是利用不相交的對角線把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$ 個三角形的所有可能圖形所構成的集合，其中$n \ge k \ge 2$，且$a_{(n,k)} = \left|A_{(n,k)}\right|$。以下是分別對於$k=2$、$k=3$時的舉例：

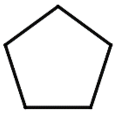
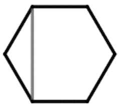
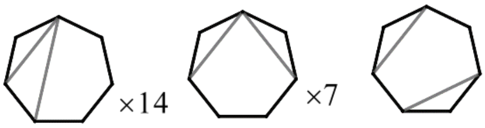
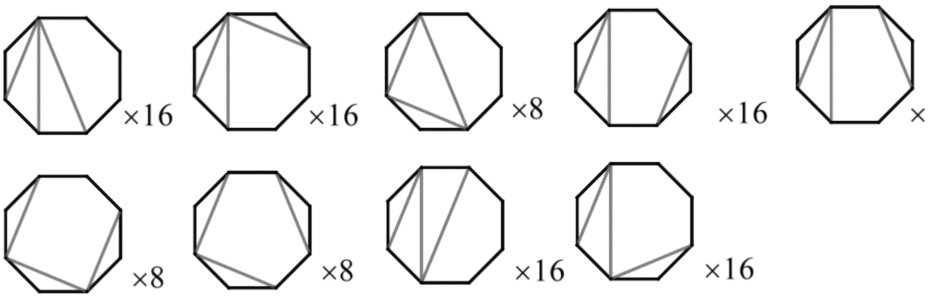
1、 $A_{(n,2)}$和$a_{(n,2)}$

在$n \ge 2$時，可將一個$n+2$邊形$V_1V_2......V_{n+2}$利用不相交的對角線剖分成一個四邊形和$n-2$個三角形。$A_{(n,2)}$為上述所有剖分圖形所構成的集合，而$a_{(n,2)} = \left|A_{(n,2)}\right|$。欲探討把$n+2$邊形剖分成一個四邊形和$n-2$個三角形的圖形集合$A_{(n,2)}$的元素個數$a_{(n,2)}$的值，以下是列舉出$n=2\sim5$的所有$A_{(n,2)}$和$a_{(n,2)}$的值：

n	$A_{(n,2)}$	$a_{(n,2)}$
2		1
3	 ×5	5
4	 ×12 ×6 ×3	21
5	 ×14 ×14 ×14 ×7 ×7 ×14 ×14	84

2、 $A_{(n,3)}$ 和 $a_{(n,3)}$

在 $n \ge 3$ 時，可將一個 $n+2$ 邊形 $V_1V_2 ......V_{n+2}$ 利用不相交的對角線剖分成一個五邊形和 $n-3$ 個三角形。$A_{(n,3)}$ 為上述所有剖分圖形所構成的集合，而 $A_{(n,3)}$ 的集合數量有 $a_{(n,3)}$ 個，即 $a_{(n,3)} = \left|A_{(n,3)}\right|$。欲探討把 $n+2$ 邊形剖分成一個五邊形和 $n-3$ 個三角形的圖形集合 $A_{(n,3)}$ 的元素個數 $a_{(n,3)}$ 的值，以下是列舉出 $n = 3 \sim 6$ 的所有 $A_{(n,3)}$ 和 $a_{(n,3)}$ 的值：

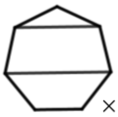
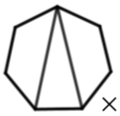
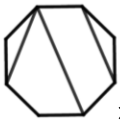
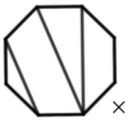
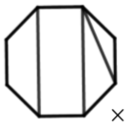
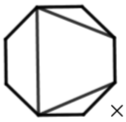
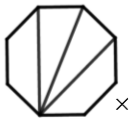
n	$A_{(n,3)}$	$a_{(n,3)}$
3	 $\times 1$	1
4	 $\times 6$	6
5	 $\times 14$ $\times 7$ $\times 14$	28
6	 $\times 16$ $\times 16$ $\times 8$ $\times 16$ $\times 16$ $\times 8$ $\times 8$ $\times 16$ $\times 16$	120

(三)、 $A_{(n,m,k)}$ 和 $a_{(n,m,k)}$

定義 $A_{(n,m,k)}$ 是利用不相交的對角線把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $m+2$ 邊形、一個 $k+2$ 邊形和 $n-m-k$ 個三角形的所有可能圖形所構成的集合，其中 $n \ge m, k \ge 2$ ，且 $a_{(n,m,k)} = \left|A_{(n,m,k)}\right|$。而 m、k 互換並不影響 $A_{(n,m,k)}$、$a_{(n,m,k)}$ 的結果。

以 $A_{(n,2,2)}$ 和 $a_{(n,2,2)}$ 為例：

在$n\geq 4$時，可將一個$n+2$邊形$V_1V_2......V_{n+2}$利用不相交的對角線剖分成兩個四邊形和$n-2$個三角形。定義$A_{(n,2,2)}$為上述所有剖分圖形所構成的集合，定義$A_{(n,2,2)}$的集合數量有$a_{(n,2,2)}$個，即$a_{(n,2,2)}=\left|A_{(n,2,2)}\right|$。欲探討把$n+2$邊形剖分成兩個四邊形和$n-4$個三角形的圖形集合$A_{(n,2,2)}$的元素個數$a_{(n,2,2)}$的值，以下是列舉出$n=3\sim 6$的所有$A_{(n,2,2)}$和$a_{(n,2,2)}$的值：

n	$A_{(n,2,2)}$	$a_{(n,2,2)}$
4	 $\times 3$	3
5	 $\times 14$  $\times 7$  $\times 7$	28
6	 $\times 8$  $\times 16$  $\times 8$  $\times 16$  $\times 16$  $\times 4$  $\times 16$  $\times 8$  $\times 16$  $\times 16$  $\times 16$  $\times 8$  $\times 8$  $\times 16$  $\times 8$	180

(四)、 $A_{(n,k_1,k_2,......,k_i)}$和$a_{(n,k_1,k_2,......,k_i)}$

定義集合$A_{(n,k_1,k_2,......,k_i)}$是利用不相交的對角線把$n+2$邊形剖分成一個$k_1+2$邊形、一個$k_2+2$邊形、……、一個$k_i+2$邊形和$n-\sum_{j=1}^{i}k_j$個三角形的所有可能圖形所構成的集合。而集合中元素的數量$a_{(n,k_1,k_2,......,k_i)}=\left|A_{(n,k_1,k_2,......,k_i)}\right|$。而當$k_1$、$k_2$、……、$k_i$彼此的順序互換，因為所畫出來的圖形相同，故不會影響結果。

二、 研究內容

本研究先從觀察圖形，對於對角線數量及位置，找到各個多邊形剖分圖形的關係，再加

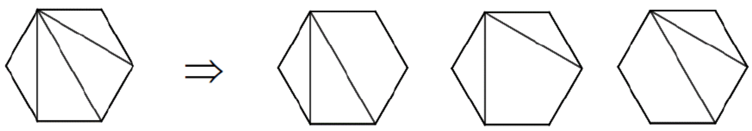
以證明。而後當圖形的模式更為複雜時，再透過將剖分成不同多邊形的數量構成的生成函數，找到剖分數量的一般式。研究內容如下：

(一)、　把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形和 $n-2$ 個三角形的圖形數量 $a_{(n,2)}$

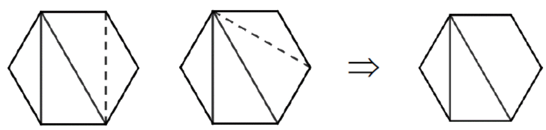
n	c_n	$a_{(n,2)}$	$\frac{a_{(n,2)}}{c_n}$
1	1	0	0
2	2	1	$\frac{1}{2}$
3	5	5	$1=\frac{2}{2}$
4	14	21	$\frac{3}{2}$
5	42	84	$2=\frac{4}{2}$

經過一、(二)、1、中的窮舉，可以比較 $n+2$ 邊形的三角剖分圖形數量 c_n 以及剖分成一個四邊形與 $n-2$ 個三角形的圖形數量 $a_{(n,2)}$ 的值。從右表中 $\frac{a_{(n,2)}}{c_n}$ 的關係，可推測 $\frac{a_{(n,2)}}{c_n}=\frac{n-1}{2}$。以下是對於此猜測的證明：

因為將一個 $n+2$ 邊形 $V_1V_2......V_{n+2}$ 利用不相交的對角線剖分成 n 個三角形的三角剖分圖形會有 $n-1$ 條對角線，而去掉一條對角線就能變成把一個 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形和 $n-2$ 個三角形的圖形。以 $n=4$ 為舉例，對於每一個六邊形的三角剖分圖形，會有 3 條對角線，而去掉任意一條對角線即可以變成把六邊形用不相交的對角線剖分成一個四邊形和 2 個三角形的剖分圖形，共有3種情況，如右圖。



所以每個三角剖分中的圖形可對應到 $n-1$ 個 $A_{(n,2)}$ 中相異的圖形。但是一個四邊形有 2 條對角線，所以可在集合 T_n 中找到 2 個只有一條對角線相異的剖分圖形，各去掉相異的對角線後，能得 $A_{(n,2)}$ 中相同圖形。右圖為 $n=4$ 的圖例。



因此可以得到 $a_{(n,2)}$ 和 c_n 的關係式：$a_{(n,2)}=\frac{c_n\times(n-1)}{2}$　及定理 1。　　Q.E.D.

