2021 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010003**

參展科別　數學

作品名稱　建構三種以上相異整數邊長的圓內接多邊形

得獎獎項　大會獎 四等獎

就讀學校　臺北市立石牌國民中學

指導教師　藍邦偉、陳逸澤

作者姓名　藍宇潔

關鍵詞　n 倍角公式、本原畢氏三元數、圓內接多邊形

作者簡介

我是藍宇潔，台北市立石牌國中二年級。

從小耳濡目染在數學的世界裡，喜歡數學是因為上學後，數學考試總是最容易拿到高分，因而建立了對數學的自信心，從中獲得許多成就感。但現在學數學就像喝中藥一般，學習的時候很苦，難以下嚥，但學會後這些知識就屬於我一生的財產。研究又是更有趣的一回事，可以用自己的能力及知識生產出智慧的結晶。我嘗試過各種挑戰，從無到有，經歷過無數次失敗；從有到合理的存在，費盡心思，從證明到推論，過程崎嶇又艱難，但經過反覆辯證，終究得到令人滿意的結果。我最喜歡霍金的一句話：「就算困在黑洞裡也別放棄，總有辦法可以脫身的。」

摘要

前作「建構邊長為整數的圓內接多邊形」[2]中，我建構了多類兩種相異整數邊長的圓內接多邊形的一般式。本研究利用 n 倍角公式，建構三種以上相異整數邊長且外接圓半徑與所有對角線長均為整數的圓內接多邊形。

我依正整數的分割數將圓內接多邊形分類。除了正多邊形之外，6 類圓內接五邊形、10 類圓內接六邊形、14 類圓內接七邊形。取畢氏三元數做變數變換，做出所有類型相異且有不同邊長的圓內接多邊形。另外在建構圓內接八邊形、九邊形與十邊形時，我考慮建構邊長相異且其中一邊為外接圓直徑的圓內接四邊形、圓內接五邊形與圓內接六邊形...等，將上述圖形做適當的伸縮與組合，即可以建構邊長皆為相異的整數的圓內接 n 邊形。研究過程也發現可用同一組一般式可建構不同的圓內接多邊形。最後推得各類非等邊長且外接圓半徑亦為整數的圓內接多邊形皆可尺規作圖。

Abstract

This question originated from Crux Mathematicorum, Volume 45 (6), July 2019. Originally the question was from the W.J. Blundon competition in Canada. A hexagon H is inscribed in a circle, and consists of three segments of length 1 and three segments of length 3. Find the area of H. I wonder if all the inscribed polygons with integer sides exist in non regular polygons. The previous work of this research is to construct a circle inscribed polygon with two different integer lengths of edges. In this study, we found more kinds of inscribed polygons with more than three different integer side lengths which are called " Integer Polygons". If the radius is also an integer, we call it " Perfect Polygon".

I classify the cyclic polygons by the partition number of integers. I check 6 types of pentagons, 10 types of hexagons , and 14 types of heptagons except regular polygons. This research starts from unit circle . I use the $n\theta$ formula of trigonometric function and takes the appropriate primitive Pythagoreans triples by using change of variable. I construct all the inscribed cyclic hexagons, pentagons and heptagons. But the expansion series of the $n\theta$ formula is very large when n is greater than 7. Therefore, I consider Semicircle construction, using inscribed quadrilaterals, pentagons, hexagons, ... with different side lengths and diameter of circumcircle on one side, then dilate a specific ratio with center O. If the above figures are properly expanded and combined, the inscribed n-polygon of a circle with different sides of integers can be constructed. Of course, some of the same sides in the above figures can also be constructed. It is also found that the same set of general form can construct different inscribed polygons. Finally, it is concluded that all kinds of Perfect Polygons with unequal lengths can be drawn with ruler and compass.

壹、 前言

一、 研究動機

此題出處為 Crux Mathematicorum, Vol. 45(6), July 2019[1]，原題是加拿大數學競賽 W.J. Blundon Contest 的題目。如圖 1，圓內接六邊形的邊長分別為$1,3,1,3,1,3$，試求此六邊形的面積。我先前的研究[2]從兩種相異邊長開始，已求出$a-b_{(n-1)}$、$a_2-b_{(n-2)}$與$a_{(4)}-b_{(n-4)}$邊長與外接圓半徑的一般式。

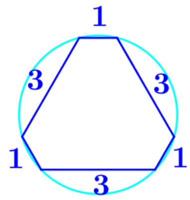

圖 1：圓內接六邊形

本研究從**三種以上**相異整數邊長開始討論建構邊長為非正多邊形的6種圓內接整數五邊形，10 種圓內接整數六邊形，14 種圓內接整數七邊形。

二、 研究目的：

(一) 建構三種以上相異整數邊長的圓內接五邊形。

(二) 建構三種以上相異整數邊長的圓內接六邊形。

(三) 建構三種以上相異整數邊長的圓內接七邊形。

(四) 建構三種以上相異整數邊長的圓內接n邊形。

三、 名詞定義與解釋

(一) $a_{(j)}-b_{(h)}-c_{(k)}$：圓內接$j+h+k$邊形中，其邊長為j個a、h個b與k個c，且a、b、c均為正整數。若j、h或k之值為1亦可省略，例如$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(1)}$可寫成$a_{(2)}-b_{(2)}-c$。若邊數更多以此類推，例如以$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d_{(2)}$表示有四對相異整數邊長的圓內接八邊形。

(二) $p(n)$：正整數n的分割數，例如$p(4)=5$，$p(5)=7$，$p(6)=11$，$p(7)=15$。

(三) 整數多邊形：有兩種以上相異整數邊長的圓內接多邊形。

(四) 完美多邊形：有兩種以上相異整數邊長，且外接圓半徑亦為整數的圓內接多邊形。

四、 文獻回顧

除了我的前作[2]，我查到兩篇討論邊長是整數的圓內接多邊形相關研究，第一是海龍三角形，就是邊長與面積皆為整數的三角形，但是它的外接圓半徑不是整數。第二是羅賓五邊形，它是邊長為相異整數，且在某些條件下，面積與對角線長也是整數的五邊形，但是我沒查到羅賓教授做出更多邊形的實例。作者在研究[2]是證明下列定理，做出有兩種相異整數邊長的圓內接n邊形。而在本研究是建構三種以上不同整數邊長的圓內接多邊形。並將原定義作以下修正：將兩種以上相異整數邊長的圓內接多邊形定義為整數多邊形；而其外接圓半徑亦為整數的整數多邊形，定義為**完美多邊形**。我利用引理 1 展開$\cos n\theta$與$\sin n\theta$。

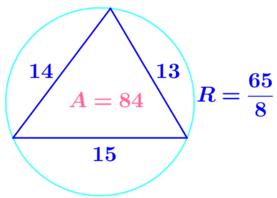

圖 2：Heronian Triangle

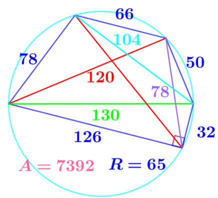

圖 3：Robbins Pentagon

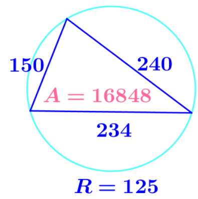

圖 4：完美三角形

引理 1：

$$\cos n\theta = C_0^n \cos^n\theta - C_2^n \cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + C_4^n \cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - C_{n-6}^n \cos^{n-6}\theta\sin^6\theta + ...$$

$$\sin n\theta = C_1^n \cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_3^n \cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + C_5^n \cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - C_7^n \cos^{n-7}\theta\sin^7\theta + ...$$

定理 1： *圓內接四邊形 $ABCD$ 中，若其中兩個內角等於 θ 時，則當 $\cos\theta = \dfrac{r}{2s}$ 為有理數，必存在邊長為整數的圓內接四邊形 $a-b_{(2)}-(a+\dfrac{r}{s}\cdot b)$ 。*

定理 2： *建構邊長為 $a_{(k)}-b_{(k)}$ 的 $2k$ 邊形 圓內接 $2k$ 邊形 $a_{(k)}-b_{(k)}$ 中，a 與 b 對應的圓心角分別為 α 與 β ，且 $\theta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ，則外接圓半徑為 $R=\dfrac{\sqrt{a^2+2ab\cos\theta+b^2}}{2\sin\theta}$ 。*

定理 3： *圓內接 $2k+1$ 邊形 $a-b_{(2k)}$ 是完美多邊形。且外接圓半徑為 $R=(p^2+q^2)^{2k}$ ，兩組不同整數邊長分別為：*

$$a = 2(C_1^{2k}(2pq)^{2k-1}(p^2-q^2) - C_3^{2k}(2pq)^{2k-3}(p^2-q^2)^3 + C_5^{2k}(2pq)^{2k-5}(p^2-q^2)^5 - ...)$$

$$b = 2(p^2+q^2)^{2k-1}(p^2-q^2)$$

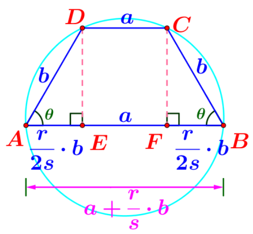

圖 5： $a-b_{(2)}-c$

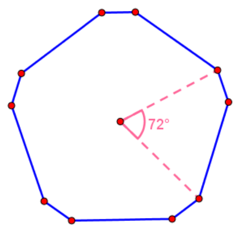

圖 6： $a_{(k)}-b_{(k)}$

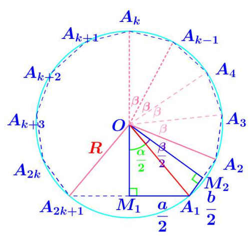

圖 7： $a-b_{(2k)}$

定理 4： *圓內接 n 邊形 $a-b_{(n-1)}$ 是完美多邊形。且外接圓半徑為 $R=(p^2+q^2)^{n-1}$ ，兩組不同整數邊長邊長分別為：*

$$a = 2(C_1^{n-1}(2pq)^{n-2}(p^2-q^2) - C_3^{n-1}(2pq)^{n-4}(p^2-q^2)^3 + C_5^{n-1}(2pq)^{n-6}(p^2-q^2)^5 - ...)$$

$$b = 4(p^2+q^2)^{n-3}(p^2-q^2)$$

定理 5：

圓內接 $2k+1$ 邊形 $a_{(2)}-b_{(2k-1)}$ 是完美多邊形。且外接圓半徑為 $R=(p^2+q^2)^{2k-1}$ ，兩組不同整數邊長邊長分別為：

$$a = 2(C_0^{2k-1}(2pq)^{2k-1} - C_2^{2k-1}(2pq)^{2k-3}(p^2-q^2)^2 + C_4^{2k-1}(2pq)^{2k-5}(p^2-q^2)^4 - ...)$$

$$b = 4(p^2+q^2)^{2k-3}(p^2-q^2)(2pq)$$

定理 6：

*圓內接 n 邊形 $a_{(2)}-b_{(n-2)}$ 是**完美**多邊形。且外接圓半徑為 $R=(p^2+q^2)^{n-2}$，兩組不同整數邊長邊長分別為：*

$$a=2(C_0^{n-2}(2pq)^{n-2}-C_2^{n-2}(2pq)^{n-4}(p^2-q^2)^2+C_4^{n-2}(2pq)^{n-6}(p^2-q^2)^4-\ldots)$$

$$b=4(p^2+q^2)^{n-4}(p^2-q^2)(2pq)$$

定理 7：

*當 n 為奇數，且 $\sin\theta<\sin\dfrac{\pi}{4n-16}$ 時，圓內接 n 邊形 $a_{(4)}-b_{(n-4)}$ 是**完美**多邊形。*

且外接圓半徑與兩組不同整數邊長邊長分別為：斜邊是 $\sqrt{2}$ 的 t 倍，且兩股是整數的直角三角形即 $R=4\,t^q$。$a=\sqrt{2}R(\cos(n-4)\theta-\sin(n-4)\theta)$，$b=2R\sin4\theta$。

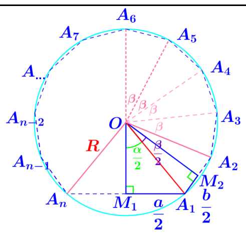

圖 8：$a-b_{(n-1)}$

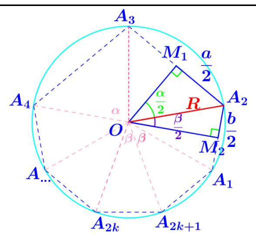

圖 9：$a_{(2)}-b_{(2k-1)}$

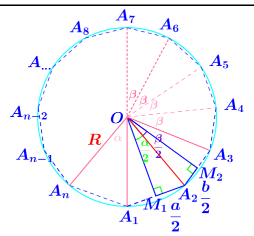

圖 10：$a_{(2)}-b_{(n-2)}$

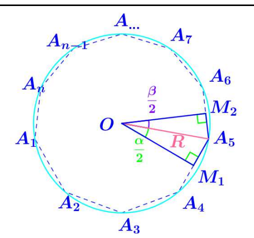

圖 11：$a_{(4)}-b_{(n-4)}$

圖 12 是前作[2]的研究流程，其中橘色字代表使用直角三角形組合或是正三角形配上 **1 至 3 個頂角** 120° **的拼貼三角形**的組合。在第貳章表 1 與第三章結論的表 3 中會有更清楚的說明。

本文中以四邊形用紫色，五邊形用淺綠色，六邊形用藍色，七邊形用粉紅色，八邊形用黃色網底。

$a-b_{(3)} \Rightarrow a_{(2)}-b_{(2)} \Rightarrow a_{(2)}-b-c \Rightarrow a-b-c-d$

$a-b_{(4)} \Rightarrow a_{(2)}-b_{(3)} \Rightarrow a-b_{(2)}-c_{(2)} \Rightarrow a-b-c-d-e$

$a-b_{(5)} \Rightarrow a_{(2)}-b_{(4)} \Rightarrow a_{(3)}-b_{(3)} \Rightarrow a_{(2)}-b_{(2)}-c-d \Rightarrow a-b-c-d-e-f$

