

# 2020 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160011  
參展科別 物理與天文學  
作品名稱 雙球系統垂直震盪之探討  
得獎獎項 大會獎：三等獎

就讀學校 國立臺南第一高級中學  
指導教師 羅焜哲、陳禹潔  
作者姓名 胡智堯、潘俞佑、鄧惟銘

關鍵詞 球體、轉動、震盪

## 作者簡介



大家好，我們是來自台南一中的作品作者 胡智堯、潘俞佑、鄧惟銘。

在製作這份科展專題報告中我們面臨許多惱人的問題。前期，我們苦惱著如何在系統的高速旋轉下同時捕捉到側視與俯視角度的慢動作影像，並且使其能夠被 Tracker 進行分析。此外，因為系統質心會移動，對於捕捉影像這個技術區塊，無疑是讓這部分的難度直線上升。到了理論分析的階段，我們花了相當多時間建構力學方面的進階知識，並從中提出相符的解釋模型與分析。最後更針對類似章動的”點頭”現象進行討論。

這個運動雖然看似單調，但經過慢動作解析後，其中的奧秘更如同一道道盤根交錯的謎題等著我們去突破，在這個過程中我們不僅精進實驗技巧，提升數學工具的應用能力，更對於力學有更深入的見解，因此可以說是收穫良多。

## Abstract

Observing a pair of iron balls connected horizontally. Given an initial angular velocity, one of them will leave the surface creating a lifting angle. This study explores this phenomenon and provides relevant explanations. Our experiment shows the relation between the lifting angle and the angular velocity. Such an inclination angle also oscillate through the time.

By observing the motion pattern, it is found that the phenomenon is closely related to the parameters of the sphere system. By implementing the Newton mechanics and the Lagrange mechanics model, we can explain the phenomenon of the lifting process and oscillation of the system.

## 摘要

觀察一置於平面上互相連接之兩鐵球，在給定一初始角速度後會有一球體離開平面產生仰角的現象。本研究探討此現象並提出相關解釋。經由實驗發現系統傾斜角度與系統角速度有顯著的影響，且此傾斜角度亦表現出震盪之特性。透過觀察系統運動模式，更發現現象與圓球系統相關參數有密切關聯，藉由攝影並分析系統各項物理數據，進而推導出牛頓力學與拉格朗日力學理論模型並驗證所設的想法，解釋系統穩定抬起與震盪的現象。

## 壹、研究動機

某次偶然見到同學在討論著陀螺旋轉時的力學性質，又想到社團活動時的鐵球，便順手將其黏製成類似於陀螺的玩具，思考其力學性質卻又百思不得其解，對於玩具的興趣與求知的渴望使我著手進行了這項研究。

## 貳、研究目的

- 一、 探討此現象的物理原理
- 二、 改變接觸面摩擦力，觀察物體的各軸角速度( $\Omega$ )、( $\omega$ )和仰角( $\theta$ )
- 三、 改變各轉軸轉動慣量，觀察物體的各軸角速度( $\Omega$ )、( $\omega$ )和仰角( $\theta$ )
- 四、 探討運動各階段變化

## 參、研究設備及器材

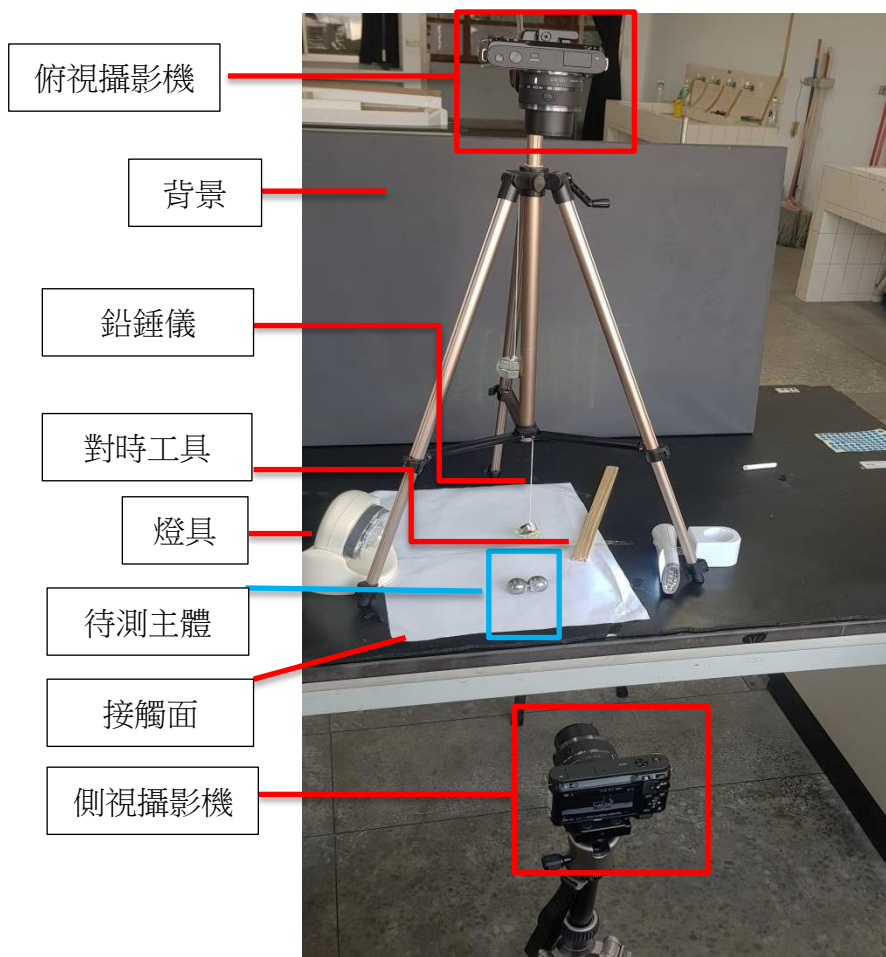
名稱	用途
Tracker	分析數據
攝影機角架	架設相機
高速攝影機*2	以 40 倍慢動作拍攝 使觀察較容易
三秒膠	粘接兩球與輕木棍
菊色標籤貼紙	標記用
照明燈具	使亮度增加，較易觀察
鉛錘儀	使利用 Tracker 量角器可分析出雙球系統仰角
砂紙、玻璃板、影印紙	摩擦力變因

