中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

(鄉土)教材獎

080410

四彩繽紛

學校名稱：桃園市桃園區同德國民小學

作者：	指導老師：
小六 黃沐晴 小六 王皓雪 小六 陳康緹 小六 王姝涵 小六 洪子芹	林碧玲 崔智芬

關鍵詞：色塊、相鄰、不同色

摘要

研究四色定理時，我們先找出四種基本圖形，再探尋塗色方法，並且以此四種基本圖形來探討複雜圖形。發現可將複雜圖形分解成簡單的上下層、放射狀、中央有色塊的放射狀及同心圓等四種基本圖形，並依區塊編號，以相鄰不同色的原則找出各區塊對應的色塊，大部份基本圖形可用 3 色填滿，只有中央有色塊的奇數放射狀圖形會用到 4 色。合併基本圖形時，因先處理的基本圖形，限制了相鄰色塊的選擇，才會用到 4 色。將發現的方法驗證到複雜圖形上，不但用 4 色破解了兩位學者發表的只能用 5 色的多層同心圓、中央有色塊的奇數放射狀複雜圖形，並找到了規則。最後我們以此規則完成只用四色來著色，成功挑戰世界、歐洲、台灣鄉鎮市地圖及網路上的纏繞畫。

壹、 前言

一、研究動機

某一天，我們在網路上看到四色定理的影片，剛好大家都是畫畫熱愛者，就設計一些圖案來畫畫看，沒想到無論我們設計出多複雜的圖案，只要用相鄰不同色的原則，都可以用四色以內來填滿圖案，所以我們想要深入探討，看看能否找到一些填色規則。而且雖然有學者畫出了需要五色才能完成的圖案，但也有人使用電腦以四色完成了 100 多億個圖案，也許我們也能從破解學者的五色定理來推論出四色定理的存在。於是我們用四色定理為研究主題，探討如何找出著色方法，依此方法完成各式各樣的複雜圖形之相鄰不同色的問題， 研究目的及過程如下：

二、研究目的

（一）探討著色問題所需的基本圖形。

（二）尋找簡單的基本圖形塗色的方法。

（三）合併兩個基本圖形，探究重疊區域的塗色方法及限制。

（四）將(一)找到的基本圖形及（二）的方法應用到複雜不規則的圖形。

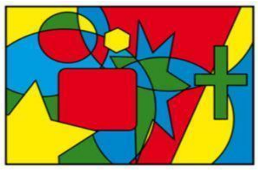
（五）探討網路上只能用 5 色完成的圖案，並試著用四色來完成它。

（六）探討我們找出的方法，將它運用到實際的例子 ，如：世界地圖、歐洲地圖、台灣鄉鎮市地圖及網路上複雜的纏繞畫。

（註 ：四色定理是一個著色問題，無論任何圖案，任何相鄰區塊不能同色，則最多只要四種顏色就可完成，見參考資料一。）

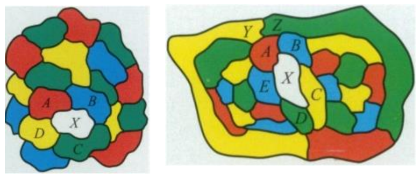
三、文獻回顧

地圖四色定理最先是由英國大學生古德里提出。內容是“任何一張地圖只用四色就能使相鄰國家不同色。”用數學語言表示即“將平面任意細分為不相重疊的區域，每一區域總可用 1234 這四個數字之一來標記，且相鄰兩區域數字必不相同”。這裡的相鄰區域是指有一整段邊界共用。如果兩個區域只相遇於一點或有限多點就不算相鄰。因為用不同的顏色著色才不會引起混淆。 右圖為四色地圖的例子自從 1852 年古德里發現每幅地圖都可以只用四色著色後，世界上許多一流數學家都紛紛參加了證明四色問題的研究中，但沒有人以嚴密的邏輯推論圖形來考證它。因此， 四色定理是世界近代三大數學難題之一，又稱四色猜想、四色問題。(資料擷取自 Bai Du 百度，見參考資料一)



電子計算機問世以後，由於演算速度迅速提高，大大加快了對四色猜想證明的進程。1976 年 6 月，在美國伊利諾斯大學的兩台不同的電子計算機上，用了 1200 個小時，作了 100 億個判斷，結果沒有一張地圖需用五色完成，最終證明了四色定理，轟動了世界，但這並不符合數學嚴密的體系，因此至今仍有無數數學愛好者投身其中做研究。(資料擷取自 Bai Du 百度，見參考資料一)

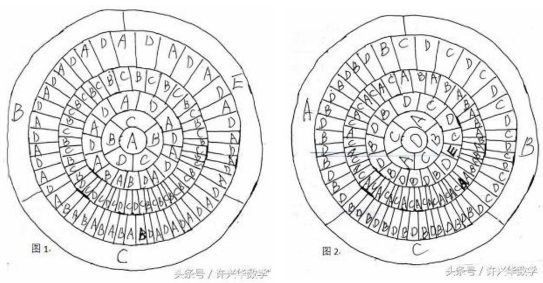
四色定理不易證明，但有許多學者卻會用五色定理來推翻四色定理。例如： 2002 年 TIMOTHY SIPKA 在 MATH HORIZONS 發表了一篇推翻四色定理的文章。他是從外向內填色，需要五色才能完成，如右邊二個圖：



（資料來源：見參考資料二）

又如 2017 年廣西大學機械工程系退休教授余熙瑩用更複雜的圖形發表了另一篇文章。他由外向內填色，也由內向外填色，都用五色才完成。如下圖：

（資料來源：見參考資料三）



貳、 研究設備及器材

圖畫紙、鉛筆、色筆、尺、三角板、筆記本、電腦、3D 小畫家軟體

參、 研究流程或方法

一、研究流程

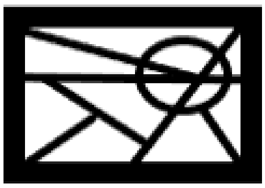
(一)構想

因為各式各樣的圖形複雜多樣，所以我們先簡化圖形，分為上下層、放射狀、中間有色塊的放射狀及同心圓四類基本圖形來看，再合併基本圖形，找出填色規則，然後分析出複雜的圖形包含哪些基本圖形之後，再來處理各式各樣的圖形變化。最後將處理方法真正應用到地圖及複雜的纏繞畫。

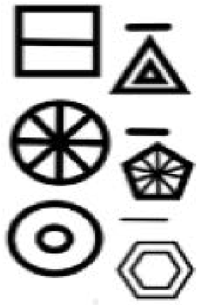
(二)討論出研究流程如下：

形成問題

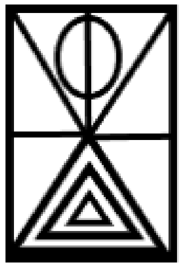
文獻探討



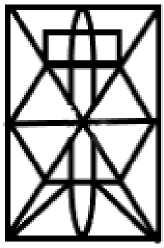
自己畫畫看



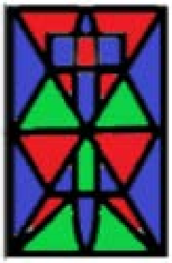
分解圖案



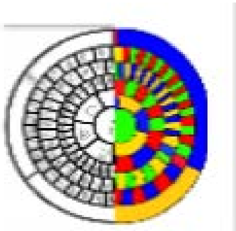
合併基本圖形



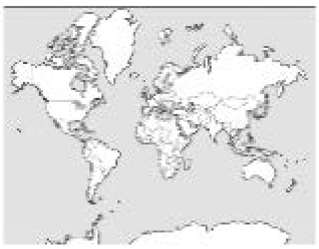
創造不規則圖形



合於四色



破解五色迷思



應用到複雜的圖形

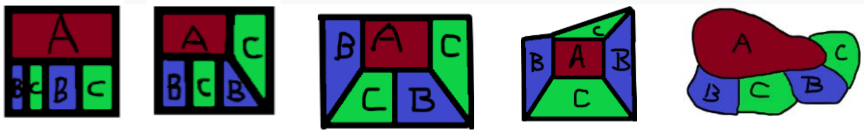
二、研究方法

(一)探討著色問題所需的基本圖形

我們找出的基本圖形分為上下層、放射狀、中間有色塊的放射狀及同心圓四類。

1. 上下層

上下層圖形不會都是規則的長方形色塊，因此可將此類型圖型延伸出去，如下：



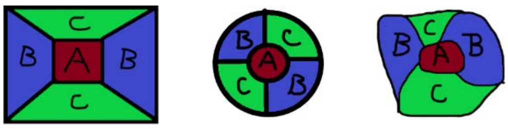
以上這幾種圖形，皆是以 A 為上層，B 、C 為下層的一對四上下層圖形，即使邊是不規則弧線，也看成上下層圖形。

2.放射狀

如果所有圖形都由中間的點出發，就會變成放射狀圖形，如下：

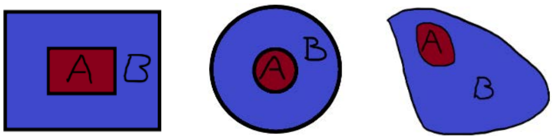
3. 中間有色塊的放射狀

上面的圖形，如果 B 、C 將中間 A 包圍，則成為中間有色塊的放射狀圖形，如下：



4.同心圓

如果是以一層為中心，往外加層，就是同心圓圖形，如下：

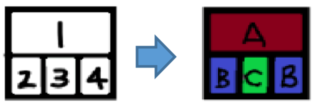


小結：一般看到的圖形，大都是不則規圖形居多，我們歸納出大部份的圖形是由這四種基本圖形組合成（幾何同構)，接下來要探討這四種基本圖形的著色方法。

(二)尋找簡單基本圖形著色的方法：

方法 1：

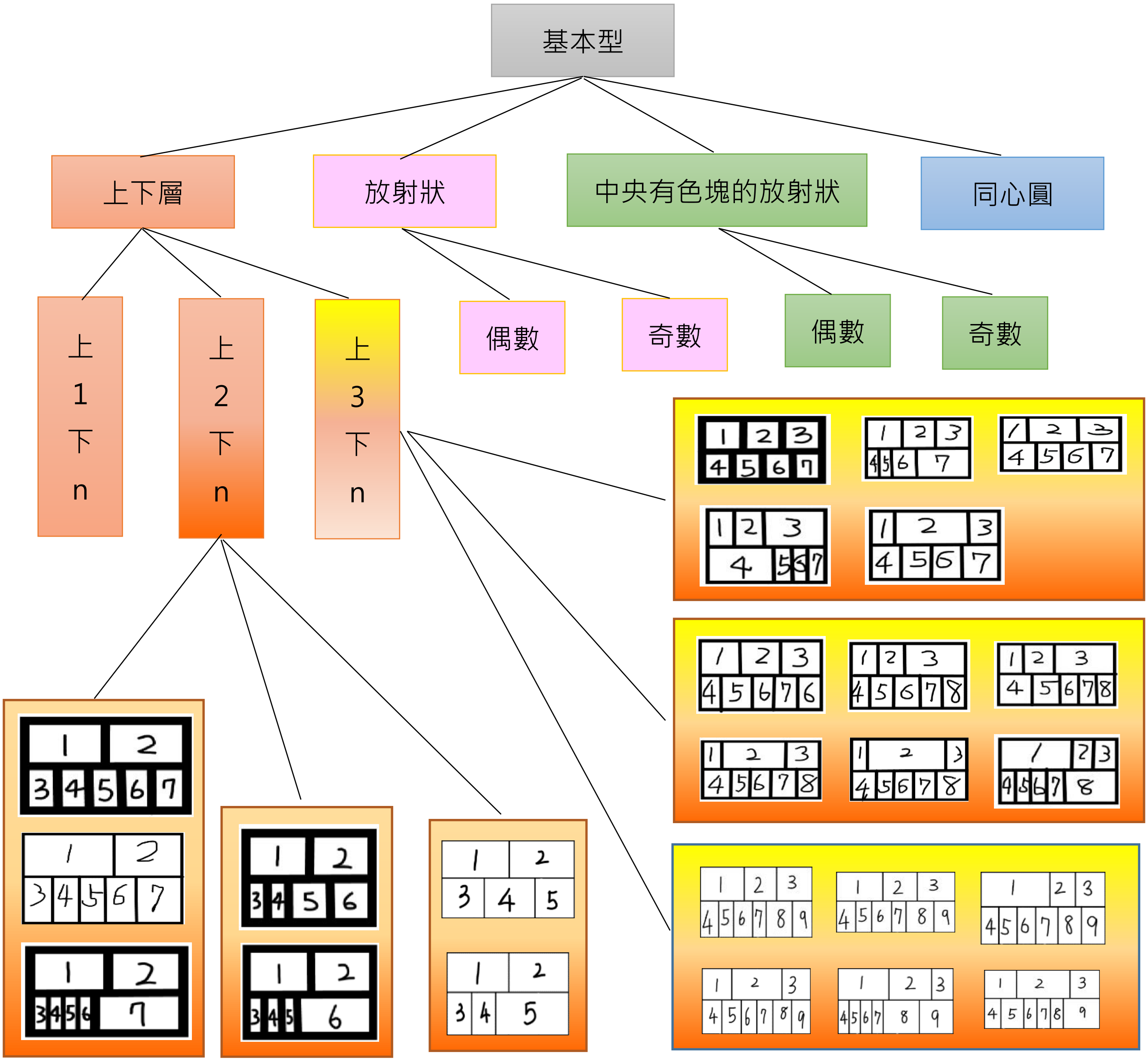
我們先將圖形中的色塊編號，在以相鄰不同色為原則，一個色塊一個色塊探討，之後上色，找出規則。例如，上下層一對三基本型：



1 與 2、3、4 相鄰要不同色，2 與 1、3 相鄰要不同色 ，但與 4 不相鄰可同色， 3 與 1、2、4 相鄰要不同色。 因此，上下層一對三基本型可用三色填滿。

方法 2：

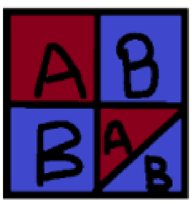
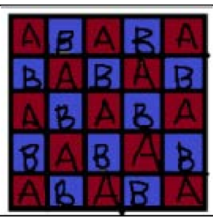
從上下層、放射狀、中間有色塊的放射狀及同心圓四種基本圖形建構出心智圖。



基本圖形規則探究：

1. 上下層

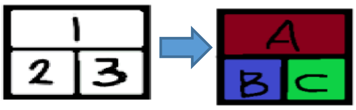
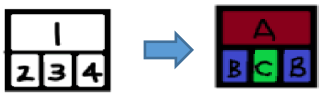
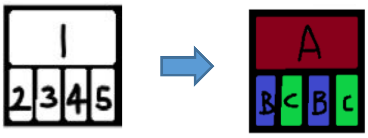
(1)每邊只與一邊相鄰（m＝1，n＝1）

		每邊只與一邊相鄰， 只要兩色即可。

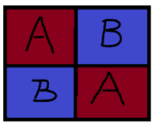
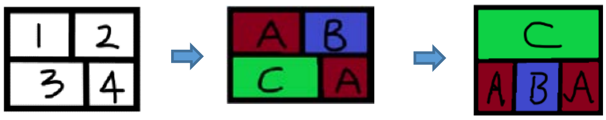
(2)每邊不只與一邊相鄰（上層為m≧1，下層為 n>1）