$a-b_{(6)} \Rightarrow a_{(2)}-b_{(5)} \Rightarrow a_{(3)}-b_{(4)}$

$a_{(4)}-b_{(4)}$

圖 12：研究[2]中已建構邊長為整數的圓內接多邊形

五、 研究設備及器材

紙、筆、黑板、筆記型電腦、Excel、動態幾何軟體 GeoGebra 與 Mathematica。

貳、 研究方法

圖 13 是我的研究流程，上半部藍色內框是直接建構邊長不同的完美多邊形。下半部紅色內框是藉由伸縮後得到相同直徑的兩個完美多邊形組合成一個完美多邊形，其中$2R$是外接圓直徑。例如$a-b-2R$表外接圓半徑為R的三角形，其邊長為$a,b,2R$。對照圖 9。因為$p(5)=7$，$p(6)=11$，$p(7)=15$，我把非正多邊形的 6 種完美五邊形、10 種完美六邊形與 14 種完美七邊形建構完成。並列出完美八、九、十邊形經組合前的部份情形。

$$\boxed{a-b-c-d-e} \Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b-c-d} \Rightarrow \boxed{a_{(3)}-b-c} \Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b_{(2)}-c}$$

$$\boxed{a-b-c-d-e-f} \Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b-c-d-e} \Rightarrow \boxed{a_{(3)}-b-c-d}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b_{(2)}-c-d} \Rightarrow \boxed{a_{(4)}-b-c} \Rightarrow \boxed{a_{(3)}-b_{(2)}-c} \Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}}$$

$$\boxed{a-b-c-d-e-f-g} \Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b-c-d-e-f} \Rightarrow \boxed{a_{(3)}-b-c-d-e}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b_{(2)}-c-d-e} \Rightarrow \boxed{a_{(4)}-b-c-d} \Rightarrow \boxed{a_{(3)}-b_{(2)}-c-d} \Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{(5)}-b-c} \Rightarrow \boxed{a_{(3)}-b_{(3)}-c} \Rightarrow \boxed{a_4-b_{(2)}-c} \Rightarrow \boxed{a_{(2)}-b_{(3)}-c_{(2)}}$$

圖 13：研究流程圖

例如取兩個完美六邊形$a_1-b_1-c_1-d_1-e_1-2R_1$與$a_2-b_2-c_2-d_2-e_2-2R_2$分別放大R_2倍與R_1倍，得$R_2a_1-R_2b_1-R_2c_1-R_2d_1-R_2e_1-R_1a_2-R_1b_2-R_1c_2-R_1d_2-R_1e_2$完美十邊形。也就是我分別在兩個半圓上作出邊長為整數的多邊形，再互相放大若干倍使得兩個半圓得直徑等長，最後組合起來。表 1 整理前作[2]中做出的完美多邊形。紅字部份是我用定理 3,4,5,6,7 建構，所以當然是完美多邊形，黑字是用直角三角形或正三角形加拼貼三角形建構，外接圓半徑不一定是整數，所以是完美多邊形。

表 1：整數n邊形與完美n邊形[2]

n	定理或建構方式	完美n邊形
4	等腰梯形或**定理 1**	$a-b_{(3)}$
4	矩形或鳶形	$a_{(2)}-b_{(2)}$ 或 $a_{(2)}-b_{(2)}$
4	等腰梯形或正三角形加拼貼三角形	$a-b-c_{(2)}$
4	兩個直角三角形	$a-b-c-d$
5	**定理 3**	$a-b_{(4)}$
5	**定理 5**	$a_{(2)}-b_{(3)}$
5	正三角形加拼貼三角形	$a-b-c-d-e$
6	**定理 4**	$a-b_{(5)}$
6	**定理 6**	$a_{(2)}-b_{(4)}$

6	**定理 2** 或正三角形加拼貼三角形	$a_{(3)}-b_{(3)}$
6	正三角形加拼貼三角形	$a-b-c-d-e-f$
7	**定理 3**	$a-b_{(6)}$
7	**定理 5**	$a_{(2)}-b_{(5)}$
7	**定理 7**	$a_{(3)}-b_{(4)}$
8	**定理 2** 或**定理 7**	$a_{(4)}-b_{(4)}$
8	**定理 4**	$a-b_{(7)}$
8	**定理 6**	$a_{(2)}-b_{(6)}$

參、 研究結果

一、 完美六邊形的建構

因為原題[1]是圓內接六邊形，所以我也從六邊形開始建構。在[2]我做了 $a_{(3)}-b_{(3)}$、$a-b_{(5)}$ 與 $a_{(2)}-b_{(4)}$。本節利用畢氏三元數建構完美六邊形：$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$、$a-b-c-d_{(3)}$、$a-b-c-d-e_{(2)}$、$a-b-c-d-e-f$、$a-b_{(2)}-c_{(3)}$ 與 $a-b-c_{(2)}-d_{(2)}$，最後一類 $a_{(4)}-b-c$ 我放在本章第三節以定理 10 討論。首先考慮引理 2。

引理 2：

等腰三角形 ΔOAP 中，若 $p>q$，p 與 q 為一奇一偶且互質的自然數，且 $\overline{OP}=\overline{OA}=p^2+q^2$，則存在 $\overline{AP}=2q\sqrt{p^2+q^2}$。

Proof：

設 O 為原點，考慮在半徑為 p^2+q^2 的圓上取三點 $A(p^2+q^2,0)$，$P(p^2-q^2,2pq)$，$H(p^2-q^2,0)$。則 $\overline{OP}=\overline{OA}$ $=p^2+q^2=1$，$\overline{OH}=p^2-q^2$，$\overline{PH}=2pq$，故 $\overline{AH}=2q^2$。考慮直角三角形 ΔAPH 中，$\overline{AP}^2=(2pq)^2+(2q^2)^2$，故

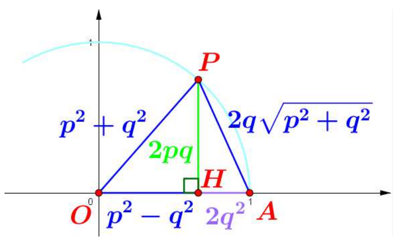

圖 14：引理 2

$\overline{AP}=\sqrt{4p^2q^2+4q^4}=2q\sqrt{p^2+q^2}$。 ■

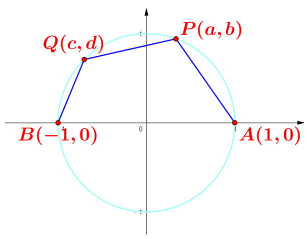

圖 15：$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$ 的建構

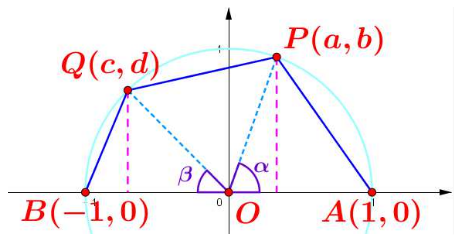

圖 16：$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$ 的建構

不失一般性，考慮在單位圓上，分別取 $A(1,0)$，$B(-1,0)$，$P(a,b)$ 與 $Q(c,d)$，$\angle AOP=\alpha$、$\angle BPQ=\beta$，其中 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，如圖 15。我希望做出 $\overline{AP}$、$\overline{PQ}$ 與 $\overline{BQ}$ 皆為有理數。ΔOAP 、ΔOPQ 與 ΔOBQ 中，由餘弦定理知：$\overline{AP}^2=1^2+1^2-2\cos\alpha=2-2a\Rightarrow\overline{AP}=\sqrt{2(1-a)}$

$\overline{PQ}^2=1^2+1^2-2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=2+2\cos(\alpha+\beta)=2+2(ac-bd)\Rightarrow\overline{PQ}=\sqrt{2(1+ac-bd)}$

$\overline{BQ}^2=1^2+1^2-2\cos\beta=2-2c\Rightarrow\overline{BQ}=\sqrt{2(1-c)}$。故 $2(1-a)$、$2(1-c)$ 與 $2(1+ac-bd)$ 皆為某個有理數的完全平方數。考慮使用本源畢氏三元數 p^2+q^2、p^2-q^2 與 $2pq$，其中 p、q 為正整數且一奇一偶，$p>q$，p、q 互質，考慮如表 2 中，我列出部份 p、q 為整數且斜邊 p^2+q^2 為完全平方數的本原畢氏三元數。

表 2：斜邊 p^2+q^2 為完全平方數的本原畢氏三元數

p	q	p^2+q^2	p^2-q^2	$2pq$
4	3	$25=5^2$	7	24
12	5	$169=13^2$	119	120
24	7	$625=25^2$	527	336
15	8	$289=17^2$	161	240

若取 $p=4$，$q=3$ 時：則 $a=\dfrac{7}{25}$，$b=\dfrac{24}{25}$，此時 $\overline{AP}=\sqrt{2\times(1-\dfrac{7}{25})}=\dfrac{6}{5}$。

取 $p=12$，$q=5$ 時：則 $c=-\dfrac{119}{169}$，$d=\dfrac{120}{169}$，此時 $\overline{BQ}=\sqrt{2\times(1-\dfrac{119}{169})}=\sqrt{\dfrac{100}{169}}=\dfrac{10}{13}$。

又 $2(1+ac-bd)=2(1+\dfrac{119\times7-24\times120}{65^2})=2(\dfrac{65^2-2047}{65^2})=\dfrac{4356}{65^2}=(\dfrac{66}{65})^2$

故 $\overline{PQ}=\dfrac{66}{65}$。這個結果是巧合嗎？我再嘗試換 2 組畢氏三元數代入：

若取 $p=15$，$q=8$ 時：則 $a=\dfrac{161}{289}$，$b=\dfrac{240}{289}$，此時 $\overline{AP}=\sqrt{2\times(1-\dfrac{161}{289})}=\dfrac{16}{17}$。

取 $p=24$，$q=7$ 時：則 $c=-\dfrac{527}{625}$，$d=\dfrac{336}{625}$，此時 $\overline{BQ}=\sqrt{2\times(1-\dfrac{527}{625})}=\sqrt{\dfrac{196}{625}}=\dfrac{14}{25}$。

又 $2(1+ac-bd)=2(1+\dfrac{161\times527-240\times336}{425^2})=2(\dfrac{425^2+4207}{425^2})=\dfrac{369664}{425^2}=\dfrac{608}{425}$，故 $\overline{PQ}=\dfrac{608}{425}$。

為什麼會有這麼漂亮的結果？其實我們上面做的事情，就是希望建構某一股相鄰的兩個直角三角形，且其邊長皆為整數，我們以定理 8 說明如下，同時以這種建構方法，也可以做出 $a_{(2)}-b_{(4)}$ 的完美多邊形。後續討論建構在半徑為 p^2+q^2 的圓上時，p 與 q 為自然數且 p^2+q^2 為完全平方數時，$\overline{AP}=2q\sqrt{p^2+q^2}$ 為一正整數。

定理 8

存在完美四邊形$a-b-c-2R$，其中R為外接圓半徑。

Proof：

如圖 14，設 p_1,q_1,p_2,q_2 為有理數。不失一般性，在單位圓上取 $A(1,0)$，$B(-1,0)$，$P(p_1^2-q_1^2,2p_1q_1)$，$Q(q_2^2-p_2^2,2p_2q_2)$ 四點，其中$\overline{OP}=p_1^2+q_1^2=\overline{OQ}=p_2^2+q_2^2=1$，設$\angle AOP=\alpha$，$\angle BOQ=\beta$，想證$\overline{AP}$、$\overline{PQ}$與$\overline{BQ}$必為有理數。由引理 2 知，$\overline{AP}$與$\overline{BQ}$必為有理數，所以我們考慮$\overline{PQ}$是否為有理數。$\Delta OPQ$ 中：

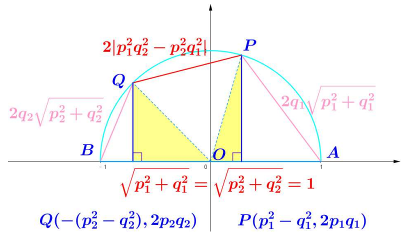

圖 17：$a-b-c-2R$ 的建構

$$\overline{PQ}^2=1^2+1^2-2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=2+2\cos(\alpha+\beta)$$

$$=2+2\left(\frac{p_1^2-q_1^2}{p_1^2+q_1^2}\times\frac{q_2^2-p_2^2}{p_2^2+q_2^2}-\frac{2p_1q_1}{p_1^2+q_1^2}\times\frac{2p_2q_2}{p_2^2+q_2^2}\right)=2\times\left(1+\frac{p_1^2-q_1^2}{p_1^2+q_1^2}\times\frac{q_2^2-p_2^2}{p_2^2+q_2^2}-\frac{2p_1q_1}{p_1^2+q_1^2}\times\frac{2p_2q_2}{p_2^2+q_2^2}\right)$$

$$=2\times\frac{(p_1^2+q_1^2)(p_2^2+q_2^2)+(p_1^2-q_1^2)(q_2^2-p_2^2)-(2p_1q_1)(2p_2q_2)}{(p_1^2+q_1^2)(p_2^2+q_2^2)}$$

$$=2\times\frac{(p_1^2p_2^2+p_1^2q_2^2+p_2^2q_1^2+q_1^2q_2^2)+(p_1^2q_2^2-p_1^2p_2^2-q_1^2q_2^2+p_2^2q_1^2)-4p_1q_1p_2q_2}{1\times1}$$

$$=2\times(2p_1^2q_2^2-4p_1q_1p_2q_2+2p_2^2q_1^2)=4\times(p_1^2q_2^2-2p_1q_1p_2q_2+p_2^2q_1^2)=4(p_1q_2-p_2q_1)^2$$

$$\Rightarrow\overline{PQ}=\sqrt{4(p_1p_2-q_1q_2)^2}=2|p_1p_2-q_1q_2|=2\left|\begin{vmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{vmatrix}\right| \text{必為有理數} \qquad \blacksquare$$

若將圖 17 中的 P、Q 兩點對 x 軸做線對稱，就是取 $P'(a,-b)$ 與 $Q'(c,-d)$，則六邊形 $APQBQ'P'$ 即為邊長為有理數的圓內接六邊形。我再適度將邊長放大，即可得邊長與外接圓半徑皆為整數的完美六邊形 $a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$。

(一)完美六邊形 $a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$

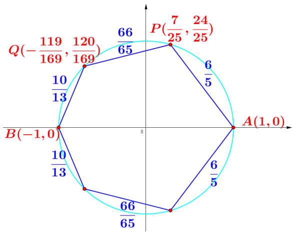

圖 18：$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$ 的建構

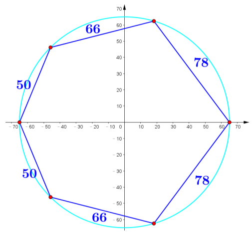

圖 19：$50_{(2)}-66_{(2)}-78_{(2)}$

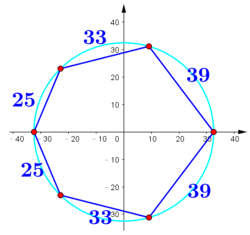

圖 20：$25_{(2)}-33_{(2)}-39_{(2)}$

由引理 2 知，若取 $p=\frac{4}{5}$，$q=\frac{3}{5}$時，$\overline{AP}=\frac{6}{5}$。取 $p=\frac{12}{13}$，$q=\frac{5}{13}$時，$\overline{BQ}=\frac{10}{13}$，由定理 8 知此時$\overline{PQ}=2(\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13})=\frac{66}{65}$，如圖 18。若以原點為中心，將圖 18 的六邊形其邊長放

大 65 倍，可得外接圓半徑為 65 的完美六邊形 $50_{(2)}-66_{(2)}-78_{(2)}$，如圖 19。此時邊長為偶數，再以原點為中心伸縮為一半，可得外接圓半徑為 $\frac{65}{2}$ 的完美六邊形 $25_{(2)}-33_{(2)}-39_{(2)}$，如圖 20。