表一 器材列表

## 肆、研究過程與方法

### 一、製作裝置

#### (一)研究器材配置



1. 兩臺高速攝影機以腳架依圖示架設。
2. 黑色布景配合高亮度燈具，使待測物更易分析。
3. 固定接觸面，使其平整。
4. 對時工具放置兩相機可拍攝處，以過對時線時為對時點。
5. 鉛錘儀確認分析時仰角準

(二)雙球系統製作

1. 剪出固定長度的輕竹棒。
2. 使用三秒膠將輕竹棒兩端分別連接至金屬球上。
3. 靜置直到系統穩固，不分離。

(使用輕木棒連接，使木棒本身重量相較於金屬球可被忽略)

4. 各雙球系統參數如下(  $I$ : 轉動慣量):

代號	A 球徑	連心距	B 球徑	$I_1=I_2$	$I_3$
A1	22.20	36.75	22.20	34823.21	4435.56
A2	22.20	32.30	22.20	27909.58	4435.56
A3	22.20	22.20	22.20	15524.46	4435.56
A4	25.40	22.65	22.20	10005.74	6548.74
A5	25.40	21.05	15.10	5916.61	4646.3
A6	25.40	25.40	25.40	30316.71	8661.92
A7	15.1	15.1	15.1	2207.36	630.68

二、觀察並分析

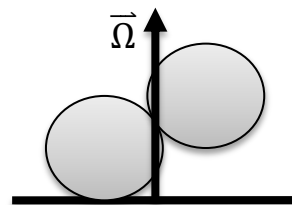
表二 系統參數

- (一)放置於選定的接觸面。
- (二)用雙手將其轉起。
- (三)使用風槍吹擊一球，使系統轉動加速至穩定狀態。
- (四)期間使用高速攝影機以 1500fps 40 倍慢動作拍攝。

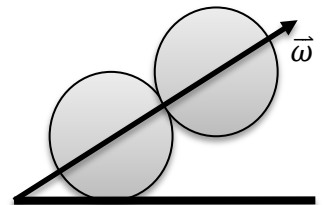
三、討論各變數之間的基本關係

(一)定義參數:

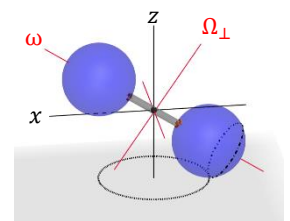
1.  $R$ :球的半徑。
2.  $M$ :球的質量。
3.  $g$ :重力加速度。
4.  $L$ :兩球之間的桿長。
5.  $\Omega$ :重心位置以垂直射向天花板的轉軸之角速度。
6.  $\omega_3$ :以兩球連心線為轉動軸的轉動之角速度。



圖一 Z軸角速



圖二  $\omega$  角速度



圖四 座標軸示意圖

## 柒、結論

一、當雙球系統在平面上轉動時，由實驗及理論統整出以下式子：

$$\begin{cases} \Omega = \omega \\ \frac{g}{R\Omega^2} = \frac{2}{5} - \sin\theta \end{cases}$$

二、當在雙球之間加上一輕竹桿時，定義 $\mu = \frac{Lch}{R}$ ，可得到：

$$\sin\theta = \frac{I_3}{I_1 - I_3} \left( 1 - \frac{2MgR}{\Omega^2 I_3} \right) \mu$$

又因為修正項 $\frac{2MgR}{\Omega^2 I_3}$ 在 $\Omega$ 極大時影響過小，於是又可得到下式：

$$\sin\theta_{max} = \frac{I_3}{I_1 - I_3} \mu$$

式中 $\theta_{max}$ 即為系統傾角最大值。

三、雙球系統的仰角會進行上下震盪(垂直震盪)的運動，其現象是由摩擦力量質與方向的變化導致，此外摩擦力為一周期函數，與初始假設不同，應仰角震盪造成正向力改變有關。

四、球會抬起的原因是因為正向力與向心力的作用。

## 捌、未來展望

一、針對空氣阻力的效應進行探討

二、當使用噴槍對其吹氣加速時，其仰角與轉速在某些角度會抬升且加快，有些角度卻造成其運動停止，希望能探討其原因。

## 玖、參考資料及其他

一、The Dynamics of Hurricane Balls (W. L. Anderse)

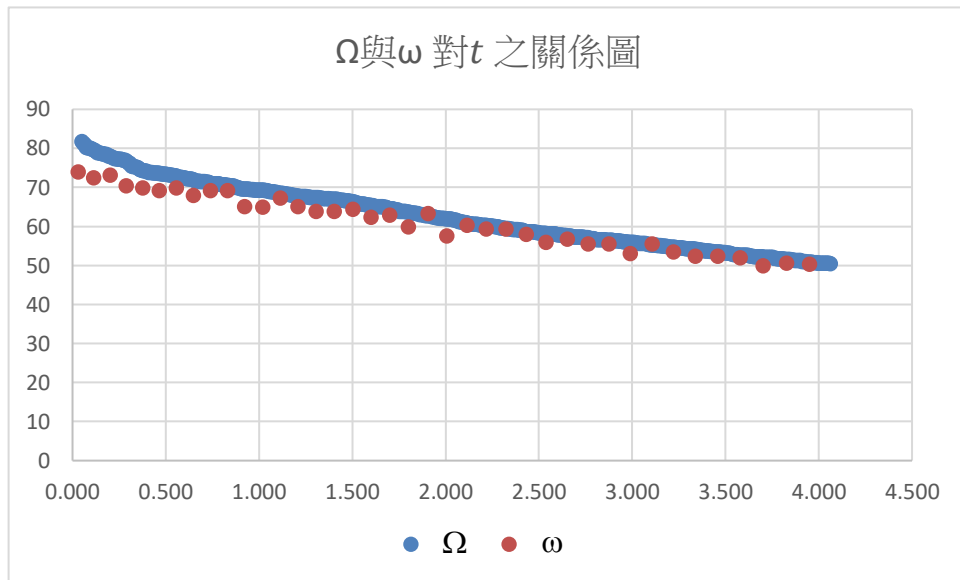
[https://www.researchgate.net/publication/279459437\\_The\\_dynamics\\_of\\_hurricane\\_balls?fbclid=IwAR0xuCAUcSwGwsarfKicQ013JAfpgvQ04boVzZ78HYwIVbMOSQ0A4Z4oSwI](https://www.researchgate.net/publication/279459437_The_dynamics_of_hurricane_balls?fbclid=IwAR0xuCAUcSwGwsarfKicQ013JAfpgvQ04boVzZ78HYwIVbMOSQ0A4Z4oSwI)

