

2020 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160022
參展科別 物理與天文學
作品名稱 探討旋轉流中垂直熱對流造成流場變化之
性質
得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 臺北市立建國高級中學
指導教師 杜其永、曾靖夫
作者姓名 賀崇恩、鄭益樺

關鍵詞 PIV 攝影、垂直對流、
旋轉渦流(rotational vortex)

作者簡介



我是賀崇恩，目前就讀高中三年級。這次參與科學展覽的機會十分難得，我期許自己能夠從中學習。同時感謝一路上指導我們的老師以及國立科學教育館，若沒有你們就沒有今日這份成果。

大家好，我是鄭益樺，目前就讀建中三年級。在學校裡，我最感興趣的科目就是物理，三年來主要參加競賽，這次是第一次參加大型的科展，希望能交到來自各方的朋友，還請大家多多指教。

摘要

本研究發現並探討冰在旋轉流中快速融化時自轉加速的現象，甚至比驅動旋轉流的速度快。根據文獻[1][2]，近轉軸流場速度增快的現象可以基本流體力學方程式計算、解釋並討論，但對邊界條件處理、影響的參數無深入探究，其中熱對流模型控制應影響實驗結果。

本文透過自製實驗裝置，就驅動角速度、對流模型、對流速度等變因實驗探討這類旋轉流中因垂直對流引發「近轉軸處加速旋轉」對流流場性質，並用黏滯力、邊界及初始條件及 PIV 法攝影結果進行數據討論及驗證。實驗顯示自製三式熱對流模型、初始條件及液體性質是重要影響因素，明顯影響模型轉速-時間曲線趨勢；研究也成功利用 PIV 法攝影結果及數值模擬繪製出明顯近軸液體加速轉動時的流動結構並分析流場變化原理。本文期望對相關流體力學及工程方面問題有所助益，例如應用於渦流消除。

Abstract

This research explores and aims to investigate the phenomenon of an ice gradually speeds up spinning when rapidly melting in a rotational vortex. According to references, the acceleration of the flow near rotation axis can be explained by solving basic fluid dynamic equations, but the parameters affecting the results and mechanism details were not discussed.

We study the “near-axis acceleration” flow field properties through experiment with variables such as driving angular speed, boundary condition, and viscosity distribution. Also, we analyze the results by the variables and PIV measurement. We found that the boundary conditions and initial conditions such as the initial driving angular speed and the convection speed can be crucial factors, and they significantly affected the angular speed-time curve of the ice model. We also present the flow structure with time by PIV measurements and give the observations and results reasonable explanations. By using simulation, we also found out the mechanism of the “sharp deceleration of the vortex” phenomenon in the experiment. In the end, based on the experiment results we have obtained, we gave several proposal for further studies in fluid dynamics, such as eliminating and controlling excess vortices.

一、前言

(一)、研究動機

旋轉流中在轉軸常常有滋生流場變化/不同的不穩定性(instability)現象，例如著名的漩渦崩潰(vortex breakdown)現象即是在旋轉流垂直轉動方向的煙線之不穩定性下產生之圖譜。如圖 1 上。相關研究亦不在少數，如圖 1 下及參考資料[1]。這類實驗室尺度的精細現象引起我們好奇。如此一來我們好奇，因密度差引起對流的垂直接流動(buoyancy-driven flow，或natural convection)，即旋轉流（此指rotational vortex）中之垂直熱對流是不是也有什麼特殊的行為模式？

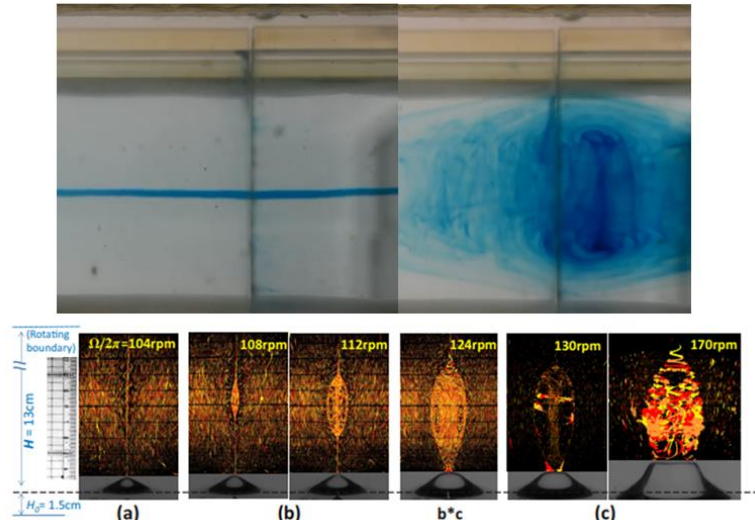


FIG. 2. (Color online) Composite pictures to characterize the fluid flow above the hump [(a), (b)] or the plateau (c), as the rotation rate $\Omega/2\pi$ increases. The pictures combine the use of slice illumination of fluid tracers (in false colors, detailed in Ref. [33]) and backlighting of the interface below. The spacing between dark lines in the upper part of these pictures indicates a scale of 1 cm. Images in (c) are also interfered by droplets that are unintentionally generated during the transients, but the spatial structure of the flow is still recognizable.

圖 1 漩渦崩潰。左上圖為未旋轉時之stream line，右上即vortex breakdown。下圖為旋轉系統中雙液介面產生的vortex breakdown及其PIV攝影。右上、左上圖截自[3]。下圖截自 [4]。

爾後在文獻查詢的過程，發現此現象為 2008 年國際青少年物理辯論賽(IYPT)中的一道題目（見概述及參考資料[1]），亦有相關研究內容的發表（[2]，但有實驗條件上的差異）。描述熱對流所滋生流場的問題現象有趣，可探討的層面又多，且渦流構造及演變在流體工程中的應用與研究十分廣泛，引起我們的興趣，但此題的內容須累積足夠的流體力學概念才可做出適當的分析。所以我們投入長時間的研究，對此問題做更進一步的探討。

(二)、研究目的及研究問題

1. 概述

浮在熱旋轉流中心的對流源，例如一枚冰塊，在初始驅動低速旋轉渦流（rotational vortex，80rpm以下，下稱驅動旋轉之角速度”驅動速度”）後，停止驅動旋轉流，對流源會隨時間逐漸加速，如圖 2 所示轉速-時間曲線，和一般物體受同速旋轉流驅動的轉速-時間趨勢十分不同。冰塊在熱水（下稱周圍熱液體”周圍液體”）渦流中的運動即是一例。

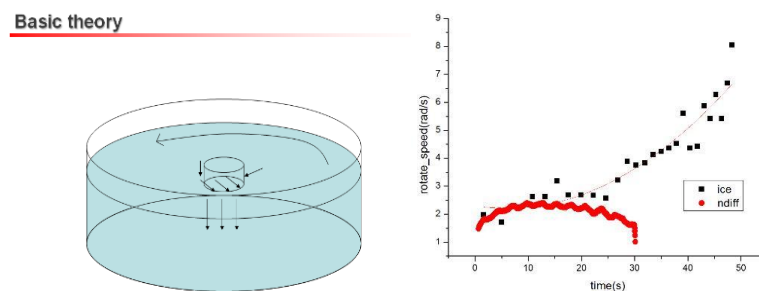


圖 2 題目敘述實驗示意，摘自參考資料[1]（左）、實測題敘現象及一般浮體在旋轉流中的轉動性質差異（轉速-時間曲線）（右）。右圖縱軸單位rad/s。右圖以 48rpm 驅動，即 5.02rad/s，紅線為一般浮體（後有詳細說明），實線即題敘現象。

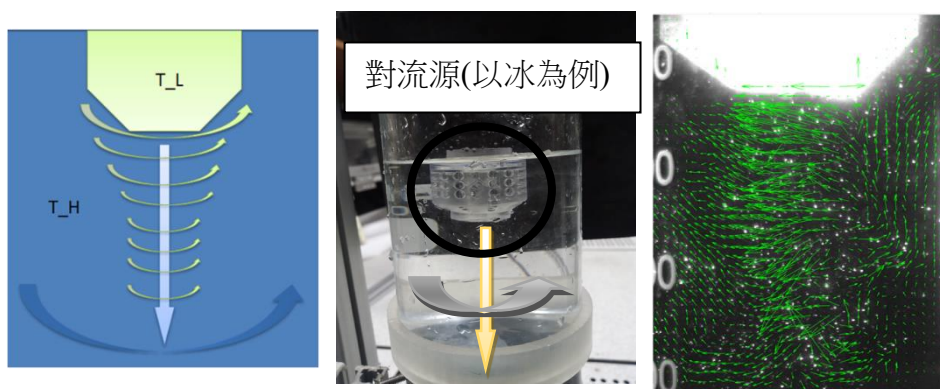
註圖 2:

冰塊為一變質量系統，而一般浮體為定質量系統，但冰塊的加速不能以淺顯的”角動量守恆”說明之，因為冰塊隨時間失去的質量會帶走其角動量（溶出的水並沒有立即停止）。且變質量系統冰所溶出水的角動量不會再傳回冰，因為溶出的水相對表面無速度梯度。此外，變質量系統在低速下仍應遵守表面和周圍液體的耦合條件，在周圍條件相同前提下，應和一般浮體一樣隨容器邊界摩擦減速而減速至靜止，實則不然。因此推測儘管冰塊作為變質量系統，仍有驅動周圍液體產生流場變化，才能如圖 2 右觀察到加速現象。

而在此低速旋轉流下（rotational vortex，轉速 80rpm 以下），亦觀察到冰僅在轉軸周圍微幅晃動，因周圍流體速度不高，能穩定浮於旋轉中心處，往後的實驗亦類似，因此往後實驗也並未限制冰/驅動垂直對流源的移動。

2. 研究目的

- (1). 以形狀不變固體模型來研究此現象流場性質
- (2). 將此現象和參考實驗（無對流等）比較
- (3). 以不同熱對流的模型了解液體「近轉軸加速旋轉」的對流流場發展
- (4). 探討其他不同變因下的液體「近轉軸加速旋轉」的對流流場發展
- (5). 嘗試以PIV攝影法討論及驗證上述研究並提出相關解釋
- (6). 以數值方法模擬並討論及驗證上述結果

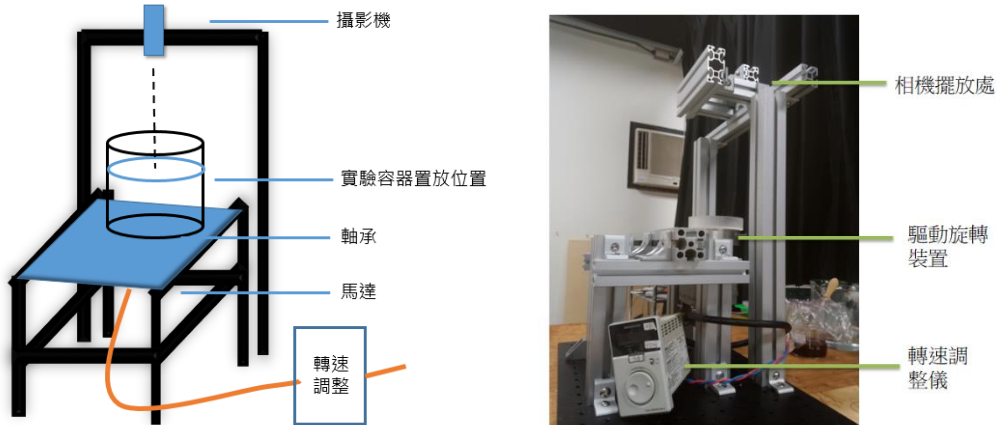


「近轉軸加速旋轉」的對流流場發展示意圖、實驗架設示意圖及利用PIV攝影方法拍攝之實驗照片。實驗模式見研究方法。隨著時間發展，冷液體的沉降周圍會出現快速轉動的液體。