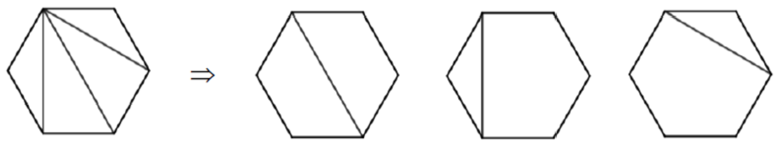
定理 1：

把 $n+2$ 邊形剖分成 1 個四邊形和 $n-2$ 個三角形的剖分數 $a_{(n,2)}=\frac{n-1}{2}c_n=\binom{2n-1}{n+1}$

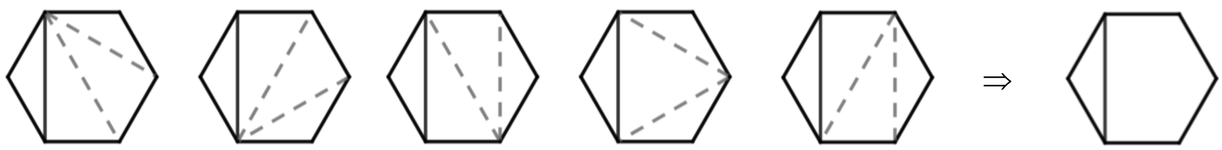
(二)、　$a_{(n,3)}$、$a_{(n,2,2)}$ 和卡特蘭數 c_n 的關係

在 $n+2$ 邊形中，利用 $n-3$ 條不相交的對角線可以有「一個五邊形和 $n-3$ 個三角形的剖分」

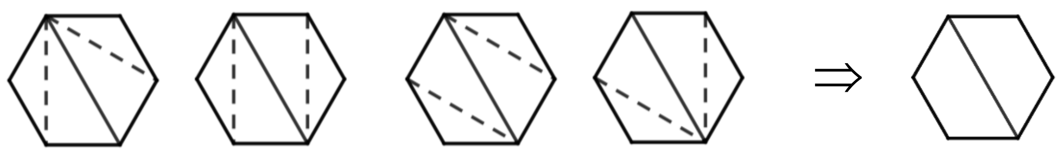
以及「兩個四邊形和$n-4$個三角形的剖分」兩類的圖形，前者的集合為$A_{(n,3)}$，後者為$A_{(n,2,2)}$，元素個數分別為$a_{(n,3)}$和$a_{(n,2,2)}$。考慮把$n+2$邊形剖分成n個三角形的圖形在去掉其中兩條對角線後，會變成一個利用$n-3$條對角線剖分的一個五邊形和$n-3$個三角形，或兩個四邊形和$n-2$個三角形的$n+2$邊形。而要從$n-1$條對角線中去掉兩條對角線會有$\binom{n-1}{2}$種選擇。以$n=4$作為舉例，一個六邊形$(4+2=6)$的三角剖分有 3 條對角線，而去掉兩條對角線的選擇有$\binom{4-1}{2}=3$種可能，如右圖。



但在把$n+2$邊形的三角剖分圖形去掉兩條對角線時，每c_3=5種去掉兩條對角線的情形會得到同一個把$n+2$邊形剖分成一個五邊形和$n-3$個三角形的剖分圖形。以$n=4$作為舉例：



每$c_2 \times c_2 = 2\times 2 = 4$個圖會對應到同一個把$n+2$邊形剖分成兩個四邊形和$n-2$個三角形的圖形。以$n=4$作為舉例：



從上述可以得到引理 1 中c_n和$a_{(n,2,2)}$、$a_{(n,3)}$的關係式。

引理 1：$\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot c_n = 5a_{(n,3)} + 4a_{(n,2,2)}$

接下來，利用一、的(二)、1 和(三)、中列舉的結果，可比較$a_{(n,3)}$和$a_{(n,2,2)}$之間的關係：

n	$a_{(n,3)}$	$a_{(n,2,2)}$	$\frac{a_{(n,2,2)}}{a_{(n,3)}}$
3	1	0	0

4	6	3	$\frac{1}{2}$
5	28	28	$1=\frac{2}{2}$
6	120	180	$\frac{3}{2}$

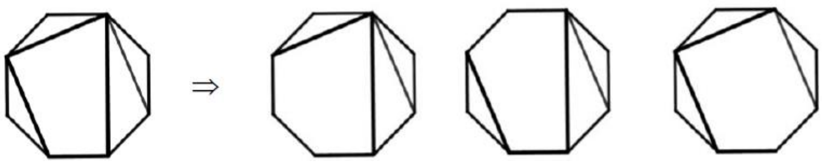
從上方表格可推測$\frac{a_{(n,2,2)}}{a_{(n,3)}}=\frac{n-3}{2}$。如果此關係成立，再由引理 1，即可得$a_{(n,3)}$和$a_{(n,2,2)}$的值：假設$\frac{a_{(n,2,2)}}{a_{(n,3)}}=\frac{n-3}{2}$，令$a_{(n,3)}=2k$、$a_{(n,2,2)}=(n-3)k$，則由引理 1：

$c_n\times\frac{(n-1)(n-2)}{2}=5a_{(n,3)}+4a_{(n,2,2)}=2(2n-1)k$，得$k=\frac{c_n(n-1)(n-2)}{4(2n-1)}$。因此

$a_{(n,3)}=2k=\frac{c_n(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}=\binom{2n-2}{n+1}$，$a_{(n,2,2)}=\frac{n-3}{2}\binom{2n-2}{n+1}$。但目前暫時無法推導出此猜測，因此由其他的進路推導$a_{(n,3)}$和$a_{(n,2,2)}$的值。

(三)、 推導$a_{(n,3)}$和$a_{(n,2,2)}$的一般式

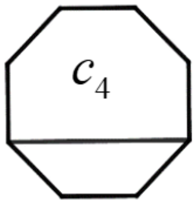
在討論將$n+2$邊形剖分成一個五邊形和$n-3$個三角形的情況前，先將剖分成一個四邊形和$n-2$個三角形的圖形類型仔細分類。因為對每種把$n+2$邊形剖分成一個四邊形和$n-2$個三角形的圖形，其中的四邊形都有與$n+2$邊形不共邊的邊，也就是在$n+2$邊形裡的對角線。而當把四邊形上是$n+2$邊形的對角線的一邊去掉，與此對角線相接的三角形就會和四邊形合併形成一個五邊形。則該圖形會變成由一個五邊形和$n-3$個三角形所組成的圖形。所以當「一個被剖分成一個四邊形和$n-2$個三角形的$n+2$邊形」裡的四邊形有t條邊是$n+2$邊形裡的對角線，則該圖形能對應到t種「去掉一條對角線後變成一個五邊形和$n-3$個三角形所組成的圖形」，也就等同於可以對應到t種$A_{(n,3)}$中的圖形。以下圖為例：對於一個四邊形有三邊為對角線的剖分圖形，在去掉一條四邊形是$n+2$邊形中的對角線的邊，形成一個五邊形和$n-3$個三角形的剖分圖形，共有三種方法。



當$n\geq 3$時，對每個利用不相交的對角線，剖分成一個四邊形和$n-2$個三角形的$n+2$邊形的圖形，依照四邊形有幾個邊為$n+2$邊形的對角線，能分成四種類型來討論：

1、 四邊形有三邊在$n+2$邊形上，有一邊為對角線

當四邊形有三邊落在$n+2$邊形的三個相鄰邊上，則只有一邊是對角線，也就代表只有一個三角剖分的區域。而原本的$n+2$邊形能剖分成n個三角形，可是因為要放一個四邊形，加上四邊形能夠代表兩個三角形合併而成的圖形,所以剩下的剖分區域的三角形數共有$n-2$個。因此我們可以得到在此類圖形下，唯一的三角剖分區域的圖形數量為$n-2$個三角形的三角剖分圖形數量，即是c_{n-2}。而因為有三邊在$n+2$邊形的邊上、有一邊為$n+2$邊形的對角線的四邊形，它在$n+2$邊形上的位置會有$n+2$種，所以我們能得到此類的圖形有$(n+2)\times c_{n-2}$個。以$n=6$為例：對於把八邊形剖分成一個四邊形和 4 個三角形的圖形，因為四邊形的三邊會位在$n+2$邊形的三個相鄰邊上，所以四邊形的位置有8種選擇，而要剖分成 4 個三角形的六邊形有$c_4=14$種選擇。所以八邊形剖分成一個四邊形和 4 個三角形的圖形數量總共有$8\times 14=112$種。

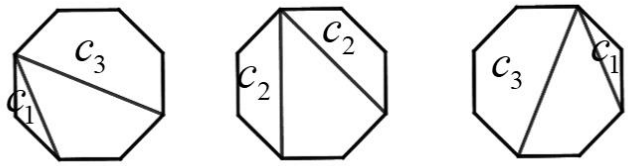


2、 四邊形有兩邊為$n+2$邊形上對角線，另兩邊落在$n+2$邊形的邊上

此時代表圖形是由一個四邊形和兩個區域的三角剖分組成。而由(1)、 可知，三角剖分區域中的三角形數量共會有$n-2$個。所以對於兩個有順序的三角剖分區域，它們的組合數量會是$(n+2)(c_1c_{n-3}+c_2c_{n-4}+......+c_{n-3}c_1)=\sum_{k=1}^{n-3}(n+2)c_kc_{n-2-k}=(n+2)\times(c_{n-1}-2c_{n-2})$ 。而對於此種類型的圖形，又能再區分成兩種圖形：落在$n+2$邊形上的兩邊為$n+2$邊形的相鄰邊或者不相鄰邊。以$n=6$為例：

(1)、 在八邊形中，四邊形有兩邊落在八邊形的相鄰兩邊上：

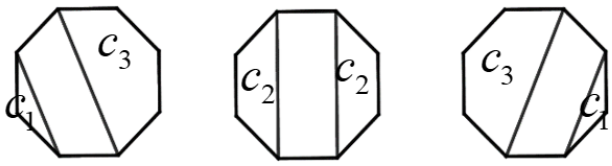
當四邊形在$n+2$邊形上的兩邊相鄰時，相鄰兩邊的位置會有$n+2$種。以右圖為例，在固定好相鄰兩邊的位置時，四邊形的兩側分別為一個三角形和一個五邊形的三角剖分，或兩側各一個四邊形的三角剖分，或一個五邊形和一個三角形的三角剖分。所以在把八邊形剖分成一個四邊形和 4 個三角形的圖