二、Hurricane Balls: A Rigid-Body-Motion Project for Undergraduates (David P. Jackson)

<https://scholar.dickinson.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=&ht>

(一)數據 1(兩球半徑皆為 11.1mm)

$\Omega$  與  $\omega$  對  $t$  之關係圖(單位為弧度每秒)



在此處可以看到兩變數表現出在穩定狀態中明顯吻合假說模型中兩變數量數相等的預測，並從此可以得到後續理論推倒之限制條件。

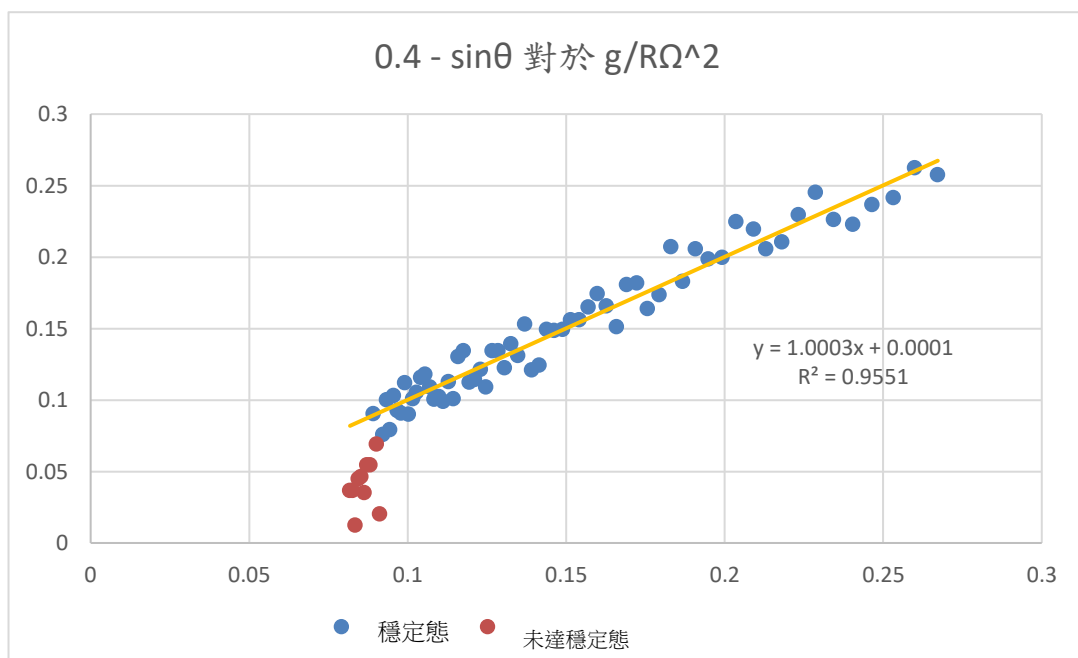
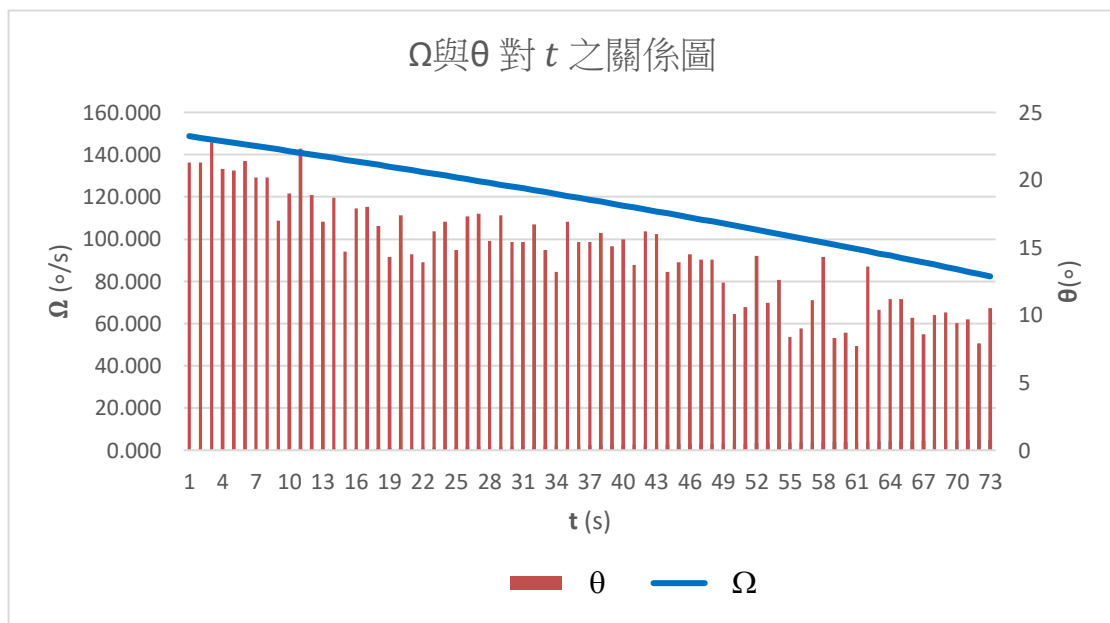
(二)數據 2(兩球半徑皆為 11.1mm)

1. 數據( $t, \Omega, \theta$ )