(以單獨一個上層色塊而言，會用一對 s 表示，s 指與下層相鄰的色塊）

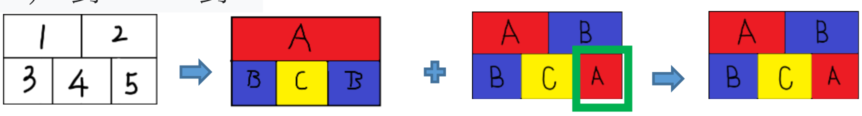
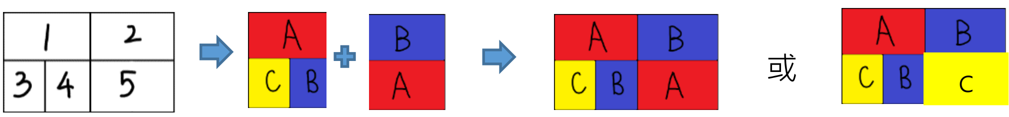
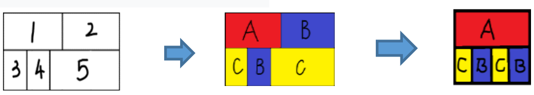
ⅰ. 上層一個（m＝1）

(ⅰ)（m＝1，n＝2） 	(ⅱ)（m＝1，n＝3） 
(ⅲ)（m＝1，n＝4） 	由(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)可知（m＝1）時， 下層只要間隔一個不相鄰就可同色。 因此推論：<u>上下層中，一對 n 時，使用 3 色即可</u>

ⅱ 上層二個下層二個（m＝2，n＝2）

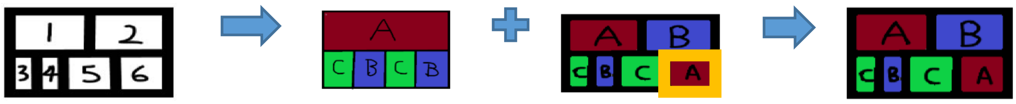
(ⅰ)一對一，一對一  即（m＝1，n＝1）共二色即可	(ⅱ)一對一，一對二  可看成（m＝1，n＝3），共三色

ⅲ. 上層二個下層三個（m＝2，n＝3）

(ⅰ)一對二，一對二  可看成（m＝1，n＝3）的圖形，而單獨的 5 與 1 區隔同色，共三色。
(ⅱ)一對二，一對一  這種上下層隔線對齊的圖形，可看做一個（m＝1，n＝2）及 一個（m＝1，n＝1）的圖形，只要相鄰的 1 與 2 不同色，3 色就能完成。 因為上下層隔線對齊的圖形，可分為更簡單的基本形，以後就不再討論了。
(ⅲ)一對三，一對一  可看成一個（m＝1，n＝4）的圖形，共三色。

iv. 上層二個下層四個（m＝2，n＝4）

(ⅰ)一對三，一對二



可看成（m＝1，n＝4）的圖形，而單獨的 6 與 1 區隔可同色，共三色。

(ⅱ)一對四，一對一

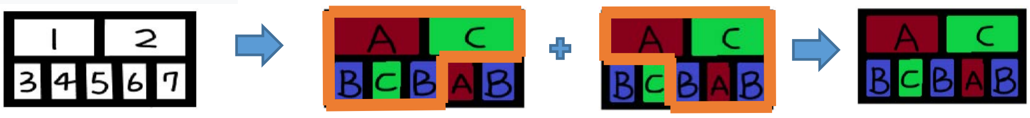
可看成一個（m＝1，n＝5）的圖形，共三色。

小結：由iii.之(iii) iv.之(ⅱ)可以看出，（m＝2），前面是一對 s，後面是一對一時，可當成為一個（$m=1$，$n_{s+1}=n_s+1$）的圖形，共 3 色。

（其中 n_s 為原來下層的色塊數量，n_{s+1} 為後來看做下層的色塊數量）

v. 上層二個 下層五個（m＝2，n＝5）

(ⅰ)一對三，一對三

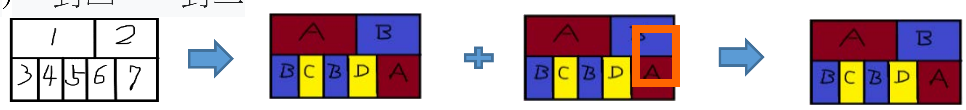


將 1、2、3、4、5 看成一個（m＝1，n＝4）的圖形，共 3 色。

將 1、2、5、6、7 看成一個（m＝1，n＝4）的圖形，

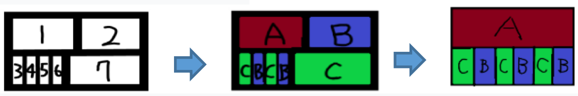
1、2 與 5 顏色已固定，6 與 1 相隔可同色，7 與 5 相隔可同色，共 3 色。

(ⅱ)一對四，一對二



可看成（m＝1，n＝5）的圖形，而單獨的 7 與 1 區隔可同色，共三色。

(iii)一對五，一對一



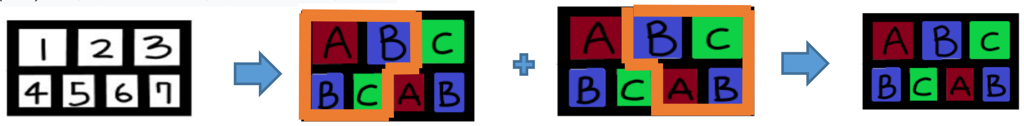
可看成為一個（m＝1，n＝6）的圖形，共三色。

以此證明iii.與iv.的小結成立。

小結：由iii.之(ⅰ)、iv.之(ⅰ)、v.之(ⅱ)可知，（m＝2），前面一對 s，後面一對二的圖形，可看成（$m=1$，$n_{s+1}=n_s+1$）的圖形，單獨的下層最後一色塊，與 1 相隔可同色，共 3 色。

vi. 上層三個下層四個（m＝3，n＝4）

(ⅰ)一對二，一對二，一對二



將 1、2、4、5 看成一個（m＝１，n＝3）的圖形，共 3 色。

將 2、3、6、7 看成一個（m＝１，n＝3）的圖形，此時 2、5 顏色已固定，

6 與 1 相隔可同色，7 與 2 相隔可同色，共 3 色可完成。

(ⅱ)一對三，一對二，一對一

將 1、2、4、5、6 看成一個（m＝１，n＝４）的圖形，共 3 色。

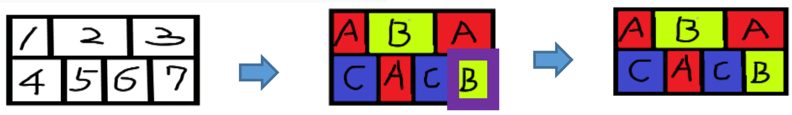
將 2、3、6、7 看成一個（m＝１，n＝3）的圖形，

此時 2、6 顏色已固定，7 需另用一色，共 4 色。

但如果將 7 換成與 1 同色，3 換成與 6 同色，其實這個圖形可用 3 色來完成。

所以當 4 色出現時，我們可考慮是否可將第 4 色換成相的顏色，再調整一下，相鄰的顏色，可能可儘量用 3 色來完成。

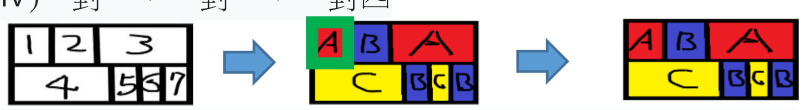
(ⅲ)一對一，一對三，一對二



將 1、2、3、4、5、6 看成一個（m＝1，n＝5）的圖形，

而單獨的 7 與 2 相隔可同色，因此共 3 色。

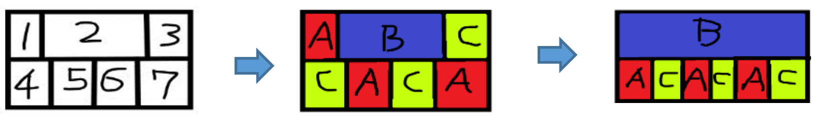
(ⅳ)一對一，一對一，一對四



將 2、3、4、5、6、7 看成一個（m＝1，n＝5）的圖形，

而單獨的 1 與 3 相隔可同色，因此共 3 色。

(ⅴ)一對一，一對四，一對一



我們可將此圖看成一個（m＝1，n＝6）的圖形，共 3 色。

小結：複雜的（m＝3，n＝4），也使用 3 色即可。

上下層色塊漸多後，可找一較大或相鄰較多的色塊當做主要色塊，

並拆開成幾個一對 s 的圖形來分析。

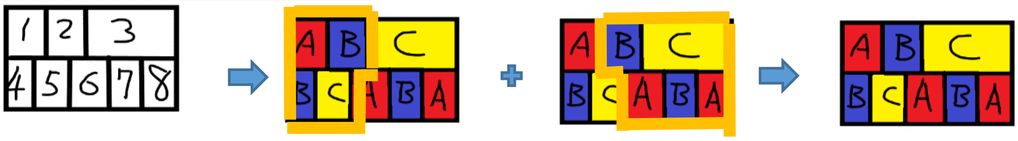
vii. 上層三個下層五個（m＝3，n＝5）

(ⅰ)一對二，一對三，一對二

將 1、2、3、5、6、7 看成一個（m＝1，n＝5）的圖形，

單獨的 4、8 與 2 不相鄰可同色，共 3 色。

(ⅱ)一對二，一對二，一對三



將 1、2、4、5 看成一個（m＝1，n＝3）的圖形，共 3 色。

將 2、3、6、7 看成一個（m＝1，n＝3）的圖形，2、6 顏色已固定，共 3 色。

(ⅲ)一對一，一對二，一對四

將 2、3、5、6、7、8 看成一個（m＝1，n＝5）的圖形，

因為 2、5 顏色已固定，因此 1、4 只能有一色塊與 3 同色，故有 4 色。

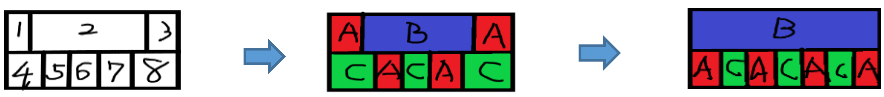
但如果將 4 換成與 3 同色，3 換成與 6 同色，其實這個圖形可用 3 色來完成。