形，而四邊形有相鄰的兩邊在八邊形上的圖形有 $(\sum_{k=1}^{3} c_k c_{4-k}) \times 8 = (c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1) \times 8$ 個。又從卡特蘭數遞迴式可知 $c_5 = c_0c_4 + c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1 + c_4c_0$，故 $(c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1) \times 8 = (c_5 - 2c_4) \times 8$。

同理可得把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形和 $n-2$ 個三角形，且四邊形有相鄰兩邊在 $n+2$ 邊形的邊上的圖形，四邊形兩側分別會有 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 邊形的三角剖分，其中 $k=1\sim n-3$，故總數量有 $(n+2)\times(c_{n-1}-2c_{n-2})$ 個。

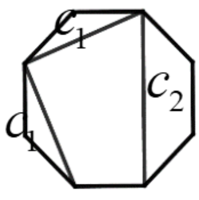
(2)、 在八邊形中，四邊形有兩邊落在八邊形不相鄰的兩邊上：



固定四邊形其中一條在八邊形上的邊。以右圖為例，固定底邊，而另個也在八邊形上的邊因為不可以和已固定的邊相鄰，故有三個擺放位置，而此時四邊形的兩側分別為一個和三個三角形的三角剖分，或兩側各為兩個三角形的三角剖分，或三個和一個三角形的三角剖分。故在固定一邊為四邊形的其中一邊的位置，且符合四邊形有兩邊在八邊形上而不相鄰的圖形數量有 c_5-2c_4 個。固定邊可在8種位置，但因每個圖形的四邊形有兩條邊在八邊形上，表示每一個圖形會被算兩次。所以此時的圖形數量有 $(c_5-2c_4)\times 8 \div 2$ 個。同理可得把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形和 $n-2$ 個三角形，且四邊形有兩邊落在 $n+2$ 邊形的不相鄰邊上的圖形數量是 $\frac{(n+2)\times(c_{n-1}-2c_{n-2})}{2}$。

將上述兩式加總可得四邊形有兩邊與 $n+2$ 邊形共邊的數量為 $\frac{3(n+2)(c_{n-1}-2c_{n-2})}{2}$。

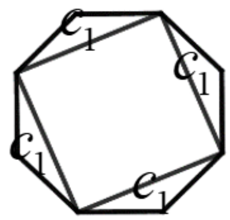
3、 四邊形有三邊在 $n+2$ 邊形的對角線，有一邊落在 $n+2$ 邊形的邊上。



以 $n=6$ 為例，先固定四邊形在八邊形上的唯一一條邊。則另外三條對角線會把八邊形剖成扣除原本的四邊形之外的三個區塊。以右圖為例，以八邊形底部的邊作為固定邊，則被固定一邊的四邊形把其餘的八邊形切成左、上、右三塊。而這三塊最後要被剖成 4 塊三角形。因為每一個區塊至少需要有一個三角形，所以單一區塊最多有 2 個三角形，也就是一個四邊形。因為從 2、計算四邊形有兩邊與 $n+2$ 邊形共邊的時候，得知當兩側的區域共需剖分成 k 個三角形有 $(c_{k+1}-2c_k)$ 種方式。所以利用上述的結果，先固定左邊剖分區塊的邊數，再把它乘上其餘兩塊剖成三角形的方法數。所以

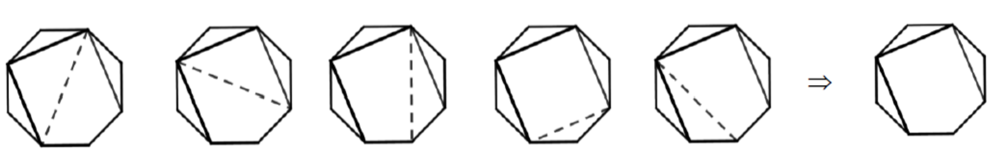
把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形和 $n-2$ 個三角形，且四邊形有一邊落在 $n+2$ 邊形的邊上的圖形，數量會有 $(n+2)[c_1(c_{n-2}-2c_{n-3})+c_2(c_{n-3}-2c_{n-4})+c_3(c_{n-4}-2c_{n-5})+......+c_{n-4}(c_3-2c_2)]$ 個。經由計算，上式可化簡為 $(n+2)(c_n-4c_{n-1}+3c_{n-2})$ 。

4、 四邊形有四邊是 $n+2$ 邊形的對角線，沒有邊落在 $n+2$ 邊形上：



此種類型的圖形計算，只要把所有把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形和 $n-2$ 個三角形的圖形數總和 $a_{(n,2)}$ ，扣掉上方所有四邊形與多邊形有共邊的圖形數量，即是四邊形的四邊皆為 $n+2$ 邊形的對角線的圖形數量。即 $[c_n\times\frac{n-1}{2}-(n+2)\times c_{n-2}-\frac{3(n+2)(c_{n-1}-2c_{n-2})}{2}-(n+2)(c_n-4c_{n-1}+3c_{n-2})]$ 個。上式可化簡為 $\frac{1}{4}(n+2)(c_{n+1}-6c_n+10c_{n-1}-4c_{n-2})$ 。

把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形和 $n-2$ 個三角形，且四邊形有三邊都在 $n+2$ 邊形的邊上，有一邊是對角線的圖形，數量會有 $(n+2)c_{n-2}$ 個，拿掉四邊形上恰為 $n+2$ 邊形的對角線的邊，可以變成 $(n+2)\times c_{n-2}\times 1$ 種 $A_{(n,3)}$ 裡的圖形；而四邊形有兩邊與 $n+2$ 邊形共邊，有兩邊是對角線的數量有 $\frac{3(n+2)(c_{n-1}-2c_{n-2})}{2}$ 個，拿掉四邊形上為 $n+2$ 邊形的對角線的一條邊，可以變成 $\frac{3(n+2)(c_{n-1}-2c_{n-2})}{2}\times 2$ 種 $A_{(n,3)}$ 裡的圖形；四邊形一邊在 $n+2$ 邊形的邊上，有三邊是對角線的圖形，數量會有 $(n+2)(c_n-4c_{n-1}+3c_{n-2})$ 個，拿掉四邊形上為 $n+2$ 邊形的對角線的一條邊，可以變成 $(n+2)(c_n-4c_{n-1}+3c_{n-2})\times 3$ 種 $A_{(n,3)}$ 裡的圖形；而四邊形沒有邊在 $n+2$ 邊形上，有四邊為對角線有 $\frac{1}{4}(n+2)(c_{n+1}-6c_n+10c_{n-1}-4c_{n-2})$ 個，拿掉四邊形上是 $n+2$ 邊形的對角線的一條邊，可以變成 $\frac{1}{4}(n+2)(c_{n+1}-6c_n+10c_{n-1}-4c_{n-2})\times 4$ 種 $A_{(n,3)}$ 裡的圖形。但因把一個五邊形剖分成一個四邊形和一個三角形有五種可能，所以會有五種 $A_{(n,2)}$ 中的圖形在要變成 $A_{(n,3)}$ 中的圖形的時候，對應到 $A_{(n,3)}$ 中相同的圖形。以下圖為例：



可得把$n+2$邊形剖分成一個五邊形和$n-3$個三角形的圖形數量$a_{(n,3)}$，與卡特蘭數c_n的

關係為 $\begin{aligned}5a_{(n,3)}&=(n+2)c_{n-2}+2\times\frac{3}{2}(n+2)(c_{n-1}-2c_{n-2})+3(n+2)(c_n-4c_{n-1}+3c_{n-2})\\&+4\times[\frac{1}{4}(n+2)(c_{n+1}-6c_n+10c_{n-1}-4c_{n-2})]\end{aligned}$，將$c_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ 代入，

整理後可得$a_{(n,3)}=\dbinom{2n-2}{n+1}$。我們將這個結果寫成定理 2。 Q.E.D.

定理 2：把$n+2$邊形剖分成 1 個五邊形和$n-3$個三角形的剖分數為$a_{(n,3)}=\dbinom{2n-2}{n+1}$。

由引理 1，得$a_{(n,2,2)}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}c_n-5a_{(n,3)}\right]=\dfrac{n-3}{2}\dbinom{2n-2}{n+1}$ 。 Q.E.D.