$t$ (s)	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\Omega$ ( $^{\circ}$ /s)	$t$ (s)	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\Omega$ ( $^{\circ}$ /s)	$t$ (s)	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\Omega$ ( $^{\circ}$ /s)
0.02	21.30	148.80	1.47	14.80	129.24	3.09	12.40	107.41
0.07	21.30	148.01	1.53	17.30	128.39	3.17	10.10	106.44
0.13	22.80	147.24	1.60	17.50	127.53	3.24	10.60	105.47
0.19	20.80	146.45	1.66	15.50	126.66	3.31	14.40	104.49
0.25	20.70	145.66	1.73	17.40	125.78	3.39	10.90	103.49
0.31	21.40	144.87	1.79	15.40	124.92	3.46	12.60	102.51
0.37	20.20	144.08	1.86	15.40	124.02	3.53	8.40	101.51
0.43	20.20	143.28	1.93	16.70	123.12	3.61	9.00	100.49
0.49	17.00	142.47	1.99	14.80	122.25	3.69	11.10	99.47
0.55	19.00	141.68	2.06	13.20	121.36	3.76	14.30	98.47
0.61	22.30	140.87	2.12	16.90	120.46	3.84	8.30	97.44
0.67	18.90	140.06	2.19	15.40	119.57	3.91	8.70	96.40
0.73	16.90	139.24	2.26	15.40	118.65	3.99	7.70	95.35
0.79	18.70	138.45	2.33	16.10	117.74	4.07	13.60	94.32
0.85	14.70	137.64	2.39	15.10	116.83	4.16	10.40	93.03

0.91	17.90	136.79	2.46	15.60	115.90	4.23	11.20	92.20
0.97	18.00	135.99	2.53	13.70	114.97	4.31	11.20	91.14
1.03	16.60	135.16	2.60	16.20	114.06	4.39	9.80	90.05
1.09	14.30	134.33	2.67	16.00	113.12	4.47	8.60	88.99
1.15	17.40	133.50	2.74	13.20	112.19	4.55	10.00	87.89
1.22	14.50	132.65	2.81	13.90	111.24	4.63	10.20	86.80
1.28	13.90	131.81	2.88	14.50	110.28	4.71	9.40	85.70
1.34	16.20	130.96	2.95	14.10	109.33	4.79	9.70	84.58
1.41	16.90	130.11	3.02	14.10	108.38	4.88	7.90	83.46

## 2. $\Omega$ 與 $\theta$ 對 $t$ 之關係圖





3.  $0.4 - \sin\theta$  與  $\frac{g}{R\Omega^2}$  之關係圖

三、討論傾斜角度( $\theta$ )對於時間之變化

(一)數據 1( $t, \theta$ )

t (s)	$\theta$ (°)	t (s)	$\theta$ (°)	t (s)	$\theta$ (°)
0.02	10.80	0.49	14.00	0.35	10.50
0.04	14.30	0.52	12.40	0.31	10.70
0.07	14.40	0.55	13.10	0.33	9.10
0.09	10.90	0.58	13.70	0.34	9.10
0.12	15.90	0.61	11.80	0.30	7.20
0.14	14.90	0.64	10.10	0.25	10.00
0.17	16.90	0.66	10.50	0.26	8.40
0.19	20.20	0.69	11.80	0.30	7.40
0.22	21.50	0.72	8.70	0.22	6.90
0.25	19.90	0.75	8.70	0.22	5.40
0.27	15.10	0.78	10.00	0.25	6.10
0.30	17.80	0.81	8.00	0.20	5.90
0.33	16.40	0.85	8.10	0.20	7.80
0.35	14.40	0.88	8.80	0.22	5.70
0.38	12.60	0.91	8.10	0.20	4.90
0.41	12.80	0.94	9.60	0.24	3.40
0.44	13.50	0.97	9.40	0.24	5.30
0.46	15.30	1.00	9.60	0.24	2.90

四、討論系統參數對數據之影響。

(一)改變接觸面(A3):

	$I_1$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	$I_3$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	理論 $\sin\theta$	實驗 $\sin\theta$	理論仰角	實際仰角
玻璃片	15524.46	4435.56	0.4	0.392	23.57	23.1
紙張	15524.46	4435.56	0.4	0.389	23.57	22.9
砂紙	15524.46	4435.56	0.4	0.345	23.57	20.2

(二) 改變系統中兩球之距離：

	$I_1$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	$I_3$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	理論 $\sin \theta$	實驗 $\sin \theta$	理論仰角	實際仰角
A1	34823.21	4435.56	0.242	0.238	14.00	13.8
A2	27909.58	4435.56	0.275	0.262	15.96	15.2
A3	15524.46	4435.56	0.400	0.392	23.57	23.1

(三) 改變系統中兩球之半徑(兩球同)

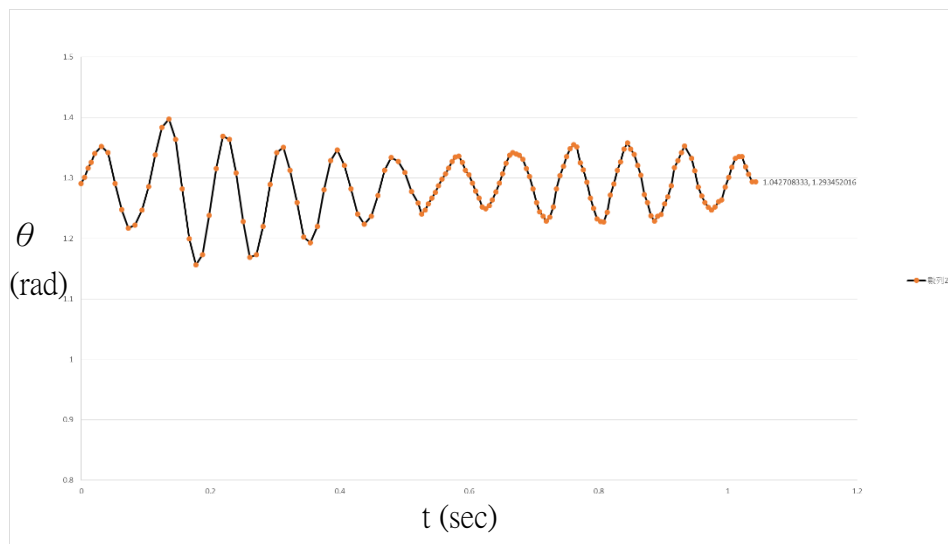
	$I_1$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	$I_3$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	理論 $\sin \theta$	實驗 $\sin \theta$	理論仰角	實際仰角
A7	2207.36	630.68	0.4	0.393	23.57	23.2
A3	15524.46	4435.56	0.4	0.392	23.57	23.1
A6	30316.71	8661.92	0.4	0.381	23.57	22.4