(ⅳ)一對一，一對四，一對二

將 1、2、3、4、5、6、7 看成一個（m＝1，n＝6）的圖形，

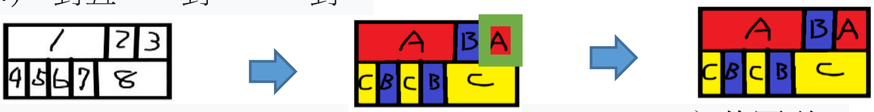
單獨的 8 與 2 相隔可同色， 共 3 色。

(ⅴ)一對一，一對五，一對一



可看成一個（m＝1，n＝7）的圖形，共 3 色。

(vi)一對五，一對一，一對一



將 1、2、4、5、6、7、8，看成一個（m＝1，n＝6）的圖形，

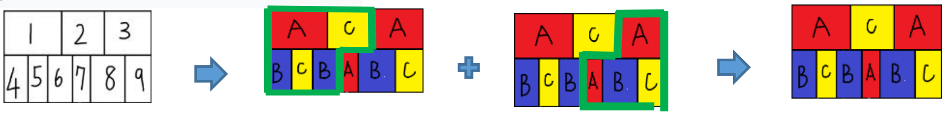
單獨的 3 與 1 相隔可同色，共 3 色。

小結：與（m＝3，n＝4）相同，（m＝3，n＝5），也使用 3 色即可。

上下層色塊漸多後，可找一主要色塊，並拆開成幾個一對 s 的圖形來分析。

viii. 上層三個下層六個（m＝3，n＝6）

(i)一對三，一對二，一對三

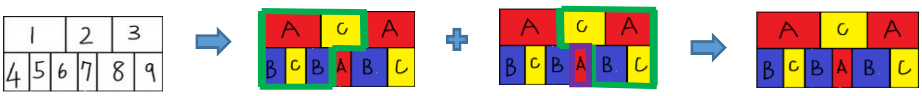


將 1、2、4、5、6 看成一個（m＝1，n＝4）的圖形，

再將 3、7、8、9 看成一個（m＝1，n＝3）的圖形，

2、6 顏色已固定，3、7 與 1 相隔可同色，共 3 色。

(ii)一對三，一對三，一對二

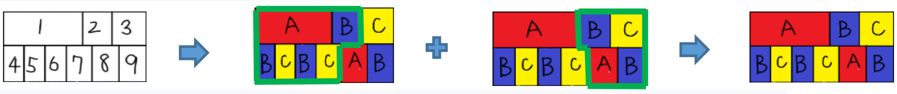


將 1、2、4、5、6 看成一個（m＝1，n＝4）的圖形，

將 2、3、8、9，一個（m＝1，n＝3）的圖形，2、6 顏色已固定，

單獨的 7 可與 1、3 同色，共 3 色。

(iii)一對四，一對二，一對二

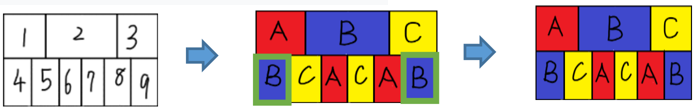


將 1、2、4、5、6、7 看成一個（m＝1，n＝5）的圖形，

將 2、3、8、9，一個（m＝1，n＝3）的圖形，

2、7 顏色已固定，3 與 7 相隔可同色，8 與 1 相隔可同色，共 3 色。

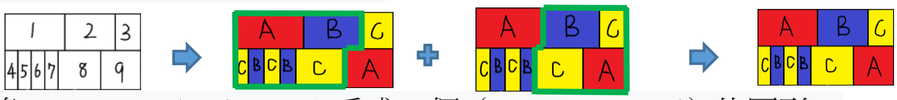
(iv)一對二，一對四，一對二



將 1、2、3、5、6、7、8 看成一個（m＝1，n＝6）的圖形，

單獨的 4、9 與 2 相隔可同色，共 3 色。

(v)一對五，一對二，一對一

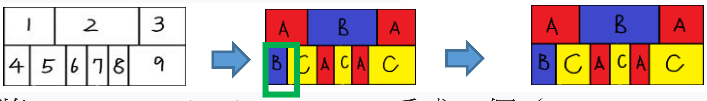


將 1、2、4、5、6、7、8 看成一個（m＝1， n＝6）的圖形，

將 2、3、8、9 看成一個（m＝1， n＝3）的圖形，

2、8 顏色已固定，9 與 1 相隔可同色，共 3 色。

(vi)一對二，一對五，一對一



將 1、2、3、5、6、7、8、9 看成一個（m＝1， n＝7）的圖形，

單獨的 4 與 2 相隔可同色，共 3 色。

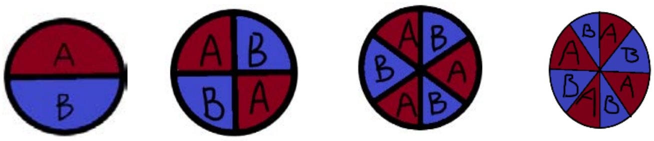
小結：與（m＝3， n＝4）、（m＝3， n＝5）相同，也使用 3 色即可。

上下多層時，以大色塊為上層，拆成幾個一對 s 的圖形，共 3 色可完成。

2. 放射圖形

(1)偶數色塊

例如：



放射圖形每邊只與一色相鄰，所以只要是偶數色塊，首尾相接，共 2 色即可。

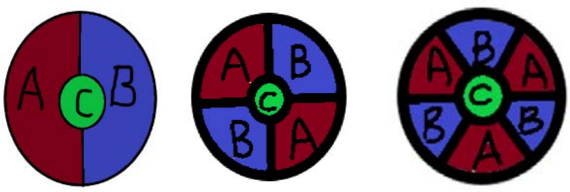
(2)奇數色塊

例如：

奇數色塊每隔一色塊顏色相同，最後會剩一色塊與二個不同顏色的色塊相鄰，故是 3 色。

3. 中間有色塊的放射圖形

(1) 中心有圖形，外層偶數色塊

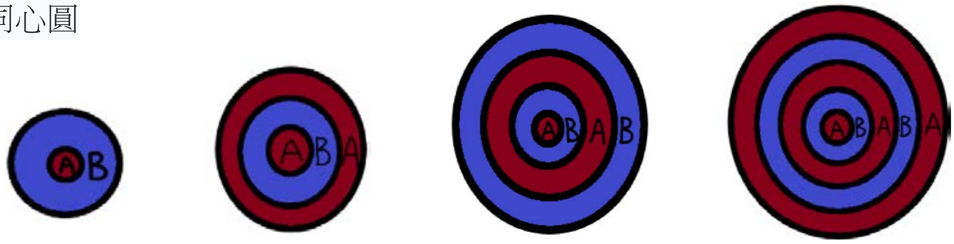


因為中央的色塊會與每一邊相鄰，所以要不同色 ，共 3 色。

(2) 中心有圖形，外層奇數色塊

因為中央的色塊會與每一邊相鄰，所以要不同色，共 4 色。

4. 同心圓



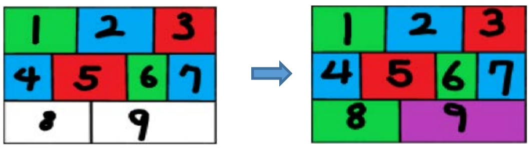
因為每邊只與一色相鄰，所以無論幾層，共 2 色即可。

小結 ：探討完四種基本圖形的著色方法之後，再研究合併兩種基本圖形的情形，以便推衍出圖形逐漸複雜後，要進行的著色略策。

(三)合併兩個基本圖，探究重疊區域的塗色方法及限制

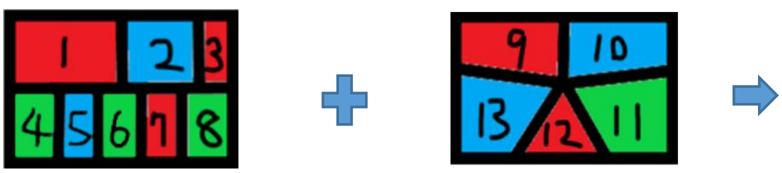
1. 三層圖形

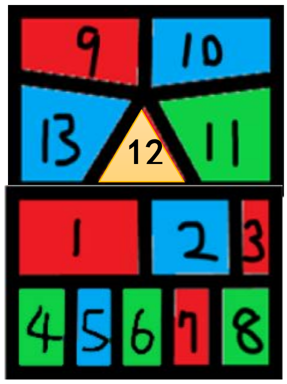
例如：



先把上面兩層當成上下層圖形，共 3 色。此時，中間的 4、5、6、7 色塊已固定，則 8 只能與 6 同色，而 9 需用另一色，共 4 色才能完成。

2. 上下層+放射狀

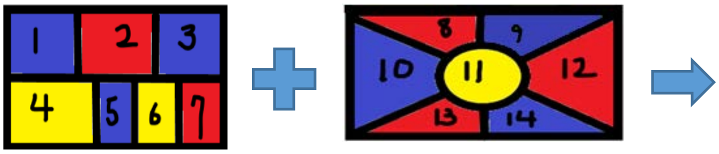


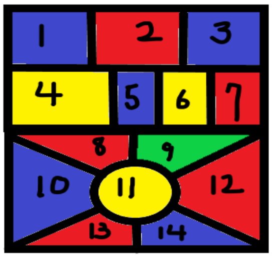


上下層、放射狀圖形都只需 3 色，

先安排上下層，則 1、2、3 色塊已固定，12 只能用另一色，共 4 色。

3. 上下層+中央有色塊的放射狀

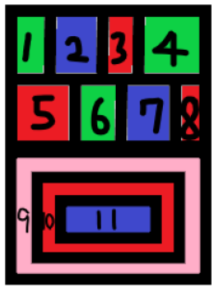




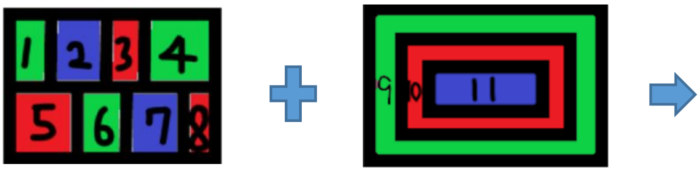
上下層、中央有色塊的放射狀圖形都只需 3 色，

先安排上兩層， 則 4、5、6、7 色塊已固定，8 只能與 7 同色，而 9 與 3 色相鄰，

需用另一色，共用 4 色才能完成。



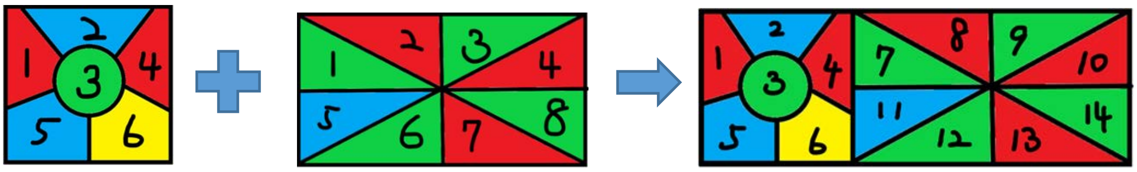
4. 上下層+同心圓



上下層、同心圓圖形都只需 3 色，先安排好上下層，則 5、6、7、8 色塊已固定，

9 不能與 6 同色，所以 9 需用另一色，共 4 色。

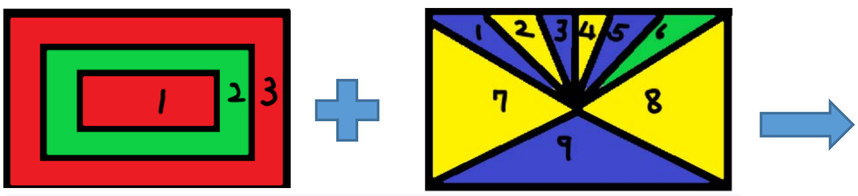
5. 放射狀+中央有色塊的放射狀

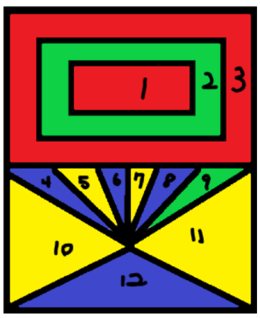


中央有色塊的放射狀需 4 色，放射狀只需 3 色，

中央有色塊的放射狀先安排好後，再安排放射狀，共用四色即。

6. 放射狀+同心圓

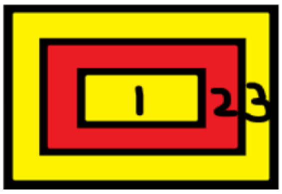


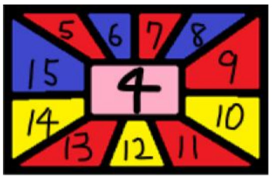


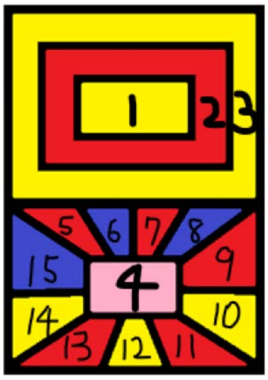
同心圓需 2 色，放射狀需 3 色，同心圓先安排好後，

再安排放射狀，共 4 色。

7. 中央有色塊的放射狀+同心圓







同心圓需 2 色，中央有色塊的放射狀需 4 色，

同心圓先安排好後，再安排放射狀，共 4 色。

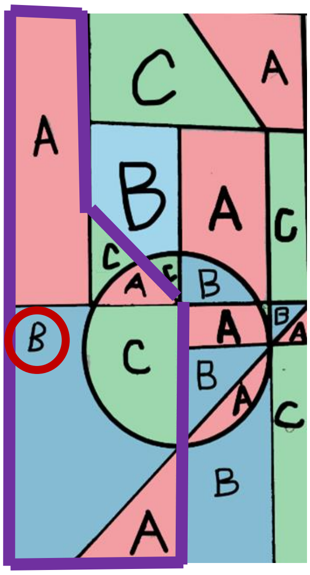
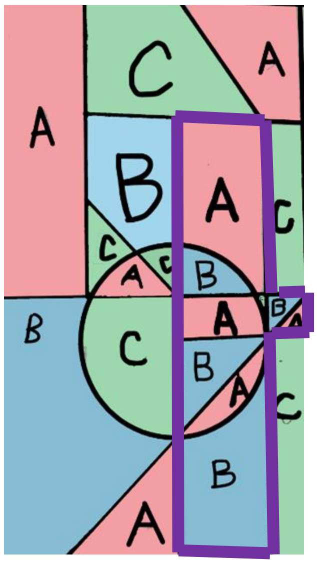
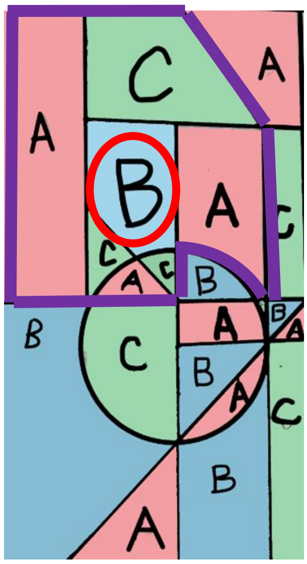
小結：幾個基本圖形合併時，各區域交界的部分，受限於先處理的交界色塊已固定，

有時需要再加一個顏色，共 4 色才能完成。

有了上述基本圖形及合併圖形的方法，接下來就可以在複雜圖形上試試看了。

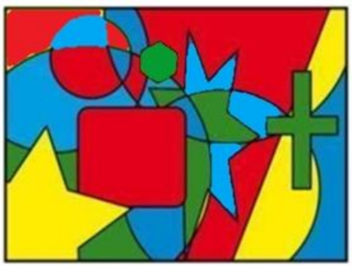
（四）將找到的基本圖及合併的方法應用到複雜不規則的圖形。

1. 我們先將前面研究出來的填色規則，應用在我們自行設計的一個圖案上。分析如下表：

		
紫框區域為以 B 為上層 (m=1，n=5)的圖形，共 3 色。	紫框區域為棋盤狀的圖形，共 2 色。	紫框範圍內，中間的 B 為主，是中央有色塊的放射狀圖形，共 3 色。

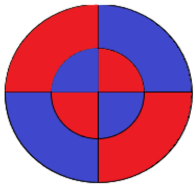
我們的方法用到自行設計圖案上可行，應用到他人的圖案上是否也行得通呢？

2. 我們把網路上的圖案拿來做分析，將它分成不同的區域，並將斜線與曲線簡化成直線，使不規則的圖形規則化，圖形就變簡單了。（圖案來源：見參考資料一）



這個圖型可分為五個部份去分析，共 4 色可填滿，如下：

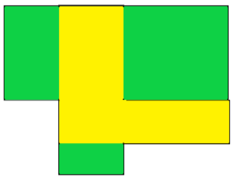
(1)左上角區域

	
左上角區域的圖形其實 2 色就夠了。	

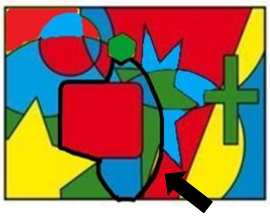
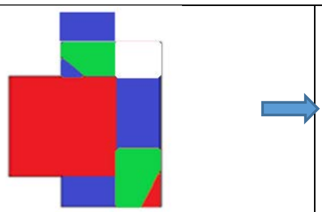
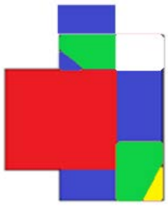
(2)中間區域

	
即使考慮周圍的色塊，中間區域的圖形其實 3 色就夠了。	

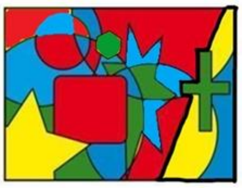
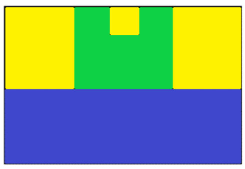
(3)左下區域

	
考慮周圍的色塊，左下區域的圖形黃色部份不能使用紅、藍、綠 3 色。	

(4)左下區域

		
因為右下角有一塊紅色，因此將相鄰的紅改為黃，左下區域共 4 色。		

(5)右邊區域

	
考慮周圍的色塊，右邊區域的圖形兩塊黃色不能使用紅色。	

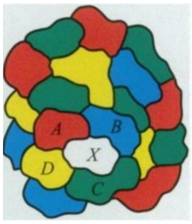
小結：目前為止，我們已經有能力將圖案解構成簡單圖形，並用四色完成著色。可是有些學者卻提出五色才能完成的圖案，所以我們想以我們的方法將它們破解看看。

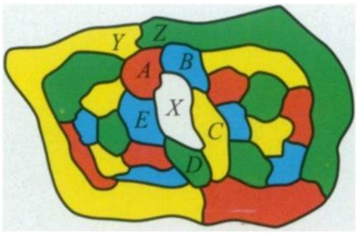
（五）探討網路上只能用 5 色完成的圖案，並試著用四色來完成它

我們在網路上有看到兩個號稱找到四色定理不成立的例子，需要五色才能完成的圖形，可是經我們研究還是可以用四種顏色完成。

1. 例一

2002 年 TIMOTHY SIPKA 在 MATH HORIZONS 發表了一篇推翻四色定理的文章。他是以類似我們的中央有色塊的放射狀圖形外面再包多層色塊，從外層開始向內層填色，而出現要五色才能完成的情形，如下二個例子（資料來源：參考資料二）：

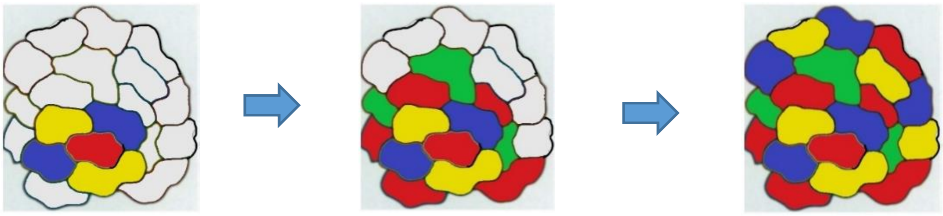




我們的破解方法：

因為Ｘ相鄰色塊最多，所以我們與作者相反，從Ｘ的位置，由內向外以相鄰不同色，相隔一個可同色為原則填色。

(1)第一個圖形：



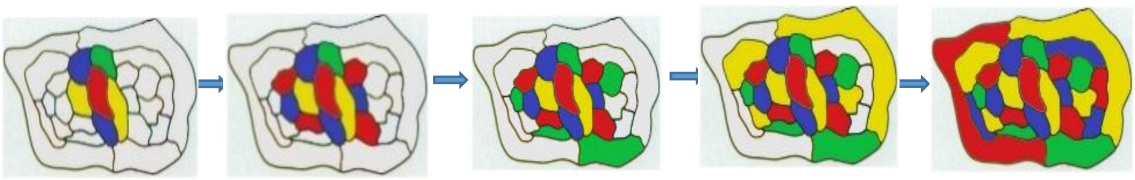
(2)第二個圖形：

方法如破解說明，從Ｘ的位置向外填色，不同之處如下：

ⅰ.剩下兩層時，先填最外層的顏色，再填內一層，並且要注意倒數第二層只能用三色，才不會與最外層同色。

ⅱ.最後以四色就能完成。

步驟：



小結：(1) 中央有色塊的放射狀圖形，外面再包多層色塊，要從中央開始填色。

(2)如果最外層大面積與多色塊相鄰，最後要先填大面積最外層，再填內一層。

2. 例二

是廣西大學機械工程系教授余熙瑩所發表四色定理不成立的三個類似的同心圓混合中央有色塊的放射狀圖形，因為每層使用的色塊多是奇數，使得這些圖形的難度比 TIMOTHY SIPKA 的例一更高：（資料來源：見參考資料三）