由此可得到$a_{(n,3)}$的一般式，且$\dfrac{a_{(n,2,2)}}{a_{(n,3)}}=\dfrac{n-3}{2}$。所以 2、的推測是正確的。

定理 3：$n+2$邊形利用不相交的對角線分割成 2 個四邊形和$n-4$個三角形的剖分數為 $a_{(n,2,2)}=\dfrac{n-3}{2}\dbinom{2n-2}{n+1}$。

(四)、 把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$個三角形的剖分圖形數量

我們可以用上述 3、方法導出把$n+2$邊形剖分成一個六邊形和$n-4$個三角形的圖形數量、把$n+2$邊形剖分成一個七邊形和$n-5$個三角形的圖形數量……，進而歸納出如何計算把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$個三角形的圖形數量。為了討論到所有的情形，所以使用卡特蘭數的冪級數$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 導出一般化的情形。定義$[x^n]f(x)$的值是一個多項式或冪級數$f(x)$的第n項的係數的值。以下是推導的過程。

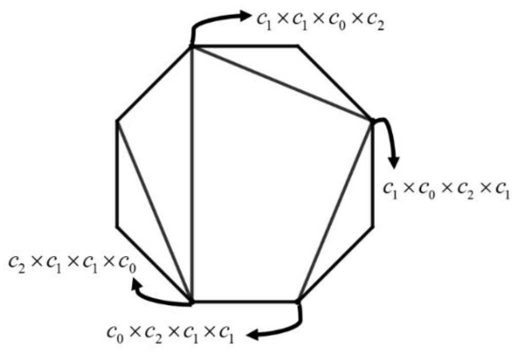
1、 由$k+2$邊形有t條邊是$n+2$邊形的對角線，所產生的三角剖分圖形區域組合數量

對於每一個把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$個三角形的圖形集合中，會有 1 ~ $k+2$條邊是$n+2$邊形的對角線。而對於$n+2$邊形中的$k+2$邊形有t條邊是$n+2$邊形的對角線的時候，即代表圖形中有t個區域的三角剖分($1\le t\le k+2, t\in\mathbb{N}$)。為了計算把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$個三角形，且圖形中有$t$個三角剖分區域的圖形中，此$n-k$個三角形被分成$t$個三角剖分區域的三角剖分組合數量。因此定義$[x^{n-k}]g_t(x)$是把$n-k$個三角形分成$t$塊有序的剖分區域且每個區域至少要有一個三角形的可能數量。而因為當$t=1$時，$g_1(x)$的

x^{n-k} 項係數等於把 $n-k+2$ 邊形剖成 $n-k$ 個三角形的三角剖分圖形數量。因此能得到 $g_1(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+......=C(x)-1$ 。

當 $t=2$ 時，$g_2(x)$ 的 x^{n-k} 項係數等於把 $n-k$ 個三角形分成兩個剖分區域的可能數量，即是把分別兩塊三角剖分數量相乘的總和。因此可得到 $[x^n]g_2(x)=\sum_{i=1}^{n-1}c_ic_{n-i}$ ，又 $g_2(x)=\sum_{i=1}^{n-1}c_ic_{n-i}x^n=(c_1c_1)x^2+(c_1c_2+c_2c_1)x^3+(c_1c_3+c_2c_2+c_3c_1)x^4+......=\left(C(x)-1\right)^2$ ，同理，可推得 $g_t(x)=\left(C(x)-1\right)^t$ 。因此，把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形，且圖形中有 t 個三角剖分區域的圖形中，此 $n-k$ 個三角形被分成 t 個三角剖分區域的三角剖分組合數量是 $[x^{n-k}]\left(C(x)-1\right)^t$ 。

在把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形，且圖形中有 t 個三角剖分區域的圖形中，$n+2$ 邊形的邊上會有 t 個剖分區域和 $k+2-t$ 個 $k+2$ 邊形的邊。所以從 $n+2$ 邊形上的任一點出發，順時鐘排列這 t 個有序剖分區域和 $k+2-t$ 個 $k+2$ 邊形的邊，共 $k+2$ 樣東西，情形有 $\binom{k+2}{t}$ 種。因為在 $n+2$ 邊形上的每一個點都能作為三角剖分區域的排列起始點，所以總數是 $(n+2)\binom{k+2}{t}$ 。但對於一個圖形來說，只要是從 $k+2$ 邊形上的點出發，就能得到一種跟該圖形一樣的圖形(如右圖)。故在 $(n+2)\binom{k+2}{t}$ 個圖中，每一種圖形會重複出現 $k+2$ 次。而把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形，且圖形中有 t 個三角剖分區域的圖形有 $\frac{n+2}{k+2}\binom{k+2}{t}[x^{n-k}]\left(C\left(x\right)-1\right)^t$ 個。



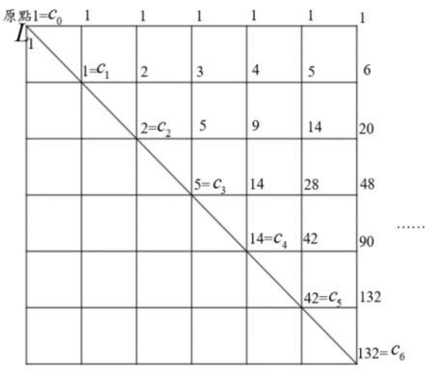
由(三)、可知，當圖形有 t 個三角剖分區域，代表 $k+2$ 邊形有 t 條邊是 $n+2$ 邊形的對角線，所以該圖形在拿掉這 t 條邊中的任意一條邊後，就能形成把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+3$ 邊形和 $n-k-1$ 個三角形的剖分圖形，所以在上述的 $\frac{n+2}{k+2}\binom{k+2}{t}\times[x^{n-k}]\left(C\left(x\right)-1\right)^t$ 個圖形中，夠在拿掉 t 條邊中的一條邊後，對到 $\frac{n+2}{k+2}\binom{k+2}{t}[x^{n-k}]\left(C\left(x\right)-1\right)^t t=(n+2)\binom{k+1}{t-1}[x^{n-k}]\left(C\left(x\right)-1\right)^t$ 個把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+3$ 邊形和 $n-k-1$ 個三角形的剖分圖形。

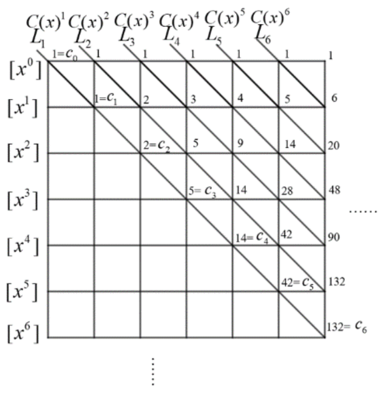
2、 在$1 \le t \le k+2$時的圖形數量總和

由上述結論可知，把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$個三角形，且圖形中有t個三角剖分區域，這些圖形能對應到$(n+2)\binom{k+1}{t-1}[x^{n-k}]\left(C(x)-1\right)^t$個把$n+2$邊形剖分成一個$k+3$邊形和$n-k-1$個三角形的剖分圖形。利用生成函數，定義生成函數$f_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{(n,k)}x^n$（當$n<k$時，$a_{(n,k)}$值為零）。而從(三)、中，可知，計算$a_{(n,k+1)}$的步驟是先將把$n+2$邊形剖分成一個$k+3$邊形和$n-(k+1)$個三角形，且圖形中有$t$個三角剖分區域的圖形數量在乘上$t$之後，把$1 \le t \le k$的對應圖形數量加總，最後要再除以$k+3$，也就是每一個把$n$邊形剖分成一個$k+3$邊形和$n-k-1$個三角形的圖形會在計算過程中重複出現的次數。而在計算過程中，結合卡特蘭數的生成函數$C(x)$的性質：$C(x)-1=xC(x)^2$。因此我們可以得知，

$$a_{(n,k+1)}=\sum_{t=1}^{k}\frac{n+2}{k+3}\binom{k+1}{t-1}[x^{n-k}]g_t(x)=\sum_{t=1}^{k+2}\frac{n+2}{k+3}\binom{k+1}{t-1}[x^{n-k}]\left(C(x)-1\right)^t=\frac{n+2}{k+3}[x^{n-k}]\left(xC(x)^{k+3}\right)$$，因此$a_{(n,k)}=\frac{n+2}{k+2}[x^{n-k}]C(x)^{k+2}$ 。

3、 $C(x)^k$的一般項與$a_{(n,k)}$的值





在得到$a_{(n,k)}=\frac{n+2}{k+2}[x^{n-k}]C(x)^{k+2}$後，能得知只要能得到，就能得到$a_{(n,k)}$的值。以下是對$C(x)^{k+2}$中第$x^{n-k}$項係數的探討。在參考資料[1]中，得知有另一種能夠求得卡特蘭數c_n的方式：在一個畫有格子線的正方形中，定義正方形最左上角的點為原點，並且由原點往斜下方45度畫一條斜線L_1。則由這個畫有格子線的正方形的原點出發，只能走水平或垂直的路線，且只能走斜線的右上半部的格子點，不可以越過斜線。則能夠走到在斜線上的格子點的所有路徑方法數，就會是卡特蘭數的值，如左圖所示。令L_k是將斜線L_1往右平移$k-1$個單位的斜直線，則在直線L_k上距離最上方水平線n個單位的點，所對

應到的數字即是$C(x)^k$的第 n 項係數（常數項即為在正方形上邊的係數）。即斜線L_k上的數字是冪級數$C(x)^k$常數項、x 項、 x^2項、 x^3項、…的係數。以下是對於上述觀察的證明，以及$C(x)^k$一般項的推導：

引理 2： $C(x)^2 = \dfrac{C(x)-1}{x}$

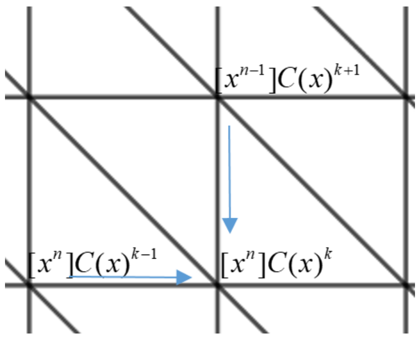
結合卡特蘭數的遞迴式$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$ 以及生成函數$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ ，能發現

$$C(x)^2 = c_0c_0 + (c_0c_1 + c_0c_1)x + (c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0)x^2 + ... = c_1 + c_2x^1 + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + ... = \frac{C(x)-1}{x}$$

在得到$C(x)^2 = \dfrac{C(x)-1}{x}$後，能夠經過同乘以$C(x)^k$得到以下引理：

引理 3： $\dfrac{C(x)^{k+1} - C(x)^k}{x} = C(x)^{k+2}$

觀察捷徑路線後可以得知，到達一點的路線數即是該點左方和上方的點的路線數相加。而此三點分別位在三條相鄰的斜線上，每組三個點的關係式和上述引理 3 相符合。因此能確定對於每一條斜線L_k上的數字，都能依序的對應到$C(x)^k$中的係數。在得到$C(x)^k$的遞迴關係