(四) 改變系統中兩球半徑比例

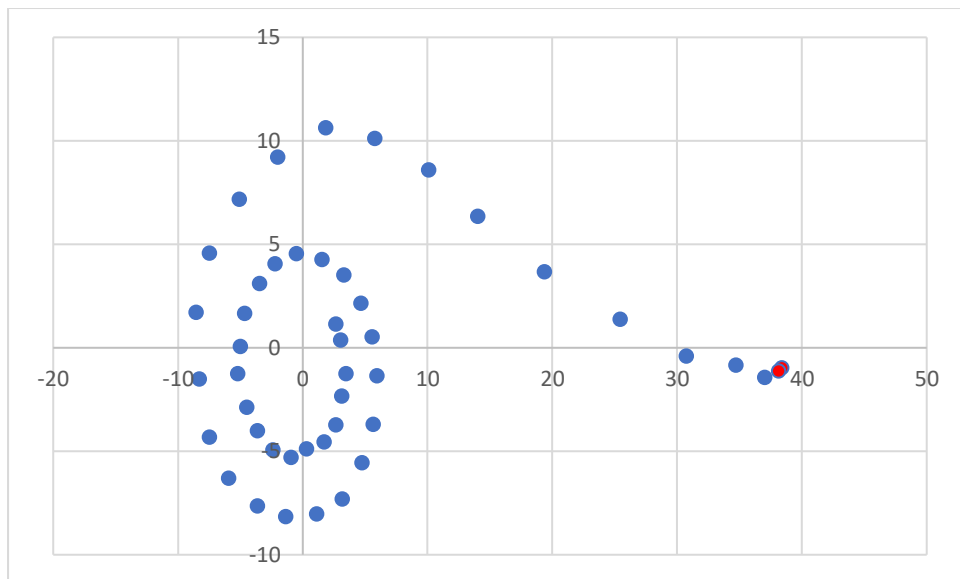
	$I_1$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	$I_3$ ( $10^{-9}$ kg. m <sup>2</sup> )	理論 $\sin \theta$	實驗 $\sin \theta$	理論仰角	實際仰角
A6	30316.71	8661.92	0.400	0.381	23.57	22.4
A4	20369.87	6548.74	0.339	0.296	19.81	17.2
A5	11677.12	4646.3	0.220	0.202	12.7	11.7

五、 垂直震盪之探討

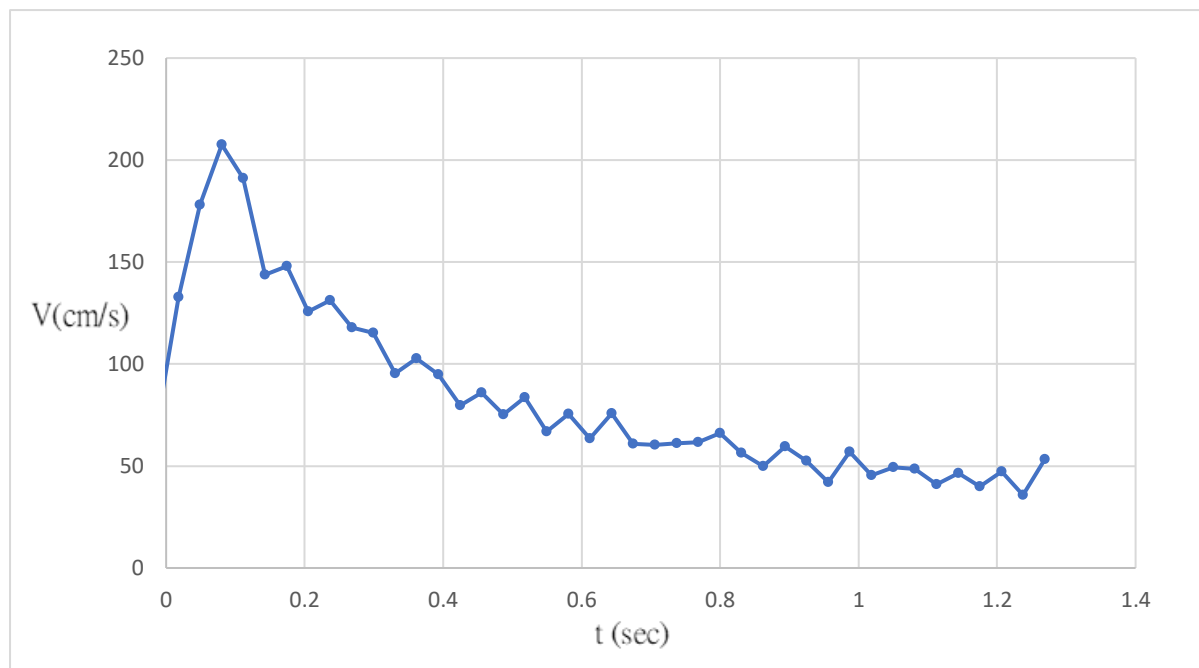
(一) 仰角對時間作圖



(二) 質心在 X-Y 平面上的位移(紅色點為起始點)



(三) 質心在 X-Y 平面上的速度



由這兩張圖中可以清楚看到仰角實際的震盪狀況，與質心在 x-y 平面上的速度與位移變化。

## 陸、討論

### 一、運動狀態概述

#### (一) 現象敘述

兩顆鐵球互相連結，中間沒有相對運動，平放地面，用手使其以高轉速在重心位置以垂直射向天花板的轉軸轉動，他在空間中為  $Z$  軸方向，我們稱這個轉軸為  $Z$ 。接著系統內自然發生一個以兩球連心線為轉動軸的轉動，我們稱之為  $X$ 。兩個轉動生成一小段時間後，本以兩球著地的轉動狀態將會改變，其中一球將會抬起並且質心對時間進行垂直震盪，此時，另一球會持續在地面轉動。最後因摩擦力的消耗，使本來抬起的球又再度碰觸地面，加劇摩擦力的能量消耗，最後停止轉動。