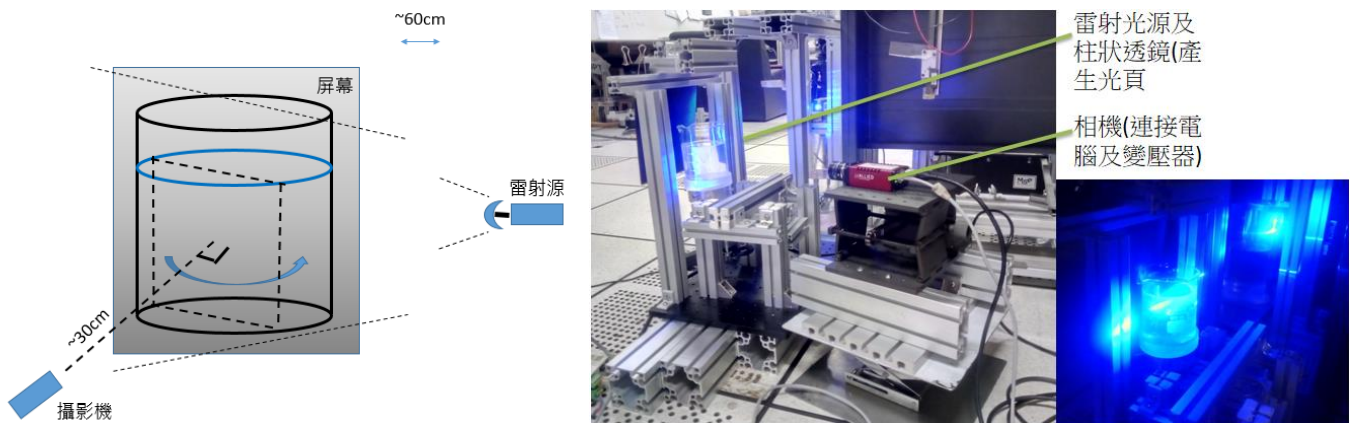
(三)、研究設備及器材

1. 器材配置及主要裝置

以鋁擠型搭建之旋轉流製造及調整裝置



觀測流場實驗 (PIV, Particle image velocimetry) 架設及其示意圖



上圖為以鋁擠型建造之旋轉流製造及調整裝置，盛液體的圓柱可以置於裝置上以馬達驅動旋轉，其中容器旋轉時，可以以 3D 列印的模型固定使其不相對馬達滑動，且轉速由控制器調整。另外延伸裝置使相機擺放時可以正對水面。

下圖為觀測流場實驗(PIV, Particle image velocimetry)架設，光頁由貼在雷射光束前的透鏡產生（可參考圖 5:粒子影像測速法），觀測液體須先加入少量金屬光澤微粒(Dantec Dynamics, Silver coated hollow glass spheres)。將連接電腦和變壓器的相機調整至適當高度以及對準光頁法方向即可作PIV攝影，相機距離光頁約 30cm。攝影影片則先經影像軟體轉為連續影像後，再匯入PIVlab軟體分析。

2. 使用器材說明

(1). 3D列印機

可視使用者工程繪圖軟體需求製作固化樹脂模型。本實驗使用之固化後樹脂物性如下：密度 1.40g/m^3 、熱導率低，這兩個性質是作為實驗固體邊界重點特性。

(2). 電鍋

加熱實驗用液體。

(3). 金屬光澤微粒

PIV攝影所需，直徑約 $10\mu\text{m}$ 。

(4). 探針式溫度計

除使用於加熱熱水時確認水溫，也用於測量後續所需實驗中的溫度分布。溫度探針為細的導線。

3. 使用軟體

(1). SOLIDWORKS 2017、Preform

用於3D列印模型繪製及製作。

(2). Tracker

用於標記點的自動追蹤及座標輸出。主要用於”模型轉速-時間曲線”的測量。

(3). OriginPro8、Excel

用於繪製圖表及實驗結果。

(4). ProStream、PIVlab、MATLAB

用於相機資料讀取及PIV攝影法資料讀取、圖片繪製。Prostream為影像處理軟體，可將PIV攝影中的連續影像檔案轉存為數張圖檔。圖檔進一步匯入基於MATLAB語言的PIVlab軟體([5],[6],[7])作分析，如速度場分析及向量平滑化。MATLAB的pdepe(parabolic and elliptic partial differential equation)函式亦用於Navier-Stokes方程式的運算和模擬。

二、研究過程或方法

(一)、 名詞定義及先備知識

1. Rotational vortex (旋轉渦流) 和 Irrotational vortex (無旋渦流/非旋渦流)

渦旋分為兩種:rotational (速度場旋度不為 0, 旋轉渦流) 和 irrotational (速度場旋度為 0, 非旋渦流)。前者是受到外力而旋轉的渦流, 例如假設有一個水桶以固定角速度 Ω 環繞一個垂直軸, 水最終會以剛體模式旋轉。之後粒子會以圓形路徑運動, 速度 u 等於 Ωr 。在沒有外力的情況下, 渦旋通常會快速演變為非旋流, 這時流速 u 與軸距離 r 成反比。因此非旋渦旋也稱為「自由渦旋」。本實驗的初始旋轉條件是剛性的旋轉流, 不過因為邊界層厚度/旋轉半徑比值高且驅動速度低, 停止驅動旋轉後, 在發展成無旋流前就會因黏滯力散失角動量而靜止(圖 3)。

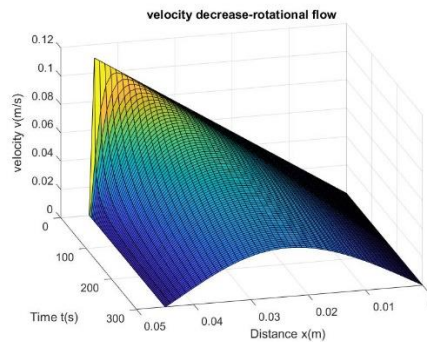


圖 3 半徑 4.5cm, 70°C 水的旋轉流(24rpm), 在停止旋轉後的速度發展。此圖以數值方法模擬, 經比對符合實驗(如後文圖 27 等)大致結果。模擬方法見實驗原理。X 軸為到轉軸距離。由圖可見液體迅速趨於靜止, 若溫度低(黏度高)則靜止的更快。

2. 圓柱坐標系

圓柱坐標系經常用於座標化具圓柱對稱性的系統, 其座標 (r, θ, z) 或 (r, φ, z) 如圖 4。

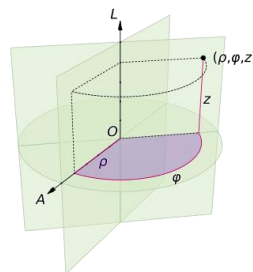


圖 4 圓柱坐標系。取自維基百科

3. PIV (粒子影像測速, Particle image velocimetry) 法

PIV 常用於觀測流體的速度場, 其主要方法即為拍攝散佈在流體中的微小粒

子受雷射光照射後反射的圖像，再匯入分析軟體計算即可算得流體的速度場。

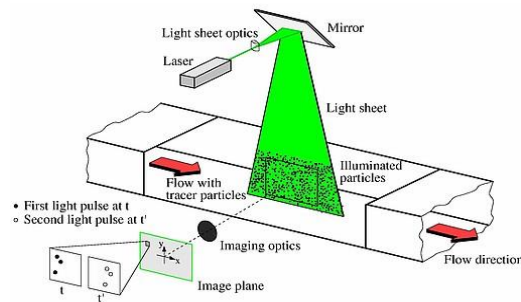


圖 5 粒子影像測速法。取自[8]

4. 模型轉速-時間曲線

模型轉速-時間曲線即如圖2右所作曲線，指的是本研究中的冰或取代冰的盛冰模型，在實驗中參考靜止坐標系測得的自轉速度對時間所做的曲線（以9次多項式擬合原始數據），這個曲線所代表的意義會在下文中探討。

(二)、 熱及力學邊界條件

處理對流源邊界條件為本研究重要控制變因之一。冰是理想的冷卻源製造方式，能穩定大量且持續一段時間的吸熱且滿足流體力學中重要的系統體積為常數的約束條件，但表面的條件（如形狀和與流場的耦合）難以處理，因此本實驗使用 3D 列印技術製出的光固化樹脂模型包覆冰進行實驗，這樣的方法除了處理表面滑動問題，其流動模式也可以被控制。模型邊界條件及設計原理說明如下：

1. 熱邊界條件

冰是理想的熱邊界條件實現方式，因為邊界的溫度恆為 0°C 。以 0°C 冰填充樹脂模型作為冷卻源。固體形狀樹脂模型未挖洞的部分表面只能形成一薄薄的溫度邊界層，而設計空洞的部分冷卻液體可以自由進出，進而控制流動模式。

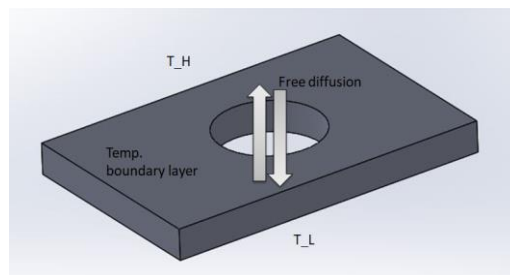


圖 6 固體形狀樹脂模型部分熱邊界條件示意圖

2. 力學邊界條件

大多針對固-液相態轉變表面邊界條件的前人研究不多，或通常是緩慢隨時間變化的相態轉變介面（地質學方面研究）。對流源的「冰」表面邊界會快速含時變動（「熔化」）且表面力學難以處理。因此本研究對對流源力學邊界條件的處理採用一個固體形狀樹脂模型包覆冰，也就是說表面的力學邊界條件為不滑移條件(no-slip condition)，如圖 7，可以保證接下來的數據分析方法能充分表現流場速度（即藉測量**“轉速-時間曲線”**來了解模型周圍流場速度趨勢）：

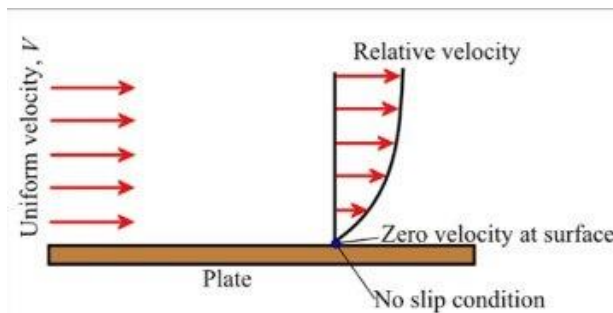


圖 7 牛頓流體固-液介面 no-slip boundary condition。表面承受剪應力 τ 及速度

梯度 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 之比值即為剪切黏滯係數 μ 。截自[9]。

(三)、 實驗設計與變因探討

所有實驗的控制變因包含：流場發展空間（600mL燒杯，在裝 500mL液體的情況下，為半徑 $r_0=4.5\text{cm}$ ，7.8cm高的圓柱）、對流環境（下亦稱周圍液體）溫度（80°C）、對流源到實驗結束的焓變化（約 14ml的冰，約 8.1kJ）。

環境溫度經測量，將加熱至 85°C的純水置於室溫 18°C，在 300 秒內溫度下降不達 10°C，所以在實驗時間內可以忽略這項誤差。

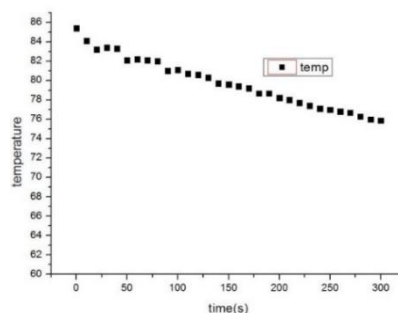


圖 8 實驗用液體（純水）在室溫隨時間降溫曲線

而旋轉流的製造部份也可經由PIV法進行驗證（可參考圖 15 之旋轉流穩定性確認方法），原則上在足量時間旋轉流即穩定。實驗設計如研究目的。其他改變液體性質及對流速度的方式可以用稀薄（10wt%以下）甘油水溶液近似實現，列舉實驗及說明變因如下（參考實驗除外）：

1. 變因一、模型形狀（樹脂模型設計;對流方式）

本實驗變因為了解哪一個方向的流動最能影響上述流場變化以便分析，故設計3種對流模式的模型。控制變因除如上所述，尚有：旋轉流體皆使用純水、初始驅動速度 24rpm。操縱變因為固體形狀樹脂模型形狀設計，也就是熱對流模型，3種設計圖如下（分別是在z方向的對流、r方向（ θ 方向對稱，側向）的對流及兩者疊加）：

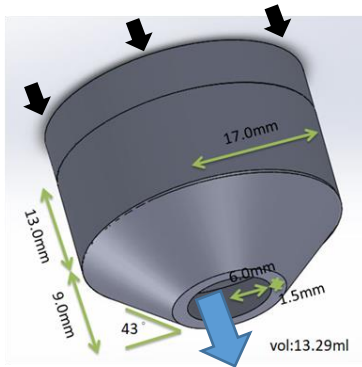


圖 9 僅z方向熱對流（下稱A式模型）設計圖

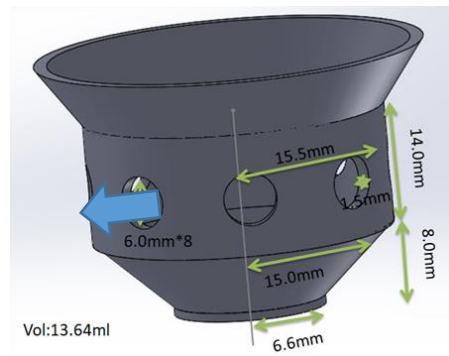


圖 10 僅r方向熱對流（下稱B式模型）設計圖

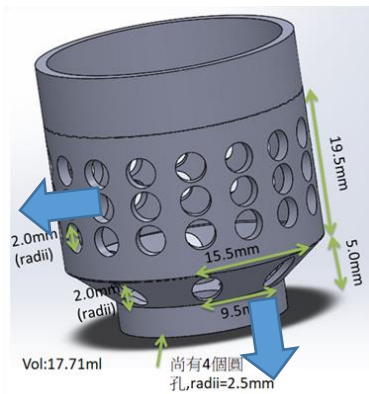


圖 11 A、B式的疊加（下稱C式模型）設計圖

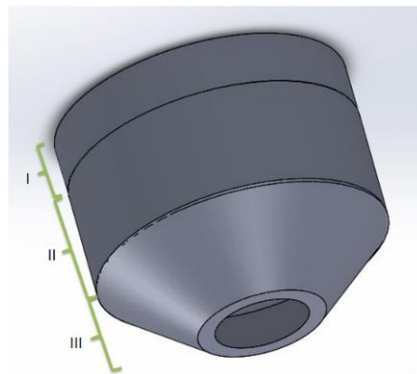


圖 12 ‘3 部分’