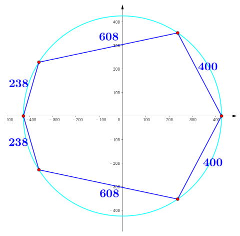

圖 21：$238_{(2)}-400_{(2)}-608_{(2)}$

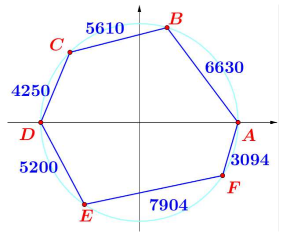

圖 22：$a-b-c-d-e-f$

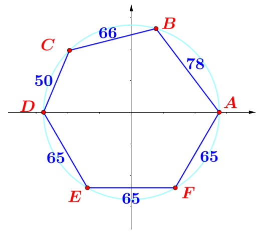

圖 23：$50-66-78-65_{(3)}$

由引理 2 知，若取 $p=\frac{15}{17}$，$q=\frac{8}{17}$ 時，$\overline{AP}=\sqrt{2\times(1-\frac{161}{289})}=\frac{16}{17}$，取 $p=\frac{24}{25}$，$q=\frac{7}{25}$ 時，$\overline{BQ}=\frac{14}{25}$，此時 $\overline{PQ}=2(\frac{15}{17}\times\frac{24}{25}-\frac{8}{17}\times\frac{7}{25})=\frac{608}{425}$。再以原點為中心將其邊長放大 425 倍，可得外接圓半徑為 425 的完美六邊形 $238_{(2)}-400_{(2)}-608_{(2)}$，如圖 21。所以我也可以取 $A(1,0)$，$B(\frac{7}{25},\frac{24}{25})$，$C(-\frac{119}{169},\frac{120}{169})$，$D(-1,0)$，$E(-\frac{161}{289},-\frac{240}{289})$ 與 $F(\frac{527}{625},-\frac{336}{625})$，此時這 6 個邊的邊長分別為：$\frac{6}{5}$，$\frac{66}{65}$，$\frac{10}{13}$，$\frac{16}{17}$，$\frac{608}{425}$ 與 $\frac{14}{25}$。將這六個點以原點為中心伸縮 $\frac{65\times425}{5}=5525$ 倍，可得外接圓半徑為 5525 的完美六邊形 $6630-5610-4250-5200-7904-3094$，如圖 20。當然也可以取圖 20 的上半部，下半部接一個上底與兩腰與外接圓半徑等長的等腰梯形形成完美六邊形 $50-66-78-65_{(3)}$，如圖 23。也就是說我得到了 $a-b-c-d_{(3)}$ 的建構方法。故單位圓直徑上方有三個有理數邊長 $\overline{AP}=2q_1$，$\overline{BQ}=2q_2$ 與 $\overline{PQ}=2|p_1^2q_2^2-p_2^2q_1^2|$。再將 P 點與 Q 點對 x 軸作線對稱，將邊長放大 $p_1^2+q_1^2$ 倍，可得外接圓半徑為 $p_1^2+q_1^2$ 的完美六邊形

$2q_1\sqrt{p_1^2+q_1^2}_{(2)}-2q_2\sqrt{p_2^2+q_2^2}_{(2)}-2|p_1^2q_2^2-p_2^2q_1^2|_{(2)}$。如圖 24。

(二) 完美六邊形 $a-b-c-d-e-f$

同理在上述討論中，也可以取另外兩組 p_3、q_3、p_4 與 q_4，再做適當的伸縮，構成如圖 25 邊長皆相異的完美六邊形。

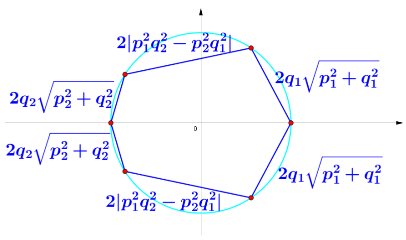

圖 24：$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$

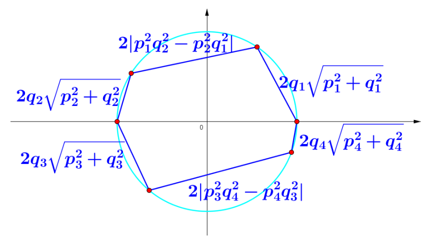

圖 25：$a-b-c-d-e-f$

(三) 完美六邊形 $a_{(2)}-b_{(4)}$

在此提出一個與前作[2]不同的 $a_{(2)}-b_{(4)}$ 建構方法。考慮引理 2 中取 $p=4$，$q=3$，此時 $\overline{OP}=25$，如圖 23。取 $p=12$，$q=5$，此時 $\overline{OQ}=169$，如圖 24。

由圖 23 與圖 24，我們可以建構外接圓半徑為 25 的完美六邊形 $14_{(2)}-30_{(4)}$ 與外接圓半徑為 169 的完美六邊形 $238_{(2)}-130_{(4)}$。如圖 28 與圖 29。

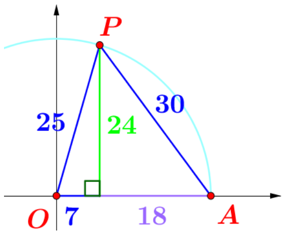

圖 26： $p=4$，$q=3$

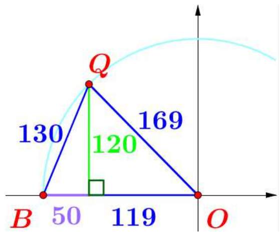

圖 27： $p=12$，$q=5$

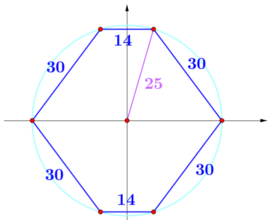

圖 28： $14_{(2)}-30_{(4)}$

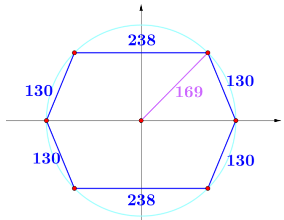

圖 29： $238_{(2)}-130_{(4)}$

(四) 完美六邊形 $a-b_{(2)}-c_{(3)}$

取 $A(p^2+q^2,0)$，$B(p^2-q^2,2pq)$，$C(q^2-p^2,2pq)$，$D(-p^2-q^2,0)$，$E(-\dfrac{p^2+q^2}{2},-\dfrac{\sqrt{3}(p^2+q^2)}{2})$ 與 $F(\dfrac{p^2+q^2}{2},-\dfrac{\sqrt{3}(p^2+q^2)}{2})$。則由引理 2 知，$\overline{BC}=2p^2-2q^2$，$\overline{AB}=\overline{CD}=2q\sqrt{p^2+q^2}$，$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}=p^2+q^2$，故可得半徑為 p^2+q^2 的完美六邊形 $(2p^2-2q^2)-2q\sqrt{p^2+q^2}_{(2)}-(p^2+q^2)_{(3)}$，如圖 30。 若取 $p=4$，$q=3$，可得外接圓半徑為 25 的完美六邊形 $14-30_{(2)}-25_{(3)}$，如圖 31。

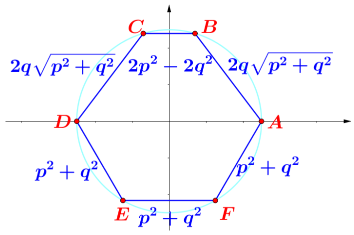

圖 30：$(2p^2-2q^2)-2q\sqrt{p^2+q^2}_{(2)}-(p^2+q^2)_{(3)}$

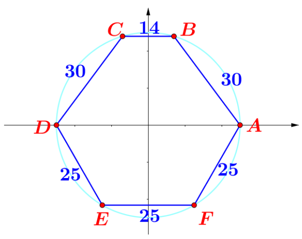

圖 31：$14-30_{(2)}-25_{(3)}$

(五) 完美六邊形 $a-b-c_{(2)}-d_{(2)}$

其實在[2]我已經利用拼貼三角形作出來 $a-b-c_{(2)}-d_{(2)}$，只是當時沒有強調。取兩個頂角為 120° 且三邊長為 $3-5-7$ 的拼貼三角形，將其邊長放大 13 倍。再取一個頂角為 120° 且三邊長為 $7-8-13$，的拼貼三角形，將其邊長放大 7 倍。再取一個邊長為 $7\times 13=91$ 的正三角形，如圖 32，可得完美六邊形 $49-56-30_{(2)}-65_{(2)}$。

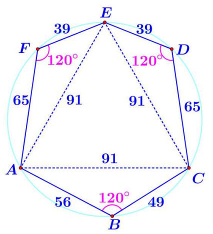

圖 32： $49-56-30_{(2)}-65_{(2)}$

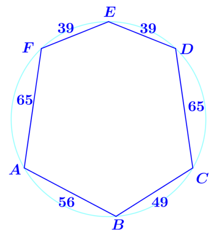

圖 33： $49-56-30_{(2)}-65_{(2)}$

關於有兩組以上不同整數邊長的圓內接六邊形剩下最後一組 $a-b-c_{(4)}$。在我的實驗手冊有紀錄使用後面定理 10 找出所有完美六邊形的一般式。

二、完美五邊形的建構

在前作[2]討論了 $a-b_{(4)}$ 與 $a_{(2)}-b_{(3)}$，本節討論剩下四種完美五邊形 $a-b_{(2)}-c_{(2)}$、$a-b-c_{(3)}$、$a-b-c-d_{(2)}$ 與 $a-b-c-d-e$ 的建構。

(一) 完美五邊形 $a-b_{(2)}-c_{(2)}$ 的建構：

我考慮先作一個等腰三角形，在其兩腰上各加上一個全等三角形，也是拼貼三角形的想法。ΔABD 中，$\overline{AB}=a$ 是整數，然後在兩腰 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BD}$ 上接上兩個全等的三角形 ΔBCD 與 ΔADE，其中 $\overline{BC}=\overline{AE}=b$ 且 $\overline{CD}=\overline{DE}=c$，其中 b、c 皆為整數。

定理 9：

存在整數五邊形 $a-b_{(2)}-c_{(2)}$，其中 $a=2|b-c|$。

Proof：

設 $\overline{AD}=\overline{BD}=x$，因為 ΔABD 是等腰三角形，取 $\overline{AB}$ 之中點 M，設 $\angle DBA=\alpha$，因為圓內接四邊形對角互補，所以 $\angle E=\pi-\alpha$。又 ΔBDM 中，$\cos\alpha=\dfrac{a}{2x}$。在 ΔADE 中，由餘弦定理知：

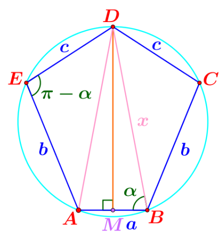

圖 34： $a-b_{(2)}-c_{(2)}$

$$x^2=b^2+c^2-2bc\cos(\pi-\alpha)=b^2+c^2+2bc\cos\alpha$$

$$\Rightarrow x^2=b^2+c^2+2bc\frac{a}{2x}=b^2+c^2+\frac{abc}{x}\Rightarrow x^3-(b^2+c^2)x-abc=0$$

令 $f(x)=x^3-(b^2+c^2)x-abc$，又 $a=2|b-c|$ 故 $(a-2(b-c))(a-2(c-b))=0$

$$\Rightarrow -\frac{a}{8}(a-2(b-c))(a-2(c-b))=0\Rightarrow -\frac{a^3}{8}+\frac{a(b^2+c^2)}{2}-abc=0\Rightarrow f(-\frac{a}{2})=0$$

又 $f(x)=(x+\dfrac{a}{2})(x^2-\dfrac{a}{2}x-2bc)$，因為 $x>0$，所以 x 為 $x^2-\dfrac{a}{2}x-2bc=0$ 的正根，即

$x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+32bc}}{4}$，此時 x 必存在，且可以尺規作圖建構。 ■

我們取 $a=2$、$b=3$、$c=4$，可得 $f(x)=x^3-25x-24=(x+1)(x^2-x-24)=0\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{97}}{2}$，如圖 35。我們取 $a=4$、$b=3$、$c=5$，可得 $f(x)=x^3-34x-60=(x+2)(x^2-2x-30)=0$ $\Rightarrow x=1+\sqrt{31}$， 如圖 36。我們取 $a=2$、$b=4$、$c=5$，可得 $f(x)=x^3-41x-40$ $=(x+1)(x^2-x-40)=0\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{161}}{2}$， 如圖 37。

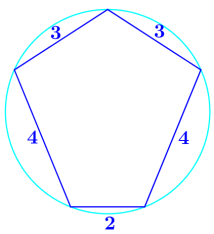

圖 35：$2-3_{(2)}-4_{(2)}$

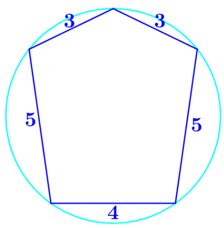

圖 36：$4-3_{(2)}-5_{(2)}$

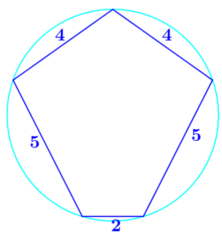

圖 37：$2-4_{(2)}-5_{(2)}$

(二) 完美五邊形 $a-b-c_{(3)}$ 的建構：

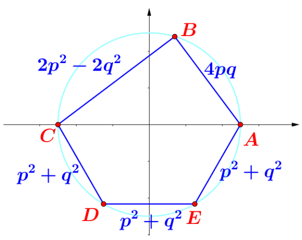

圖 38：$(2p^2-2q^2)-4pq-(p^2+q^2)_{(3)}$

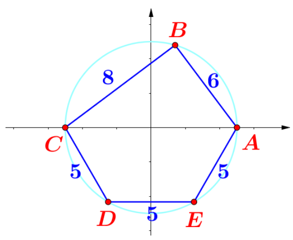

圖 39：$6-8-5_{(3)}$

延續建構 $a-b_{(2)}-c_{(2)}$ 的想法，我利用一個直角三角形與三個正三角形構成的等腰梯形建構，如圖 38 與 39，ΔABC 為直角三角形，四邊形 $ACDE$ 為等腰梯形。考慮畢氏三元數，取 $A(p^2+q^2,0)$，$C(-p^2-q^2,0)$ 為外接圓直徑的兩端點，此時半徑為 p^2+q^2，在下半圓取 D 與 E 兩點，使得 $\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}=p^2+q^2$，在上半圓取 B 點，使得 $\overline{AB}=4pq$ 且 $\overline{BC}=2p^2-2q^2$。可得外接圓半徑為 p^2+q^2 的完美五邊形 $(2p^2-2q^2)-4pq-(p^2+q^2)_{(3)}$，如圖 38 所示。取 $p=2$ 且 $q=1$ 如圖 39，得外接圓半徑為 5，$\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}=5$，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=8$，可得完美五邊形 $6-8-5_{(3)}$。接著我們要以引理 2 與定理 9 建構完美五邊形。