(1)第一個圖形：

共有 6 個環 114 個色塊，第 1 環 1 色塊，第 2 環 5 色塊，第 3 環 15 色塊，第 4 環 45 色塊，第 5 環 45 色塊，第 6 環 3 色塊。由於每層都是奇數色塊，因此，第三、四、五層要考慮兩種避開相鄰色的排法，第六層卻只分成 3 個大範圍色塊，因此第六層與許多色塊相鄰，是一個有 114 色塊的複雜圖形。其說法如下：

ⅰ.如果從內往外填色：

中心顏色先固定為Ａ。

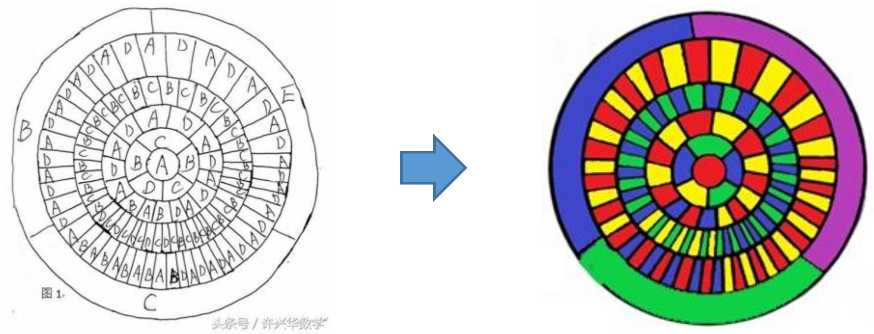
第二層就要用Ｂ、Ｃ兩色輪流，又因為有奇數色塊，最後會出現一塊Ｄ色。

第三層要用Ａ、Ｄ兩色輪流，與第二層Ｄ色相鄰處要用Ｂ色取代Ｄ色。

第四層要用Ｂ、Ｃ兩色輪流，與第三層Ｂ色相鄰處要用Ｄ色取代Ｂ色。

第五層要用Ａ、Ｄ兩色輪流，與第四層Ｄ色相鄰處要用Ｂ色取代Ｄ色。

第六層分成 3 個大範圍色塊，避開Ａ、Ｄ兩色的用 B，避開Ｂ、Ｃ兩色的用 C，另外與第五層Ａ、Ｄ相鄰，又與第六層Ｂ、Ｃ相鄰的，只能用第五色Ｅ。



ⅱ.如果從外往內填色：

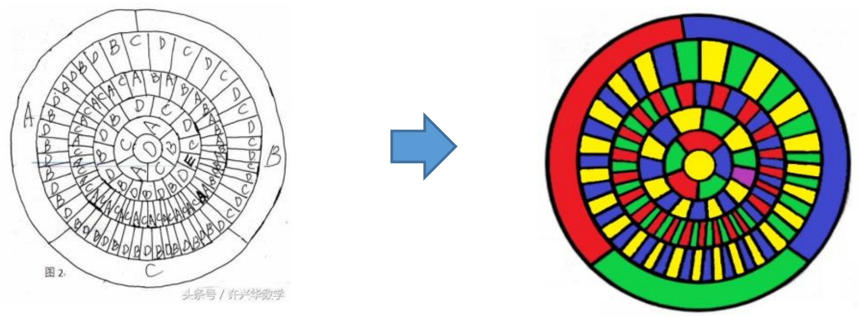
第六層顏色先固定為Ａ、Ｂ、Ｃ。

第五層與Ａ、Ｃ相鄰用Ｂ、Ｄ兩色輪流，與Ａ、Ｂ相鄰用Ｃ、Ｄ兩色輪流。

第四層與Ｂ、Ｄ相鄰用Ａ、Ｃ兩色輪流，與Ｃ、Ｄ相鄰用Ａ、Ｂ兩色輪流。

第三層與Ａ、Ｃ相鄰用Ｂ、Ｄ兩色輪流，與Ａ、Ｂ相鄰用Ｃ、Ｄ兩色輪流，

但因為是奇數色塊，最後一色塊會與Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄ相鄰，會用到第五色Ｅ，使四色定理不成立。



ⅲ.我們的破解方法：

說明：因為ⅰ.第五色在最外層相鄰的色塊很多，如果將Ｅ換成Ａ或Ｄ色，

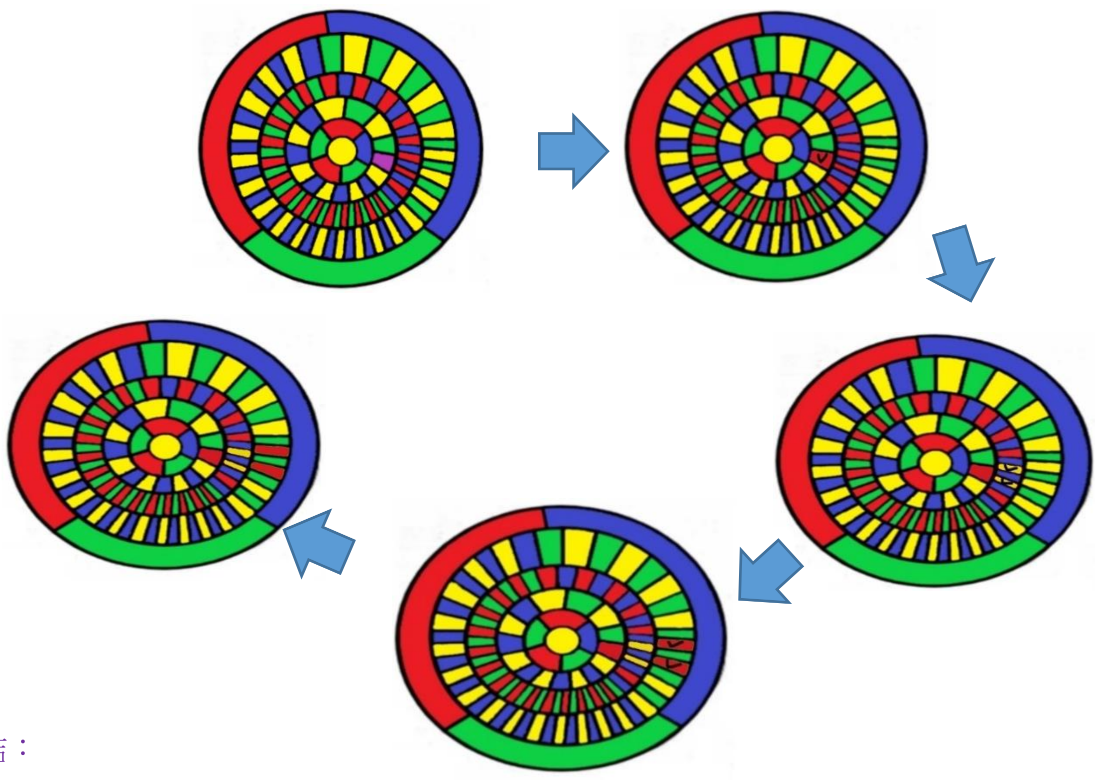
要更改許多色塊，因此我們選擇ⅱ.的圖形來換色。

步驟：

(ⅰ)換掉第三層的第五色，再由內而外逐層將與之相鄰的顏色換掉。

(ⅱ)最後將第五層這兩個黃色換成紅色，就可以用四色完成了。

(註：以下圖示過程以打勾表示換色。)



小結：

(1) 將第五色換掉。

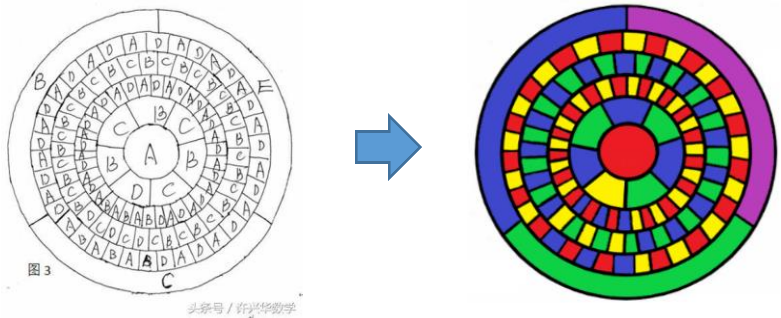
(2) 檢查下一層，將相鄰同色的換掉，由內層換到外層。

(3) 由外層換到內層直到同色都不相鄰，且能用四色完成為止。

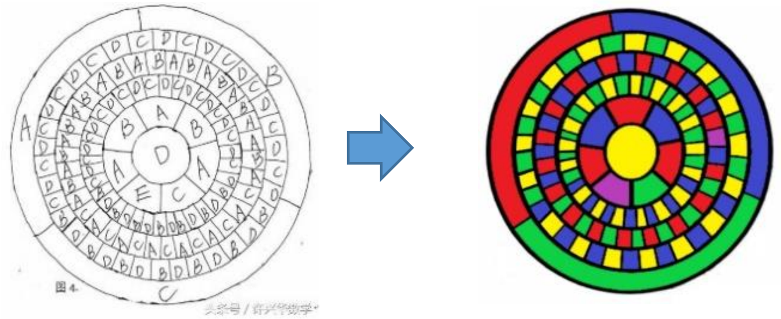
(2)第二個圖形：

有 6 環 116 色塊。第 1 環 1 色塊，第 2 環 7 個色塊，第 3 環 35 色塊，第 4 環 35 色塊，第 5 環 35 色塊，第 6 環 3 色塊。每個色塊至少與 5 色塊相鄰。

ｉ.如果從內往外填色(方法與第一個圖形ｉ類似)，在第六層出現第五色Ｅ。



ｉｉ.如果從外往內填色(方法與第一個圖形ｉｉ類似)，在第二層及第四層奇數最後一個色塊，同層相鄰兩色，外層又相鄰兩色時，出現第五色Ｅ。



iii.我們的破解方法

說明：雖然ｉｉ的第二、四層都有第五色，要微調兩次，但ｉ的第六層紫色相鄰的色塊很多，會更動很多，因此我們選 ｉｉ來微調色塊。

步驟:：

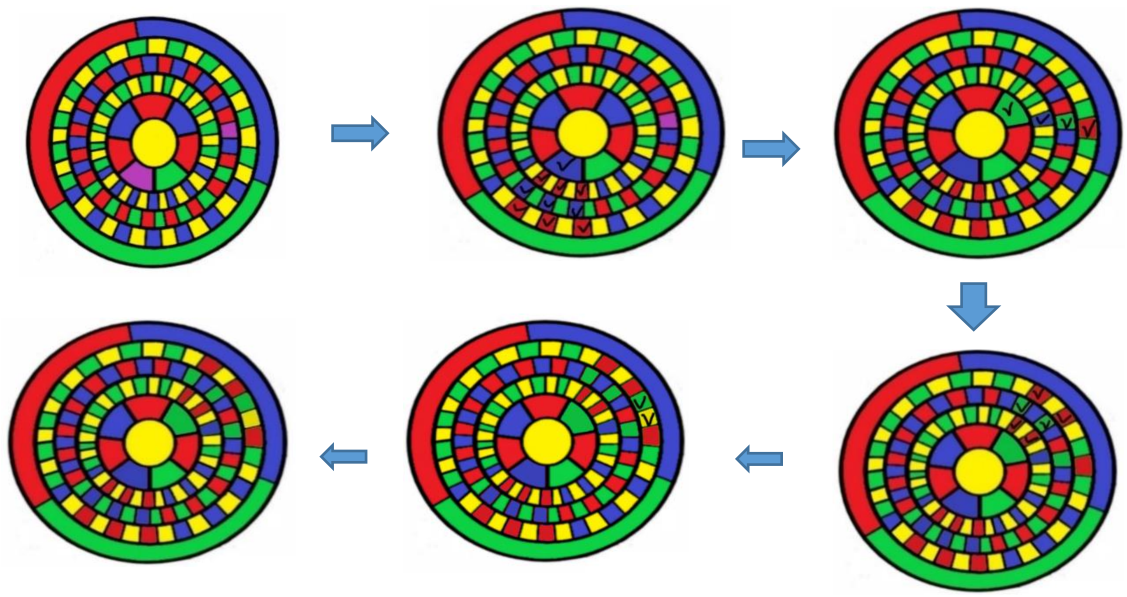
(ｉ)先將第二層紫色換藍色，再由內層到外層，將相鄰同色的換色。

(ｉｉ)再將第四層紫色換綠色，再換內外側相鄰同色的色塊。

(iii)再由內到外換色。

(iv)再將第五層與第四層相鄰的綠換黃，同層相鄰換綠色，完成後共四色。

步驟圖例：

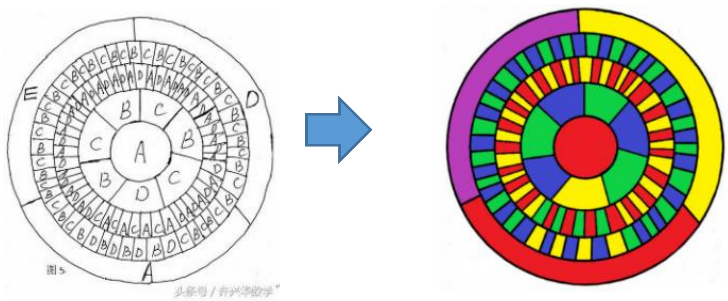


小結：雖然有二個第五色塊，來回換色多次，但仍能以第一圖形ⅲ的破解方法，用四色完成。

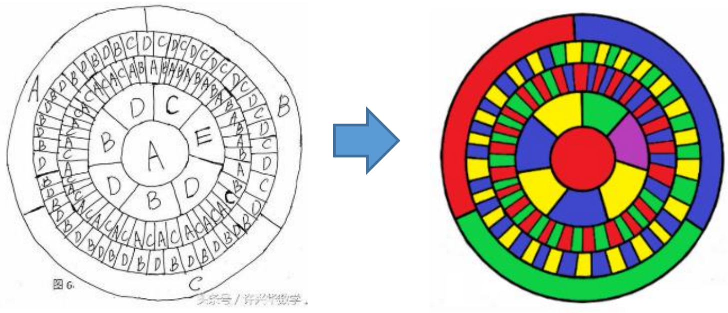
(3)第三個圖形：

分成 5 圈，第 1 圈 1 個區域，第 2 圈 7 個區域，第 3 圈 49 個區域，第 4 圈 49 個區域，第 5 圈均分成 3 個區域，一共有 109 個區域。