#### (二) 空間示意圖



### 二、理論推導(牛頓力學)

#### (一) 我們經觀察得知：

1. 雙球系統轉動時的穩定態會趨近於純滾動。
2. 可將此運動想像成一半徑  $R\cos\theta$  的車輪，以圓心、半徑為  $\ell_{CH}\cos\theta$  的圓周為路徑移動。

#### (二) $\Omega$ 和 $\omega_3$ 的關係：

由右圖可知， $A'A = 2R\cos\theta$ 、 $AB = 2\ell_{CH}\cos\theta$ ，又因趨近於純滾動，可得下式。

$$\Omega \times \frac{AB}{2} = \omega_3 \times \frac{A'A}{2} \dots \text{式 1}$$

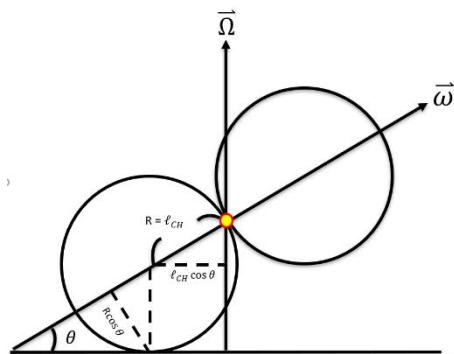
將  $A'A$ 、 $AB$  代換後可得：

$$\Rightarrow \Omega \times \frac{2\ell_{CH}\cos\theta}{2} = \omega_3 \times \frac{2R\cos\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \Omega \times \frac{\ell_{CH}}{R} = \omega_3 \dots \text{式 2}$$

由式 2 可得以下推論

1. 當  $R = \ell_{CH}$  時：



EX: 兩球相同，中間緊密相連時：

$$\Omega = \omega_3$$

2. 當  $R < \ell_{CH}$  時：

EX: 兩球相同中間以細桿連接時(細桿長  $L$ )

$$\ell_{CH} = \left(R + \frac{L}{2}\right), \Omega = \left(1 + \frac{L}{2R}\right)\omega_3$$

$$\Omega < \omega_3$$

3. 當  $R > \ell_{CH}$  時：

EX: 球半徑一大一小相連時(兩球密度相同)

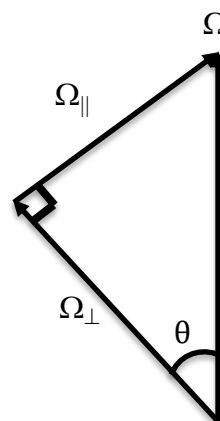
$$\Omega > \omega_3$$

## (二) 穩定狀態

在穩定狀態時，雙球系統會以一穩定角度抬起。

1. 參數：

1.  $I$  :  $I_1 + I_2 + I_3$
2.  $I_1$  :  $\vec{z}'$   $\Omega$  方向的轉動慣量
3.  $I_2$  :  $\vec{y}'$  方向的轉動慣量
4.  $I_3$  :  $\vec{x}'$  方向的轉動慣量
5.  $\mu = \frac{L_{ch}}{R}$



2. 仰角  $\theta$  理論推導：

由轉動慣量，定義可知：

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + 2M\mu R$$

$$I_3 = \frac{2}{5}MR^2 \times 2 = \frac{4}{5}MR^2$$

將  $\Omega$  分成  $\Omega_{\parallel}$  和  $\Omega_{\perp}$  由圖可知

$$\Omega_{\parallel} = \Omega \sin \theta, \Omega_{\perp} = \Omega \cos \theta$$

由於  $L = I \cdot \Omega$

$$\vec{L} = I \cdot (\Omega + \omega)$$

$$\vec{L} = I \cdot (\Omega_{\parallel} + \Omega_{\perp} + \omega)$$

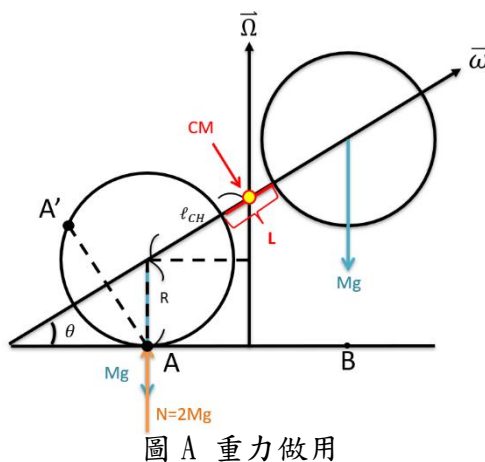


圖 A 重力做用

$$= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{\perp} \\ 0 \\ \Omega_{\parallel} + \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \Omega_{\perp} \\ 0 \\ I_3 (\Omega_{\parallel} + \omega) \end{pmatrix}$$

$$= (I_1 \Omega \cos \theta) \vec{z}' + (I_3 \Omega \sin \theta + I_3 \omega) \vec{x}' \dots \text{式 3}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\tau}{L_{\parallel}} \Rightarrow \Omega = \frac{\tau}{L_{\parallel}}$$

$$\text{又 } \tau = \frac{dL}{dt}, \frac{dL}{dt} = \Omega L_{\parallel} \text{ 且}$$

由上圖可知：

$$L_{\parallel} = I_3 \omega \cos \theta + I_3 \Omega \sin \theta \cos \theta - I_1 \Omega \sin \theta \cos \theta \dots \text{式 4}$$

故由角動量守恆可得下式：

$$\tau = \Omega \times L_{\parallel} = 2\mu MgR \cos \theta \dots \text{式 5} \quad \text{將式 4 帶入經整理後可得}$$

$$\Rightarrow \Omega (I_3 \omega_3 \cos \theta + I_3 \Omega \cos \theta \sin \theta - I_1 \Omega \sin \theta \cos \theta) = 2\mu MgR \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta (I_3 - I_1) = \frac{2\mu MgR}{\Omega^2} - \mu I_3 \Omega$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{I_3}{I_1 - I_3} \left( 1 - \frac{2MgR}{\Omega^2 I_3} \right) \mu \dots \text{式 6}$$