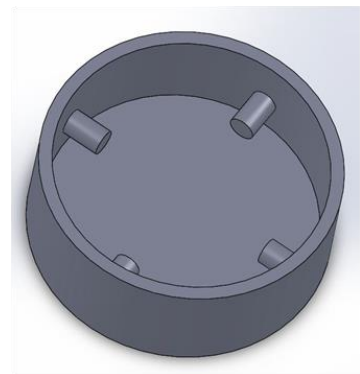


圖 13 內部設計圖（以A式為例）



完成實品圖

註圖 9，10，11，12：

每個設計都分成 3 部分，如圖 12，部分I讓模型穩定漂浮（樹脂比重大於 1），部分II、部分III挖洞。部分III為主要受模型下方水平流場速度改變影響的部分，具 45 度左右攻角是基於受力面積較 0 度攻角為大，進而較能充分反映流場速度改變，且錐體形狀有聚集垂直流動功能，可視為控制變因。圖 11

(C式) 雖計算容量為 17ml，但在 3D 列印製作時增加內部一些支撐的結構，經實測容量仍為 14ml 左右。特別注意到 A 式對流條件指的就是僅垂直對流，稍後會提到多次。A 式模型在實驗條件(水溫 80 度)中冰融完約需 65 秒，在後續實驗中亦為一特徵時間。

註圖 13：

所有模型內部靠底部都有（在幾乎所有實驗時間內）能讓冰相對不滑動的結構，同時可以確保模型內部液體流動速度和模型轉動速度一致，也就是內部流場應幾乎不影響模型轉動速度。

2. 變因二、初始驅動旋轉速度

此變因為了解不同驅動速度下流場變化模式是否相似，或存在某種非線性系統的特徵。控制變因除如上所述，尚有：周圍液體皆使用純水及 A 式模型（稍後說明，見研究結果）。操縱變因為初始驅動速度：17~54rpm 取 7 個轉速。

3. 變因三、稀薄甘油水溶液

此變因為了解對流速度是否加劇或減弱上述水平流場變化模式，其中初始驅動速度定為 24rpm。為了實現在多數實驗條件和液體性質不變的條件下改變對流速度，本實驗使用了少量甘油的水溶液作為周圍液體。原因如下：

(1). 相較於改變對流環境溫度，改變液體性質能更精準地決定對流速度，因為對流速度主要取決於密度差，而對流環境溫度，也就是燒杯水溫不易精確控制，且改變水溫時周圍液體黏滯度會有大幅改變。甘油水溶液取 2 個濃度，其物性見下表。其中 $\xi \equiv (\rho_l - \rho_w)/(\rho_l)$ 為冷液（模型所溶出液體比重， ρ_l ，設為 0°C）和環境液體密度差（ ρ_w ，設為 80°C，如實驗條件）的參考比值，而依據浮力公式

$$B = \rho_w V g$$

又冷液團在周圍液體中的運動方程式

$$Mg - B = Ma$$

(a為下沉加速度，可視為下沉速度的指標)

$$\rho_l Vg - \rho_w Vg = \rho_l Va$$

也就是

$$a = \xi g$$

因此 ξ 越大表對流速度越快，而當 $\xi = 0$ 時理論上無對流發生。

(2).選用甘油的原因為:能大量溶於水的物質基本上具極性，例如醇、醛，又必須在加入少量的前提下微量（0.01g/cm³數量級）改變密度，綜合考量物質物性、化性、溶解度、揮發性、易取得性、凝固點，最後選定為丙三醇（甘油）。甘油明顯和水相去遠的物性即為黏度，甘油濃度的選用基本上將這個誤差縮到最小，即10%內（濃度不可太大，否則黏度可能影響實驗結果;濃度太小則顯得對流速度變化不明顯）。

物性\環境液體	純水	5wt%甘油水溶液	10wt%甘油水溶液
比熱 (J/kg·K)	4186	4116	4037
密度 (kg/m ³)	971.8	982.6	995.1
$\xi \equiv (\rho_l - \rho_w)/(\rho_w)$ 值	0.029	0.018	0.005
黏度 (Pa·s)	$3.54 \cdot 10^{-4}$	$3.91 \cdot 10^{-4}$	$4.37 \cdot 10^{-4}$
運動黏度 (m ² /s)	$3.64 \cdot 10^{-7}$	$3.98 \cdot 10^{-7}$	$4.39 \cdot 10^{-7}$

(四)、 流場分析

藉測量冰模型的轉速-時間曲線，基本上可以反映模型周圍的流場速度趨勢，但流場分析仍為本實驗分析和解說的重要方法，可以清楚的解析流場，說明如下:

1. PIV攝影的不同光頁擺放及所測量量

利用雷射光頁照射流體微粒攝影流場速度（2D PIV攝影）無法攝影粒子靠近/遠離光頁的速度分量，又在本實驗中，因器材擺放，無法攝影 $r - \varphi$ 面流場，故光頁以垂直擺放，也就是光頁法向量垂直 z 軸為主。在攝影這類光頁時，速度的 φ 分量對應到攝影分析畫面的水平速度（粒子在特定位置通過光頁的速度和旋轉速度成正比），速度的 z 分量對應到攝影分析畫面的垂直速度。而本研究採用兩種光頁擺放方式來測量實驗中圓柱座標系 $V_{\varphi,z}(t)_{r=0.05r_0}$ （在0.05倍燒杯半徑的位置,流場速度的 φ （旋轉）及 z （垂直到流動）分量隨時間變化）及 $V_{\varphi}(r,t)_z$ （在選定 r 及固定 z 的情況下，流場速度的 φ 分量隨時間變化）：

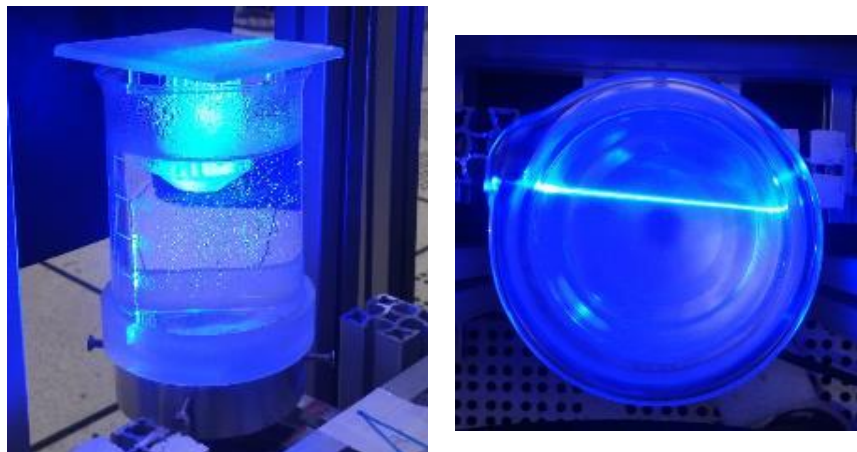


圖 14 測量 $V_{\varphi,z}(t)_{r=0.05r_0}$ （左）及 $V_{\varphi}(r,t)_z$ （右）之光頁擺放

註:以A式模型為例，底部開口半徑約為 $0.1r_0$

如圖14左，測量 $V_{\varphi,z}(t)_{r=0.05r_0}$ 的光頁擺放位置非常靠近轉軸（約 $0.05r_0$ ），可同時攝影幾乎是模型正下方的流場速度 φ （旋轉）及 z （垂直到流動）分量隨時間變化。測量 $V_{\varphi}(r,t)_z$ 的光頁擺放與轉軸的距離即為 r ，在分析時取光頁正中央的固定高度(z)速度隨時間的變化即為 $V_{\varphi}(r,t)_z$ 。另外，所有PIV攝影結果均會考慮圓柱容器扭曲攝得粒子影像在影像處理時校正（參考[10]）。所有的PIV攝影數據均以線性速度(linear velocity)而非角速度(angular velocity, $\omega = v/r$)表示，若有需要比較徑向上不同位置的速度變化趨勢則以歸一化(normalized)速度呈現。

2. 數值分析和模擬

數值模擬主要幫助後續對黏度分布在流場改變中扮演角色的討論。而對於流體動力學分析，最常使用的方程式即為Navier-Stokes方程式，其向量形式如下：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}$$

其中 \mathbf{u} 為速度， p 為壓力， $\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$ 為黏滯張量， \mathbf{f} 為其他力（如浮力）， ρ 為密度， $\eta \equiv \mu/\rho$ 為運動黏度。另一條流體遵守的方程式為連續方程式(continuity equation)，但由於這裡渦流模型設 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot u_z \cdot u_r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ （見後文），會得到 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ 恆成立，故不需討論。

對於圓柱坐標系（ θ 方向上對稱），在 $r - \theta$ 面上，具黏度分布 $\eta = \eta(r)$ 的Navier-Stokes方程式可推導如下，其中包含不含 z 方向，且 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $u_z \cdot u_r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$ 假定為0等假設，會在實驗結果的部分說明：

在 $r - \theta$ 面上的Navier-Stokes方程式可以先被簡化。首先列出圓柱座標系的 r 和 θ 方向的Navier-Stokes方程式：（不含 z 方向，且 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 u_z 假定為0）

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta u_r}{r} &= -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 為黏滯張量(viscos tensor)， $\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$

假設 $u_r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$ 為0。上式可整理為

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right)$$

即加速度等於所受應力。另一條方程式則為壓力函數。（ u_θ 簡寫為 u ）注意 $\eta = \eta(r)$ 。因此，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{\eta}{r} + \frac{d\eta}{dr} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \left(\frac{d\eta}{dr} - \frac{\eta}{r} \right) \dots \dots \dots (*)$$

(*)式即為所求方程式。其中 $\eta = \eta(r)$ 為給定函數(實驗測量)，此微分方程式符合MATLAB pdepe函式求解偏微分方程式的形式，因此我們使用MATLAB進行數值模擬。

(五)、 實驗步驟

1. 對於轉速-時間關係曲線的測量

- (1). 為指定的底部標點的樹脂模型注水。模型標點位置如圖9黑色箭頭所示。
- (2). 以-4°C冷凍5小時以上直到全部結凍。（無對流的對照組無前兩個步驟）
- (3). 實驗液體隔水加熱到85°C。
- (4). 實驗液體放入容器並驅動旋轉。
- (5). 關閉馬達並同時輕放樹脂模型在旋轉流中心。
- (6). 由水面正上方錄影並匯入軟體Tracker分析影像，紀錄模型底部標點的位置並作數據處理，進而作得模型轉速-時間曲線圖。

2. PIV攝影法的錄製

- (1). 為指定的底部標點的樹脂模型注水。
- (2). 以-4°C冷凍5小時以上直到全部結凍。（無對流的對照組無前兩個步驟）
- (3). 實驗液體加微粒隔水加熱到85°C。
- (4). 關閉室內燈光並調整光頁到實驗所需位置。
- (5). 實驗液體放入容器並驅動旋轉。
- (6). 關閉馬達並同時輕放樹脂模型在旋轉流中心。
- (7). 錄影並利用其他軟體作影像分析，輸出所需物理量。

(六)、 先備實驗:確認初始製造旋轉流的對稱和穩定性

有了PIV流場攝影法後，可以以PIV攝影驗證所製造初始旋轉流的對稱性。其實驗設計和結果說明如下:

如圖15，以一不通過轉軸且距轉軸為x的光頁作PIV攝影，理論上，若距轉軸r位置處之速度為 $r\Omega$ （理想情況），則光頁上各處的水平速度分量為 $r\Omega \cdot \frac{x}{r} = x\Omega$ ，為一常數。且垂直速度應為0，如圖左。右圖為實際實驗時所攝影光頁上（x約為 $0.40r_0$ ）兩垂直座標軸上的水平速度分布，除因光頁透射造成PIV攝影的誤差，皆幾乎為一常數，而所測量到旋轉流穩態時的垂直速度也非常小，藉此確認旋轉流製造的穩定性:

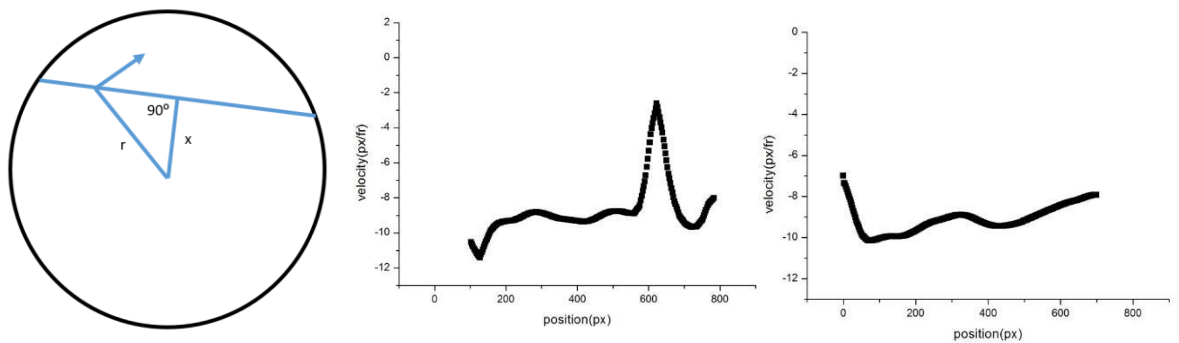


圖 15 圖左為理想旋轉情況光頁水平速度分布示意圖，中圖為實際實驗時水平方向上水平速度分布，其中垂直座標向下為正，速度低峰由光頁透射造成PIV攝影的誤差引起，其餘皆幾乎為一常數(-9.0px/fr)。垂直方向上水平速度分布如右圖，速度分布也幾乎為一常數(-9.0px/fr)。

三、研究結果與討論

(一)、 實驗及觀察結果:不同實驗條件下的模型轉速-時間曲線圖

1. 以 A 式模型（垂直對流）為代表，有對流-無對流之轉速-時間曲線比較

有對流即是模型內有填入冰，而無對流則否。

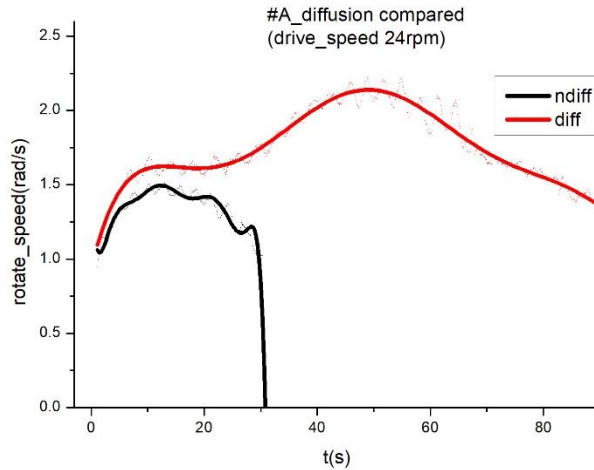


圖 16 以A式模型（垂直對流）為代表，有對流-無對流之轉速時間曲線比較（初始驅動速度 24rpm）註：黑色為無對流（純粹讓模型被驅動），在 30 秒左右因轉動速度太慢而碰到杯緣。紅色曲線（有對流）僅記錄到 85 秒，後續原則上以相近斜率衰減。圖 17-19 以相同方式處理。

2. 不同種類樹脂模型對流條件轉速-時間曲線比較

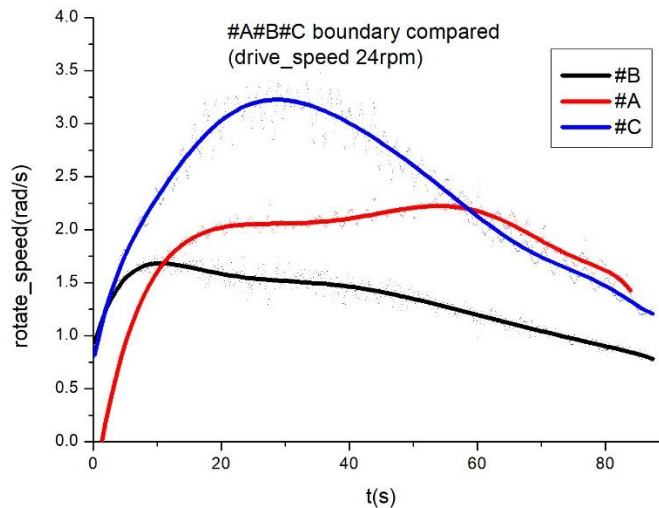


圖17 不同種類樹脂模型對流條件之轉速-時間曲線比較

3. 不同初始驅動速度轉速-時間曲線比較

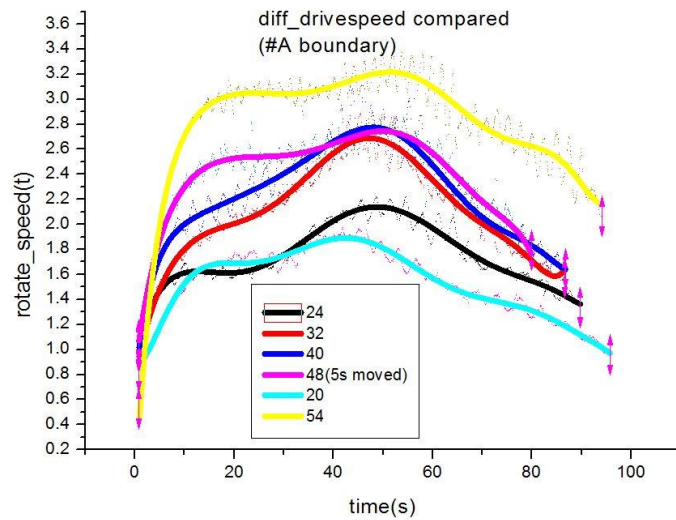


圖 18 不同初始驅動速度轉速-時間曲線比較

4. 不同濃度稀薄甘油水溶液作為周圍液體，轉速時間曲線比較

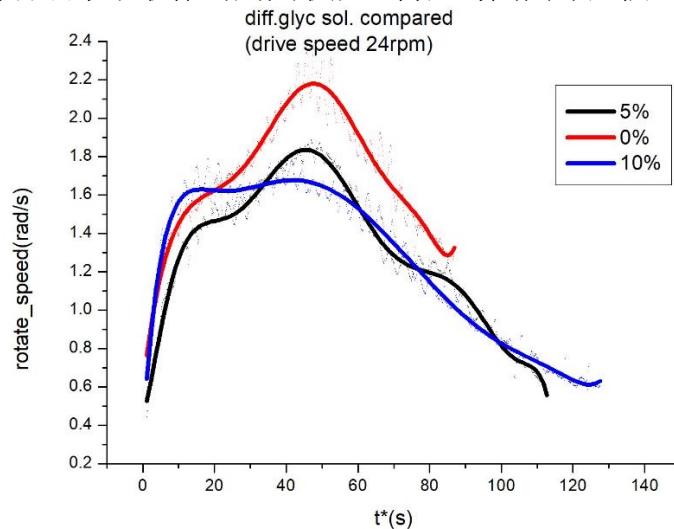


圖 19 不同濃度稀薄甘油水溶液作為周圍液體，模型轉速-時間曲線比較。
註:0% (紅線)，5% (黑線)，10% (藍線) 甘油水溶液之 ξ 值分別為 0.029，0.018，0.005。

(二)、 討論:各式對流條件討論、A 式對流 PIV 攝影近轉軸速度場發展和結構

首先，就圖 16 可以看到，有對流組的轉速可以維持一段時間(60s)並在 50s 達一最大值，和無對流組的運動模式十分不同。

對於各式模型，轉速隨時間發展的趨勢也大不相同。C 式受初始驅動加速效果明顯較好，是因為有和旋轉流方向正交的部分（如圖 20）而 A，B 式僅受 θ 方向因黏滯力引起的力矩。但原則上 B，C 式模型在前 20 秒受驅動渦流加速後轉速無特別趨勢；經 PIV 法觀察也無特別流場變化（見圖 24）。

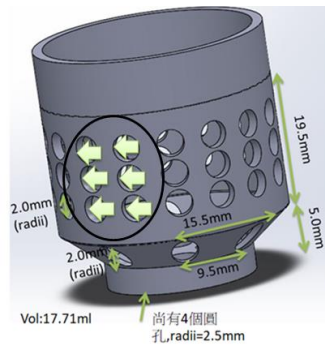


圖 20 C式模型和水流正交部分（黑圈）。因製作工法緣故，容器不可能製成無限薄，但原則上不影響流場發展。

A式模型對流除觀察到明顯如前言所觀察之流場結構（約從 40 秒起持續 60 秒），於轉軸外圍也可以觀察到緩慢地向上流動如圖 21：

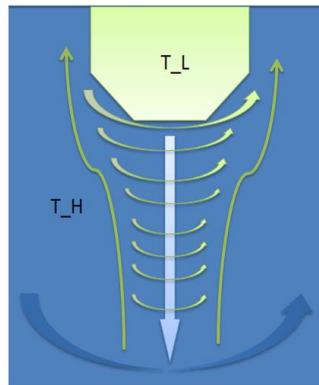


圖 21 A式模型周圍流動結構

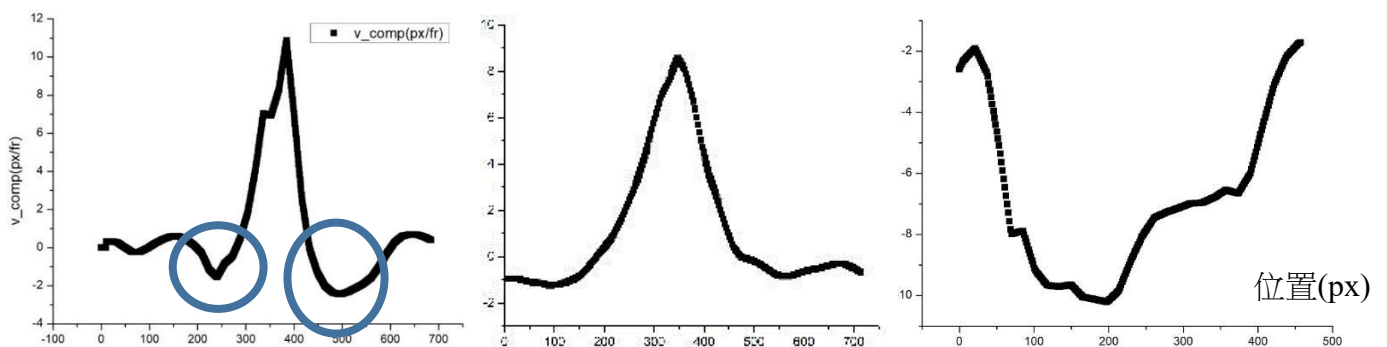


圖 22 圖 21 之結構解構方式。由近轉軸（約 $0.10r_0$ ）PIV的兩個方向兩種速度分布繪製而成，其中位置為橫軸而速度為縱軸。由左而右分別是光頁上水平方向上的垂直速度、水平方向的水平速度、及垂直方向的水平速度分布。右圖之橫軸為距模型底部距離。

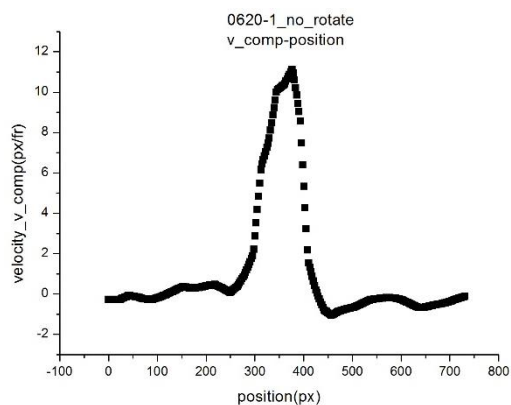


圖 23 圖 22 之對照組，即初始周圍液體無旋轉時光頁上水平方向上的垂直速度分布。
位置為橫軸而速度為縱軸。

其含時PIV法攝影結果如下：

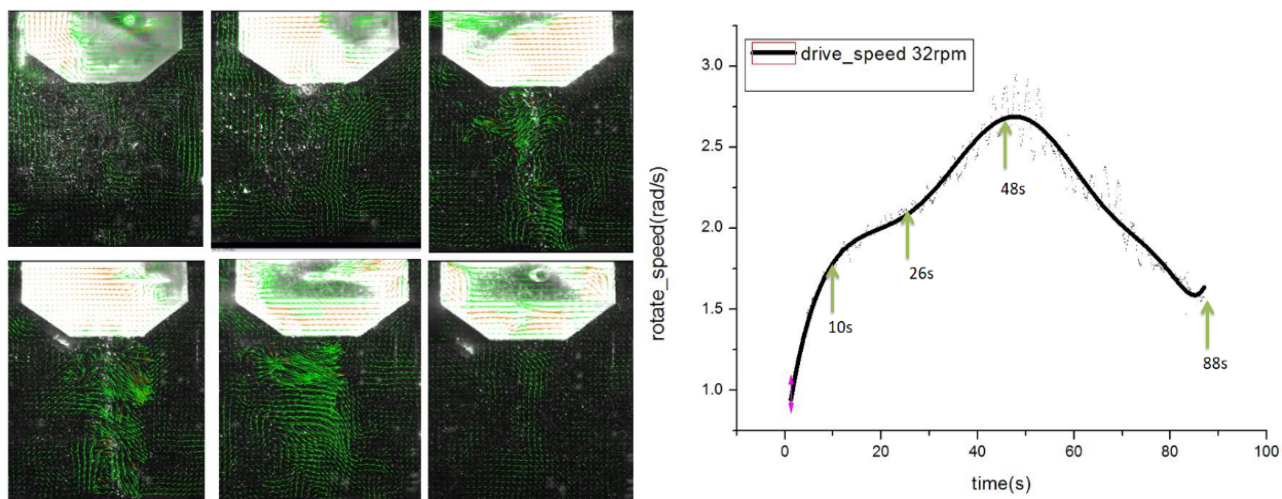


圖 24 A式模型周圍流動結構PIV攝影。初始驅動速度 24rpm，左小圖依序（左-右，上-下）為 $r = 0.05r_0$ 處光頁上 10s，26s，38s，55s，66s，97s 之速度場。分別對應轉速-時間曲線如右小圖。