ⅰ.如果從內往外填色(方法與第一圖形ⅰ類似)，在第五層出現第五色 E 。



ⅱ. 如果從外往內填色(方法與第一圖形ⅱ類似)，在第二層奇數最後一個色塊，同層相鄰兩色，外層又相鄰兩色時，出現第五色 E 。



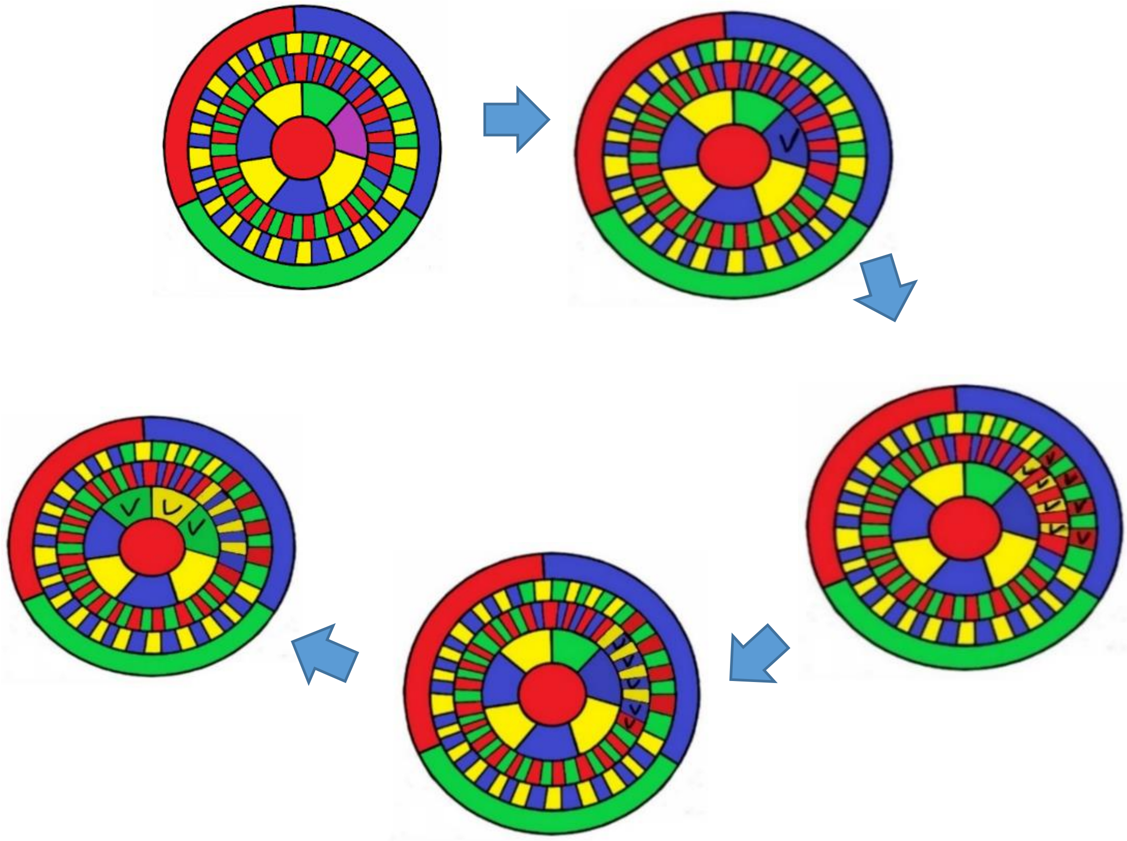
ⅲ.我們的破解法：

說明(ⅰ)：因為ⅰ.第五色在最外層相鄰的色塊很多，如果將E換成A或D色，

要更改許多色塊，因此我們選擇ⅱ.的圖形來換色。

說明(ⅱ)：原本用與第一圖形及第二圖形相同的解法卻繞不出來，因為當往內換色

換掉中央紅色時，就會往外牽連所有色塊，因此無法用四色完成。



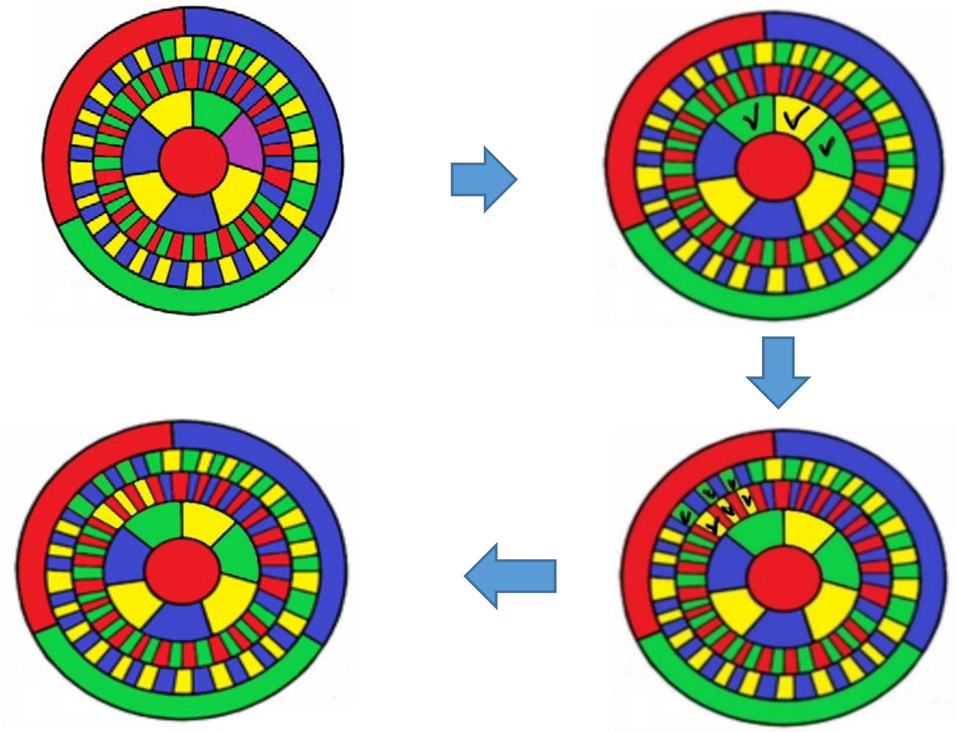
對策：如果將第二層上方黃、綠、藍換成綠、黃、綠，如此又要從新由內換到

外。因此，**一開始就換第二層這三色塊，以減少來回換色的次數。**

步驟：

(ⅰ)先將第二層紫色換綠色，相鄰的綠換黃，黃換綠。

(ⅱ)再將與第二層綠色相鄰同色的，由內向外層換色，共四色，如下圖：



小結：

(1) 由外層大面積開始向內填色，會出現小面積的第五色，只要將第五色換色，將相鄰同色的，由內而外再由外而內，來回換色就能用四色。

(2) 如果遇到由內而外再由外而內，愈換愈多色要換的情形，要考慮先調整同一層內顏色順序再換相鄰層同色的色塊。

以四色破解了五色才能填滿的圖案後，我們接下來想挑戰目前固定不會變動的地圖或更複雜的纏繞畫。

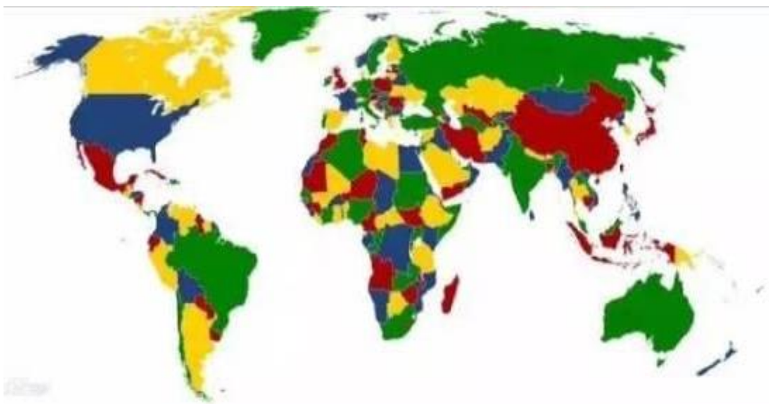
(六)探討我們找出的規則將它運用到實際的例子：

既然是因為地圖的需要而發展出的四色定理，我們還是要將發現的規則應用在地圖上。

1.世界地圖：

2017 年威科技發表於每日頭條數學史中跨越幾個世紀的四大難題，所畫的世界地圖，其實加上海洋的白色，共五色。

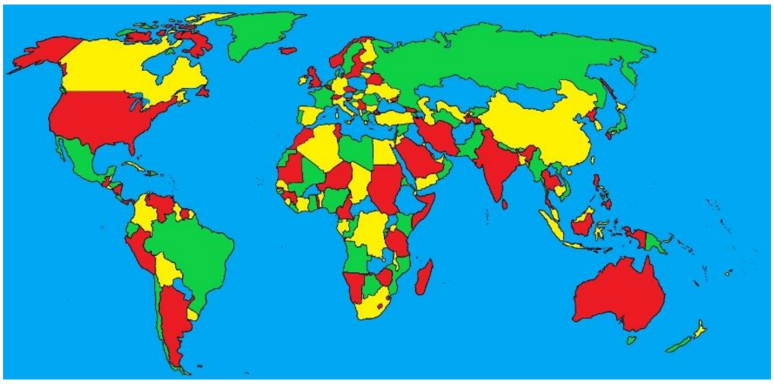
(資料來源：見參考資料四)



我們的解法：

說明：因為海 洋包圍了所有色塊，與海相鄰的只能用三色，所以我們先填海洋，再由外而內， 用我們的填色規則填色。

步驟：



(1) 先填海洋及內陸海。

(2)沿海兩色互換，遇到三塊相鄰，調整為三色。

(3) 四塊以上相鄰及中央有色塊放射狀圖形，用四色。

(4) 如遇到相鄰顏色已固定，則換色，最後以四色完成了世界地圖。如上圖：

2. 歐洲地圖（圖案來源：見參考資料五)

因為歐洲國家很多，國家的大小也差距極大，所以我們選定挑戰歐洲地圖。

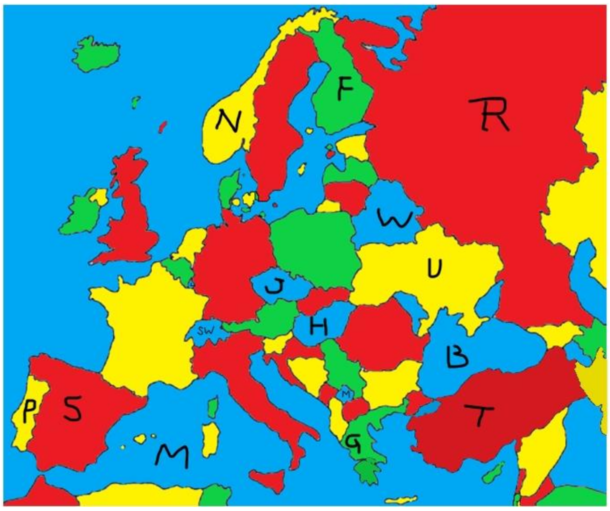
說明：我們以中央有色塊的放射狀圖形來分析多國相鄰的情形，搭配上下層及遇固定色塊換色，來完成填色。（為了方便解釋，我們以大寫字母為國家代號)

步驟：

(1) 先固定海洋及內陸海為藍色。

(2) 以最大色塊俄羅斯(R)為上層填紅色，下層芬蘭(F)、挪威(N)相鄰用綠、黃。

(3) 以白俄羅斯(W)為中央的放射狀圖形填藍色，紅、綠兩色逆時針繞白俄羅斯(W)，到烏克蘭(U)遇奇數換黃色。



(4) 以黑海(B)為中央的放射狀圖形，紅、黃繞黑海(B)。

(5) 以捷克(J)為中央的放射狀圖形填藍色，綠、紅繞捷克(J)。

(6) 以地中海(M) 為中央的放射狀圖形，從葡萄牙(P)、西班牙(S)以黃、紅繞地中海(M)。

(7) 原本是紅色希臘(G)，遇紅色土耳其(T)，希臘(G)換綠色。

(8) 匈牙利(H)、瑞士(SW)、盧森堡(L)、馬其頓(M)相鄰國家多，都需用到藍色。

(9) 整個歐洲地圖可以四色完成。

3. 台灣縣市地圖（圖案來源：見參考資料六)

我們身處台灣當然也要來畫畫看台灣地圖囉！

說明：南投縣未與海相鄰，所以我們設定它為中央色塊，用放射狀圖形探討。

步驟：

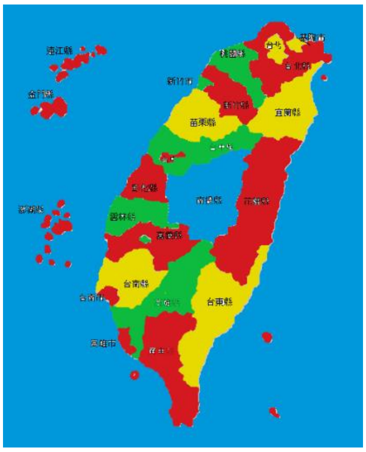
(1) 先固定海洋為藍色。

(2) 以南投為中央，與大海同為藍色。

(3) 再填南投周圍的縣市。

(4) 依上下層規則填其他縣市。

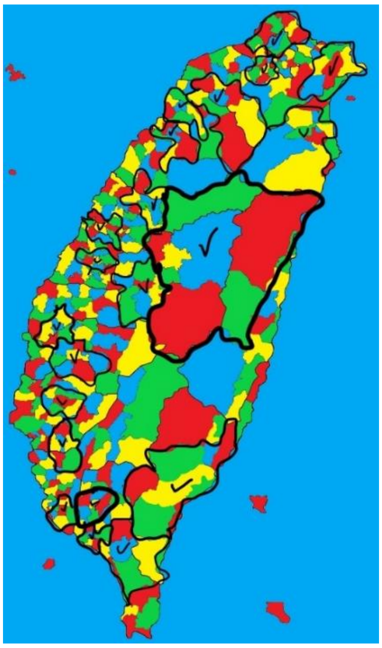
(5) 與三色相鄰則使用第四色，共四色可完成。

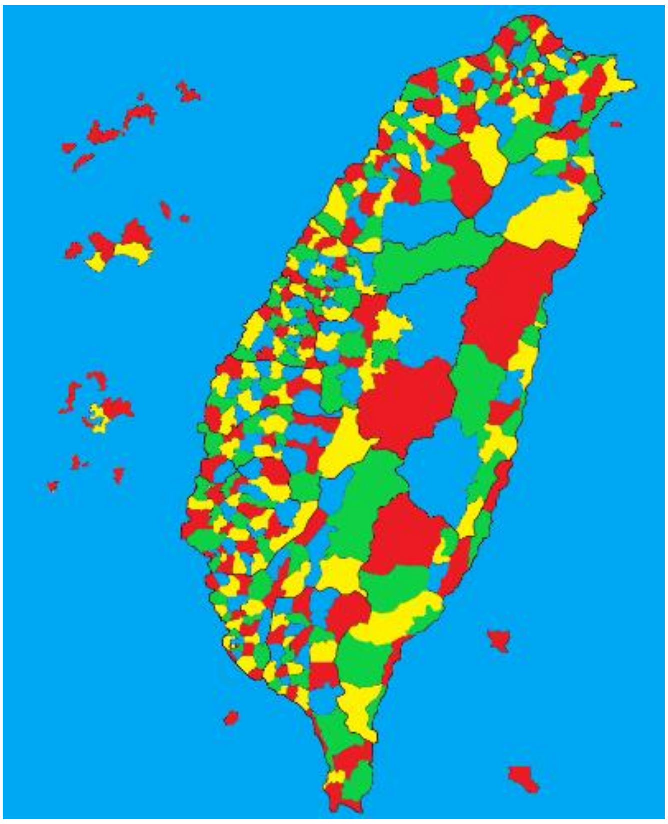


4. 台灣鄉鎮市地圖（圖案來源：見參考資料七)