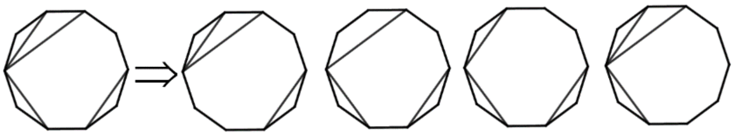
後，接著可由數學歸納法，證明$C(x)^k$的一般式。由卡特蘭數冪級數$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} x^n$ ，和引理 2，可得$C(x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n+2}\dbinom{2n+1}{n} x^n$ 。透過引理 3 卡特蘭數的遞迴式，能再得到$C(x)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n+3}\dbinom{2n+2}{n} x^n$ 。在確定$1 \le k \le 3$的值後，假設$C(x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{k}{n+k}\dbinom{2n+k-1}{n} x^n$ 、$C(x)^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{k+1}{n+k+1}\dbinom{2n+k}{n} x^n$ 並帶回引理 3，能得到$C(x)^{k+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{k+2}{n+k+2}\dbinom{2n+k+1}{n} x^n$ ，與假設符合。故由數學歸納法得證$C(x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{k}{n+k}\dbinom{2n+k-1}{n} x^n$ 。在得到$C(x)^k$第 n 項係數的一般式後，帶回$a_{(n,k)} = \dfrac{n+2}{k+2}[x^{n-k}]C(x)^{k+2}$ ，能得到$a_{(n,k)} = \dbinom{2n-k+1}{n+1}$。故得知把$n+2$邊形剖分成一個$k+2$邊形和$n-k$個三角形的剖分圖形數量是$\dbinom{2n-k+1}{n+1}$。 Q.E.D.

定理 4：把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形的剖分圖形數量是 $a_{(n,k)}=\binom{2n-k+1}{n+1}$

(五)、　把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形、和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形數

在得到把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形的剖分圖形數量值 $\binom{2n-k+1}{n+1}$ 後，可以從圖形中對角線的關係導出把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形、和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形數量。根據名詞定義(二)，集合 $A_{(n,k)}$ 是把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形的所有可能圖形所構成的集合，且 $a_{(n,k)}=\left|A_{(n,k)}\right|$。而 $a_{(n,m,k)}$ 是把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $m+2$ 邊形、一個 $k+2$ 邊形以及 $n-m-k$ 個三角形的所有剖分圖形數量。因此，將 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形以及 $n-k-2$ 個三角形時，剖分圖形的數量可以記為 $a_{(n,2,k)}$。則對於一個 $A_{(n,k)}$ 集合裡的圖形，也就是利用 $n-k$ 條對角線把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形的剖分圖形而言，只要拿掉 $n-k$ 條對角線中的任意一條對角線，能得以下兩種圖形的其中一種：「利用 $n-k-1$ 條對角線，把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+3$ 邊形和 $n-k-1$ 個三角形的剖分圖形」，或「利用 $n-k-1$ 條對角線，把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形」。

以下圖為例，對於這一個利用四條對角線把十邊形剖分成一個六邊形和四個三角形的剖分圖形而言，在拿掉圖形中的其中一條對角線後，即會得到「利用 3 條對角線，把十邊形剖分成一個七邊形和 3 個三角形的剖分圖形」，或「利用 3 條對角線，把十邊形剖分成一個四邊形、一個六邊形和兩個三角形的剖分圖形」。



綜合上述可知，對於每一個 $A_{(n,k)}$ 集合裡的圖形，都能對應到 $n-k$ 個把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+3$ 邊形和 $n-k-1$ 個三角形的剖分圖形或把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形。但是對於把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+3$ 邊形和 $n-k-1$ 個三角形的剖分圖形以及把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形來說，每一個圖形都會重複對應到固定的數量：對於把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+3$ 邊形和 $n-k-1$ 個三角形的剖分圖形來說，每一個圖形會重複的數量即是把 $k+3$ 邊形剖分成一個

$k+2$ 邊形和一個三角形的剖分圖形數量，顯然能得知值等於 $k+3$。而對於把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形而言，每一個圖形會重複的數量即是四邊形的對角線數，也就是 2。因此，令把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形數量為 $a_{(n,2,k)}$，則綜合上述可以得到 $a_{(n,2,k)}$ 與 $a_{(n,k)}$、$a_{(n,k+1)}$ 的關係式：$(n-k)a_{(n,k)}=(k+3)a_{(n,k+1)}+2a_{(n,2,k)}$。再帶入 $a_{(n,k)}$、$a_{(n,k+1)}$ 的一般式後，能經由計算得到把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形($k\geq 2$)、和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形數量 $a_{(n,2,k)}=(n-k-1)\binom{2n-k}{n+1}=(n+2)\binom{2n-k}{n+2}$。 Q.E.D.

定理 5：把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形和 $n-k-2$ 個三角形的剖分圖形數量

$$a_{(n,2,k)}=(n+2)\binom{2n-k}{n+2}$$

(六)、　把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $m+2$ 邊形、一個 $k+2$ 邊形、和 $n-k-m$ 個三角形的圖形數量

從(五)、的內容中知，可利用特定條件的剖分圖形，拿掉 $n+2$ 邊形中的對角線的方法，得把 $n+2$ 邊形剖分成很多多邊形和很多三角形的圖形數量。但這樣無法得到規律的一般式。所以我利用 4、中，使用生成函數的方式計算把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $m+2$ 邊形、一個 $k+2$ 邊形、和 $n-k-m$ 個三角形的剖分圖形數量。

在(四)、3、 中得到結果 $a_{(n,k)}=\dfrac{n+2}{k+2}[x^n]\left(x^kC(x)^{k+2}\right)$。而在觀察圖形後，能得一個更直觀的看法：對於一個把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形的剖分圖形，同樣從 $n+2$ 邊形中的一個點出發，順時鐘放三角剖分區域或者一條邊，總和共是 $k+2$ 個，並且在放完之後回到原本一開始出發的點。這樣從一個點出發走 $k+2$ 步後，中間就會形成一個 $k+2$ 邊形了。而因為這 $k+2$ 個東西共含 $n-k$ 個三角形，而若放的是邊而不是三角剖分區域，就代表那裏沒有三角形，也就可用 $c_0=1$ 表示。因計算三角剖分各區域的組合數量時，是把卡特蘭數都相乘，又共要有 $n-k$ 個三角形，故三角剖分區域的組合數為 $C(x)^{k+2}$ 中 x^{n-k} 項的係數。而因中間的 $k+2$ 邊形裡面沒有三角形，但仍佔了 k 個三角形的空間，所以要乘上 x^k。故可得把 $n-k$ 個三角形分到 $k+2$ 個有序的三角剖分區域，這裡所指的三角剖分區域包含沒有三角形的區域，此

時的組合數量是$[x^n]\left(x^kC(x)^{k+2}\right)$。因為$n+2$邊形的每一個點都要跑一遍，所以要乘$n+2$，但對每個圖而言，只要從$k+2$邊形上的點出發，就可得一相同的圖形，故每個圖會重複出現$k+2$次。就可得$a_{(n,k)}=\dfrac{n+2}{k+2}[x^n]\left(x^kC(x)^{k+2}\right)$。因此可得生成函數$f_k(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{k+2}C(x)^{k+2}}{k+2}\right)$。並可用類似方法導出把$n+2$邊形剖成一個$m+2$邊形、一個$k+2$邊形和$n-k-m$個三角形的剖分圖形數量。為了不考慮重複情況，所以先考慮$k\neq m$時，可先以$k+2$邊形為主體，也就是從$n+2$邊形的一個點出發，並且走$k+2$步，形成一個$k+2$邊形。其中第一步放的是把多邊形剖分成一個$m+2$邊形和$n-m$個三角形的圖形，剩下的$k+1$步則是三角剖分區域或邊。定義$a_{(n,m,k)}$為把$n+2$邊形剖分成一個$m+2$邊形、一個$k+2$邊形和$n-m-k$個三角形的所有圖形數量，而$f_{(k,m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{(n,m,k)}x^n$。因為每一個點都要跑一遍，所以一樣每一項都要乘上$n+2$，故可得$f_{(k,m)}(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^kf_m(x)C(x)^{k+1}x^2\right)$。經由計算，可得$f_{(k,m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\binom{2n-k-m+2}{n+2}x^n$，$a_{(n,m,k)}=(n+2)\binom{2n-k-m+2}{n+2}$。因此我們得到把$n+2$邊形剖分成一個$m+2$邊形、一個$k+2$邊形、和$n-k-m$個三角形的剖分圖形數量$a_{(n,m,k)}=(n+2)\binom{2n-k-m+2}{n+2}$。 Q.E.D.

定理 6：在$k\neq m$的情況下，把$n+2$邊形剖分成一個$m+2$邊形、一個$k+2$邊形、和$n-k-m$個三角形的剖分圖形數量$a_{(n,m,k)}=(n+2)\binom{2n-k-m+2}{n+2}$

但在$k=m$時，因對於每一個$A_{(n,k,k)}$集合裡的圖形來說，除了原本就會重複的情況之外，兩個$k+2$邊形都會在計算過程中當到主體，總數量要再除以 2，故可得此時的生成函數是$f_{(k,k)}(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^kf_m(x)C(x)^{k+1}x^2}{2}\right)$，而圖形數量$a_{(n,k,k)}=\dfrac{n+2}{2}\binom{2n-2k+2}{n+2}$。 Q.E.D.