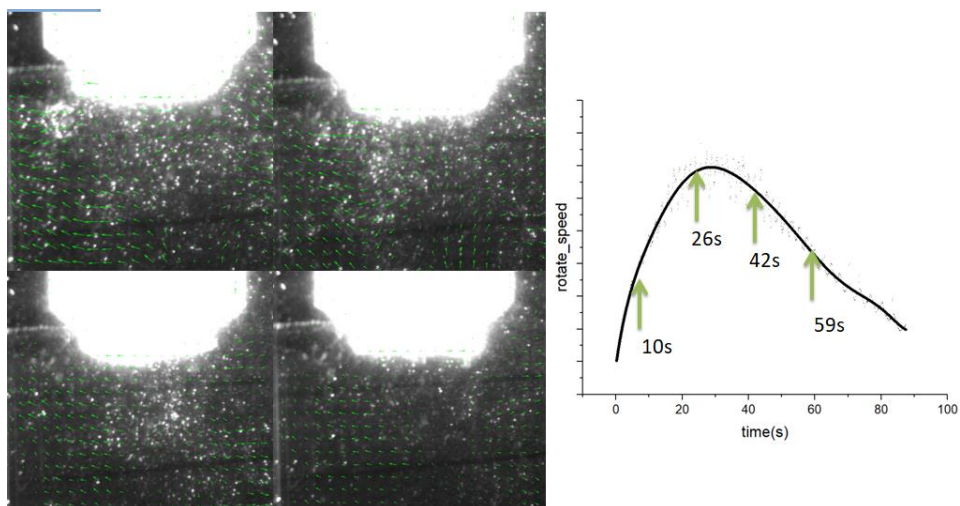


圖 25 C式模型周圍流動結構PIV攝影。初始驅動速度 24rpm，左小圖依序（左-右，上-下）為 $r = 0.05r_0$ 處光頁上 10s，26s，42s，59s 之速度場。分別對應轉速-時間曲線如右小圖。

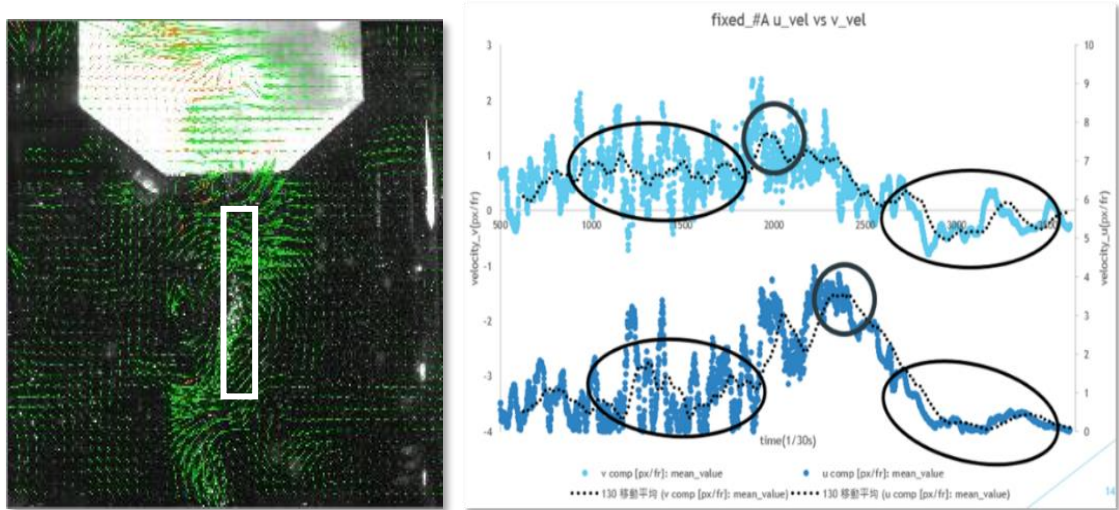


圖 26（左）A式模型PIV攝影，評估渦流中心二維流場速度，計算方式如圖。圖上顯示軟體中計算圈起來的矩形內在此frame的垂直方向速度分量平均。垂直速度向下為正。（右）A式模型PIV攝影，初始驅動速度 24rpm，樹脂模型下方的水平、垂直速度分量平均-時間作圖。擬合曲線為移動平均。較上的曲線為u方向速度，即水平速度（轉速），較下的曲線為v方向速度，即垂直速度，v方向速度向上為正，單位皆為 pixel/frame。

首先，有或無垂直對流造成模型轉速-時間曲線的明顯影響，可由PIV攝影法結果（圖 24 左）來說明。原始驅動旋轉流在光頁上的速度成徑向線性成長，即距離轉軸越遠速度越快（ $v = \Omega R, \Omega$ 為常數）。垂直對流發展 20s 之後，粒子在光頁上的水平速度就呈距離轉軸越近速度越快的趨勢，則 $\Omega = \frac{v(r)}{r}$ 必定呈距離轉軸越近越大的趨勢。

圖 21 的結構是由圖 22 中的 3 張速度分布圖所畫出。首先，水平方向的垂直速度分布在中心處(350px)有一極值，寬度(FWHM)約為 80px，即液體急遽下沉的位置在 $40/350 \sim 0.1$ 倍半徑內，約為模型開口大小。而距中心 0.3-0.4 倍半徑區域，如紅圈所示，平均垂直速度為負，也就是有向上流的趨勢，如圖 21 所示。特別地， $0.3r_0$ 處的向上流趨勢在對照組(圖 23，周圍液體初始無旋轉)不能觀察到，但依據連續方程式，模型底下的任一截面流體通量應為 0(忽略極小的密度差)，因此推論對照組中非近轉軸區域的上升流動速度分布應較為均勻，而當周圍液體初始有旋轉時周圍上升流則會

較靠近轉軸。

如圖 22 中，A 式模型對流時水平方向的速度分布在中心有一寬度為 200px 的高峰，即 $0.3r_0$ 內的液體都有急遽加速旋轉的趨勢。垂直方向上的水平速度有離模型越遠水平速度（轉速）越小的趨勢，不過整體而言都有明顯增快。模型附近的水平速度幾乎為 0 是因為模型表面的 no-slip 條件所致。

由圖 24 左及右對照，在 38s 時近轉軸部分下沉流動明顯，並在約 22s 後轉速-時間曲線達最大值，依表面 no-slip condition，此時應該也是模型下方生成快速轉動渦流轉動最快的時間(見圖 24 左 66s)，由圖 26，取近轉軸區域的水平及垂直速度（轉速和對流速度）平均，轉速在時間軸上的趨勢大致上和圖 24 右相同，不過可以注意到兩個速度分量的高相關性，其中轉速最大值約在垂直接速最大後 5s 出現，轉速相對最大約持續 10s(圖 24 左的 55s-66s)。另外，經圖 24 左及圖 22 中觀察，可以發現在模型下方 ($0.10r_0$) 以外的區域徑向流速極小。

由圖 25，C 式模型周圍流場並不穩定且無明顯垂直方向運動規則性，我們合理推測這導致 A-C 式模型之轉速-時間曲線趨勢十分不同，B 式同理。

綜合上述，可以解釋轉速-時間曲線各階段加速趨勢的意涵:

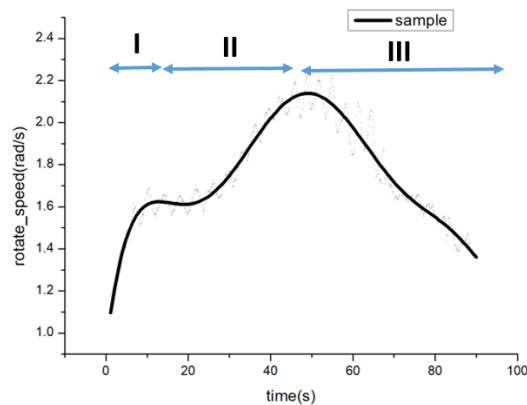


圖 27 典型 A 式對流條件轉速-時間曲線趨勢

時間 I:

模型由靜止受到旋轉流的加速，其轉速約達初始驅動旋轉速度的 60%。

時間 II:

模型由約 15s 的穩定轉動後加速，達最大轉動速度（詳細過程見上 PIV 攝影初步討

論)。這個階段，在初始驅動速度越小或對流 ξ 值越大時越明顯（見圖 18，19）。最大轉動速度和初始驅動速度比值和驅動速度呈負相關（見圖 18）。

時間III:

約 60s後，近轉軸處垂直流動因冰融完而消失（見圖 26 右），旋轉流進而快速減速。

以上的觀察以近轉軸區域的速度變化為主，以下將討論徑向上各處含時PIV攝影所測轉速-時間趨勢輔助證實上述討論及探討更多因素的影響（如黏度分布）。

(三)、 實驗結果:各徑向位置上轉動速度-時間比較

以上的討論僅限於近轉軸區域($0.30r_0$)以內的平均流場速度，旋轉流內其他區域情形仍屬未知，接下來將觀察距轉軸特定距離的水平速度（轉速）-時間關係，測量方法及內容參考圖 14，也就是 $V_\phi(r, t)_z$ ， z （高度）約比模型底部低 1.5cm。圖 28~34 之 PIV 攝影速度變化趨勢解讀可以參考圖 27 左所示意。

1. 周圍液體為水，距轉軸 $0.20r_0$ ， $0.40r_0$ 水平速度（轉速）-時間關係比較

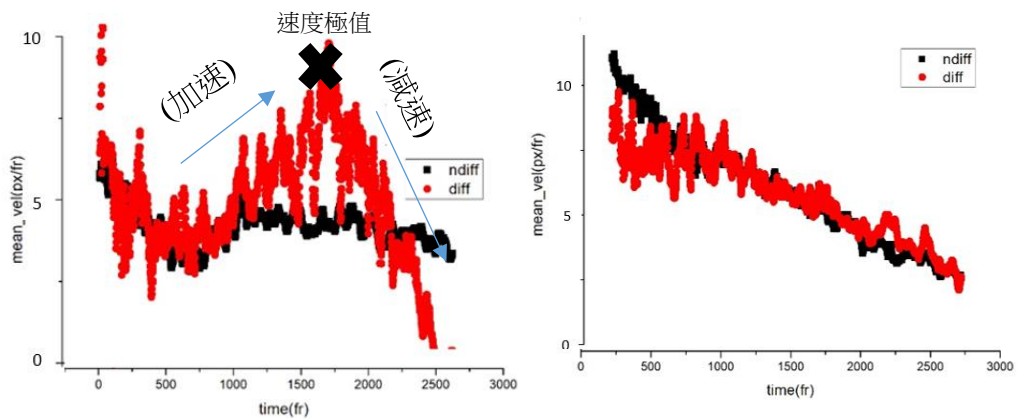


圖 28 實驗中的 $V_\phi(r, t)_z$ ，周圍液體為水($\xi = 0.029$)，縱軸向上為正，時間坐標軸 $1\text{fr}=1/30\text{s}$ 。左圖 $r = 0.20r_0$ ，紅線為實驗組（有置冰）而黑線為對照組，實驗組在 55s達極大值，同前述實驗結果模型達轉速極值時間，隨後急遽減速至 0。右圖 $r = 0.40r_0$ ，紅線為實驗組而黑線為對照組，實驗組在實驗初期(20s)左右速度有相對幅加速。