說明：鄉鎮市地圖更加複雜，有許多細碎的圖形，可先想像是中央有色塊的放射狀圖形。

將中央色塊打勾，圍繞的色塊用黑色框出，如右圖所示。





步驟 ：

(1)以南投縣仁愛鄉為中央色塊，以放射狀圖形規則填色。

(2)由東北角往南以逆時針方向尋找中央有色塊的放射狀圖形填色。

(3)其他以上下層的概念來填色。

(4)零星的色塊單獨填色，共四色可完成，如左圖。

5. 最後挑戰複雜的纏繞畫（圖案來源：見參考資料八）

有了多次經驗後，我們想挑戰更複雜的圖形，於是在網路上找了一張纏繞畫來填色。

說明：

這張的難處在波浪狀圖形已固定為黑色。 所以要先避開黑色。

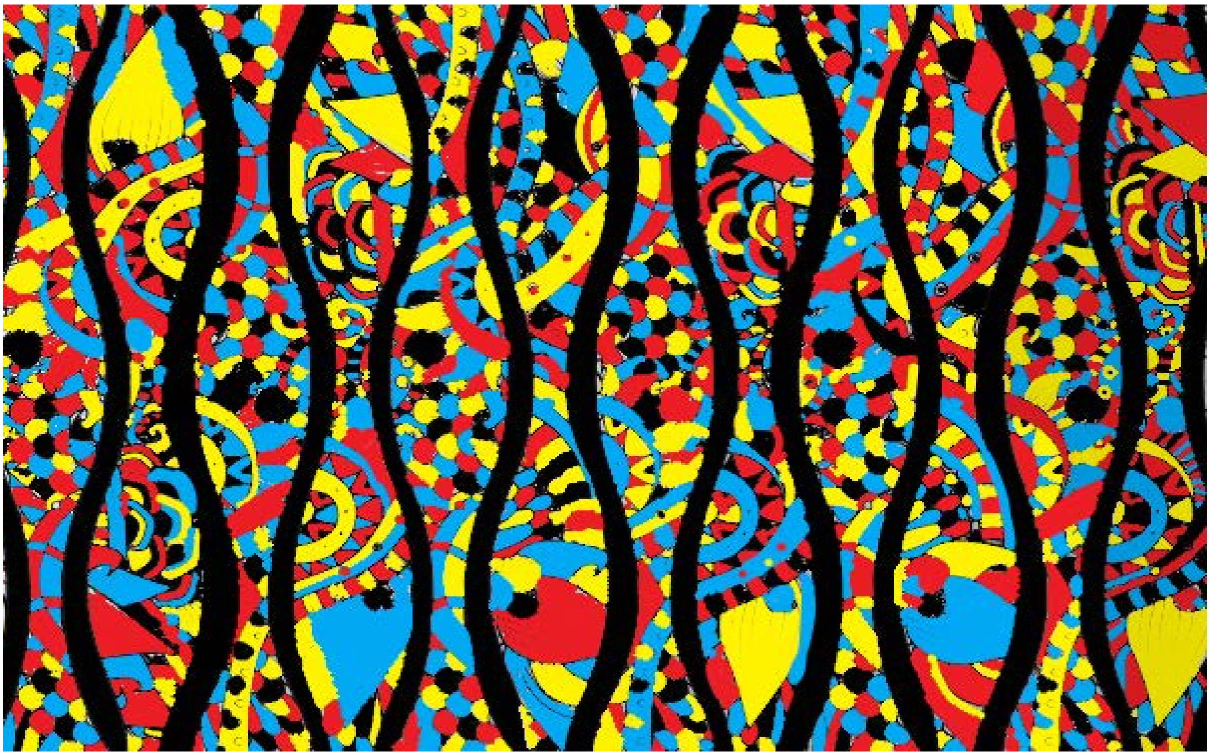
步驟：

(1) 先將波浪狀圖形固定為黑色。

(2) 由右上至左下的方向，依我們的上色規則填色。

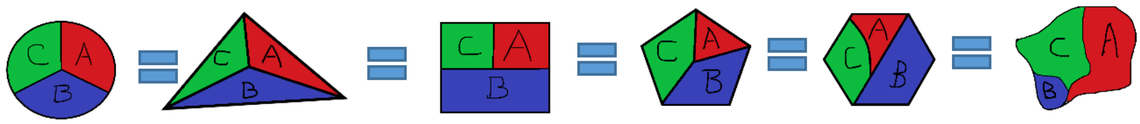
(3) 長條圖形儘量以兩種顏色填滿，讓相鄰部份有顏色可填。

(4) 四色可完成。

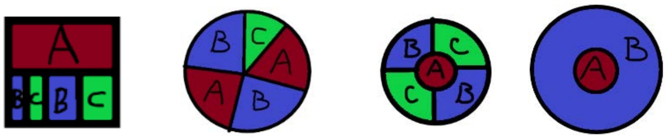


肆、 研究結果

一、我們一開始分析基本圖時，以三角形、四邊形、五邊形、六邊形……等去區分，後來才發現其實這些形狀不是重點，而是要觀察每色塊與多少色塊相鄰，才是填色的依據。



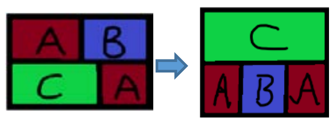
二、我們將基本圖形分成：上下層、放射狀、中央有色塊的放射狀及同心圓四種基本圖形去分析。



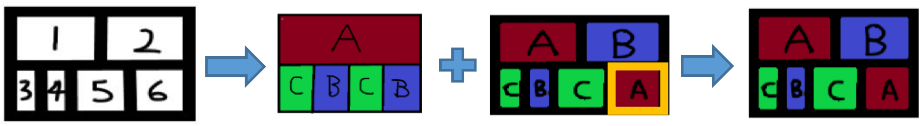
三、由兩層（$m=1$）圖形，我們發現因為下層不管畫幾個，只要相隔一個就可以同色，而且上層只有一個顏色，因此兩層（$m=1$）圖形用三色即可完成。

四、由兩層（$m=2$）圖形中，我們發現不管下層怎麼分隔，可歸納成以下三種情形：

(一)出現一對 s、一對一時，選擇面積最大或相鄰最多塊的為主，當成（$m=1$，$n_{s+1}=n_s+1$），共三色。

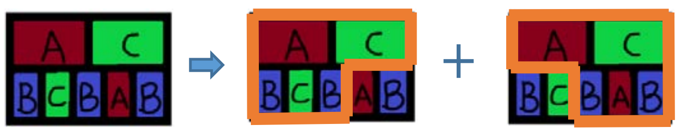


(二) 出現一對 s 、一對二時，當成為一個（$m=1$，$n_{s+1}=n_s+1$）及一個單獨色塊，共三色。



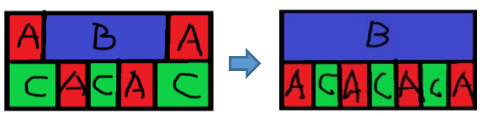
(三)下層色塊變多時，先當成（$m=1$，$n_{s+1}=n_s+1$）處理，再以上層另一色塊為主，先處理過重疊的色塊顏色固定，再用（$m=1$，$n_{s+1}=n_s+1$）處理一次。

如右圖：

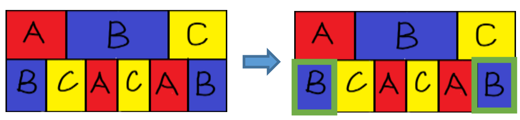


四、由兩層（$m=3$），我們發現，同樣可用三(一)、(二)、(三)去歸納。例：

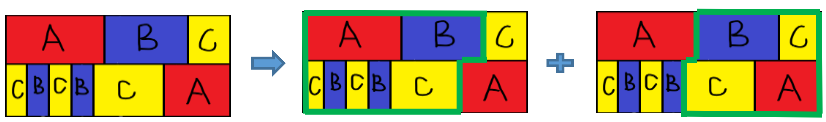
(一)



(二)

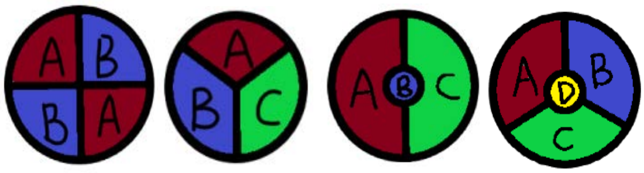


(三)



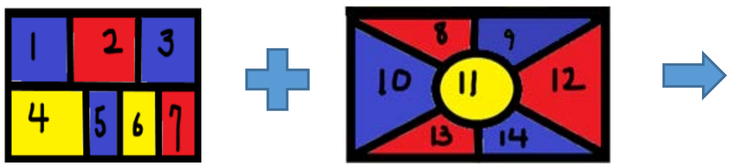
五、當上下層圖形愈來愈複雜，出現第四色後，也可借由換色，用三色完成。

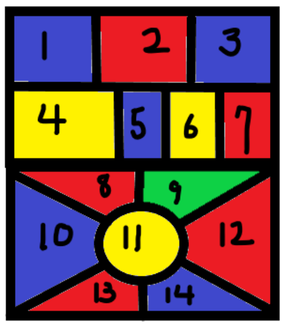
六、放射狀圖形，奇數色塊需三色，偶數色塊只需兩色，中間有圖形，各再加一色。



七、同心圓不管畫了幾層，都可用兩色完成。

八、當圖形複雜後，要將多個基本型合併，考慮兩基本型交界重疊地區，已固定上色了，才會出現第四色。





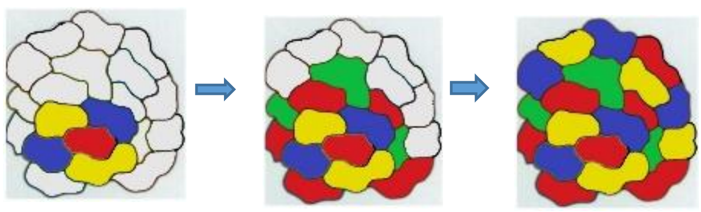
九、由綜合應用得知，複雜圖形也可以用八、合併基本圖來分析，一般可用四色填滿。

十、當複雜圖形初步填色用到第五色才完成時，透過將第五色換色，之後將相鄰同色的一一換色，最終也可以以四色完成。

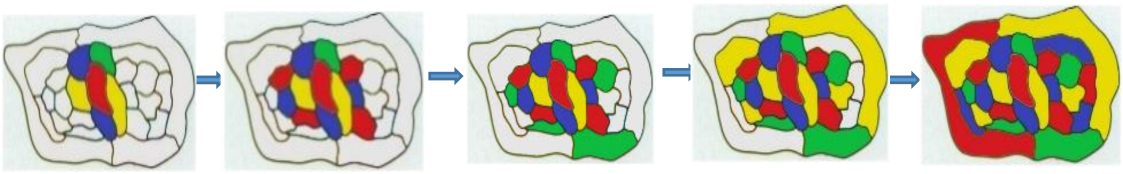
十一、我們找出了 TIMOTHY SIPKA 的文章的問題是：中央有色塊的放射狀圖形，從外層開始填色，最後中央色塊被周圍四色包圍，只好使用第五色。

我們的解法如下：

1. 從中央向外填色，就可以四色完成，如下圖：



2. 如果最外層是大面積與多色塊相鄰，到最後兩層時，要先填大面積最外層，再填倒數第二層。如下圖：



十二、我們找出了廣西大學機械工程系教授余熙瑩的文章的問題是：在五層以上的中央有色塊的複雜放射狀圖形中，無論由內到外或由外到內，不考慮換色就會出現需要五色才能完成的情形。

我們的解法是將小色塊第五色換色，再逐層將相鄰同色者換色，如下圖：

十三、我們用研究出來的方法，成功的完成了實際的例子，如：世界地圖、歐洲地圖、台灣縣市地圖、台灣鄉鎮市地圖及複雜的纏繞畫等。

伍、 討論及建議

我們還發現五層以上的中央有色塊的複雜放射狀圖形，如果最外層只有一色或兩色可能會更困難。如果這種圖形繼續發展下去，應該仍有許多可研究之處，可再探索。

未來展望，如果能用我們研究的規則步驟，寫入電腦，利用演算法，也許可以更快速的處理更複雜的圖形。

陸、 結論

一百多年來，即使電腦用演算法窮究了百億種圖案，都是四色以內可以完成，但四色定理一直沒有足夠嚴謹的探討出現，我們這次以小學生之力，試著有系統的探究這個問題，我們發現：

1. 我們探究出的四種簡單基本圖形中，只有中央有色塊的放射狀圖形需用到四色，其他都能用三色以內完成。

2. 複雜圖形其實都是由基本圖形所構成，固定色塊會限制用色，因此遇到第五色，必須換色，再逐一換掉相鄰同色的，直到能用四色完成為止。

3. 最複雜的是中央有色塊多層次的放射狀圖形，把握由中央向外填色，遇到第五色，必須換色，再逐層換掉相鄰同色的，直到能用四色完成為止。

剛開始我們雖然能以四色完成許多自行設計或現成的圖案，但面對這麼多複雜又變化萬千的圖案時，我們不知該如何用一個有系統的方法來說明我們的著色方式。後來將許多圖案拆解成不同的簡單圖形後，才漸漸發現其中有規則可尋。一般看到的圖形，大都是不則規圖形居多，我們歸納出大部份的圖形是由四種基本圖形組合成（幾何同構)，並將我們的方法用到自行設計和他人設計的圖案，甚至也以四色破解了五色才能填滿的圖案後，更進一步完成了固定不會變動的地圖及更複雜的纏繞畫，成功的挑戰了更複雜的問題。因此我們領悟到面對複雜的事物時，要化繁為簡，意思是說：從簡單的開始做起，然後觀察、歸納、推導，再循序漸進的推廣到解決更複雜的問題。這樣的研究過程，讓我們得到很多寶貴的經驗，也提升了自己的研究能力，更體驗到數學之美。

柒、 參考資料及其他

一、w_ou （2021.01.25）。四色定理。【Bai Du 百度】。取自
https://baike.baidu.hk/item/%E5%9B%9B%E8%89%B2%E5%AE%9A%E7%90%86/805159

二、TIMOTHY SIPKA, Alma College (2002, November) *Alfred Bray Kempe's "Proof" of the Four-Color Theorem.* MATH HORIZONS. Retrieved from
https://mathweb.ucsd.edu/~ssam/old/19W-154/kempe.pdf

三、余熙瑩。世界數學難題：「四色定理不成立」的一些探討。【每日頭條】。取自
https://kknews.cc/science/y28ebng.html

四、威科技。(2017)。數學史中跨越幾個世紀的四大難題。【每日頭條】。取自
https://kknews.cc/news/znagael.html

五、天職 (2017.07.11)。我愛夏天。【巴哈姆特】。取自
https://home.gamer.com.tw/creationDetail.php?sn=3640569

六、台灣地圖-正常版。【痞客邦】。取自 http://pearlshang.pixnet.net/album/photo/95439981-%E5%8F%B0%E7%81%A3%E5%9C%B0%E5%9C%96_%E6%AD%A3%E5%B8%B8%E7%89%88

七、Grace (2016.08.19)。台灣行政區地圖。【¡VOLA! 沒啦】。取自 https://atayalfinland.wordpress.com/2016/08/19/%E8%8A%AC%E8%98%AD%E6%98%AF%E5%96%AE%E4%B8%80%E5%88%B6%E6%94%BF%E5%BA%9C%E5%97%8E%EF%BC%9F/%E5%8F%B0%E7%81%A3%E8%A1%8C%E6%94%BF%E5%8D%80%E5%9C%B0%E5%9C%96/