(三) 完美五邊形 $a-b-c-d_{(2)}$ 與 $a-b-c-d-e$ 的建構：

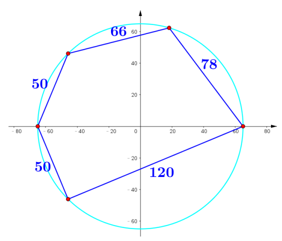

圖 40：$66-78-120-50_{(2)}$

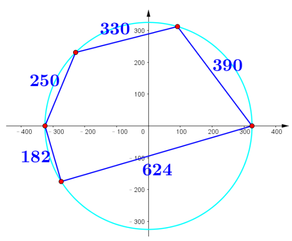

圖 41：$182-250-330-390-624$

由定理 8 得知，我們取完美四邊形$a-b-c-2R$取圖 19 的上半部，此時外接圓直徑是130，故我在下半圓上找一點使得邊長為50與120，可得外接圓半徑為65的完美五邊形$66-78-120-50_{(2)}$，如圖 40。也就是說我可以利用定理 9 與一個斜邊等於外接圓直徑的直角三角形，建構外接圓半徑是$p_1^2+q_1^2=p_2^2+q_2^2$的完美五邊形$2q_1-2|p_1^2q_2^2-p_2^2q_1^2|-2q_2-4p_1q_1-(2p_1^2-2q_1^2)$。若取圖 37 的上半圓且放大$5$倍，再拼一個邊長為$7\times26-24\times26-25\times26$的直角三角形，可得外接圓半徑為$325$的完美五邊形$182-250-330-390-624$，如圖 41。　在此我完整證明完美五邊形的各種情形，有兩種相異邊長的完美五邊形$a-b_{(4)}$與$a_{(2)}-b_{(3)}$，有三種相異邊長的完美五邊形$a-b_{(2)}-c_{(2)}$與完美五邊形$a-b-c_{(3)}$。有四種相異邊長的完美五邊形$a-b-c-d_{(2)}$。有五種相異邊長的完美五邊形$a-b-c-d-e$。在我的實驗手冊有紀錄使用後面定理 10 找出所有完美五邊形的一般式。

三、利用n倍角公式建構完美多邊形

在[2]中我建構了兩種相異邊長的完美七邊形$a-b_{(6)}$、$a_{(2)}-b_{(5)}$與$a_{(3)}-b_{(4)}$，在本節我要使用建構有三種相異邊長的$a_{(5)}-b-c$、$a_{(4)}-b_{(2)}-c$、$a_{(3)}-b_{(3)}-c$與$a_{(2)}-b_{(3)}-c_{(2)}$，四種相異邊長的$a_{(4)}-b-c-d$、$a_{(3)}-b_{(2)}-c-d$與$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d$，五種相異邊長的$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d-e$。在定理 10 我以三種相異邊長為例證明。而剩下的五種相異邊長的$a-b-c-d-e_{(3)}$與六種相異邊長的$a-b-c-d-e-f_{(2)}$，七種相異邊長的$a-b-c-d-e-f-g$情形我在下一節用定理 11 建構。

在單位圓上，我用2α倍數的圓心角去做對應邊，再放大使外接圓半徑與圓內接多邊形之邊長皆為整數。而在更多邊形時，如果直接用倍角，邊長與角度變化會很大，計算量也會很大，所以我將圓以直徑分成兩半來建構，再將兩半做適當的伸縮就可以得到很多個相異邊長的圓內接多邊形，而且是完美多邊形，這就是下一節中的定理 11。然後將定理 10 做出的多邊形，跟之前的例子適當伸縮後做組合，就可以得到很多有三組以上相異邊長的完美多邊形。我使用畢氏三元數做變數變換，可取得適當的p、q做為多邊形的邊長，但之後要伸縮變換，放大若干倍。但因為p、q互質，所以在變大的過程中，不會有重複的情形。

定理 10　n倍角公式建構完美多邊形

10-1 存在完美多邊形$a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}-a_n$。

10-2 存在完美多邊形$a_{(h)}-b_{(k)}-c_{(2)}$。其中$h\geq2$，$k\geq2$。

Proof：

設$\frac{a_1}{2}$邊所對的角是α，$\frac{a_2}{2}$邊所對的角是2α，$\frac{a_3}{2}$邊所對的角是3α，...，$\frac{a_{n-1}}{2}$邊所對的角是$(n-1)\alpha$，且$j=\sum_{k=1}^{n-1}k$，$\frac{a_n}{2}$邊所對的角是$\pi-j\alpha$，$j\alpha<\pi$。設$p,q\in\mathbb{N}$，$p>q$，p與q為一奇一偶且互質。得：$a_1=2R\sin\alpha$，$a_2=2R\sin 2\alpha$，$a_3=2R\sin 3\alpha$，...，$a_{n-1}=2R\sin(n-1)\alpha$，

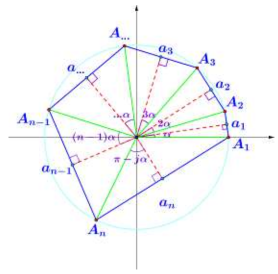

圖 42：$a_1-a_2-...-a_{n-1}-a_n$

$a_n=2R\sin(\pi-j\alpha)=2R\sin j\alpha$。又$\sin\alpha=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$與$\cos\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$皆為有理數。又

$\sin n\alpha=C_1^n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_3^n\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_5^n\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-C_7^n\cos^{n-7}\alpha\sin^7\alpha+...$

取$R=(p^2+q^2)^j$，$a_1=2(p^2-q^2)(p^2+q^2)^{j-1}$，$a_2=4(2pq)(p^2-q^2)(p^2+q^2)^{j-2}$，...，

$a_n=2[C_1^j(2pq)^{j-1}(p^2-q^2)-C_3^j(2pq)^{j-3}(p^2-q^2)^3+C_5^j(2pq)^{j-5}(p^2-q^2)^5-...]$ ■

設單位圓的圓心為O，$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=...=\overline{A_{h-1}A_h}=\overline{A_hB_1}=a$，$\overline{B_1B_2}=...=\overline{B_{k-1}B_k}=\overline{B_kC_1}=b$，$\overline{C_1C_2}=\overline{C_2A_1}=c$。設$\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=...=\angle A_{h-1}OA_h=\angle A_hOB_1=2\alpha$，$\angle B_1OB_2=\angle B_2OB_3=...=\angle B_{k-1}OB_k=\angle B_kOC_1=4\alpha$，則

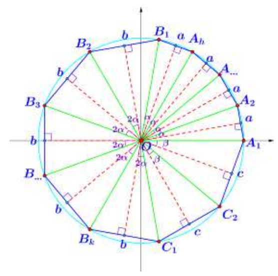

圖 43：$a_{(h)}-b_{(k)}-c_{(2)}$的建構

$\angle C_1OC_2=C_2OA_1=2\beta$，其中$\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{(h+2k)\alpha}{2}$，且$(h+2k)\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{h+2k}$。設$p,q\in\mathbb{N}$，$p>q$，$p$與$q$為一奇一偶且互質。設$r=\frac{h+2k}{2}$，可得：

$a=2\sin\alpha=2\times\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$，$b=2\sin 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2})(\frac{2pq}{p^2+q^2})$，

$c=2\sin(\frac{\pi-(h+2k)\alpha}{2})=2\cos(\frac{(h+2k)\alpha}{2})=2\cos r\alpha$，

$c=2(C_0^r\cos^r\alpha-C_{r-2}^r\cos^{r-2}\alpha\sin^2\alpha+C_{r-4}^r\cos^{r-4}\alpha\sin^4\alpha-C_{r-6}^r\cos^{r-6}\alpha\sin^6\alpha+...)$

$=2C_0^r(\frac{2pq}{p^2+q^2})^r-2C_2^r(\frac{2pq}{p^2+q^2})^{r-2}(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2})^2+2C_{r-4}^r(\frac{2pq}{p^2+q^2})^{r-4}(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2})^4-...$

取$R=(p^2+q^2)^r$，$a=2(p^2-q^2)(p^2+q^2)^{r-1}$，$b=4(2pq)(p^2-q^2)(p^2+q^2)^{r-2}$，

$c=2C_0^r(2pq)^r-2C_2^r(2pq)^{r-2}(p^2-q^2)^2+2C_{r-4}^r(2pq)^{r-4}(p^2-q^2)^4-...$

即可建構完美多邊形$a_{(h)}-b_{(k)}-c_{(2)}$。 ■

當然之前提到的完美五邊形與六邊形也可以用定理 10 建構，而且全都是完美多邊形。在

後續討論中為了突顯結構，設輔助三角形α角的鄰邊為$2pq$，對邊為p^2-q^2，斜邊為p^2+q^2，如圖 45，其中$p,q\in\mathbb{N}$，$p>q$，p與q為一奇一偶且互質。再作變數便換$x=2pq$，$y=p^2-q^2$，$z=x^2+y^2$。

(一) 完美七邊形$a_{(5)}-b-c$

設單位圓的圓心為O，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=a$，$\overline{FG}=b$，$\overline{GA}=c$。分別取$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$與$\overline{GA}$的中點$M_1$、$M_2$、$M_3$、$M_4$、$M_5$、$M_6$與$M_7$。設$\angle AOM_1=\angle BOM_2=\angle COM_3=\angle DOM_4=\angle EOM_5=\alpha$，$\angle FOM_6=2\alpha$，則$\angle GOM_7=\pi-7\alpha$，其中$7\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\dfrac{\pi}{7}$，如圖 44。得$a=2\sin\alpha=2\times\dfrac{y}{z}$，$b=2\sin 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{x}{z}$，

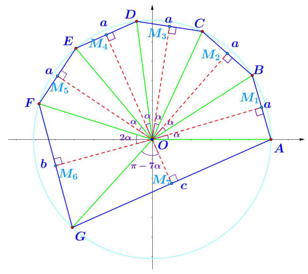

圖 44：$a_{(5)}-b-c$的建構

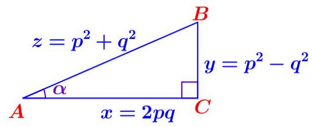

圖 45：輔助三角形

$$c=2\sin(\pi-7\alpha)=2\sin 7\alpha=2(C_1^7\cos^6\alpha\sin\alpha-C_3^7\cos^4\alpha\sin^3\alpha+C_5^7\cos^2\alpha\sin^5\alpha-C_7^7\sin^7\alpha)$$

$=14(\dfrac{x}{z})^6(\dfrac{y}{z})-70(\dfrac{x}{z})^4(\dfrac{y}{z})^3+42(\dfrac{x}{z})^2(\dfrac{y}{z})^5-2(\dfrac{y}{z})^7$，不失一般性，取$R=z^7$，得：

$a_{(5)}-b-c$
$R=z^7$，$a=2yz^6$，$b=4xyz^5$，$c=14x^6y-70x^4y^3+42x^2y^5-2y^7$

(二) 完美七邊形$a_{(4)}-b_{(2)}-c$

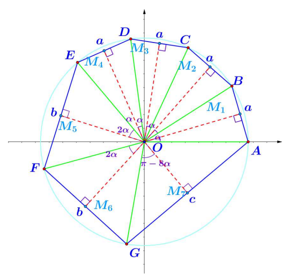

圖 46：$a_{(4)}-b_{(2)}-c$的建構

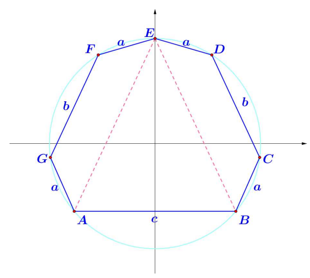

圖 47：$a_{(4)}-b_{(2)}-c$的建構

設單位圓的圓心為O，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=a$，$\overline{EF}=\overline{FG}=b$，$\overline{GA}=c$。分別取$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$與$\overline{GA}$的中點$M_1$、$M_2$、$M_3$、$M_4$、$M_5$、$M_6$與$M_7$。設$\angle AOM_1=\angle BOM_2=\angle COM_3=\angle DOM_4=\alpha$，$\angle EOM_5=\angle FOM_6=2\alpha$，則$\angle GOM_7=\pi-8\alpha$，其中$8\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\dfrac{\pi}{8}$，如圖 42。可得$a=2\sin\alpha=2\times\dfrac{y}{z}$，$b=2\sin 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{y}{z}$，

$$c=2\sin(\pi-8\alpha)=2\sin 8\alpha=2(C_1^8\cos^7\alpha\sin\alpha-C_3^8\cos^5\alpha\sin^3\alpha+C_5^8\cos^3\alpha\sin^5\alpha-C_7^8\cos\alpha\sin^7\alpha)$$

$=16(\frac{x}{z})^7(\frac{y}{z})-112(\frac{x}{z})^5(\frac{y}{z})^3+112(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})^5-16(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^7$，不失一般性，取 $R=z^8$，得：

$a_{(4)}-b_{(2)}-c$
$R=z^8$，$a=2yz^7$，$b=4xyz^6$，$c=14x^7y-70x^5y^3+42x^3y^5-2xy^7$

（三）完美七邊形 $a_{(3)}-b_{(3)}-c$

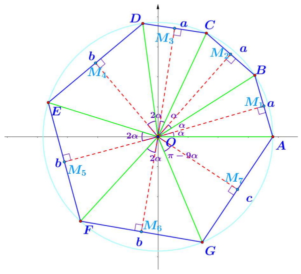

圖 48：$a_{(3)}-b_{(3)}-c$

設單位圓的圓心為 O， $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=a$， $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FG}=b$，$\overline{GA}=c$。分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{GA}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、 M_4、M_5、M_6 與 M_7。設 $\angle AOM_1=\angle BOM_2=\angle COM_3=\alpha$，$\angle DOM_4=\angle EOM_5=\angle FOM_6=2\alpha$，則 $\angle GOM_7=\pi-9\alpha$，其中 $9\alpha<\pi$ $\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{9}$，如圖 48。可得：$a=2\sin\alpha=2\times\frac{y}{z}$，$b=2\sin 2\alpha$

$=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}$，$c=2\sin(\pi-9\alpha)=2\sin 9\alpha$

$=2(C_1^9\cos^8\alpha\sin\alpha-C_3^9\cos^6\alpha\sin^3\alpha+C_5^9\cos^4\alpha\sin^5\alpha-C_7^9\cos^2\alpha\sin^7\alpha+C_9^9\sin^9\alpha)$

$=18(\frac{x}{z})^8(\frac{y}{z})-168(\frac{x}{z})^6(\frac{y}{z})^3+252(\frac{x}{z})^4(\frac{y}{z})^5-72(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z^2})^7+2(\frac{y}{z})^9$，不失一般性，取 $R=z^9$，得：

$a_{(3)}-b_{(3)}-c$
$R=z^9$，$a=2yz^8$，$b=4xyz^7$，$c=18x^8y-168x^6y^3+252x^4y^5-72x^2y^7+2y^9$