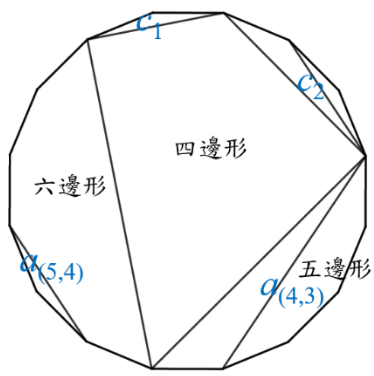
定理 7：把$n+2$邊形剖成兩個$k+2$邊形和$n-2k$個三角形的圖形數$a_{(n,k,k)}=\dfrac{n+2}{2}\binom{2n-2k+2}{n+2}$

(七)、　把$n+2$邊形剖分成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2 邊形、和$n-k_1-k_2-k_3$個三角形的剖分圖形數量的生成函數

由 6、中推導把$n+2$邊形剖分成一個$m+2$邊形、一個$k+2$邊形、和$n-k-m$個三角形的圖形數量生成函數的方式，可由類似方法導出把$n+2$邊形剖分成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形、和$n-k_1-k_2-k_3$個三角形的剖分圖形數量的生成函數。同樣先討論k_1、k_2、k_3兩兩相異的情況，以k_1+2邊形為主體。此時有兩種情形：k_2+2邊形、k_3+2邊形有可能分別在對於k_1+2邊形而言的不同的區域，或者都在對於k_1+2邊形而言的同一個區域。

1、　k_2+2邊形、k_3+2邊形分別在對於k_1+2邊形而言的不同的區域

在以k_1+2邊形為主體時，由$n+2$邊形的一點出發，在走一圈時擺放剖分區域的組合方式是一個「由一個k_2+2邊形和多三角形組成的圖形」的區域、一個「由一個k_3+2邊形和多三角形組成的圖形」的區域、以及k_1個三角剖分區域。此時考慮擺放順序，代表有k_1+2個位置，依序選一個位置放「由一個k_2+2邊形和多三角形組成的圖形」的區域，和另一個位置放「由一個k_3+2邊形和多三角形組成的圖形」的區域。因為每個點都要走一次，但對每個圖而言，只要從k_1+2邊形上的點出發，都能夠得到一次該圖形，所以每一個圖都會重複出現k_1+2次。所以此類圖形數量是$[x^n]\left(x^{k_1} f_{k_2}(x) f_{k_3}(x) C(x)^{k_1}\right)(n+2)\dfrac{(k_1+2)(k_1+1)}{k_1+2}$。



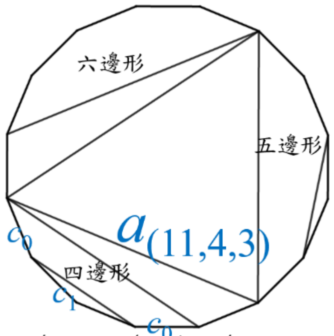
五邊形和六邊形在四邊形的不同側

如右圖，對於一個把十六邊形剖分成一個四邊形、一個五邊形、一個六邊形以及五個三角形的剖分圖形來說，以四邊形為主體，則與四邊形相接的四個剖分區域會有兩塊三角剖分區域，以及一塊「由一個五邊形和多個三角形組成的剖分」和「由一個六邊形和多個三角形組成的剖分」。則此時對於把十六邊形剖分成一個四邊形、一個五邊形、一個六邊形以及五個三角形的剖分圖形，且五邊形和六邊形分別在四邊形的不同側時

的圖形數量會是$[x^n]16\left(x^2 f_3(x) f_4(x) C(x)^2\right)\dfrac{4\cdot 3}{4}=16\cdot 3[x^n]\left(x^2 f_3(x) f_4(x) C(x)^2\right)$

2、 k_2+2邊形、k_3+2邊形都在對於k_1+2邊形而言的同一個區域

如果這k_1+2個邊的區塊是分成一個「由一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形和多三角形組成的圖形」的區域，和k_1+1個三角剖分區域。此時從一個點出發的時候先放把多邊形剖分成一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形和很多三角形的圖形，再放k_1+1個三角剖分區域，就不會重複。所以這類的圖形數量是$(n+2)[x^n]\left(x^{k_1} f_{(k_2,k_3)}(x) C(x)^{k_1+1}\right)$。以左圖為例，對於一個把十六



五邊形和六邊形在四邊形的同側

邊形剖分成一個四邊形、一個五邊形、一個六邊形以及五個三角形的剖分圖形來說，以四邊形為主體，則與四邊形相接的四個剖分區域會有三塊三角剖分區域，以及一塊「由一個五邊形、一個六邊形和多個三角形組成的剖分」。則此時，對於把十六邊形剖分成一個四邊形、一個五邊形、一個六邊形以及五個三角形的剖分圖形，且五邊形和六邊形均在四邊形同側的圖形數$16[x^n]\left(x^2 f_{(3,4)}(x) C(x)^3\right)$。

因此把$n+2$邊形剖分成$n-k_1-k_2-k_3$個三角形和一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形的圖形數$a_{(n,k_1,k_2,k_3)}=(n+2)[x^n]\left((k_1+1)x^{k_1}\left(f_{k_2}(x) f_{k_3}(x) C(x)^{k_1}\right)+\left(f_{(k_2,k_3)}(x) C(x)^{k_1+1}\right)\right)$，

而圖形數量生成函數$f_{(k_1,k_2,k_3)}(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx}\left\{\left((k_1+1)x^{k_1} f_{k_2}(x) f_{k_3}(x) C(x)^{k_1}+x^{k_1} f_{(k_2,k_3)}(x) C(x)^{k_1+1}\right)x^2\right\}$

經由計算可以得到$f_{(k_1,k_2,k_3)}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)\binom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$。 Q.E.D.

> 定理 8：$n+2$邊形剖分成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形和$n-k_1-k_2-k_3$個三角形的圖形數$a_{(n,k_1,k_2,k_3)}=(n+2)(n+3)\dbinom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$ 其中k_1、k_2、k_3兩兩相異。

在k_1、k_2、k_3並非兩兩相異的情況下，討論兩種情況：

如果k_1、k_2、k_3有兩個一樣，一個不一樣，在不失一般性的情況下，令$k_1=k_2\neq k_3$，以

k_1+2 邊形為主體。對於每個圖形，k_1+2 邊形可以跑到兩種位置都能構成相同的圖形，所以

此時生成函數會是 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\left((k_1+1)x^{k_1}f_{k_2}(x)f_{k_3}(x)C(x)^{k_1}+x^{k_1}f_{(k_2,k_3)}(x)C(x)^{k_1+1}\right)}{2}\cdot x^2\right\}$ ，而一般式

$$a_{(n,k_1,k_2,k_3)}=\frac{(n+2)(n+3)}{2}\binom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$$ 。

> 定理 9： $n+2$ 邊形利用不相交的對角線剖分成兩個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、和
>
> $n-2k_1-k_2$ 個三角形的剖分圖形數 $a_{(n,k_1,k_1,k_2)}=\dfrac{(n+2)(n+3)}{2}\dbinom{2n-2k_1-k_2+3}{n+3}$

而如果 $k_1=k_2=k_3$ ，以 k_1+2 邊形為主體畫圖，每個圖形都重覆三次，又

$f_{k_2}(x)=f_{k_3}(x)$ 、 $f_{(k,k)}(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^k f_m(x)C(x)^{k+1}x^2}{2}\right)$所以生成函數

$$f_{(k_1,k_2,k_3)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left\{\frac{\left((\frac{k_1+1}{2})x^{k_1}f_{k_2}(x)f_{k_3}(x)C(x)^{k_1}+x^{k_1}f_{(k_2,k_3)}(x)C(x)^{k_1+1}\right)}{3}\cdot x^2\right\}$$ ，並且可得到一般式

$$a_{(n,k_1,k_2,k_3)}=\frac{(n+2)(n+3)}{6}\binom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$$ 。

> 定理 10： $n+2$ 邊形利用不相交的對角線剖分成三個 $k+2$ 邊形、和 $n-3k$ 個三角形的剖分圖
>
> 形數 $a_{(n,k,k,k)}=\dfrac{(n+2)(n+3)}{6}\dbinom{2n-3k+3}{n+3}$

(八)、　把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形、和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的剖分圖形數量的生成函數

此時可用 (七)、中構造生成函數的方式導出把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的剖分圖形數量的生成函數。討論 k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 兩兩相異，以 k_1+2 邊形為主體。這時有三種情形： k_2+2 邊

形、k_3+2邊形及k_4+2邊形可為「三個多邊形都分別在對於k_1+2邊形而言的不同的區域」、「有兩個多邊形在對於k_1+2邊形而言的同一個區域，另一個則在對於k_1+2邊形而言的另一個區域」、「三個多邊形都在對於k_1+2邊形而言的相同區域」。以下是對這三類圖形的分析：

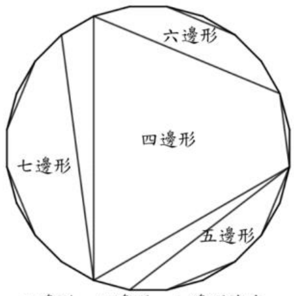
1、 k_2+2邊形、k_3+2邊形及k_4+2邊形這三個多邊形的位置都分別在對於k_1+2邊形而言的不同的區域

此時，以k_1+2邊形為主體，由$n+2$邊形的一個點出發，它在走一圈的時候，擺放的剖分區域的組合方式是一個「由一個k_2+2邊形和多三角形組成的圖形」、一個「由一個k_3+2邊形和多三角形組成的圖形」、一個「由一個k_4+2邊形和多三角形組成的圖形」、以及k_1-1個三角剖分區域（三角剖分區域可以沒有三角形，也就是只有一條邊）。

考慮擺放的順序，意同有k_1+2個位置，依序選一個位置放「由一個k_2+2邊形和很多三角形組成的圖形」、一個位置放「由一個k_3+2邊形和很多三角形組成的圖形」和另一個位置放「由一個k_4+2邊形和很多三角形組成的圖形」。因為每個點都要走一次，但對每個圖而言，只要是從k_1+2邊形上的點出發，都能得一次該圖，所以每一個圖都會重複出現k_1+2次。所以此類的圖形數量是：

$$[x^n]\frac{(n+2)(k_1+2)(k_1+1)k_1C(x)^{k_1-1}x^{k_2+k_3+k_4}f_{k_2}(x)f_{k_3}(x)f_{k_4}(x)}{k_1+2}$$
$$=[x^n](n+2)(k_1+1)k_1C(x)^{k_1-1}x^{k_2+k_3+k_4}f_{k_2}(x)f_{k_3}(x)f_{k_4}(x)$$
。