2. 周圍液體為 10%甘油溶液，距轉軸 $0.20r_0$ ， $0.40r_0$ 水平速度（轉速）-時間關係比較

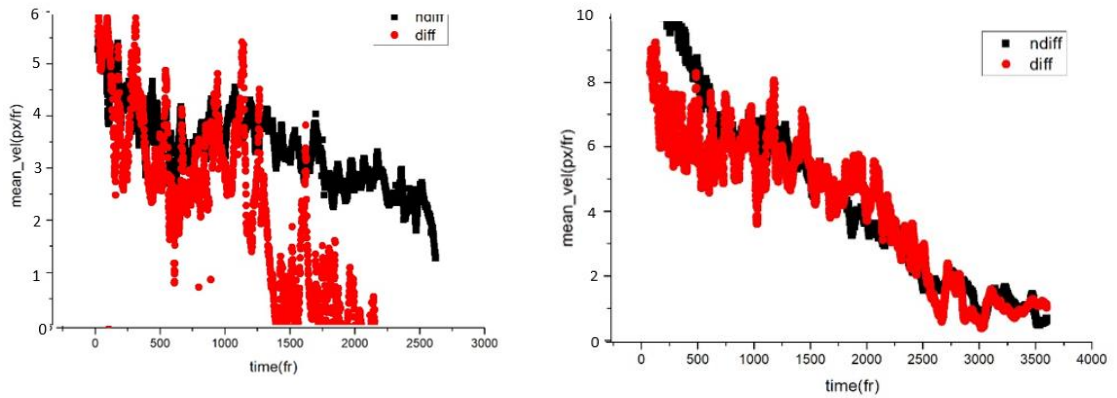
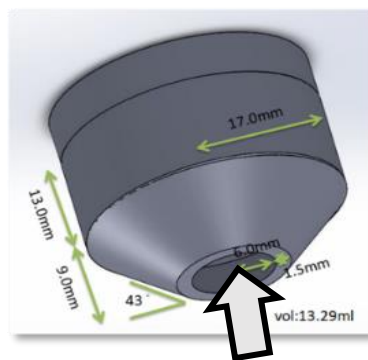


圖 29 實驗中的 $V_{\varphi}(r, t)_z$ ，周圍液體 10%甘油水溶液($\xi = 0.005$)，時間坐標軸 $1\text{fr}=1/30\text{s}$ 。左圖 $r = 0.20r_0$ ，紅線為實驗組（有置放冰）而黑線為對照組，實驗組在 30s 稍微相對加速便急遽減速至 0。右圖 $r = 0.40r_0$ ，紅線為實驗組而黑線為對照組，實驗組在 20s 左右相對加速並不明顯。對應模型轉速時間曲線見圖 19。

3. 模型填 2.5%甘油液結凍，距轉軸 $0.20r_0$ ， $0.40r_0$ ， $0.70r_0$ 水平速度-時間關係比較

改在模型填裝 2.5%甘油水溶液結凍（凝固點約為 -0.5°C ），如圖 30，則模型溶出的液體密度更高，有較大的對流速度。0 度 2.5%甘油水溶液運動黏度為 $1.95 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ ，而在這個對流條件下的 $\xi \equiv (\rho_l - \rho_w)/(\rho_l)$ 值為 0.036。



改填 2.5wt%甘油水溶液

圖 30

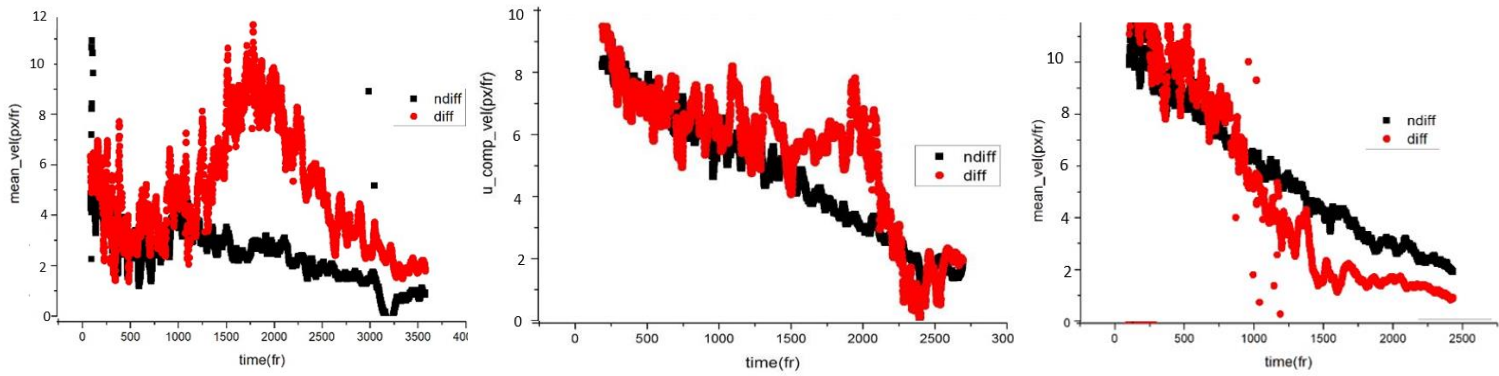


圖 31 “A式模型中填充 2.5% 甘油水溶液製冰”實驗($\xi = 0.036$)中的 $V_{\phi}(r, t)_z$ ，周圍液體為水，時間坐標軸 $1fr=1/30s$ 。左圖 $r = 0.20r_0$ ，紅線為實驗組（有置放冰）黑線為對照組，對照組在 55s 處達極大值，且最快達 $12.0px/fr$ 。中圖 $r = 0.40r_0$ ，紅線為實驗組而黑線為對照組，實驗組在實驗初 (20s) 左右速度稍微降低，但在 60s 仍有加速。右圖 $r = 0.70r_0$ ，紅線為實驗組而黑線為對照組，兩者趨勢相近。

(四)、 討論:距轉軸不同距離轉動速度變化-時間關係分布

圖 28 顯示 $r = 0.20r_0$ 和 $r = 0.40r_0$ 實驗組都在實驗中出現相對對照組的轉速加速，但幅度和時間均不同。因此我們想探討這個區域內，距轉軸不同距離的轉動速度-時間關係，在距離上更連續的變化。對照組（轉軸處無垂直對流）的轉動速度-距軸距離-時間關係可參考圖 3。下圖即是三個實驗組（模型有填冰）的 $V_{\phi}(r, t)_z$ 比較:

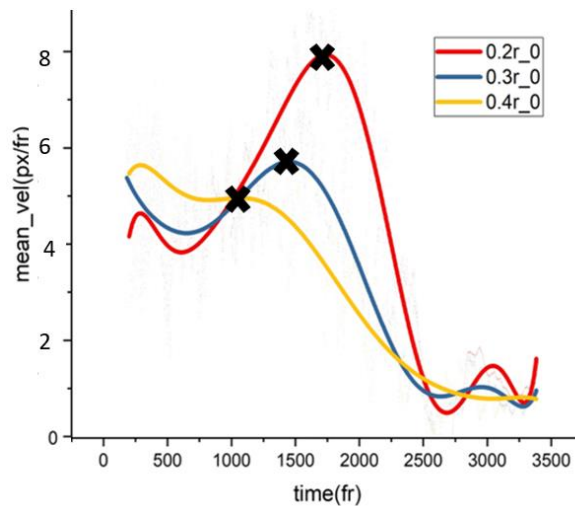


圖 32 以純水為周圍液體， $r = 0.20r_0, 0.30r_0, 0.40r_0$ 的 $V_{\phi}(r, t)_z$ （可視為歸一化速度，即 normalized）擬合曲線，時間坐標軸 $1fr=1/30s$ 。”X”為三條曲線在實驗時間中之極大值。

圖 32 顯示 $r = 0.20r_0 \sim 0.40r_0$ 處加速的遞進關係。明顯的，三條曲線的”X”相對極大處有

1. 距轉軸越近，”X”越晚出現
2. 距轉軸越近，”X”值越大

這樣的水平速度-時間關係，以及 55s 左右 $r = 0.20r_0$ 轉動速度達到最大時的速度-位置分布關係和非旋渦流(irrotational vortex)十分相仿，也就是 $v \propto \frac{1}{r}$ 。且實驗組在 $r = 0.50r_0$ 外的區域就難以觀察到轉動速度相對極大值的出現。理論上在本實驗小尺度下，初始的旋轉渦流在不受外力驅動後會先因邊界層和黏滯力而停止而非發展成非旋渦流（見圖 3）。

綜合所觀察及評估非旋渦流生成條件，我們認為實驗中能發展成非旋渦流，和轉軸附近垂直接流動造成壓力分佈使得流動不穩定有關。初始旋轉渦流(rotational vortex)的流體壓力，依據 Euler 方程式(黏滯度為 0 的 Navier-Stokes 方程式)，

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r$$

壓力在轉軸取值最小而在杯緣取值最高，其壓力梯度由旋轉杯緣的力來維持。杯緣靜止後，轉軸處因熱對流的垂直錯動壓力降低，如圖 33，則轉軸周圍液體會因壓力梯度突然增加，造成系統不穩定性(unstable)，使液體傾向於向轉軸（順壓力梯度）移動而因角動量守恆（此時已經沒有旋轉杯緣的力來扭轉液體）加快轉速。轉軸周圍液體向轉軸移動時，轉軸處的流體連續方程式則由轉軸處的垂直接流動來滿足。

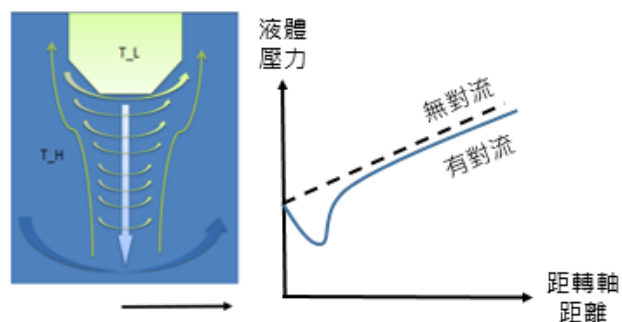


圖 33 參考圖 21 的流場結構，因轉軸處垂直接流動使壓力分佈改變的示意圖。實驗初期近轉軸處因初始旋轉渦流造成的壓力梯度仍能維持，而近轉軸處產生垂直對流後，必然會造成此區域壓力分佈較低（如右圖），進而因液體順壓力梯度移動，使得近轉軸處流場速度增快。（見上討論）

以流體力平衡的角度觀之，即是因近轉軸處壓力梯度增大，而旋轉流中流體向心力由壓力梯度提供，只能令流體轉速加快(即向心力增大)來維持流體力平衡。但依能量守恆，流體不會無故加速，因此加速原理應如上所述，也就是由周圍液體向轉軸移動的角動量守恆引起。

綜合上述，可以小結使用液體為純水時的轉速-距轉軸距離-時間關係:

- 1.分界約 $r = 0.50r_0$ 處，向杯緣的部分在實驗中持續因邊界層效應和黏滯力而減速，水平速度-時間關係和對照組（模型無對流發生）相近。
- 2.分界約 $r = 0.50r_0$ 處，向轉軸的部分在實驗前期（60s 前）會有相對對照組的加速現象，距轉軸越近此現象越明顯，且越接近轉軸，達到最大轉動速度的時間越晚。
3. $r = 0.20r_0$ 轉動速度達最大時，流場速度分布和非旋渦流(irrotational vortex)相仿。
4. $r = 0.20r_0$ 轉動速度達最大後（60s 後），在分界約 $r = 0.50r_0$ 內速度遽減為 0，約在 80s 後即近乎靜止。

關於第 4 點， $r = 0.50r_0$ 以內液體在 $r = 0.20r_0$ 轉動速度達最大後急遽（20s 內）靜止，我們認為和對流停止後的黏度分布消散能量有關，將在第六點討論。

(五)、 討論:改變對流速度條件下的流場模式差異

在圖 19 中能初步觀察到模型最大轉速和對流 ξ 值的正相關關係，因此進一步以流場觀測來找出導致模型最大轉速的改變對應的流場特徵。圖 28~31 分析流場的結構中所改變的因素是液體的配置，也就是對流速度，三個實驗有不同評估對流速度的 ξ 值。明顯的，在 ξ 值小，例如周圍液體為 10wt%甘油水溶液，即 $\xi = 0.005$ 的實驗條件下， $r = 0.20r_0$ 處最大水平速度僅 3px/fr 左右且迅速趨於靜止。相對的，在 ξ 值大，例如模型改填 2.5%甘油水溶液結凍，即 $\xi = 0.036$ 的實驗條件下， $r = 0.20r_0$ 處最大水平速度可到 10px/fr 。周圍液體為純水，即 $\xi = 0.029$ 時， $r = 0.20r_0$ 處最大水平速度約 8px/fr 。

（見圖 28~31）。下圖為三個 ξ 值條件的 $V_\phi(r, t)_z(r = 0.20r_0)$ 比較:

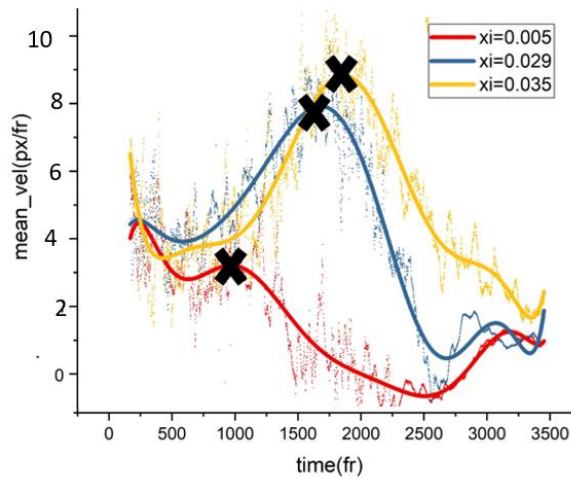


圖 34 三種對流速度（ ξ 值）， $r = 0.20r_0$ 的 $V_\phi(r, t)_z$ 擬合曲線，時間坐標軸
1fr=1/30s。“X”為三條曲線相對極值。

圖 34 顯示三種對流速度（ ξ 值） $r = 0.20r_0$ 的 $V_\phi(r, t)_z$ 。三條曲線的“X”相對極大處有

- 1.對流越快，“X”越晚出現
- 2.對流越快，“X”值越大

這個關係可以利用第四點的討論來解釋:因 ξ 值越大，即轉軸處垂直流速愈快，可以製造較大的壓力梯度來吸引周圍液體。另外，由圖 28~31 可以發現，在 ξ 值於 0.005~0.036 時，也能觀察到如第四點“遞進的速度改變”現象，以及“僅因黏滯力減速”和“有相對對照組加速”分界位置。不過，僅受黏滯減速和受轉軸附近流場影響而加速的分界位置隨 ξ 值而有不同，例如 $\xi = 0.005$ 時，分界約為 $r = 0.4r_0$ ，如圖 28。 $\xi = 0.029$ 時，分界約為 $r = 0.5r_0$ ，如圖 29。 $\xi = 0.036$ 時，分界為 $r = 0.6\sim 0.7r_0$ ，如圖 31，圖 31 中和右圖對照顯示 $r = 0.70r_0$ 時實驗組和對照組（有/無對流）的 $V_\phi(r, t)_z$ 才一致，即不受轉軸處流場變化影響。

(六)、 討論:黏滯度分布在影響徑向位置上轉動速度-時間趨勢的角色

$r = 0.20r_0$ 處達最大轉動速度之後便開始急遽減速，同時也是垂直對流消失之時（見圖 26~34 等數據）。實驗前期，流場向非旋渦流性質發展主要由垂直對流驅動（見上討論），不過藉討論黏滯度分布在影響徑向位置上轉動速度-時間趨勢中的角色，發現 $r = 0.20r_0$ 處達最大轉動速度之後開始急遽減速的現象主要並非實驗中垂直對流消失的漸進過程等其他因素，而幾乎僅是由黏滯度分布摩擦耗能而引起。

由於這方面的探討涉及 Navier-Stokes 方程式中多個項的變化關係，因此本文先採研究方法所提到的簡化模型，也就是先不考慮流體徑向速度以及垂直到動，藉給定的黏滯度分布和初始條件，來模擬可能的流場變化趨勢。

由於實驗中，由 PIV 攝影觀察到 60s 後流場流動徑向速度極小，且由圖 26 右及 PIV 攝影觀察可見垂直（z 方向）速度在所欲分析時段，即 $r = 0.20r_0$ 處達最大轉動速度後近乎為 0，因此在模擬中忽略 Navier-Stokes 方程式的 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 u_z 、 u_r 、 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 等項。其餘推導見研究方法。

1. 兩種模擬條件中，給定的黏滯度分布和初始條件

我們給出兩種模擬條件以供對照：對流環境是純水，且冰由純水製作 ($\xi = 0.029$)，以及冰由 2.5% 甘油水溶液凝固製成（見圖 30， $\xi = 0.036$ ）。

藉由 $r = 0.20r_0$ 處達最大轉動速度時，使用探針式溫度計測量溫度分布，可以計算徑向上的黏滯度分布（圖 35、37）。而藉圖 32 的速度分布關係，及參考圖 31 之數據，可以計算模擬的初始速度分布（圖 36、38）。亦可參考無旋渦流下 Navier-Stokes 方程式的解，也就是 Lamb-Ossen vortex[11]。

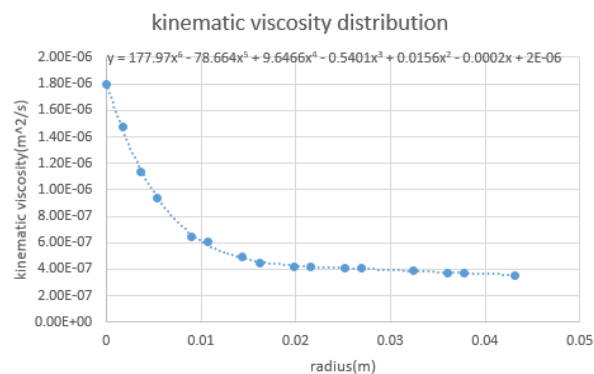


圖 35 對流環境為純水，且冰由純水製成 ($\xi = 0.029$) 的實驗裡，藉探針式溫度計測量和模型底部高度差 1.5cm 處的溫度分布，進而推得模擬所需徑向黏度分布。

擬合曲線為多項式作為輸入 MATLAB 用。

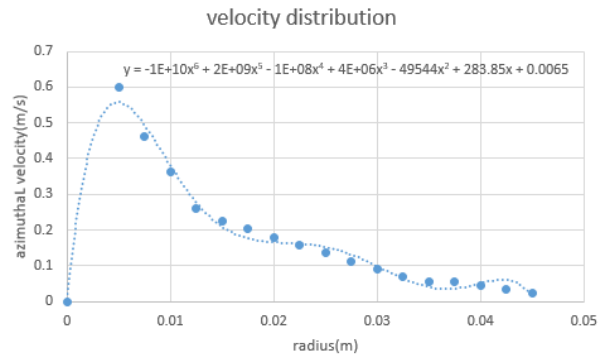


圖 36 對流環境為純水，且冰由純水製成($\xi = 0.029$)的實驗裡，藉圖 32 的速度分布關係計算模擬的初始水平速度分布。擬合曲線為多項式，作為輸入 MATLAB 用。

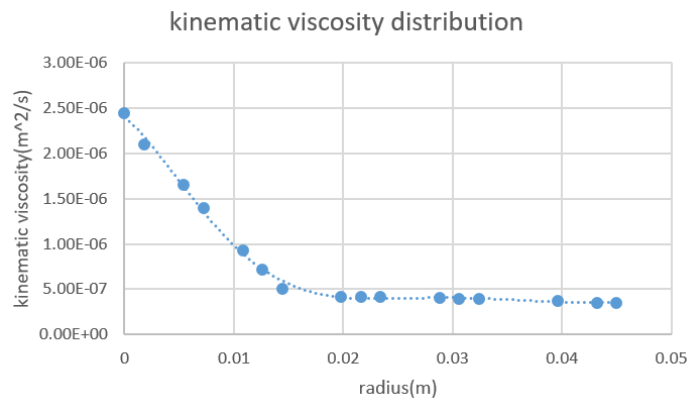


圖 37 冰由 2.5%甘油水溶液凝固製成($\xi = 0.036$)的實驗裡，藉探針式溫度計測量和模型底部高度差 1.5cm 處的溫度分布，搭配近轉軸冷液黏度及垂直流速分布，進而推得模擬所需徑向黏度分布。擬合曲線為多項式，作為輸入 MATLAB 用。

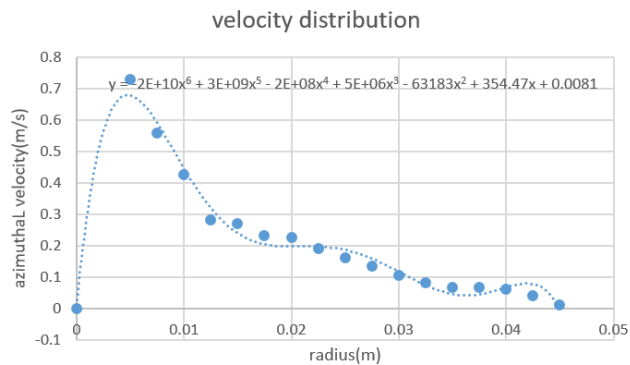


圖 38 冰由 2.5%甘油水溶液凝固製成($\xi = 0.036$)的實驗裡，藉圖 31 的速度分布關係計算模擬的初始水平速度分布。擬合曲線為多項式，作為輸入 MATLAB 用。

2. 計算結果

(1). 對流環境為純水，且冰由純水製成($\xi = 0.029$)

本計算條件基於前述簡化模型黏度隨離轉軸距離關係如圖 35，初始速度隨離轉軸距離關係如圖 36，約是實驗中 50s 左右的速度分布（圖 32），邊界條件為 $u(r_0, t) = u(0, t) = 0$ ，也就是杯緣邊界不滑移條件以及流場在 θ 方向的對稱性。模擬時間 60s，結果如下：

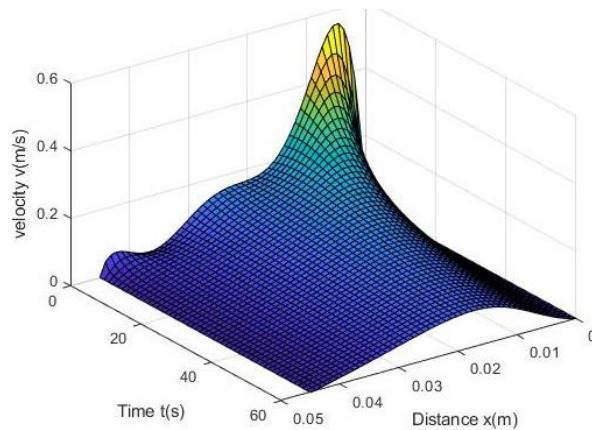


圖 39 基於簡化模型模擬的速度-時間-距轉軸距離關係圖，其中對流環境為純水，且冰由純水製成($\xi = 0.029$)

圖 39 顯示在近似非旋渦流的初始條件下，整個流場隨時間都迅速趨於停止。觀察模擬結果中 $r = 0.20r_0$ 的速度 V -時間 t' （歸一化，即縮放至初始速度為 1）關係，再和實驗觀察到 $r = 0.20r_0$ 的歸一化 $V_\varphi(r, t)_z$ （定時間 50s 為 $t'=0$ ）比較如圖 40：

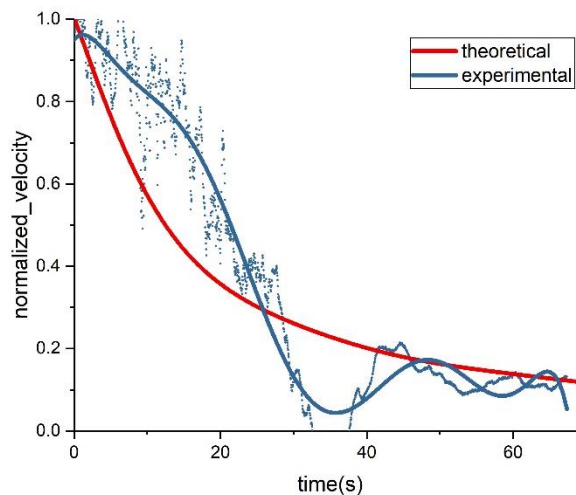


圖 40 模擬結果中 $r = 0.20r_0$ 處的歸一化速度 V -時間 t' (紅線)，與實驗觀察到 $r = 0.20r_0$ 處的歸一化 $V_\varphi(r, t')_z$ (藍線，定時間 50s 為 $t'=0$) 比較

(2). 冰由 2.5%甘油水溶液凝固製成($\xi = 0.036$)

本計算條件基於前述簡化模型黏度隨離轉軸距離關係如圖 37，初始速度隨離轉軸距離關係如圖 38。邊界條件同上。模擬時間 60s，結果如下:

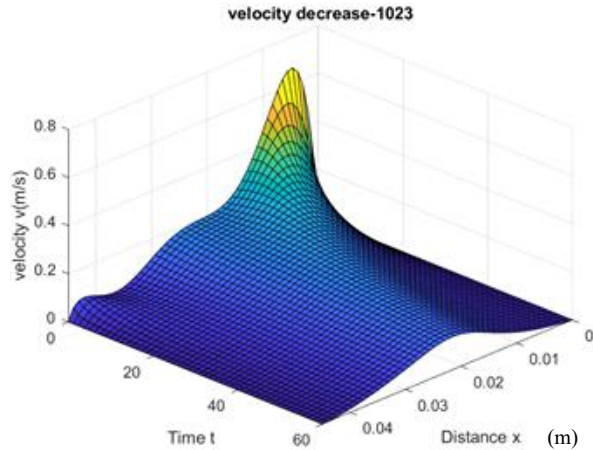


圖 41 基於簡化模型模擬的速度-時間-距轉軸距離關係圖，其中冰由 2.5% 油水溶液凝固製成($\xi = 0.036$)