在理想情況時  $\Omega$  趨近無限， $\frac{2MgR}{\Omega^2 I_3}$  趨近於 0

$$\text{故理想 } \sin \theta_{max} = \frac{I_3}{I_1 - I_3} \mu \dots \text{式 7}$$

但實際情況不可能如此，因此必須以式 6 作為式 7 的修正。

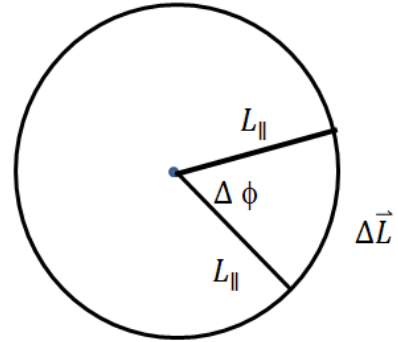


圖 B 總角動量指向軌跡平面

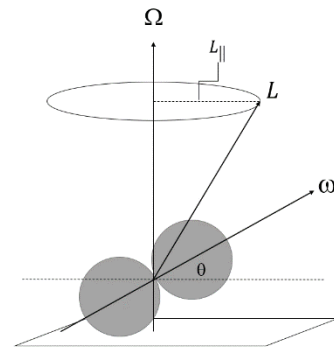


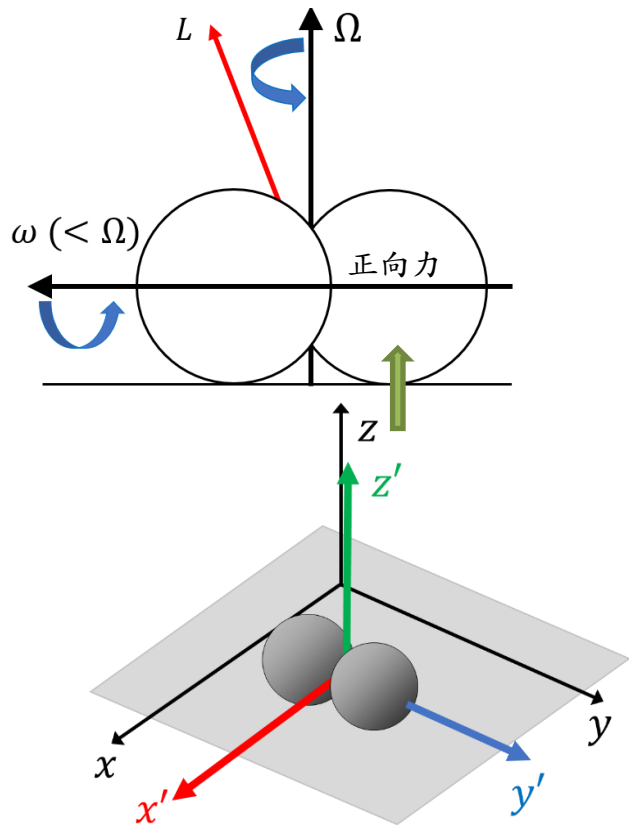
圖 C 總角動量指向軌跡

### 三、 垂直震盪之探討

由於此現象太過複雜，我們無法用簡易的力學分析進行探討，因此運用了由拉角與拉格朗日力學輔助。

#### (一) 抬起的原因

初始由手施加兩軸之轉動動能，而  $\Omega$  此轉動軸會傾向角動量之方向，因此此時正向力使其抬起。如右圖。  
 定義一由拉座標如下圖，在仰角為零時，以此坐標系為觀察點，總力矩  $\sum \tau_i = 0$ 。



由 Euler's equations

$$\tau_{x'} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} = I_{x'}\dot{\omega}_{x'}$$

$$\tau_{y'} + (I_{x'} - I_{z'})\omega_{z'}\omega_{x'} = I_{y'}\dot{\omega}_{y'}$$

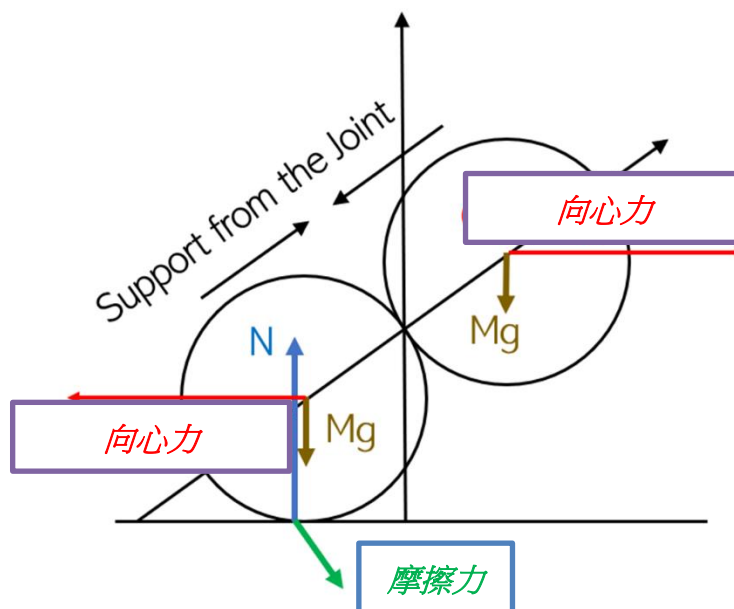
$$\tau_{z'} + (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} = I_{z'}\dot{\omega}_{z'}$$

初始狀態時

$$(\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) = (0, \omega, \Omega)$$

$$\rightarrow \tau_{x'} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} = I_{x'}\dot{\omega}_{x'}$$

向心力矩由  $\omega \times \Omega$  產生造成  $I_{x'}\dot{\omega}_{x'} \uparrow$ ，因此  $\omega$  的方向決定系統是否抬起。



拉格朗日討論垂直震盪(

$$L=T-V$$

=(I<sub>1</sub> 方向轉動動能+I<sub>2</sub> 方向轉動動能+角度震盪時的垂直質心動能)-系統位能

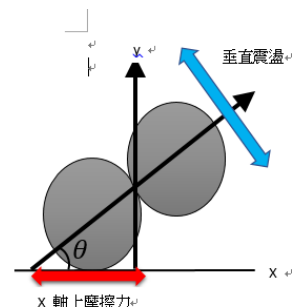
$$L=\frac{1}{2}I_1\Omega^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}I_2(\Omega\cos\theta+\omega)^2+\frac{1}{2}M(R\cos\theta\cdot\dot{\theta})^2-MgR\sin\theta$$