以右圖為例。右圖是一個把二十四邊形剖分成一個四邊形、一個五邊形、一個六邊形、一個七邊形、及八個三角形的剖分圖形。以四邊形作為構圖主體，與四邊形的邊相接的四個區域分別是一塊三角剖分區域、一塊「由一個五邊形和多個三角形組成的剖分」、一塊「由一個六邊形和多個三角形組成的剖分」、以及一塊「由一個七邊形和多個三角形組成的剖分」。則此類型的圖形數量會是$24\cdot3\cdot2\cdot C(x)^1x^{12}f_3(x)f_4(x)f_5(x)$。



五邊形、六邊形、七邊形皆在四邊形的不同側

2、 三個多邊形中，有兩個在k_1+2邊形的同一側，而有另一個在k_1+2邊形的另一側

此時，同樣再以k_1+2邊形為主體，由$n+2$邊形的一個點出發，然後它在走k_1+2步完成一圈的時候，擺放的剖分區域的組合方式有三種可能，分別是：

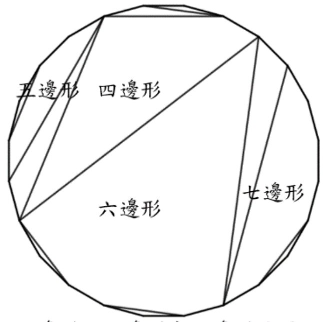
(1)、 一個「由一個k_2+2邊形和多三角形組成的圖形」、一個「由一個k_3+2邊形、一個k_4+2邊形，和多個三角形組成的圖形」、以及k_1個三角剖分區域（三角剖分區域可以沒有三角形，也就是只有一條邊）。

(2)、 一個「由一個k_3+2邊形和多三角形組成的圖形」、一個「由一個k_2+2邊形、一個k_4+2邊形和多三角形組成的圖形」以及k_1個三角剖分區域。

(3)、 一個「由一個k_4+2邊形和多三角形組成的圖形」、一個「由一個k_2+2邊形、一個k_3+2邊形和多三角形組成的圖形」、以及k_1個三角剖分區域。

此時先對(1)討論。由$n+2$邊形的一個點出發並考慮擺放的順序，則是在k_1+2個位置中依序選擇擺放一個「由一個k_2+2邊形和多三角形組成的圖形」以及一個「由一個k_3+2邊形、一個k_4+2邊形，和多三角形組成的圖形」，其餘k_1個區域則是放有序的三角剖分區域組合。又對於每個圖而言，只要從該圖的k_1+2邊形上的任一點出發，都可得一次相同的圖形，因此每個圖都會重複出現k_1+2次。此時可得圖形數量$[x^n]\dfrac{(n+2)(k_1+2)(k_1+1)C(x)^{k_1}f_{k_2}(x)f_{(k_3,k_4)}(x)}{k_1+2}$

以右圖為例，右圖是一個把二十四邊形剖分成一個四邊形、一個五邊形、一個六邊形、一個七邊形、以及八個三角形的剖分圖形。而當我以四邊形作為構圖的主體，與四邊形的邊相接的四個區域分別會有兩塊三角剖分區域、一塊「由一個五邊形和多個三角形組成的剖分」、及一塊「由一個六邊形、一個七邊形和多個三角形組成的剖分」。可得此時圖形數量$24\cdot 3[x^2]C(x)^2 f_3(x)f_{(4,5)}(x)$。



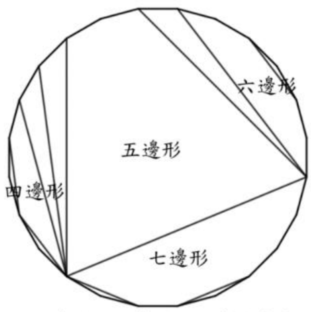
六邊形、七邊形在四邊形的同一側，五邊形在四邊形的另一側

把(1)、(2)、(3)、的數量加總，可得把$n+2$邊形剖分成一個k_1+2邊形、一個k_2+2邊形、

一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形、和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形，且 k_2+2 邊形、k_3+2 邊形及 k_4+2 邊形有兩個皆在 k_1+2 邊形的同一側，而有另一個在 k_1+2 邊形的另一側，此時圖形數量為 $(n+2)(k_1+1)[x^n]C(x)^{k_1}\left(f_{k_4}(x)f_{(k_2,k_3)}(x)+f_{k_2}(x)f_{(k_3,k_4)}(x)+f_{k_3}(x)f_{(k_4,k_2)}(x)\right)$。

3、 k_2+2 邊形、k_3+2 邊形及 k_4+2 邊形皆在 k_1+2 邊形的同一側

同樣以 k_1+2 邊形為主體，此時對 k_1+2 邊形的 k_1+2 條邊所相接的剖分區域種類分別是一個「由一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和多個三角形組成的剖分」，以及 k_1+1 塊三角剖分區域。此時只要從一個點出發的時候先放「由一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和多個三角形組成的圖形」，再放 k_1+1 塊三角剖分區域，就不會再有重複的情況。因此可以推得此類型的圖形數量會是 $(n+2)[x^n]C(x)^{k_1+1}f_{(k_2,k_3,k_4)}(x)$。



五邊形、六邊形、七邊形皆在四邊形的同一側

以右圖為例，右圖是一個把二十四邊形剖分成一個四邊形、一個五邊形、一個六邊形、一個七邊形、以及八個三角形的剖分圖形。而同樣以四邊形作為構圖主體，與四邊形的邊相接的四個區域分別會有三塊三角剖分區域、以及一塊「由一個五邊形、一個六邊形、一個七邊形和多個三角形組成的剖分」。則此時圖形數量是 $24[x^n]C(x)^3f_{(3,4,5)}(x)$。

綜合上述 1、2、3、可得把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的剖分圖形數量與卡特蘭數的關係，如下：

$$a_{(n,k_1,k_2,k_3,k_4)}=[x^n](n+2)\left(\begin{array}{l}(k_1+1)k_1C(x)^{k_1-1}x^{k_2+k_3+k_4}f_{k_2}(x)f_{k_3}(x)f_{k_4}(x)\\+(k_1+1)C(x)^{k_1}\left(f_{k_4}(x)f_{(k_2,k_3)}(x)+f_{k_2}(x)f_{(k_3,k_4)}(x)+f_{k_3}(x)f_{(k_4,k_2)}(x)\right)\\+C(x)^{k_1+1}f_{(k_2,k_3,k_4)}(x)\end{array}\right)$$

而在構成生成函數 $f_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{(n,k_1,k_2,k_3,k_4)}x^n$ 時，每個 $a_{(n,k_1,k_2,k_3,k_4)}$ 要乘的 $n+2$ 的值與 x 的次數 n 有關，故用微分處理。故可得把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的剖分圖形數量所構成的生成

函數 $f_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\begin{pmatrix}(k_1+1)k_1C(x)^{k_1-1}x^{k_2+k_3+k_4}f_{k_2}(x)f_{k_3}(x)f_{k_4}(x)\\+(k_1+1)C(x)^{k_1}\left(f_{k_4}(x)f_{(k_2,k_3)}(x)+f_{k_2}(x)f_{(k_3,k_4)}(x)+f_{k_3}(x)f_{(k_4,k_2)}(x)\right)\\+C(x)^{k_1+1}f_{(k_2,k_3,k_4)}(x)\end{pmatrix}x^2\right)$

經由計算可得以下定理。

定理 11：把 $n+2$ 邊形利用不相交的對角線剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的剖分圖形數量為

$a_{(n,k_1,k_2,k_3,k_4)}=(n+2)(n+3)(n+4)\binom{2n-k_1-k_2-k_3-k_4+4}{n+4}$，其中 k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 兩兩相異

參、 研究結果與討論

一、 研究結果

以下陳列本研究的各項研究結果：

定理 1：把 $n+2$ 邊形剖分成 1 個四邊形和 $n-2$ 個三角形的剖分數 $a_{(n,2)}=\frac{n-1}{2}\cdot c_n=\binom{2n-1}{n+1}$ 。

定理 2：把 $n+2$ 邊形剖分成 1 個五邊形和 $n-3$ 個三角形的剖分數 $a_{(n,3)}=\binom{2n-2}{n+1}$ 。

定理 3：把 $n+2$ 邊形剖分成 2 個四邊形和 $n-4$ 個三角形的剖分數 $a_{(n,2,2)}=\frac{n-3}{2}\binom{2n-2}{n+1}$。

定理 4：把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形的剖分數 $a_{(n,k)}=\binom{2n-k+1}{n+1}$。

定理 5：把 $n+2$ 邊形剖分成一個四邊形、一個 $k+2$ 邊形、和 $n-k-2$ 個三角形的圖形數

$a_{(n,2,k)}=(n+2)\binom{2n-k}{n+2}$

定理 6：在 $k\neq m$ 的情況下，把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $m+2$ 邊形、一個 $k+2$ 邊形、和 $n-k-m$ 個三角形的剖分圖形數量 $a_{(n,m,k)}=(n+2)\binom{2n-k-m+2}{n+2}$。

定理 7：把 $n+2$ 邊形剖成兩個 $k+2$ 邊形和 $n-2k$ 個三角形的圖形數 $a_{(n,k,k)}=\frac{n+2}{2}\binom{2n-2k+2}{n+2}$

定理 8：把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、和

$n-k_1-k_2-k_3$ 個三角形的剖分圖形數 $a_{(n,k_1,k_2,k_3)}=(n+2)(n+3)\binom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$