（四）完美七邊形 $a_{(2)}-b_{(3)}-c_{(2)}$

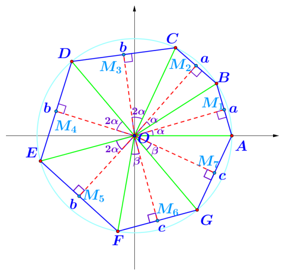

圖 49：$a_{(2)}-b_{(3)}-c_{(2)}$

設單位圓的圓心為 O， $\overline{AB}=\overline{BC}=a$， $\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=b$，$\overline{FG}=\overline{GA}=c$。分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{GA}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、 M_4、M_5、M_6 與 M_7。設 $\angle AOM_1=\angle BOM_2=2\alpha$，$\angle COM_3=\angle DOM_4=\angle EOM_5=\alpha$，則 $\angle FOM_6=\angle GOM_7=\frac{\pi}{2}-4\alpha$，

設 $\beta=\frac{\pi}{2}-4\alpha$，其中 $4\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{8}$，如圖 49。可得：

$a=2\sin\alpha=2\times\frac{y}{z}$，$b=2\sin 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}$，

$c=2\sin(\pi-4\alpha)=2\cos 4\alpha$

$=2(C_0^4\cos^4\alpha-C_2^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha+C_4^4\sin^4\alpha)=2(\frac{x}{z})^4-12(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})^2+2(\frac{y}{z})^4$，取 $R=z^4$，得：

$a_{(2)}-b_{(3)}-c_{(2)}$
$R=z^4$，$a=2yz^3$，$b=4xyz^2$，$c=2x^4-12x^2y^2+2y^4$

（五）完美七邊形 $a_{(4)}-b-c-d$

設單位圓的圓心為 O，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=a$，$\overline{EF}=b$，$\overline{GA}=c$，$\overline{FG}=d$。分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{GA}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5、M_6 與 M_7。

設 $\angle AOM_1=\angle BOM_2=\angle COM_3=\angle DOM_4=\alpha$，$\angle EOM_5=2\alpha$，$\angle FOM_6=3\alpha$，則 $\angle GOM_7=\pi-9\alpha$，其中 $9\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\dfrac{\pi}{9}$，如圖 50。可得：$a=2\sin\alpha=2\times\dfrac{y}{z}$，$b=2\sin2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{y}{z}$，

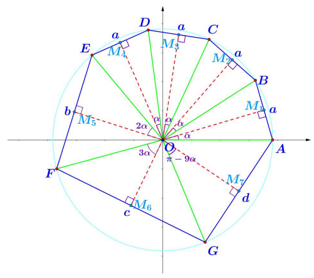

圖 50：$a_{(4)}-b-c-d$

$c=2\sin3\alpha=2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha-C_3^3\sin^3\alpha)=6(\dfrac{x}{z})^2(\dfrac{y}{z})-2(\dfrac{y}{z})^3$，

$d=2\sin(\pi-9\alpha)=2\sin9\alpha=2(C_1^9\cos^8\alpha\sin\alpha-C_3^9\cos^6\alpha\sin^3\alpha+C_5^9\cos^4\alpha\sin^5\alpha-C_7^9\cos^2\alpha\sin^7\alpha$

$+C_9^9\sin^9\alpha)=18(\dfrac{x}{z})^8(\dfrac{y}{z})-168(\dfrac{x}{z})^6(\dfrac{y}{z})^3+252(\dfrac{x}{z})^4(\dfrac{y}{z})^5-72(\dfrac{x}{z})^2(\dfrac{y}{z})^7+2(\dfrac{p^2-q^2}{z})^9$，取 $R=z^9$ 得：

$a_{(4)}-b-c-d$
$R=z^9$，$a=2yz^8$，$b=4xyz^7$，$c=6x^2yz^6-2y^3z^6$， $d=18x^8y-168x^6y^3+252x^4y^5-72x^2y^7+2y^9$

（六）完美七邊形 $a_{(3)}-b_{(2)}-c-d$

設單位圓的圓心為 O，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=a$，$\overline{DE}=\overline{EF}=b$，$\overline{FG}=c$，$\overline{GA}=d$。分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{GA}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5、M_6 與 M_7。設 $\angle AOM_1=\angle BOM_2=\angle COM_3=\alpha$，$\angle DOM_4=\angle EOM_5=2\alpha$，$\angle FOM_6=3\alpha$

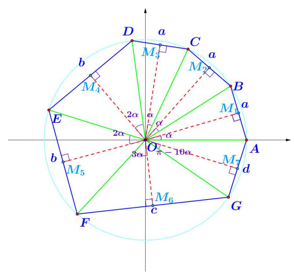

圖 51：$a_{(3)}-b_{(2)}-c-d$

，則 $\angle GOM_7=\pi-10\alpha$，其中 $10\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\dfrac{\pi}{10}$，如圖 51。可得：$a=2\sin\alpha=2\times\dfrac{y}{x}$，

$b=2\sin2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{y}{z}$，$c=2\sin3\alpha$

$=2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha-C_3^3\sin^3\alpha)=6(\dfrac{x}{z})^2(\dfrac{y}{z})-2(\dfrac{y}{z})^3$，

$d=2\sin(\pi-10\alpha)=2\sin10\alpha$

$=2(C_1^{10}\cos^9\alpha\sin\alpha-C_3^{10}\cos^7\alpha\sin^3\alpha+C_5^{10}\cos^5\alpha\sin^5\alpha-C_7^{10}\cos^3\alpha\sin^7\alpha+C_9^{10}\cos\alpha\sin^9\alpha)$

$$=20(\frac{x}{z})^9(\frac{y}{z})-240(\frac{x}{z})^7(\frac{y}{z})^3+504(\frac{x}{z})^5(\frac{y}{z})^5-240(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})^7+20(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^9$$ ，取 $R=z^{10}$，得：

$a_{(3)}-b_{(2)}-c-d$
$R=z^{10}$，$a=2yz^9$，$b=4xyz^8$，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$， $d=20x^9y-240x^7y^3+504x^5y^5-240x^3y^7+20xy^9$

（七）完美七邊形 $a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d$

分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{GA}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5、M_6 與 M_7。設 $\angle AOM_1=\angle BOM_2=\alpha$，$\angle COM_3=\angle DOM_4=2\alpha$，$\angle EOM_5=\angle FOM_6=3\alpha$，$\angle GOM_7=\pi-12\alpha$，如圖 52。其中 $12\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{12}$，可得：

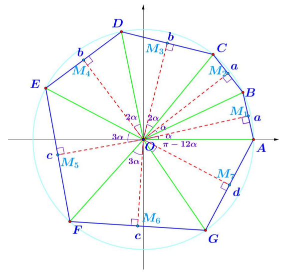

圖 52：$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d$

$a=2\sin\alpha=2\times\frac{y}{z}$，$b=2\sin 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}$，

$c=2\sin 3\alpha=2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha-C_3^3\sin^3\alpha)=6(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})-2(\frac{y}{z})^3$，

$$d=2\sin(\pi-12\alpha)=2\sin 12\alpha=2(C_1^{12}\cos^{11}\alpha\sin\alpha-C_3^{12}\cos^9\alpha\sin^3\alpha$$
$$+C_5^{12}\cos^7\alpha\sin^5\alpha-C_7^{12}\cos^5\alpha\sin^7\alpha+C_9^{12}\cos^3\alpha\sin^9\alpha-C_{11}^{12}\cos\alpha\sin^{11}\alpha)$$
$$=24(\frac{x}{z})^{11}(\frac{y}{z})-440(\frac{x}{z})^9(\frac{y}{z})^3+1584(\frac{x}{z})^7(\frac{y}{z})^5-1584(\frac{x}{z})^5(\frac{y}{z})^7+440(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})^9-24(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^{11}$$ ，

不失一般性，取 $R=z^{12}$，得：

$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d$
$R=z^{12}$，$a=2yz^{11}$，$b=4xyz^{10}$，$c=6x^2yz^9-2y^3z^9$， $d=24x^{11}y-440x^9y^3+1584x^7y^5-1584x^5y^7+440x^3y^9-24xy^{11}$

（八）$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d-e$

設單位圓的圓心為 O，$\overline{AB}=\overline{BC}=a$，$\overline{CD}=\overline{DE}=b$，$\overline{EF}=c$，$\overline{FG}=d$，$\overline{GA}=e$。分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$ 與 $\overline{GA}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5、M_6 與 M_7。設 $\angle AOM_1=\angle BOM_2=\alpha$，$\angle COM_3=\angle DOM_4=2\alpha$，$\angle EOM_5=3\alpha$，$\angle FOM_6=4\alpha$，則 $\angle GOM_7=\pi-13\alpha$，其中 $13\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{13}$，如圖 53。

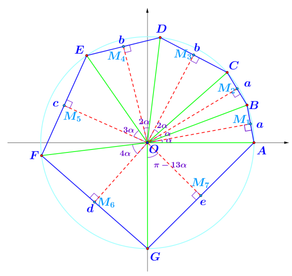

圖 53：$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d-e$ 的建構

可得：$a=2\sin\alpha=2\times\frac{y}{z}$，$b=2\sin2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}$，

$c=2\sin3\alpha=2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha-C_3^3\sin^3\alpha)\ =6(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})-2(\frac{y}{z})^3$，$d=2\sin4\alpha$

$=2(C_1^4\cos^3\alpha\sin\alpha-C_1^4\cos\alpha\sin^3\alpha)=8(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})-8(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^3$，$e=2\sin(\pi-13\alpha)=2\sin13\alpha$

$=2(C_1^{13}\cos^{12}\alpha\sin\alpha-C_3^{13}\cos^{10}\alpha\sin^3\alpha+C_5^{13}\cos^8\alpha\sin^5\alpha-C_7^{13}\cos^6\alpha\sin^7\alpha+C_9^{13}\cos^4\alpha\sin^9\alpha$

$-C_{11}^{13}\cos^2\alpha\sin^{11}\alpha+C_{13}^{13}\sin^{13}\alpha=26(\frac{x}{z})^{12}(\frac{y}{z})-572(\frac{x}{z})^{10}(\frac{y}{z})^3+2574(\frac{x}{z})^8(\frac{y}{z})^5-3432(\frac{x}{z})^6(\frac{y}{z})^7$

$+1430(\frac{x}{z})^4(\frac{y}{z})^9-158(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})^{11}+2(\frac{y}{z})^{13}$，不失一般性，取 $R=z^{13}$，得：

$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d-e$
$R=z^{13}$，$a=2yz^{12}$，$b=4xyz^{11}$，$c=6x^2yz^{10}-2y^3z^{10}$，$d=8x^3yz^9-8xy^3z^9$ $e=26x^{12}y-572x^{10}y^3+2574x^8y^5-3432x^6y^7+1430x^4y^9-158x^2y^{11}+2y^{13}$

完美七邊形剩下的三類 $a-b-c-d-e_{(3)}$、$a-b-c-d-e-f_{(2)}$ 與七種相異邊長的 $a-b-c-d-e-f-g$，在下一節用定理 12 建構。我用定理 10 建構於表 3。接著以定理 10 建構最後一組完美六邊形 $a_{(4)}-b-c$。

(九) 完美六邊形 $a_{(4)}-b-c$

這是最後一個有相異異邊長的完美六邊形。設單位圓的圓心為 O，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=a$，$\overline{EF}=b$，$\overline{FG}=c$。分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$ 與 $\overline{FG}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 與 M_6。設 $\angle AOM_1=\angle BOM_2=\angle COM_3=\angle DOM_4=\alpha$，

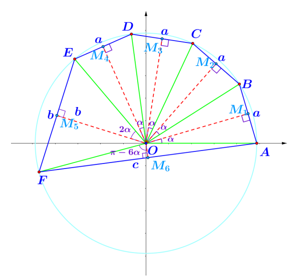

圖 54：$a_{(4)}-b-c$ 的建構

$\angle EOM_5=2\alpha$，則 $\angle FOM_6=\pi-6\alpha$，其中 $6\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{6}$，如圖 54。可得：$a=2\sin\alpha=2\times\frac{y}{z}$，

$b=2\sin2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}$，$c=2\sin(\pi-6\alpha)=2\sin6\alpha=2(C_1^6\cos^5\alpha\sin\alpha$

$-C_3^6\cos^5\alpha\sin^3\alpha+C_5^6\cos\alpha\sin^5\alpha)=12(\frac{x}{z})^5(\frac{y}{z})-40(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})^3+12(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^5$，取 $R=z^6$，得：

$a_{(4)}-b-c$
$R=z^6$，$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=12x^5y-40x^3y^3+12xy^5$

除了在[2]提過 $a_{(3)}-b_{(3)}$ 與 $a_{(4)}-b_{(3)}$ 這兩種完美多邊形不存在，我用定理 10 解出了其他所有類別的完美四邊形、五邊形、六邊形與七邊形的一般式，在本作品與前作[2]未呈現的一般