八、「手殘女」也可以畫！禪繞畫舒壓 so easy。【she.com】。取自 https://www.she.com/health/%E6%89%8B%E6%AE%98%E5%A5%B3%E4%B9%9F%E5%8F%AF%E4%BB%A5%E7%95%AB-%E7%A6%AA%E7%B9%9E%E7%95%AB%E7%B4%93%E5%A3%93-so-easy/

【評語】080410

本作品探討特殊形式的四色問題，選擇著色策略，從實作中體驗這個數學難題的奧妙。作者嘗試找出通則，進而將其運用到實際的例子（如世界地圖、台灣縣市地圖），並破解了之前只能用 5 色才能完成的圖案。廣泛涉獵，敘事生動。

作品簡報

國小組數學科

四彩繽紛

前言

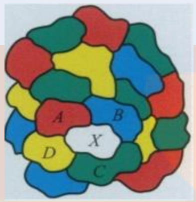
研究動機

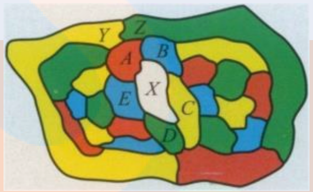
給地圖上色，相鄰不同色，看似不難，但是給出一般的證明—四色定理，卻是世界三大數學難題之一。前人使用電腦以四色完成100多億個圖案，仍有多位學者提出需用五色完成的圖案，因此引起我們想要研究它的動機。

本作品是以四色定理為研究主題—關於實際去著色的問題，目前尚未發現。於是我們試著找出填色規則及著色方法，開始展開一系列的實際著色探究。

研究目的

- 探討著色問題所需的基本圖形。
- 尋找簡單的基本圖形塗色的方法。
- 合併兩個基本圖形，探究重疊區域的塗色方法及限制。
- 將找到的基本圖形及方法應用到複雜不規則的圖形。
- 探討網路上只能用五色完成的圖案，並試著用四色來完成。
- 探討我們找出的方法，將它運用到實際的例子 ，如：世界地圖、歐洲地圖、台灣鄉鎮市地圖及網路上複雜的纏繞畫。



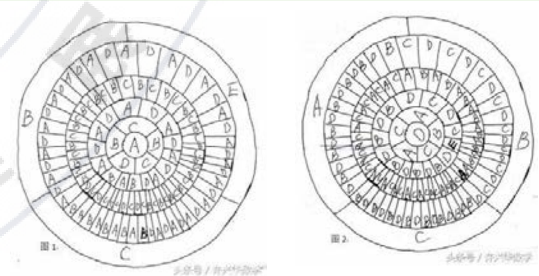


文獻探討

1852年古德里發現地圖都可用四色著色後，許多數學家開始研究四色問題，但沒有人以嚴密的邏輯推論圖形來考證它。因此，四色定理是世界近代三大數學難題之一。1976年，美國伊利諾斯大學用電腦花1200個小時，用四色完成了100億個圖案，但並不符合數學嚴密的證明，因此至今仍有許多人研究它。（資料擷取自Bai Du百度，見參考資料一）

四色定理雖已存在，但仍有許多學者提出需五色才能完成的圖案來質疑它。例如：2002年西班牙學者發表的文章。如左下二圖：（資料來源：見參考資料二）

2017年廣西大學教授余熙瑩發表更複雜五色才完成的圖形，如下圖：（資料來源：見參考資料三）

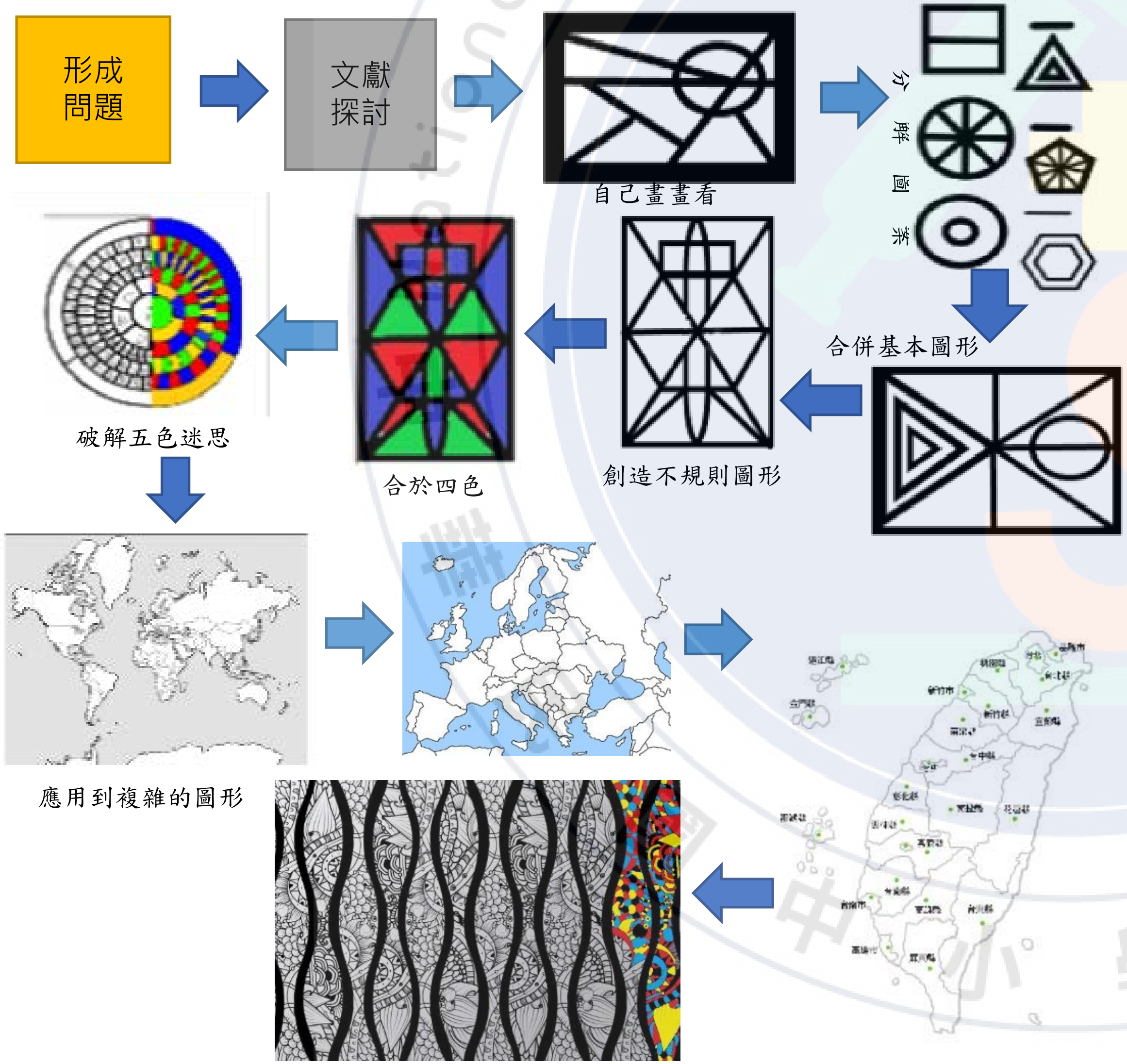


因此更引起我們的好奇，想要一探究竟。

研究流程及方法

研究流程

先簡化圖形，分上下層、放射狀、中間有色塊放射狀及同心圓四類基本圖形，再合併基本圖形，找出填色規則。然後分析複雜圖形，破解五色迷思，以發展出處理圖形的方法，應用到真實複雜地圖及畫。