導入拉格朗日方程式:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=[4\cos\theta(-\sin\theta)\dot{\theta}^2+\ddot{\theta}\cos^2\theta]$$

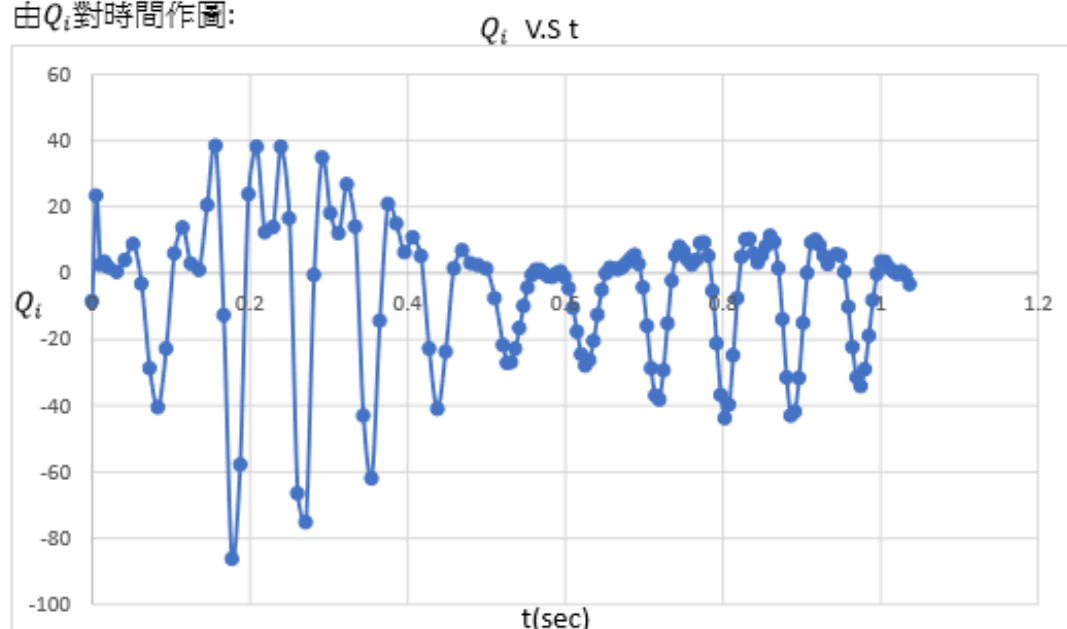
$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=[I_1\omega^2\sin^2\theta\cos\theta-mr^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta-I_2\omega^2(\cos\theta+1)\sin\theta-mgr\cos\theta]$$



相減可得

$$Q_i=[4\cos\theta(-\sin\theta)\dot{\theta}^2+\ddot{\theta}\cos^2\theta]-[I_1\omega^2\sin^2\theta\cos\theta-mr^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta-I_2\omega^2(\cos\theta+1)\sin\theta-mgr\cos\theta]$$

由Q<sub>i</sub>對時間作圖:



在這個圖中可以看到，非保守力呈現週期性變化，我們認為造成上述現象的原因為角度震盪時，系統所受正向力會隨著時間改變，故所受的摩擦力也跟著改變。其示意圖如上。



## 柒、結論

一、當雙球系統在平面上轉動時，由實驗及理論統整出以下式子：

$$\begin{cases} \Omega = \omega \\ \frac{g}{R\Omega^2} = \frac{2}{5} - \sin\theta \end{cases}$$

二、當在雙球之間加上一輕竹桿時，定義 $\mu = \frac{Lch}{R}$ ，可得到：

$$\sin\theta = \frac{I_3}{I_1 - I_3} \left( 1 - \frac{2MgR}{\Omega^2 I_3} \right) \mu$$

又因為修正項 $\frac{2MgR}{\Omega^2 I_3}$ 在 $\Omega$ 極大時影響過小，於是又可得到下式：

$$\sin\theta_{max} = \frac{I_3}{I_1 - I_3} \mu$$

式中 $\theta_{max}$ 即為系統傾角最大值。

三、雙球系統的仰角會進行上下震盪(垂直震盪)的運動，其現象是由摩擦力量質與方向的變化導致，此外摩擦力為一周期函數，與初始假設不同，應仰角震盪造成正向力改變有關。

四、球會抬起的原因是因為正向力與向心力的作用。

## 捌、未來展望

一、針對空氣阻力的效應進行探討

二、當使用噴槍對其吹氣加速時，其仰角與轉速在某些角度會抬升且加快，有些角度卻造成其運動停止，希望能探討其原因。

## 玖、參考資料及其他

一、The Dynamics of Hurricane Balls (W. L. Anderse)

[https://www.researchgate.net/publication/279459437\\_The\\_dynamics\\_of\\_hurricane\\_balls?fbclid=IwAR0xuCAUcSwGwsarfKicQ013JAfpgvQ04boVzZ78HYwIVbMOSQ0A4Z4oSwI](https://www.researchgate.net/publication/279459437_The_dynamics_of_hurricane_balls?fbclid=IwAR0xuCAUcSwGwsarfKicQ013JAfpgvQ04boVzZ78HYwIVbMOSQ0A4Z4oSwI)

二、Hurricane Balls: A Rigid-Body-Motion Project for Undergraduates (David P. Jackson)

[https://scholar.dickinson.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=&httpsredir=1&article=1443&context=faculty\\_publications&fbclid=IwAR18sS0eAvaXEQsbqYTJ0yyXDI5uYu5yPEDX1-\\_s9V8xhDww7h70TidMYnw](https://scholar.dickinson.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=&httpsredir=1&article=1443&context=faculty_publications&fbclid=IwAR18sS0eAvaXEQsbqYTJ0yyXDI5uYu5yPEDX1-_s9V8xhDww7h70TidMYnw)

三、Nutation

<http://www2.eng.cam.ac.uk/~hemh1/gyroscopes/nutation.html>

## 【評語】 160011

1. 本題材探討連接雙鋼球運動，非具突破性之力學課題，但是進行實驗的好題材。
2. 本組成員，物理概念相當清楚，運用拉格然日解題與分析能力皆屬上乘。
3. 雙球運動軌跡相當有趣。