式，詳見表 3。其中 $z=p^2+q^2$ ，$x=p^2-q^2$ ，$y=2pq$ 。

表 3：完美四邊形、五邊形、六邊形與七邊形的一般式

完美四邊形
$a_{(3)}-b$ ：$R=z^3$ ，$a=2yz^2$ ，$b=6x^2y-2y^3$
$a_{(2)}-b_{(2)}$ ：$R=z$ ，$a=2y$ ，$b=2x$
$a_{(2)}-b-c$ ：$R=z^4$ ，$a=2yz^3$ ，$b=4xyz^2$ ，$c=8x^3y-8xy^3$
$a-b-c-d$ ：$R=z^6$ ，$a=2yz^5$ ，$b=4xyz^4$ ，$c=6x^2yz^3-8y^3z^3$ ，$d=12x^5y-40x^3y^3+2xy^5$
完美五邊形
$a_{(4)}-b$ ：$R=z^4$ ，$a=2yz^3$ ，$b=8x^3y-8xy^3$
$a_{(3)}-b_{(2)}$ ：$R=z^3$ ，$a=4xyz$ ，$b=2x^3y-6xy^2$
$a_{(2)}-b_{(2)}-c$ ：$R=z^6$ ，$a=2yz^4$ ，$b=4xyz^3$ ，$c=10x^4y-20x^2y^3+2y^5$
$a_{(3)}-b-c$ ：$R=z^6$ ，$a=2yz^5$ ，$b=4xyz^4$ ，$c=12x^5y-40x^3y^3+2xy^5$
$a_{(2)}-b-c-d$ ：$R=z^7$ ，$a=2yz^6$ ，$b=4xyz^5$ ，$c=6xy^2z^3-2y^3z^3$ ， $d=2(C_1^7x^6y-C_3^7x^4y^3+C_5^7x^2y^5-C_7^7y^7)$
$a-b-c-d-e$ ：$R=z^{10}$ ，$a=2yz^9$ ，$b=4xyz^8$ ，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$ ，$d=8xyz^6-8xy^3z^6$ ， $e=2(C_1^{10}x^9y-C_3^{10}x^7y^3-C_5^{10}x^5y^5+C_7^{10}x^3y^7+C_9^{10}xy^9)$
完美六邊形
$a_{(5)}-b$ ：$R=z^5$ ，$a=2yz^4$ ，$b=10x^4y-20x^2y^3+2y^5$
$a_{(4)}-b_{(2)}$ ：$R=z^2$ ，$a=2yz$ ，$b=2x^2-2y^2$
$a_{(3)}-b_{(3)}$ ：完美六邊形
$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$ ：$R=z^3$ ，$a=2yz^2$ ，$b=4xyz$ ，$c=2x^3-6xy^2$
$a_{(3)}-b_{(2)}-c$ ：$R=z^7$ ，$a=2yz^6$ ，$b=4xyz^5$ ，$c=2(C_1^7x^6y-C_3^7x^4y^3+C_5^7x^2y^5-C_7^7y^7)$
$a_{(4)}-b-c$ ：$R=z^6$ ，$a=2yz^5$ ，$b=4xyz^4$ ，$c=2(C_1^6x^5y-C_3^6x^3y^3+C_5^6xy^5)$
$a_{(3)}-b-c-d$ ：$R=z^8$ ，$a=2yz^7$ ，$b=4xyz^6$ ，$c=6x^2yz^5-2y^3z^5$ ， $d=2(C_1^8x^7y-C_3^8x^5y^3+C_5^8x^3y^5-C_7^8xy^7)$
$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d$ ：$R=z^9$ ，$a=2yz^8$ ，$b=4xyz^7$ ，$c=6x^2yz^6-2y^3z^6$ ， $d=2(C_1^9x^8y-C_3^9x^6y^3+C_5^9x^4y^5-C_7^9x^2y^7+C_9^9y^9)$
$a_{(2)}-b-c-d-e$ ：$R=z^{10}$ ，$a=2yz^9$ ，$b=4xyz^8$ ，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$ ，$d=8x^3yz^6-8xy^3z^6$ ， $e=2(C_1^{10}x^9y-C_3^{10}x^7y^3+C_5^{10}x^5y^5-C_7^{10}x^3y^7+C_9^{10}xy^9)$
$a-b-c-d-e-f$ ：$R=z^{15}$ ，$a=2yz^{14}$ ，$b=4xyz^{13}$ ，$c=6x^2yz^{12}-2y^3z^{12}$ ， $d=8x^3yz^{11}-8xy^3z^{11}$ ，$e=10x^4yz^{10}-20x^2y^3z^{10}+2y^5z^{10}$ ， $f=2(C_1^{15}x^{14}y-C_3^{15}x^{12}y^3+C_5^{15}x^{10}y^5-C_7^{15}x^8y^7+C_9^{15}x^6y^9$

$-C_{11}^{15}x^4y^{11}+C_{13}^{15}x^2y^{13}-C_{15}^{15}y^{15})$
完美七邊形
$a_{(6)}-b$ ： $R=z^6$ ， $a=2yz^5$ ， $b=2(C_1^6x^5y-C_3^6x^3y^3+C_5^6y^5)$
$a_{(5)}-b_{(2)}$ ： $R=z^5$ ， $a=4xyz^3$ ， $b=2(C_0^5x^5-C_2^5x^3y^2+C_4^5xy^4)$
$a_{(4)}-b_{(3)}$ ： $a=\sqrt{2}R(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-3\cos^2\theta\sin\theta+\sin^3\theta)$ ， $b=8R\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$
$a_{(5)}-b-c$ ： $R=z^7$ ， $a=2yz^6$ ， $b=4xyz^5$ ， $c=2(C_1^7x^6y-C_3^7x^4y^3+C_5^7x^2y^5-C_7^7y^7)$
$a_{(4)}-b_{(2)}-c$ ： $R=z^8$ ， $a=2yz^7$ ， $b=4xyz^6$ ， $c=2(C_1^8x^7y-C_3^8x^5y^3+C_5^8(2pq)^3(p^2-q^2)^5-C_7^8xy^7)$
$a_{(3)}-b_{(3)}-c$ ： $R=z^9$ ， $a=2yz^8$ ， $b=4xyz^7$ ， $c=2(C_1^9x^8y-C_3^9(2pq)^6y^3+C_5^9x^4y^5-C_7^9x^2y^7+C_9^9y^9)$
$a_{(2)}-b_{(3)}-c_{(2)}$ ： $R=z^4$ ， $a=2yz^3$ ， $b=4xyz^2$ ， $c=2(C_0^4x^4-C_2^4x^2y^2+C_4^4y^4)$
$a_{(4)}-b-c-d$ ： $R=z^9$ ， $a=2yz^8$ ， $b=4xyz^7$ ， $c=6x^2yz^6-2y^3z^6$ $d=2(C_1^9x^8y-C_3^9x^6y^3+C_5^9x^4y^5-C_7^9x^2y^7+C_9^9y^9)$
$a_{(3)}-b_{(2)}-c-d$ ： $R=z^{10}$ ， $a=2yz^9$ ， $b=4xyz^8$ ， $c=6x^2yz^7-2y^3z^7$ ， $d=2(C_1^{10}x^9y-C_3^{10}x^7y^3+C_5^{10}x^5y^5-C_7^{10}x^3y^7+C_9^{10}xy^9)$
$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d$ ： $R=z^{12}$ ， $a=2yz^{11}$ ， $b=4xyz^{10}$ ， $c=6x^2yz^9-2y^3z^9$ ， $d=2(C_1^{12}x^{11}y-C_3^{12}x^9y^3+C_5^{12}x^7y^5-C_7^{12}x^5y^7+C_9^{12}x^3y^9-C_{11}^{12}xy^{11})$
$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d-e$ ： $R=z^{13}$ ， $a=2yz^{12}$ ， $b=4xyz^{11}$ ， $c=6x^2yz^{10}-2y^3z^{10}$ ， $d=8x^3yz^9-8xy^3z^9$ ， $e=2(C_1^{13}x^{12}y-C_3^{13}x^{10}y^3+C_5^{13}x^8y^5-C_7^{13}xy^7+C_9^{13}x^4y^9-C_{11}^{13}x^2y^{11}+C_{13}^{13}y^{13})$
$a_{(3)}-b-c-d-e$ ： $R=z^{14}$ ， $a=2yz^{13}$ ， $b=4xyz^{12}$ ， $c=6x^2yz^{11}-2y^3z^{11}$ ， $d=8x^3yz^{10}-8xy^3z^{10}$ ， $e=2(C_1^{14}x^{13}y-C_3^{14}x^{11}y^3+C_5^{14}x^9y^5-C_7^{14}x^7y^7+C_9^{14}x^5y^9-C_{11}^{14}x^3y^{11}+C_{13}^{14}xy^{13})$
$a_{(2)}-b-c-d-e-f$ ： $R=z^{16}$ ， $a=2yz^{15}$ ， $b=4xyz^{14}$ ， $c=6x^2yz^{13}-2y^3z^{13}$ ， $d=8x^3yz^{12}-8xy^3z^{12}$ ， $e=10x^4yz^{11}-20x^2y^3z^{11}+2y^5z^{11}$ ， $f=2(C_1^{16}x^{15}y-C_3^{16}x^{13}y^3+C_5^{16}x^{11}y^5-C_7^{16}x^9y^7+C_9^{16}x^7y^9$ $-C_{11}^{16}x^5y^{11}+C_{13}^{16}x^3y^{13}-C_{15}^{16}xy^{15})$
$a-b-c-d-e-f-g$ ： $R=z^{21}$ ， $a=2yz^{20}$ ， $b=4xyz^{19}$ ， $c=6x^2yz^{18}-2y^3z^{18}$ ， $d=8x^3yz^{17}-8xy^3z^{17}$ ， $e=10x^4yz^{16}-20x^2y^3z^{16}+2y^5z^{16}$ ， $f=12x^5yz^{15}-40x^3y^3z^{15}+12xy^5z^{15}$ $g=2(C_1^{21}x^{20}y-C_3^{21}x^{18}y^3+C_5^{21}x^{16}y^5-C_7^{21}x^{14}y^7+C_9^{21}x^{12}y^9-C_{11}^{21}x^{10}y^{11}$ $+C_{13}^{21}x^8y^{13}-C_{15}^{21}x^6y^{15}+C_{17}^{21}x^4y^{17}-C_{19}^{21}x^2y^{19}+C_{21}^{21}y^{21})$

四、相同一般式畫多個完美多邊形－從$a-b-c-d-e$到$a_{(10)}-e$

在此我觀察到一件事，就是以倍角圓心角的概念建構時，例如：$a_{(3)}-b_{(2)}-c$與$a_{(5)}-b-c$的一般式是相同的，因為a邊所對的圓心角是2α，b邊所對的圓心角是4α，所以我增加一個

b 就減少兩個 a。以下我以完美五邊形 $a-b-c-d-e$ 解釋。設 a 邊所對的圓心角是 2α，b 邊所對的圓心角是 4α，c 邊所對的角是 6α，d 邊所對的角是 8α，e 邊所對的角是 $2\pi-20\alpha$，如圖 55。其中 $p,q\in\mathbb{N}$，$p>q$，p 與 q 為一奇一偶且互質。故：$a=2\sin\alpha=2\times\dfrac{y}{z}$，

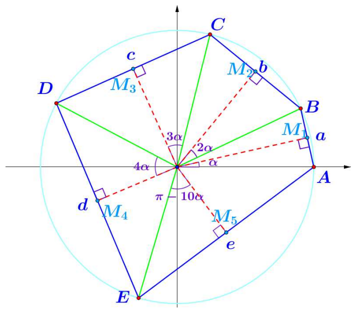

圖 55：$a-b-c-d-e$ 的建構

$$b=2\sin 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}\text{，}$$

$$c=2\sin 3\alpha=2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha-C_3^3\sin^3\alpha)=6(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})-2(\frac{y}{z})^3\text{，}$$

$$d=2\sin 4\alpha=2(C_1^4\cos^3\alpha\sin\alpha-C_1^4\cos\alpha\sin^3\alpha)=8(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})-8(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^3\text{，}$$

$$e=2\sin(\pi-10\alpha)=2\sin 10\alpha$$

$$=2(C_1^{10}\cos^9\alpha\sin\alpha-C_3^{10}\cos^7\alpha\sin^3\alpha+C_5^{10}\cos^5\alpha\sin^5\alpha-C_7^{10}\cos^3\alpha\sin^7\alpha+C_9^{10}\cos\alpha\sin^9\alpha)$$

$$=20(\frac{x}{z})^9(\frac{y}{z})-240(\frac{x}{z})^7(\frac{y}{z})^3-504(\frac{x}{z})^5(\frac{y}{z})^5+240(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})^7+20(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^9$$ 。取 $R=z^{10}$，得：

$a-b-c-d-e$
$R=z^{10}$，$a=2yz^9$，$b=4xyz^8$，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$，$d=8x^3yz^6-8xy^3z^6$， $e=20x^9y-240x^7y^3-504x^5y^5+240x^3y^7+20xy^9$

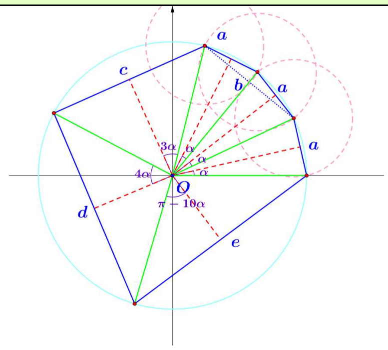
圖 56：$a_{(3)}-c-d-e$

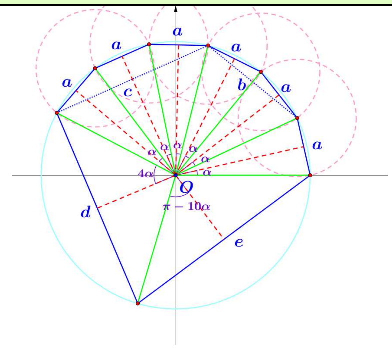
圖 57：$a_{(6)}-d-e$

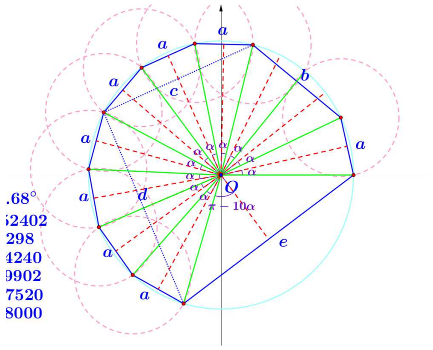
圖 58：$a_{(8)}-b-e$

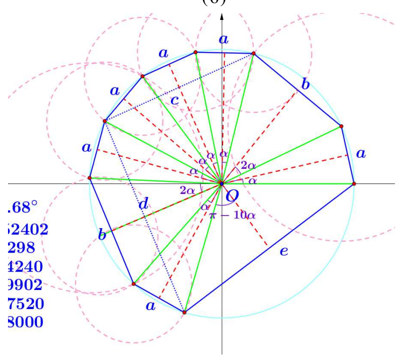
圖 59：$a_{(6)}-b_{(2)}-e$

所以我可以用上面的 a,b,c,d,e 建構完美五邊形 $a-b-c-d-e$，如圖 55。也可以把 b 換成 2

個a，變成$a_{(3)}-c-d-e$，如圖 56。也可以把b換成 2 個a，c換成 3 個a，變成$a_{(6)}-d-e$，如圖 57。也可以把c換成 3 個a，d換成 4 個a，變成$a_{(8)}-b-e$，如圖 58。當然也可以把c換成 3 個a，d換成 2 個a和 1 個b，變成$a_{(6)}-b_{(2)}-e$，如圖 59。也就是說對同一組一般式，我可以做很多的延伸變化。圖 60 是我的樹狀分析圖，我的目的是在增加邊數，因此沒有做把 1 個a與 1 個b放在一起變成 1 個c的情形。經整理 1 個完美五邊形$a-b-c-d-e$可變為 2 類 4 個完美六邊形$a_{(3)}-c-d-e$、$a_{(2)}-b_{(2)}-d-e$、$a-b_{(3)}-c-e$、$a_{(2)}-b-c_{(2)}-e$。3 類 6 個完美七邊形、$a_{(4)}-b-d-e$、$a_{(3)}-b_{(2)}-c-e$、$a_{(2)}-b_{(4)}-e$、$a_{(4)}-c_{(2)}-e$、$a_{(3)}-b_{(2)}-c-e$。3 類 3 個完美八邊形$a_{(6)}-d-e$、$a_{(4)}-b_{(3)}-e$、$a_{(5)}-b-c-e$。2 類 2 個完美九邊形$a_{(6)}-b_{(2)}-e$、$a_{(7)}-c-e$。1 個完美十邊形$a_{(8)}-b-e$。1 個完美 11 邊形：$a_{(10)}-e$。