圖 41 顯示的流場發展趨勢和圖 39 所顯示相似。觀察模擬結果中 $r = 0.20r_0$ 的歸一化速度 V -時間 t' 關係，再和實驗 (如圖 30) 觀察到 $r = 0.20r_0$ 的歸一化 $V_\varphi(r, t)_z$ (定時間 50s 為 $t'=0$) 比較如圖 42:

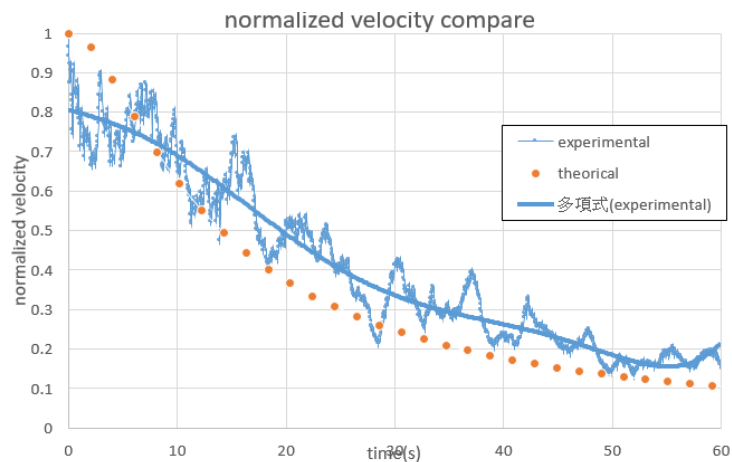


圖 42 模擬結果中 $r = 0.20r_0$ 處的歸一化速度 V -時間 t' (橘點)，與實驗觀察到 $r = 0.20r_0$ 處的歸一化 $V_\varphi(r, t')_z$ 藍線，(定時間 50s 為 $t'=0$) 比較

3. 討論

圖 40 及 42 顯示模擬與實驗所給出 $r = 0.20r_0$ 處的 50 秒後 $V_\phi(r, t)_z$ 的趨勢，兩者趨勢大致相近：渦流在 $t'=20s$ 時已剩下約 0.4 倍的初始速度，隨後遞減至 0。由圖 40 對照，簡化模型已經能夠預測渦流衰減時的速度趨勢，而圖 42 結果和 40 的衰減趨勢類似但稍快，因此推測 $r = 0.20r_0$ 處達最大轉動速度之後開始急遽減速的現象主要是由黏滯度分布摩擦耗能而引起，而非其他因素（例如垂直流場在 55s 後趨於靜止的漸進過程等）。

若比較有/無對流(即圖 3 和圖 39 這兩種模擬)，在距轉軸 $0.50r_0$ 處的速度，同樣花費 300s 令原旋轉渦流(rotational vortex)減速，則有對流組(圖 39)減速至 $0.00732m/s$ ，無對流組(圖 3)減速至 $0.03515m/s$ ，和原始渦流距轉軸 $0.50r_0$ 處的速度 $0.05532m/s$ 相比，有對流組減速了 87% 而無對流組為 36%。有對流組渦流的衰減速度遠快於在如圖 3 等模擬條件下的衰減速度，推測原因應為在此模擬中，近轉軸處因溫度低，黏度較大。另外，由於黏滯力取決於速度梯度，非旋渦流模型的近轉軸處速度梯度極大，也會給出較大的黏滯力。

這些增加近轉軸處黏滯力的因素均以垂直對流的產生使冷的液體分布於轉軸附近為前提，因此黏滯力在現象後期才做為主導流場變化的因素。

四、結論與應用

(一)、 研究結論與應用

本實驗以自製實驗裝置探討旋轉流中垂直熱對流(buoyancy-driven flow)造成流場變化之性質，並以定量的冰作為對流源，及以固-液 不滑移條件作為力學之邊界條件，依實驗結果及數據總結實驗內容如下:

就實驗觀察的部分:

1. 就自製A式對流模型而言，有/無熱對流明顯造成流動運動模式的差異。
2. 就不同自定義對流條件A、B、C而言，自定義轉速-時間曲線明顯呈現對流模式的差異，在實驗測試驅動速度範圍內皆呈類似現象，並使用PIV方法攝影來證實，以及分析出近轉軸處40-60s流場形式圖。
3. 針對自製A式模型自定義轉速-時間曲線上的各個趨勢，本文以PIV法攝影結果作定性說明及討論，可知在近轉軸部分下沉流動和模型下方生成快速轉動渦流之間存在關聯性。

就實驗結果討論的部分:

1. 在觀測距轉軸不同位置速度-時間分布時，找到分界約 $r = 0.50r_0$ 處，向杯緣的部分在實驗中持續因邊界層效應和黏滯力而減速。分界向轉軸的部分在實驗前期(60s 前)會有相對對照組的加速現象，距轉軸越近此現象越明顯。 $r = 0.20r_0$ 轉動速度達最大時，流場速度分布和非旋渦流(irrotational vortex)相仿。 $r = 0.20r_0$ 轉動速度達最大後(60s 後)，在分界約 $r = 0.50r_0$ 內速度遽減為0。
2. 以自定義參數 ξ 討論對流速度對流場變化影響，發現隨 ξ 值增大，流場速度改變趨勢的分界會距轉軸愈遠。

原理討論:

1. 關於近轉軸流場加速

近轉軸流場加速的構型與非旋渦流(irrotational vortex)相仿，實驗中能發展成非旋渦流，和轉軸附近垂直接流動造成壓力分佈不均使流動不穩定有關。此解釋亦能說明 ξ 值不同時流場速度改變趨勢的分界移動現象。

2. 關於黏滯力於 60s 後改變流場所扮演角色

$r = 0.20r_0$ 處達最大轉動速度之後便開始急遽減速，同時也是垂直對流消失之時，推測此現象主要並非垂直對流消失，而幾乎僅是由黏滯度分布摩擦耗能而引起，並由數值模擬來證實及觀察此黏度和速度分布下的渦流衰減情形。

總體而言，渦流停止的過程可以用“液體依壓力分佈向轉軸移動，即液體擁有的角動量向轉軸聚集，再由冷液體及速度梯度的黏滯力使角動量被快速耗散”概括。

本研究期望對相關流體力學及工程方面問題有所助益，例如將結果應用於控制渦流及渦流消除。

(二)、 應用性探討

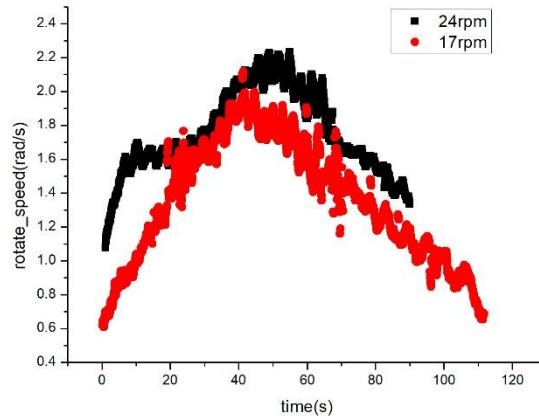
本文主要探討浮力驅動對流(buoyancy-driven flow)造成渦流型態改變的現象及其機制，期望其內容能對相關問題的研究及探討有所助益。

雖然本實驗僅探討了在特定流速及尺度範圍下因垂直熱對流造成的旋轉流流場變化，但其結果以及對渦流性質的探討應能應用於流體工程領域問題，例如應用於渦流生成、控制及消除。其中，渦流消除最常應用於流體機械工程及航空工程(Aeronautical Engineering)的流體力學，而藉本文探討垂直熱對流生成渦流(irrotational vortex)的快速衰減過程，有潛力能作為異於現今利用紊流化(turbulization)等方法消除渦流的一種新穎渦流消除方法。不過，就本實驗觀察到的過程而言，在渦流消除之前會歷經一個近轉軸處流速極快的非旋渦流階段，此階段仍需考慮機械強度是否能忍受或是否會產生其他流體現象。

(三)、 未來展望

在實驗方面，我們展望以更完整的方式剖析流場，並對觀察到的各種現象例如流場傾向加速/減速分界等作更定量的分析，甚至設計實驗，就初始轉速等變因找出流場特徵隨實驗變因可能存在的非線性關係（如圖 18 和圖 27 下方討論）。在初始轉速不同

下的渦流型態隨初始轉速的非線性關係，應與渦流型態的發展與黏滯力及壓力分佈相關有關，但經由實驗（如圖 18）發現渦流型態在初始驅動速度 24-40rpm 內差異均不大，而其中流場特徵的分布（如流場傾向加速或減速的分界）有無差異仍屬未知。其他範圍初始驅動速度可能會使流場型態有所差異，例如驅動速度低時達最大轉動速度



的時間會提早，但最大轉動速度/驅動速度比值較高，且模型轉速-時間曲線型態也與圖 27 所呈現稍有不同（圖 43）。

圖 43 初始驅動速度為 17rpm(紅點)與 24rpm(黑點)下之模型轉速-時間曲線比較

但須注意探討此變因對實驗觀察結果造成的影響，可能涉及更多實驗因素，如流場空間也就是燒杯大小，必須予以一一探討。

在分析方面，數值模擬可以提供一個不同於實驗的管道給出所觀察現象的解釋，並能驗證我們對實驗結果的解釋。本實驗在數值模擬方面的簡化即如上說明（見實驗方法），不過在我們的方法中，基於實驗的初步觀察，忽略了 Navier-Stokes 方程式的數項，且黏滯度分布是給定而不是時變的，即未考慮實驗初期黏滯度分布改變過程，以符合 MATLAB pdepe 求解偏微分方程式函式的形式，以至於只能探討在實驗中黏滯度分布在實驗結果中所扮演角色和影響。

數值模擬的內容仍有許多可以改進之處，逐步加入改變因子和參數才能模擬完整現象，為本研究展望工作之一。

五、參考資料

- [1] Markus K., Julian R. 2008 IYPT (reporter : Julian Ronacher, Austria)

- [2] S. Dorbolo, N. Adami, C. Dubois, H. Caps, N. Vandewalle, and B. Darbois-Textier. Rotation of melting ice disks due to melt fluid flow. *PHYSICAL REVIEW E* 93, 033112(R).doi: : 10.1103/PhysRevE.93.033112

- [3] Source : Retrieved Feb 15. 2018, from www.youtube.com/watch?v=b0TyIIqcEsQ

- [4] J.-C. Tsai,* C.-Y. Tao, Y.-C. Sun , C.-Y. Lai, K.-H. Huang, W.-T. Juan, and J.-R. Huang. Vortex-induced morphology on a two-fluid interface and the transitions. *PHYSICAL REVIEW E* 92, 031002(R).doi: : 10.1103/PhysRevE.92.031002

- [5] Thielicke, W. and Stamhuis, E.J. (2014): PIVlab – Towards User-friendly, Affordable and Accurate Digital Particle Image Velocimetry in MATLAB. *Journal of Open Research Software* 2(1):e30, DOI: <http://dx.doi.org/10.5334/jors.bl>

- [6] Thielicke, W. and Stamhuis, E. J. (2014): PIVlab - Time - Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB (version: 2.01).

- [7] Thielicke, W. (2014): The Flapping Flight of Birds - Analysis and Application. Phd thesis, Rijksuniversiteit Groningen. <http://irs.ub.rug.nl/ppn/382783069>

- [8] Source:Retrieved Feb. 28 2019,from www.researchgate.net/figure/Typical-Particle-Image-Velocimetry-PIV-Setup_fig3_237626471

- [9] Source: Retrieved May 15. 2018, from quora.com/What-is-slip-condition

- [10] 上海理工大學(2016)。專利編號 **CN105785066A**。中華人民共和國國家知識產權局。

- [11] Wu, J. Z.; Ma, H. Y.; Zhou M. D. *Vorticity and Vortex Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag. 2006: 262. ISBN 3-540-29027-3. p. 262.

- [12] David R. Lide, ed., CRC Handbook of Chemistry and Physics, Internet Version 2005, <<http://www.hbcnetbase.com>>, CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- [13] Cheng (2008) Ind. Eng. Chem. Res. 47 3285-3288, Volk and Kähler (2018) Experiments in Fluids 59 75.
- [14] Y. Nakayama. (1999). Introduction to fluid mechanics. UK:Arnold.
- [15] 黃上豪(民 100)。三維平行平板底部加熱之可壓縮自然對流現象研究(碩士論文)。國立交通大學，新竹市。
- [16] BarBa, Lorena A., and Forsyth, Gilbert F. (2018). CFD Python: the 12 steps to Navier - Stokes equations. Journal of Open Source Education, 1(9), 21, <https://doi.org/10.211005/jose.00021>
- [17] B. Cushman-Roisin, Environmental Fluid Mechanics (Thayer School of Engineering, Hanover, 2015).

【評語】 160022

本作品探討驅動角速度及液體黏度調動液體轉動。配合理論模擬分析實驗數據，內容豐富，分析合宜。建議可再變換參數延伸實驗並更深入討論物理圖像。