定理 9：把 $n+2$ 邊形剖分成兩個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、和 $n-2k_1-k_2$ 個三角形的剖分

圖形數 $a_{(n,k_1,k_1,k_2)}=\dfrac{(n+2)(n+3)}{2}\binom{2n-2k_1-k_2+3}{n+3}$

定理 10：把 $n+2$ 邊形剖分成三個 $k+2$ 邊形和 $n-3k$ 個三角形的圖形數量

$$a_{(n,k,k,k)}=\frac{(n+2)(n+3)}{6}\binom{2n-3k+3}{n+3}$$

定理 11：把 $n+2$ 邊形剖一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和

$n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的圖形數量 $a_{(n,k_1,k_2,k_3,k_4)}=\dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}\binom{2n-k_1-k_2-k_3-k_4+4}{n+4}$，

其中 k_1、k_2、k_3、k_4 兩兩相異。

二、 未來展望

在得到「把 $n+2$ 邊形剖分成一個 $k+2$ 邊形和 $n-k$ 個三角形的剖分圖形數量」、「把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形和 $n-k_1-k_2$ 個三角形的剖分圖形數量」、「把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3$ 個三角形的剖分圖形數量」、「把 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、一個 k_3+2 邊形、一個 k_4+2 邊形和 $n-k_1-k_2-k_3-k_4$ 個三角形的剖分圖形數量」之後，我從這些結論歸納出對於把 $n+2$ 邊形剖分成 i 個多邊形（分別是 k_1、k_2……、k_i 邊形，且兩兩皆不相等）以及 $\left(n-\sum_{j=1}^{i}k_j\right)$ 個三角形，此時的剖分圖形數量以及構成的生成函數的猜想。設把 $n+2$ 邊形的剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、……、以及一個 k_i+2 邊形共 i 個多邊形，以及 $n-K$ 個三角形。其中 k_1、k_2……、k_i 兩兩相異，而 $K=\sum_{j=1}^{i}k_j$。因為在計算過程中，發現最終會影響到剖分圖形數量一般式會是 k_i 值的和 K，若取 K 為定值，定義函數 $F_{(K,i)}(x)=f_{(k_1,k_2,\ldots,k_i,)}(x)$。在計算生成函數的過程中，可以發現經由化簡能得到規律如下：

當$K=k_1$時： $f_{k_1}(x)=F_{(K,1)}(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^K C(x)^{K+2}}{K+2}x^2\right)=x^K C(x)^{K+2}+x^{K+1}C(x)^{K+1}C(x)'$

當$K=k_1+k_2$時：

$$f_{(k_1,k_2)}(x)=F_{(K,2)}(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{K+2}C(x)^{K+3}+x^{K+3}C(x)^{K+2}C(x)'\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(xF_{(K+1,1)}(x)\right)$$
$$=(K+2)x^K C(x)^{K+3}+2x^{K+1}(C(x)^{K+3})'+x^{K+2}(\frac{C(x)^{K+3}}{K+3})''$$

當$K=k_1+k_2+k_3$時：

$$f_{(k_1,k_2,k_3)}(x)=F_{(K,3)}(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left((K+3)x^{K+2}C(x)^{K+4}+2x^{K+3}(C(x)^{K+4})'+x^{K+4}(\frac{C(x)^{K+4}}{K+4})''\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x(F_{(K+1,2)}(x))\right)$$
$$=(K+3)(K+2)x^K C(x)^{K+4}+3x^{K+1}(K+3)(C(x)^{K+4})'+3x^{K+2}(C(x)^{K+4})''+x^{K+3}(\frac{C(x)^{K+4}}{K+4})'''$$

當$K=k_1+k_2+k_3+k_4$時：

$$f_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}(x)=F_{(K,4)}(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}(K+4)(K+3)x^{K+2}C(x)^{K+5}+3x^{K+3}(K+4)(C(x)^{K+5})' \\ +3x^{K+4}C(x)^{K+5}''+x^{K+5}(\frac{C(x)^{K+5}}{K+5})'''\end{pmatrix}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x(F_{(K+1,3)}(x))\right)$$

從上述的計算過程有出現的算式中，可以看出一個遞迴的關係：當$K=\sum_{j=1}^{i}k_j$為定值，則由剖分圖形所構成的生成函數$F_{(K,i)}(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(xF_{(K+1,i-1)}(x))$ 。而經由計算能夠得到，當給定值K、i，則$[x^n]F_{(K,i)}(x)=\frac{(n+i)!}{(n+1)!}\binom{2n-K+i}{n+i}$。而由已知的結論中，在給定值$K=\sum_{j=1}^{i}k_j$，且$i=0,1,2,3,4$時，剖分圖形的數量分別為：

i	剖分圖形數量
0	$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
1	$\binom{2n-K+1}{n+1}$
2	$n+2\binom{2n-K+2}{n+2}$

3	$(n+2)(n+3)\binom{2n-K+3}{n+3}$
4	$(n+2)(n+3)(n+4)\binom{2n-K+4}{n+4}$

而由圖形數量的一般式，也能夠找到數值的規律：當給定 K、i 值後的圖形數量會是 $\frac{(n+i)!}{(n+1)!}\binom{2n-K+i}{n+i}$，此結論也符合生成函數的遞迴式所算出來的結果。故目前大膽推測，把一個 $n+2$ 邊形剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、……、一個 k_i+2 邊形，以及 $n-K$ 個三角形時，此時能夠符合條件的剖分圖形數量會是 $\frac{(n+i)!}{(n+1)!}\binom{2n-K+i}{n+i}$。但目前還未能證明此猜想。

三、 討論

從計算後得到的結論 $a_{(n,k)}=\binom{2n-k+1}{n+1}$ 、$a_{(n,k_1,k_2)}=(n+2)\binom{2n-k_1-k_2+2}{n+2}$ 、$a_{(n,k_1,k_2,k_3)}=\frac{(n+3)!}{(n+1)!}\binom{2n-k_1-k_2-k_3+3}{n+3}$、$a_{(n,k_1,k_2,k_3,k_4)}=\frac{(n+4)!}{(n+1)!}\binom{2n-k_1-k_2-k_3-k_4+4}{n+4}$，推測若要把 $n+2$ 邊形利用不相交的對角線剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、……、一個 k_i+2 邊形以及 $n-\sum_{j=1}^{i}k_j$ 個三角形的圖形數量會是 $\frac{(n+i)!}{(n+1)!}\binom{2n-K+i}{n+i}$ 個（其中，k_1 到 k_i 兩兩皆相異）。而在生成函數 $f_{(k_1,k_2,\dots,k_i,)}(x)$ 的計算過程中，也觀察出遞迴式：令生成函數 $F_{(K,i)}(x)=f_{(k_1,k_2,\dots,k_i,)}(x)$ 的情況下，$F_{(K,i)}(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(xf_{(K+1,i-1)}(x))$。而經由計算，也能算出 $[x^n]F_{(K,i)}(x)=\frac{(n+i)!}{(n+1)!}\binom{2n-K+i}{n+i}$，也符合對於把 $n+2$ 邊形利用不相交的對角線剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊形、……、一個 k_i+2 邊形以及 $n-\sum_{j=1}^{i}k_j$ 個三角形的圖形數量的假設。故大膽推測把 $n+2$ 邊形利用不相交的對角線剖分成一個 k_1+2 邊形、一個 k_2+2 邊

形、……、一個 k_i+2 邊形以及 $n-\sum_{j=1}^{i} k_j$ 個三角形的圖形數量會是 $\frac{(n+i)!}{(n+1)!}\binom{2n-K+i}{n+i}$ 個（其中，k_1 到 k_i 兩兩皆相異），但目前還沒有辦法證明這個假設是不是對的。期待未來能夠證明這個猜想是正確的。

肆、　結論與應用

本篇研究從卡特蘭數和三角剖分圖形數量關係為基礎，給予多邊形不同的剖分條件，發現三角剖分圖形和特定條件下的剖分圖形之間的關聯。最初，我發現透過圖形之間對角線的數量，能算出卡特蘭數與「把多邊形剖分成一個四邊形和多個三角形」、「把多邊形剖分成一個五邊形和多個三角形」、「把多邊形剖分成兩個四邊形和多個三角形」的圖形數量之間的比例關係。再者，透過剖分圖形中對角線位置的分類，以及結合卡特蘭數的生成函數，能夠歸納出「把多邊形剖分成一個多邊形和多個三角形」的一般式。接著，我利用剖分圖形中，三角剖分和不同的多邊形的位置關係，列出特定條件下「把多邊形剖分成兩種多邊形和多個三角形」、「把多邊形剖分成三個多邊形和多個三角形」、「把多邊形剖分成四個多邊形和多個三角形」的圖形數量所構成的生成函數，並透過微分等計算，推導出特定條件下剖分圖形數量的一般式。而在列出上述結論之後，能看出生成函數之間的遞迴關係，以及一般式之間的規律，而經由計算，發現兩者結論相同，但目前亦無法證明此猜想的正確性，這將是未來值得研究的課題。

伍、　參考文獻

[1] Davis,T. (2016). *Catalan Numbers*. Retrieved from https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/pdf0607/catalan.pdf

[2] Wilf,H. (1994). *Generatingfunctionology,* 2nd ed. London: Academic Press.

【評語】010005

將多邊形透過不相交的對角線分解為三角形拼接的方法數可得到卡特蘭數，作者進行了延伸的探討探討多邊形分解為三角形以及多邊形的問題等不同於三角切割的方式，例如，計算把多邊形剖分成一個 k+2 邊形和多個三角形的剖分圖形數量，或者計算剖分為多種不同邊形與三角形組合的數量。並且討論這些數量所形成的遞迴式，並探討和卡特蘭數的關係。整份作品有明確的推導及論證，是其可取之處，不過可能限於此問題的本質，數學發展性比較有限是其可惜之處。