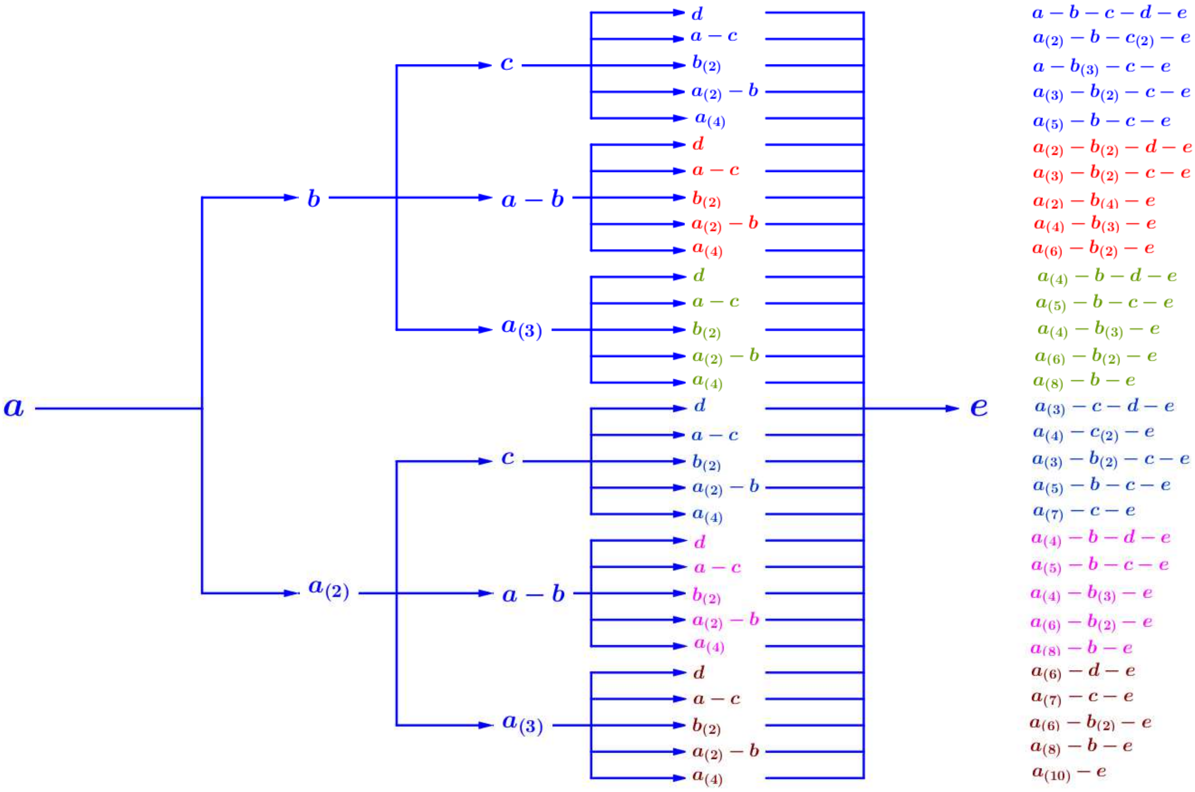

圖 60：$a-b-c-d-e$樹狀分析圖

也就是說**定理 10 我找到的每個一般式都可以用這個方法去拆成更多個完美多邊形**。因此我得到定理 11。而定理 11 的證明就是分割數與乘法原理。

定理 11

完美n邊形$a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}-a_n$可拆成至多$\prod_{i=1}^{n-1}p(i)$種完美多邊形，且其一般式相同。

Proof：

完美n邊形$a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}-a_n$中，$\frac{a_1}{2}$邊所對的角是$\alpha$，$\frac{a_2}{2}$邊所對的角是$2\alpha$，$\frac{a_3}{2}$邊所對的

角是 3α *，…，* $\frac{a_{n-1}}{2}$ *邊所對的角是* $(n-1)\alpha$ *，* $\frac{a_n}{2}$ *邊所對的角是* $\pi-\frac{n(n-1)\alpha}{2}$ *。且* $\frac{n(n-1)\alpha}{2}<\pi$ *。若* $q\in\mathbb{N}$ *，移除角* $2(q\alpha)$ *的邊，則可以補上若干個邊其對應角和恰為* $2(q\alpha)$ *，且* R *與* a_1 *、* a_2 *、. . . 、* a_{n-1} *、* a_n *之一般式皆不變。因為* $\alpha=\alpha$ *，* $2\alpha=\alpha+\alpha$ *，*

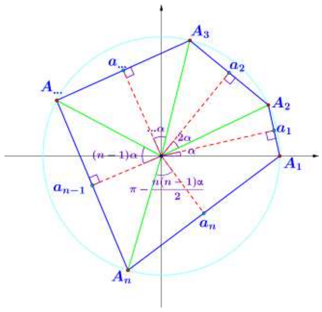

圖 61：定理 11

$3\alpha=\alpha+\alpha+\alpha=2\alpha+\alpha$ *，* $4\alpha=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha=2\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha+\alpha=2\alpha+2\alpha$ *，…，* $(n-1)\alpha=\alpha+...+\alpha=...$ *。故各有* $p(1)$ *、* $p(2)$ *、* $p(3)$ *、…、* $p(n-1)$ *種分割情形。依乘法原理可得，至多有* $p(1)\times p(2)\times p(3)\times...\times p(n-1)=\prod_{i=1}^{n-1}p(i)$ *種。* ■

其實選擇五邊形是因為四邊形至多有 6 種，而六邊形至多有 210 種，故取五邊形說明。

五、最少邊數是 1 或 2 的完美多邊形解的限制條件

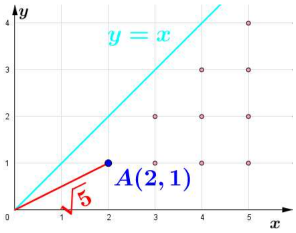

圖 62：畢氏三元數的建構

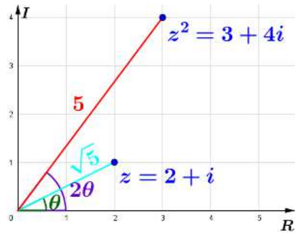

圖 63：畢氏三元數的建構

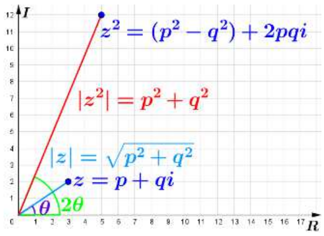

圖 64：畢氏三元數的建構

首先我想找出畢氏三元數。將直角坐標上的格子點轉到複數平面上。如圖 59 所示，在滿足 $y<x$ 與 $y>0$ 不等式之間的格子點 $A(2,1)$，它到原點的距離是 $\sqrt{5}$。我如果把直角坐標平面轉到高斯平面，得到 $z=2+i$ 且 $|z|=\sqrt{5}$，主幅角是 $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2}$。此時我只要考慮棣美弗定理，取 $z^2=3+4i$，其長度為 $|z|=\sqrt{5}^2=5$，主幅角是 2θ 且其值為 $\tan^{-1}\frac{4}{3}$。就可以得到一組畢氏三元數 $3-4-5$。也就是說滿足 p、q 為一奇一偶的互質整數，且 $p>q$，直角坐標平面上一點 $A(p,q)$ 必可轉成 $z=p+qi$，再考慮 $z^2=(p^2-q^2)+2pqi$，可以得到一組畢氏三元數 $(p^2-q^2)-2pq-(p^2+q^2)$。

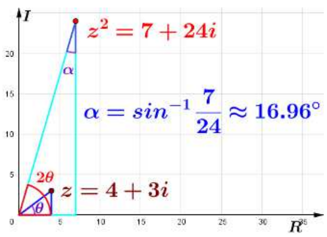

圖 65：畢氏三元數的建構

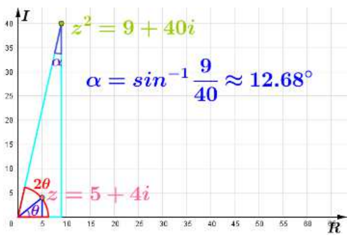

圖 66：$a-b-c-d-e$

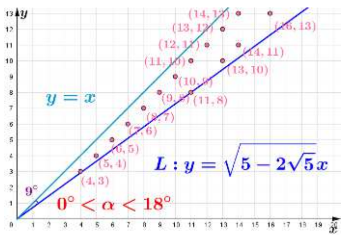

圖 67：畢氏三元數的建構

以前述完美五邊形 $a-b-c-d-e$ 為例，因為 $10\alpha<\pi$，所以：

$\sin\alpha<\sin\frac{\pi}{10}\Rightarrow\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}<\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Rightarrow 4p^2-4q^2<(\sqrt{5}-1)p^2+(\sqrt{5}-1)q^2$

$\Rightarrow(5-\sqrt{5})p^2<(3+\sqrt{5})q^2\Rightarrow\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}<\frac{q^2}{p^2}\Rightarrow\frac{q^2}{p^2}>5-2\sqrt{5}\Rightarrow\frac{q}{p}>\sqrt{5-2\sqrt{5}}\approx 0.73$，此即直線 L 的斜率。所以我只要找出滿足 $y=\sqrt{5-2\sqrt{5}}x$ 與 $y=x$ 的所有格子點 (p,q)，其中 p 、q 為奇一偶，例如 $z=5+4i$ 的主幅角是 $\theta=\tan^{-1}\frac{4}{5}$，$z^2=9+40i$ 的主幅角是 $2\theta=2\tan^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{40}{9}$，如圖 86，取 $\alpha=\frac{\pi}{2}-2\theta=\tan^{-1}\frac{9}{40}$ 。所以我可以找到所有滿足完美五邊形 $a-b-c-d-e$ 建構的 $\sin\alpha$ 與 $\cos\alpha$ 。當然在我也能得到所有的 $\sin n\alpha$ 與 $\cos n\alpha$ 。這些 $\sin n\alpha$ 與 $\cos n\alpha$ 都是有理數。如圖 64 我列出 $(4,3)$ 、$(5,4)$ 、$(6,5)$ 、$(7,6)$ 、$(8,7)$ 、. . . ，再將它轉到複數平面上。最後將每個複數平方，就可以得到一組畢氏三元數建構完美多邊形。也就是說每一個滿足限制的格子點 (p,q) 都有一組對應的畢氏三元數 $(p^2-q^2)-(2pq)-(p^2+q^2)$，我發現兩條直線的銳交角是 9°，而 α 的限制是 $0^\circ<\alpha<18^\circ$。那是否 $\alpha<2\phi<45^\circ$ 時，格子點 (p,q) 會介於 $y=x$ 跟

$y=\tan(\frac{\pi}{4}-\phi)x$ 之間呢？觀察前述 $a_{(6)}-b$ 為例，因為 $\pi-6\alpha>0$，所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$，故

$\sin\alpha<\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2p^2-2q^2<p^2+q^2\Rightarrow p^2<3q^2\Rightarrow\frac{q^2}{p^2}>\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{q}{p}>\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30^\circ$，

所以我只要找出滿足 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 與 $y=x$ 之間的所有格子點，如圖 68。例如 $z=4+3i$ 的主幅角是 $\theta=\tan^{-1}\frac{3}{4}$，$z^2=7+24i$ 的主幅角是 $2\theta=2\tan^{-1}\frac{3}{4}=\tan^{-1}\frac{24}{7}$，故可以取 $\alpha=\tan^{-1}\frac{7}{24}$，此時 L 的方程式為 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x=\tan 30^\circ x=\tan(45^\circ-\frac{30^\circ}{2})x$ 且其與直線 $y=x$ 的夾角是 $\phi=15^\circ$ 。

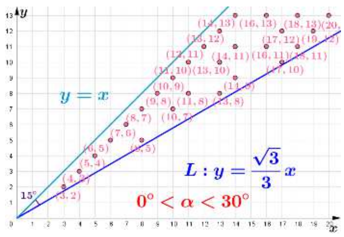

圖 68：$a_{(6)}-b$

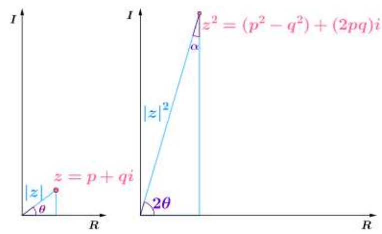

圖 69：放大圖

我猜想若 $j\alpha<\pi$，則在兩直線 $y=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{j\alpha}{2})x$ 與 $y=x$ 之間的點 (p,q)，其中 p 、q 為一奇一偶且互質的整數，經取 $\sin\alpha=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ 、$\cos\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$ 作變數變換，均可建構最少邊數為 1 或 2 的完美多邊形。

五、利用半圓建構八邊以上完美多邊形

之前提到因為我是用倍角建構，只要第一個角α取得夠小，一定可以建構完美多邊形。但是相異邊數增加時，計算量會變很大，例如7個邊$\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$、...　$\frac{g}{2}$對應的角是α、2α、...、6α、$\pi-21\alpha$。就要用正弦21倍角公式展開，n個邊就要用到正弦$\frac{n(n-1)}{2}$倍角公式展開。所以我考慮在兩個半圓上分別建構完美多邊形，再取兩個半徑的最小公倍數分別伸縮，將其組合起來。半圓的一邊如果有兩個邊，可以是兩同、兩異。如果是三個邊，可以是三同(兩腰與一底等長的等腰梯形)、兩同一異(等腰梯形)、三異(定理 9)。如圖 70。而有了定理 14，我當然也可以建構其中某幾邊相同的多邊形。而在定理 14 中我用了跟定理 8 不一樣的方法處理$a-b-c-2R$。

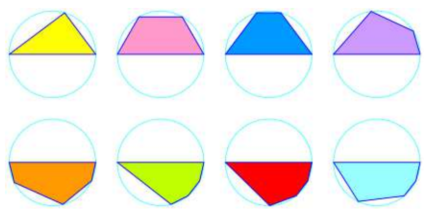

圖 70：半圓建構

定理 12　n倍角公式建構一邊為直徑的完美多邊形定理

存在完美n邊形$a_1-a_2-a_3-...-a_{n-1}-2R$。其中$R$為外接圓半徑。

Proof：

設單位圓的圓心為O，$\overline{A_1A_2}=a_1$，

$\overline{A_2A_3}=a_2$，...，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=a_{n-2}$，$\overline{A_{n-1}A_n}=a_{n-1}$。

分別取$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$，...，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}$，$\overline{A_{n-1}A_n}$ *的中點*M_1、M_2、...、M_{n-2}、M_{n-1}。

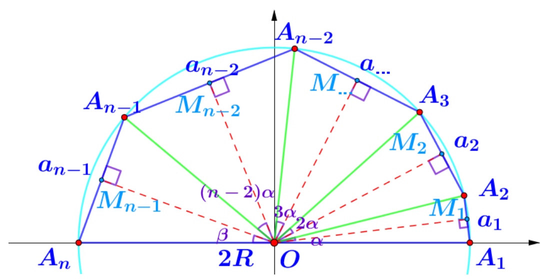

圖 71：$a_1-a_2-a_3-...-a_{n-1}-2R$ *的建構*

設 $\angle A_1OM_1=\alpha$，$\angle A_2OM_2=2\alpha$，...，$\angle A_{n-2}OM_{n-3}=(n-3)\alpha$，$\angle A_{n-1}OM_{n-2}=(n-2)\alpha$，$\angle A_nOM_{n-1}=\beta$，故 $\alpha+2\alpha+...+(n-2)\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-(1+2+...+(n-2))\alpha$，可得：$\angle A_nOM_{n-1}=\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha$。其中 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{(n-1)(n-2)}$。設 $j=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\in\mathbb{N}$。*如圖 71*。$a_1=2\sin\alpha=2\times\frac{y}{z}$，

$$a_2=2\sin2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})\text{，}$$

$$a_3=2\sin(3\alpha)=2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha-C_3^3\sin^3\alpha)=6(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})-2(\frac{y}{z})^3\text{，...}$$

$$a_{n-1}=2\sin\beta=2\sin(\frac{\pi}{2}-j\alpha)=2\cos j\alpha=2(C_0^j\cos^j\alpha-C_2^j\cos^{j-2}\alpha\sin^2\alpha+C_4^j\cos^{j-4}\alpha\sin^4\alpha-...)$$

$= 2(C_0^j(\frac{x}{z})^j - C_2^j(\frac{x}{z})^{j-2}(\frac{y}{z})^2 + C_4^j(\frac{x}{z})^{j-4}(\frac{y}{z})^4 + \ldots)$ 不失一般性，取 $R = z^j$ ，得：$a_1 = 2yz^{j-1}$ ，

$a_2 = 4xyz^{j-2}$ ，$a_3 = 6x^2yz^{j-3} - 2y^3z^{j-3} \ldots a_{j-1} = 2(C_0^j x^j - C_2^j x^{j-2}y^2 + C_4^j x^{j-4}y^4 - \ldots)$ ■

接著以定理 12 建構定理 8 中的 $a-b-c-2R$ 。

(1) 完美五邊形 $a-b-c-2R$

設單位圓的圓心為 O ， $\overline{AB} = a$ ，$\overline{BC} = b$ ，$\overline{CD} = c$ 。分別取 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點 M_1 、M_2 與 M_3 。設 $\angle AOM_1 = \alpha$，$\angle BOM_2 = 2\alpha$，則 $\angle EOM_4 = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$，其中 $3\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{6}$ 。如圖 72。取 $R = z^3$ ，得：

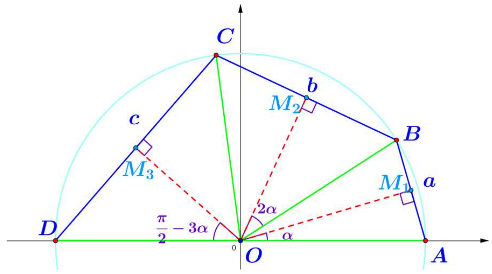

圖 72：$a-b-c-2R$ 的建構

$a = 2\sin\alpha = 2 \times \frac{y}{z}$ ，$b = 2\sin 2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha = 4(\frac{y}{z})(\frac{x}{z})$ ，

$c = 2\sin(\frac{\pi}{2} - 3\alpha) = 2\cos 3\alpha = 2(C_0^3\cos^3\alpha - C_2^3\cos\alpha\sin^2\alpha) = 2(\frac{x}{z})^3 - 6(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^2$

$a-b-c-2R$
$R = z^3$ ，$a = 2yz^2$ ，$b = 4xyz$ ，$c = 2x^3 - 6xy^2$

當然也可以用定理 11 建構有相同邊的情形。也可以用定理 12 將一個 b 與兩個 a 互換，也就是說我可以將 $a-b-c-2R$ 變成 $a_{(6)} - 2R$ ，將 $a-b-c-d-2R$ 變成 $a_{(10)} - 2R$ ，將 $a-b-c-d-e-2R$ 變成 $a_{(15)} - 2R$ 。

(2) 完美五邊形 $a-b-c-d-2R$

設單位圓的圓心為 O ， $\overline{AB} = a$，$\overline{BC} = b$，$\overline{CD} = c$ ，$\overline{DE} = d$ 。分別取 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 與 $\overline{DE}$ 的中點 M_1 、M_2 、M_3 與 M_4 。設 $\angle AOM_1 = \alpha$，$\angle BOM_2 = 2\alpha$ ，$\angle DOM_3 = 3\alpha$ ，則 $\angle EOM_4 = \frac{\pi}{2} - 6\alpha$ ，其中

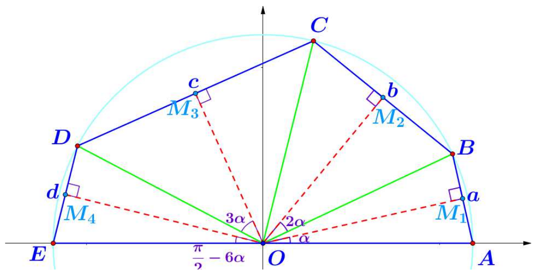

圖 73：$a-b-c-d-2R$ 的建構

$6\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{12}$ ，如圖 73。可得：$a = 2\sin\alpha = 2 \times \frac{y}{z}$ ，$b = 2\sin 2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha = 4 \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}$ ，

$c = 2\sin 3\alpha = 2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha - C_3^3\sin^3\alpha) = 6(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z}) - 2(\frac{y}{z})^3$ ，$d = 2\sin(\frac{\pi}{2} - 6\alpha) = 2\cos 6\alpha$

$= 2(C_0^6\cos^6\alpha - C_2^6\cos^4\alpha\sin^2\alpha + C_4^6\cos^2\alpha\sin^4\alpha + C_6^6\sin^6\alpha)$

$=2[(\frac{x}{z})^6-15(\frac{x}{z})^4(\frac{y}{z})^2+15(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})^4-(\frac{y}{z})^6]$，取 $R=z^6$，得：

$a-b-c-d-2R$
$R=z^6$，$a=2yz^5$，$b=4xyz^4$，$c=6x^2yz^3-2y^3z^3$，$d=2x^6-30x^4y^2+30x^2y^4-2y^6$

(3) 完美六邊形 $a-b-c-d-e-2R$

設單位圓的圓心為 O，$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DE}=d$，$\overline{EF}=e$。分別取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$ 與 $\overline{EF}$ 的中點 M_1、M_2、M_3、M_4 與 M_5。設 $\angle BOM_1=\alpha$，$\angle BOM_2=2\alpha$，$\angle DOM_3=3\alpha$，$\angle EOM_4=4\alpha$，則

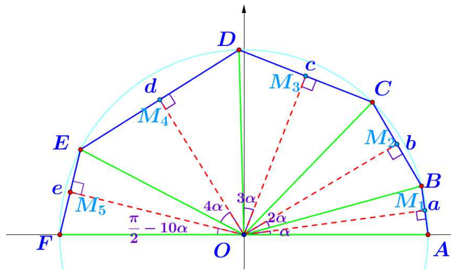

圖 74：$a-b-c-d-e-2R$

$\angle FOM_5=\frac{\pi}{2}-10\alpha$，其中 $10\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{20}$，如圖 74。得：$a=2\sin\alpha=2\times\frac{y}{z}$，

$b=2\sin2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha=4(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})$，

$c=2\sin3\alpha=2(C_1^3\cos^2\alpha\sin\alpha-C_3^3\sin^3\alpha)=6(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})-2(\frac{y}{z})^3$，

$d=2\sin4\alpha=2(C_1^4\cos^3\alpha\sin\alpha-C_3^4\cos\alpha\sin^3\alpha)=8(\frac{x}{z})^3(\frac{y}{z})-8(\frac{x}{z})(\frac{y}{z})^3$，

$e=2\sin(\frac{\pi}{2}-10\alpha)=2\cos10\alpha=2(C_0^{10}\cos^{10}\alpha-C_2^{10}\cos^8\alpha\sin^2\alpha+C_4^{10}\cos^6\alpha\sin^4\alpha$

$-C_6^{10}\cos^4\alpha\sin^6\alpha+C_8^{10}\cos^2\alpha\sin^8\alpha-C_{10}^{10}\sin^{10}\alpha)$

$=2(\frac{x}{z})^{10}-90(\frac{x}{z})^8(\frac{y}{z})^2+420(\frac{x}{z})^6(\frac{y}{z})^4-420(\frac{x}{z})^4(\frac{y}{z})^6+90(\frac{x}{z})^2(\frac{y}{z})^8-2(\frac{y}{z})^{10}$。取 $R=z^{10}$：

$a-b-c-d-e-2R$
$R=z^{10}$，$a=2yz^9$，$b=4xyz^8$，$c=6x^2yz^7-2y^3z^7$，$d=8x^3yz^6-8xy^3z^6$， $e=2x^{10}-90x^8y^2+420x^6y^4-420x^4y^6+90x^2y^8-2y^{10}$

用定理 12 中所討論這些半圓的元件再作適當的伸縮，我就可以組合成很多種有相同或相異整數邊的圓內接多邊形，當然邊數越多時，我的 α 要取得越小。

肆、 討論與結論

表 4：完美n邊形的建構

n	定理或建構方式	完美n邊形
5	**定理 9 或定理 10 或定理 11**	$a-b_{(2)}-c_{(2)}$
5	**定理 10 或定理 11 或定理 13** $\boxed{a_{(3)}-2R}+\boxed{b-c-2R}$	$a_{(3)}-b-c$
5	**定理 10 或定理 13** $\boxed{a_{(2)}-b-2R}+\boxed{c-d-2R}$	$a_{(2)}-b-c-d$
5	**定理 10 或定理 13** $\boxed{a-b-c-2R}+\boxed{d-e-2R}$	$a-b-c-d-e$
6	**定理 8 或定理 10 或定理 13** $\boxed{a-b-c-2R}+\boxed{a-b-c-2R}$	$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}$
6	**定理 10 或定理 13** $\boxed{a_{(3)}-2R}+\boxed{b_{(2)}-c-2R}$	$a_{(3)}-b_{(2)}-c$
6	**定理 10 或定理 11**	$a_{(4)}-b-c$
6	**定理 8 與 10 或定理 11 或定理 13** $\boxed{a_{(3)}-2R}+\boxed{b-c-d-2R}$	$a_{(3)}-b-c-d$
6	**定理 10 或定理 11 或**拼貼三角形[2]	$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d$
6	**定理 8 與定理 10 或定理 13** $\boxed{a_{(2)}-b-2R}+\boxed{c-d-e-2R}$	$a_{(2)}-b-c-d-e$
6	**定理 10 或定理 13** $\boxed{a-b-c-d-2R}+\boxed{e-f-2R}$	$a-b-c-d-e-f$
7	**定理 10**	$a_{(5)}-b-c$
7	**定理 10 或定理 11**	$a_{(4)}-b_{(2)}-c$
7	**定理 10**	$a_{(3)}-b_{(3)}-c$
7	**定理 10**	$a_{(2)}-b_{(3)}-c_{(2)}$
7	**定理 10 或定理 11**	$a_{(4)}-b-c-d$
7	**定理 10 或定理 11**	$a_{(3)}-b_{(2)}-c-d$
7	**定理 10**	$a_{(2)}-b_{(2)}-c_{(2)}-d$
7	**定理 10**	$a_{(2)}-b_{(2)}-c-d-e$
7	**定理 10 或定理 13** $\boxed{a_{(3)}-2R}+\boxed{b-c-d-e-2R}$	$a_{(3)}-b-c-d-e$
7	**定理 10 或定理 13** $\boxed{a_{(2)}-b-2R}+\boxed{c-d-e-f-2R}$	$a_{(2)}-b-c-d-e-f$
7	**定理 10 或定理 13** $\boxed{a-b-c-d-2R}+\boxed{e-f-g-2R}$	$a-b-c-d-e-f-g$

(一) 我找到不止一種的方法建構完美多邊形。可以用定理 10 直接建構或利用定理 8、13，也就是兩個半圓再作適當的伸縮後組成完美多邊形。

(二) 我利用圓心角α、2α、3α、...、$\pi-k\alpha$，找到邊長、外接圓半徑為整數的圓內接多邊形與其一般式。

(三) 因為 $p(5)=7$，$p(6)=11$，$p(7)=15$，又正五邊形、正六邊形與正七邊形不在我的討論範圍。故 6 種完美五邊形，10 種完美六邊形，與 14 種完美七邊形，我們皆可以尺規作圖。完美五邊形$a_{(4)}-b$、$a_{(3)}-b_{(2)}$，六邊形$a_{(5)}-b$、$a_{(4)}-b_{(2)}$、$a_{(3)}-b_{(3)}$，七邊形$a_{(6)}-b$、$a_{(5)}-b_{(2)}$、$a_{(4)}-b_{(3)}$在[2]已討論故不列出。

(四) 只要α取的夠小，非等邊長的各類完美多邊形皆可建構。只要p接近q，然後p、q取很大，$\sin\alpha=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$就會很小，所以$\alpha$的對邊就可以取的很小。

(五) 由定理 11 知可用相同的R、a_1、a_2、a_3、...、a_n的一般式建構多個完美n邊形。當然在定理 13 中也適用。

(六) 在完美七邊形的討論中，部份邊數大於七邊的圖形因為對應角度太大，我就用定理 12 再做適當的伸縮，其實當然也可以使用定理 10 建構。表 4 中除了用定理 8 建構的$a-b_{(2)}-c_{(2)}$是完美多邊形，其餘皆是完美多邊形。

伍、 參考資料

[1] MA3(2019). Crux Mathematicorum, 45(6), 308-309.

[2] 藍○○(2020)。建構邊長為整數的圓內接多邊形。第 12 屆丘成桐數學獎佳作。

[3] Joseph H. Silverman(2011). *A Friendly Introduction to Number Theory*. Providence, RI: Brown University(pp. 13-25)

[4] 賴昱維(2017)。最簡勾股差。數學傳播 41 卷 1 期，50-60。

[5] 鄭有志(2011)。邊長為正整數且有一個角是60°或120°的三角形。數學傳播 35 卷 1 期，84-88。

[6] 王重臻(2007)。勾股鐵路網。中華民國第 47 屆全國科展高中組數學科第三名。

[7] Olmsted, J. M. H. (1945). "Rational values of trigonometric functions". The American Mathematical Monthly. 52 (9): 507–508.

[8] 蔡聰明(2010)。數學拾貝。台北市：三民，199-200。

【評語】010003

作者利用畢氏三元數去構造各式整數邊長組合且外接圓半徑亦為整數的圓內接多邊形，作品的方向是由畢式三角形出發，並搭配三角函數以及一些幾何的構造，不斷的做出新的組合。作者對於兩組邊長較多、三組邊長的討論也有相當著墨，試著討論不同組合的關係。整體而言，作者討論了一個相當有趣的問題，雖然沒有使用太困難的數學工具，但是僅用基本的工具與方法以及仔細的探討，就得到許多有趣的成果，是一件令人驚喜的作品。