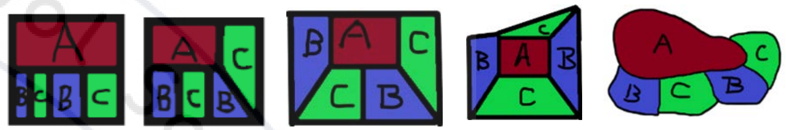


研究方法

(一)探討著色問題所需的基本圖形

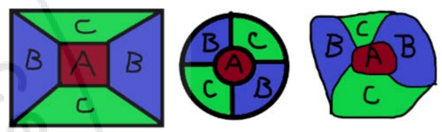
定義同類型圖型：（幾何同構）

1. 上下層

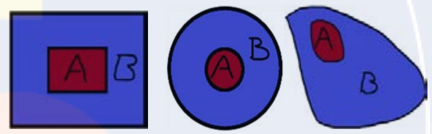


2. 放射狀

3. 中間有色塊的放射狀



4. 同心圓

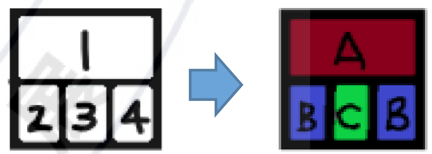


大部份不規則圖形是由這四種基本圖形組成

接下來要探討這四種基本圖形的著色方法。

(二)尋找簡單基本圖形著色的方法：

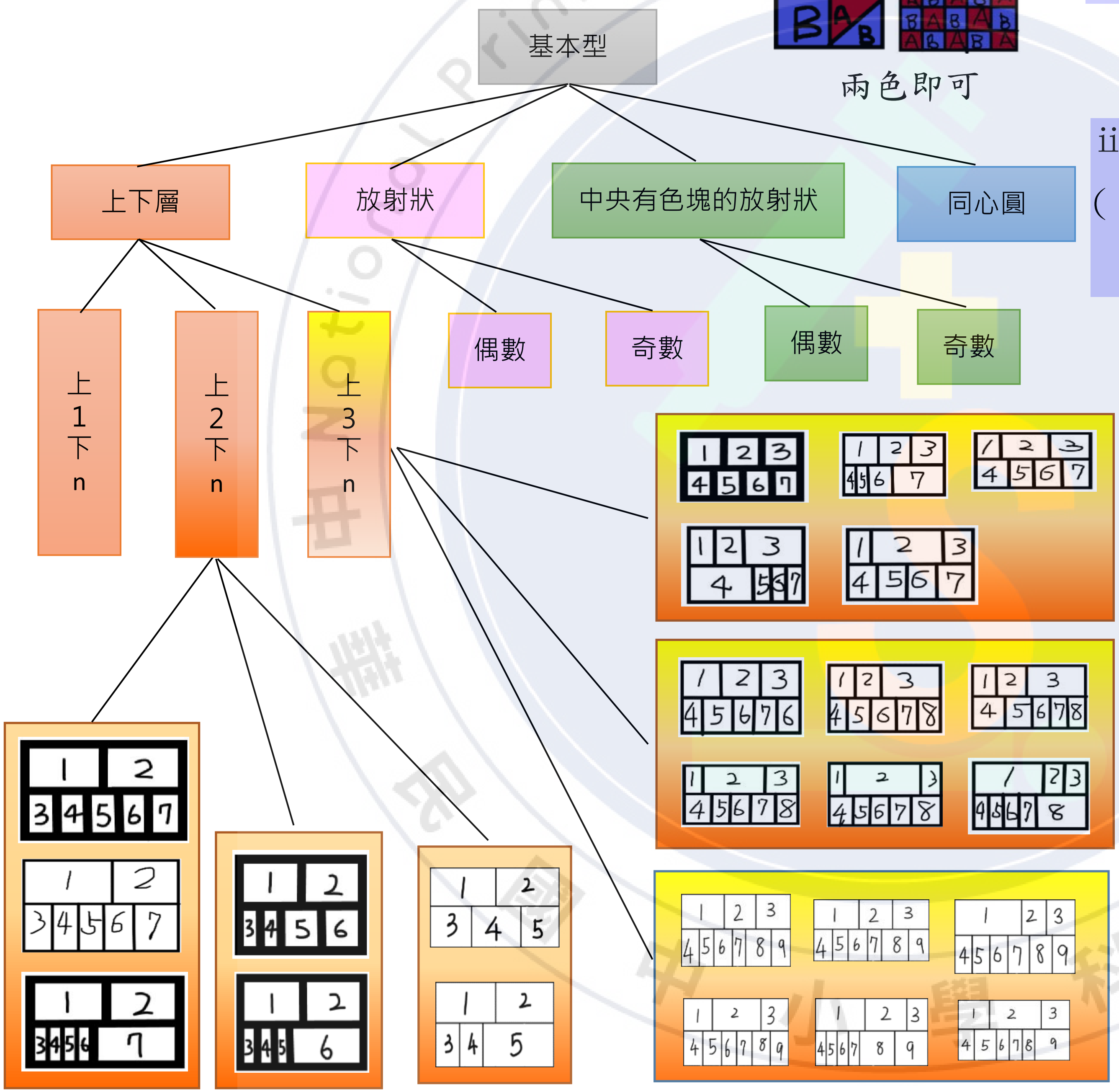
先將色塊編號，在以相鄰不同色為原則上色，找出規則。例如：



1與2、3、4相鄰要不同色，
2與1、3相鄰要不同色，但與4不相鄰可同色，
3與1、2、4相鄰要不同色。
因此，上下層一對三基本型可用三色填滿。

研究方法

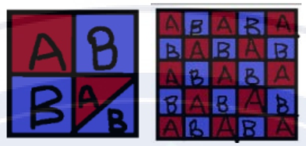
(三)四種基本圖形建構出心智圖



(四)基本圖形規則探究：

1. 上下層

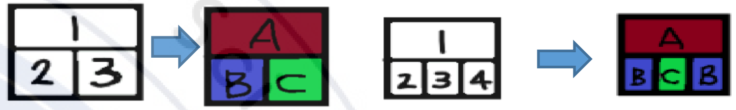
(1)每邊只與一邊相鄰



兩色即可

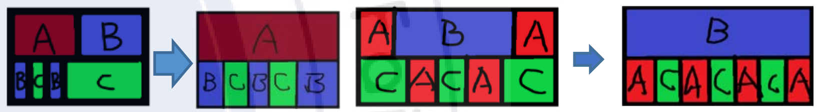
(2)每邊不只與一邊相鄰

i.上層一色，下層不管幾個，三色即可。

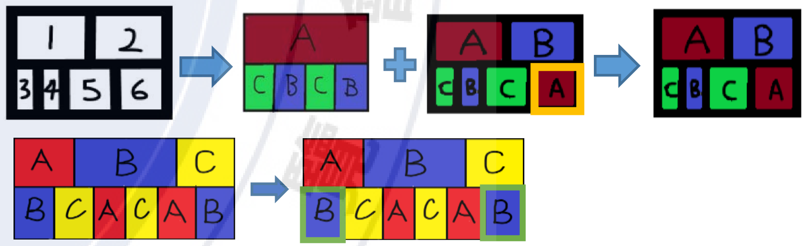


ii.上層二或三色，可歸納成以下三種情形：

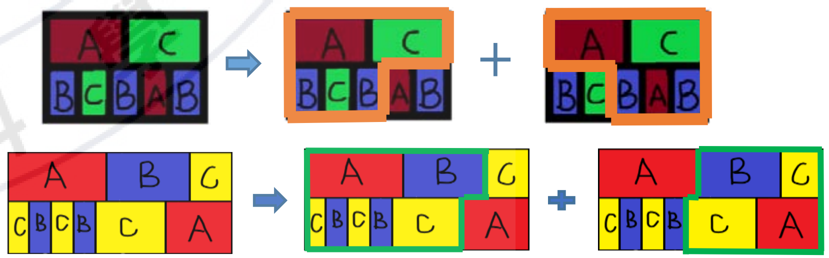
(i)上層一組一對多、其他一對一，可視為i.共三色。



(ii)上層一組一對多、其他一對二時，可視為i.加單獨色塊，共三色。



(iii)上層多個一對多時，可視為兩個i.，重疊色塊固定，再填另一組，共三色。



研究方法

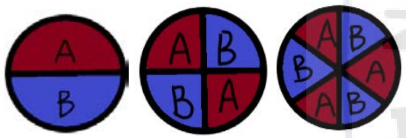
（四）基本圖形規則探究：

1. 上下層

ⅲ. 當上下層愈來愈複雜，出現第四色後，換色，可用三色。

2. 放射圖形

(1)偶數色塊需兩色

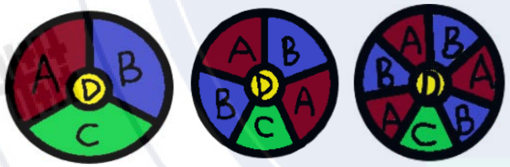


(2)奇數色塊需三色

3. 中間有色塊的放射圖形

(1)外層偶數色塊需三色

(2)外層奇數色塊需四色

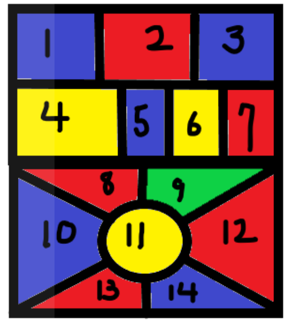


4. 同心圓需兩色

探討完四種基本圖形的著色方法之後，再研究合併兩種基本圖形的情形，以便推衍出圖形逐漸複雜後，要進行的著色略策。

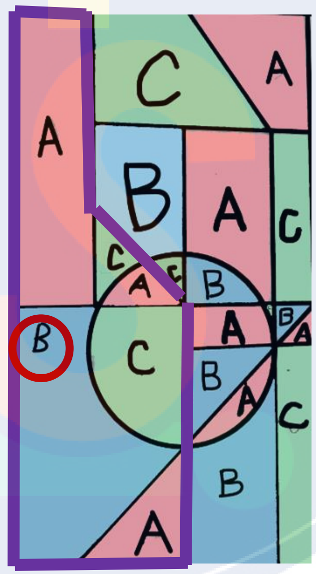
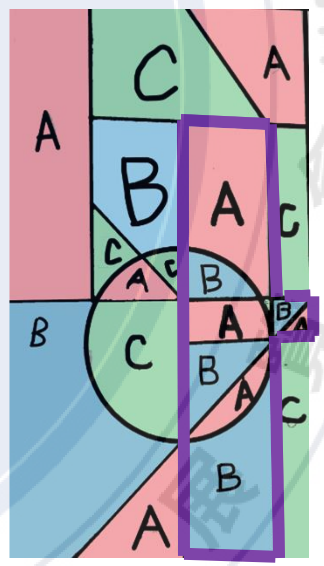
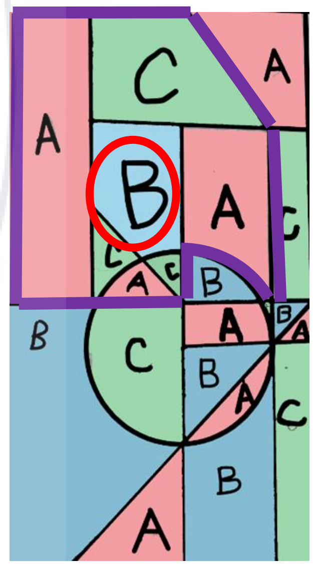
（五）合併兩個基本圖，探究重疊區域的塗色方法及限制

兩基本型合併，受到先固定上色的限制，才會出現第四色。



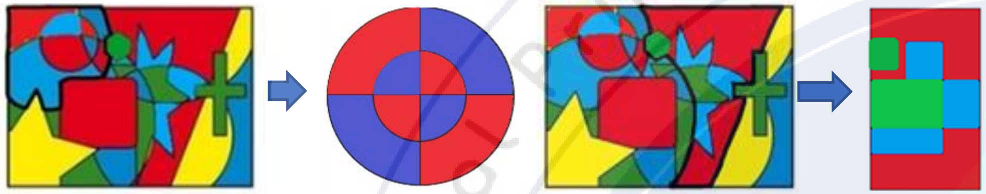
（六）將找到的基本圖及合併的方法應用到複雜不規則的圖形

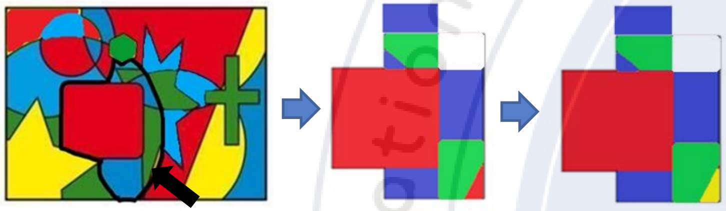
例1：由下圖可知，我們找到的方法用到自行設計圖案上可行

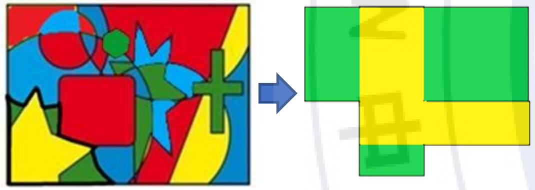
		
紫框區域為以B為上層，共3色。	紫框區域為棋盤狀的圖形，共2色。	紫框區域，以B為主，是中央有色塊的放射狀圖形，共3色。

研究方法

例2：把網路上的圖案拿來做分析：
(1)分成不同的區域
(2)簡化線條使圖形規則化（圖案來源：見參考資料一）



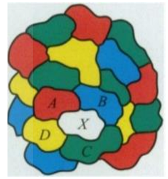


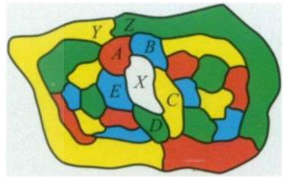


以我們的方法的確可將圖案解構成簡單圖形，並用四色完成著色。

（五）探討網路上只能用5色完成的圖案，並試著用四色來完成它

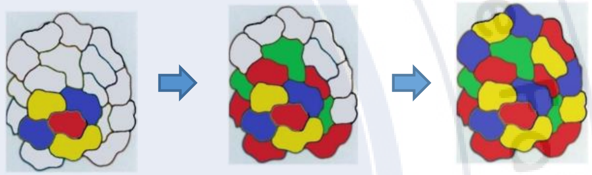
例一：2002年TIMOTHY SIPKA發表推翻四色定理的文章。以類似我們的中央有色塊的放射狀圖形外面再包多層色塊，從外層開始向內層填色，要五色才能完成，如右二個例子（資料來源：參考資料二）：



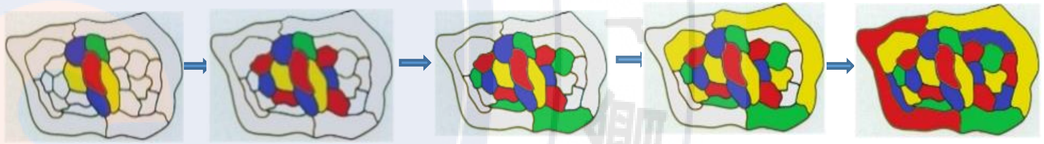


我們的破解方法：

(1)



(2)



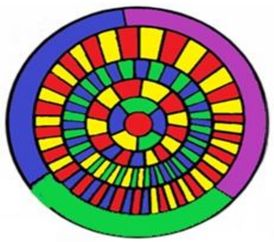
(1)內層接觸色塊最多，所以中央有色塊放射狀圖形，外面包多層色塊，要從中央開始由內向外填色。
(2)最外層大面積與多色塊相鄰，要先填大面積最外層，再填內一層。

例二：廣西大學機械工程系教授余熙瑩所發表四色定理不成立的三個類似的同心圓混合中央色塊放射狀圖形，每層是奇數色塊，因此比例一的圖形更難（資料來源：見參考資料三）

我們的破解方法：

ｉ的相鄰色塊很多，換第五色後要更改許多色塊，因此選擇ⅱ來換色。再層層將相鄰同色換掉，可四色完成。

(1)
ｉ.從內往外填色：



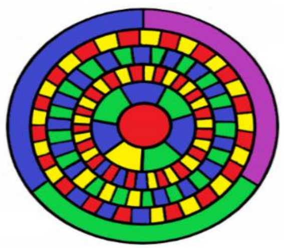
ⅱ.從外往內填色：

研究方法

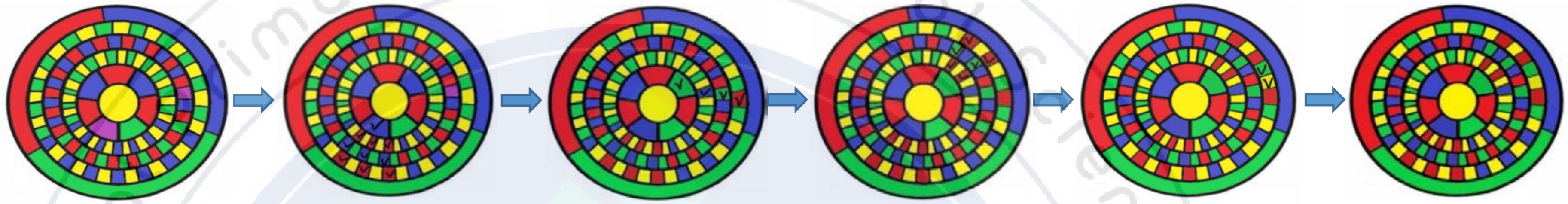
（五）探討網路上只能用5色完成的圖案，並試著用四色來完成它

例二(2)

ⅰ.從內往外填色：



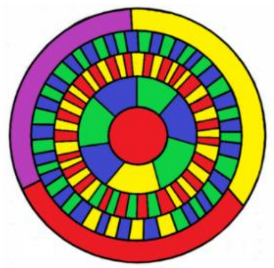
ⅱ.從外往內填色：　我們的破解方法：



雖然ⅱ有兩個第五色，要微調兩次，但ⅰ的第五色相鄰色塊很多，會更動很多，因此選ⅱ來換色，能用四色完成。

例二(3)

ⅰ.從內往外填色：



ⅱ.從外往內填色：　我們的破解方法：(發現對策)

ⅰ相鄰的色塊很多，換第五色後要更改許多色塊，因此選擇ⅱ來換色。

對策：如果將第二層上方黃、綠、藍換成綠、黃、綠，如此又要重新來回換色。
因此，一開始就換同層色塊順序，就可減少來回換色的次數。

改良的破解方法：

以四色破解了五色才能填滿的圖案後，我們接下來想挑戰固定不會變動的地圖或更複雜的纏繞畫。

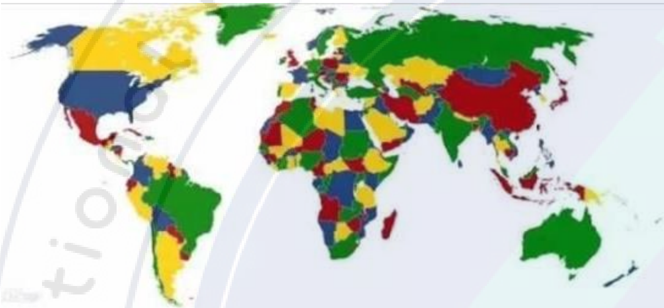
(1)此種圖形要由外層大面積開始向內填色，將內層第五色換色，再將相鄰同色的內外來回換色就能用四色完成。
(2)遇到愈換愈多色，要考慮先調整同一層內顏色順序，再換相鄰層同色的色塊。

研究方法

(六)探討我們找出的規則將它運用到實際的例子：

1. 世界地圖：

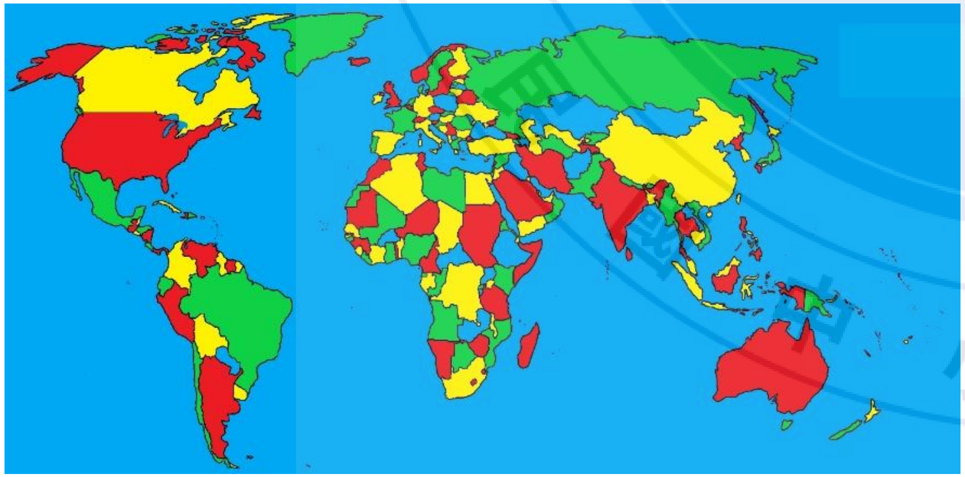
2017年威科技發表的四色世界地圖，加上海洋的白色，其實是五色。(資料來源：見參考資料四)



我們的破解方法：

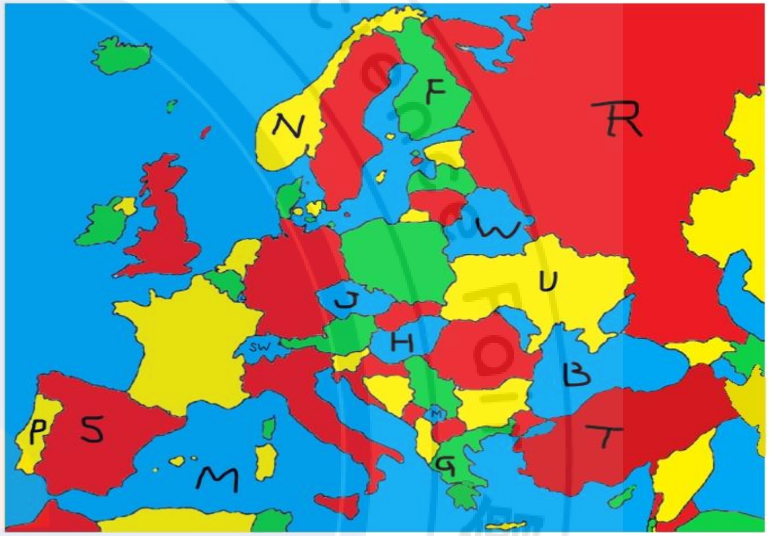
海洋包圍所有色塊，與海相鄰的只能用三色，所以先填海洋，再由外而內， 用我們的填色規則填色。

(1)先填海洋及內陸海。
(2)沿海兩色互換，三塊相鄰，調整為三色
(3)四塊以上相鄰及中央有色塊放射狀圖，用四色。
(4)如遇到相鄰顏色已固定，則換色，
　最後以四色完成了世界地圖。



2. 歐洲地圖 (圖案來源：見參考資料五)

歐洲國家很多，面積差距極大，以中央有色塊放射狀來分析多國相鄰，搭配上下層及換色，來完成填色。
(為了方便解釋，我們以大寫字母為國家代號)



(1)先填海洋及內陸海為藍色。
(2)最大面積俄羅斯(R)為上層填紅色，下層芬蘭(F)、挪威(N)用綠、黃。
(3)以白俄羅斯(W)為中央放射狀填藍色，紅、綠逆時針繞白俄羅斯(W)，到烏克蘭(U)遇奇數換黃色。
(4)以黑海(B)為中央放射狀填藍色，紅、黃繞黑海(B)。
(5)以捷克(J)為中央放射狀填藍色，綠、紅繞捷克(J)。
(6)以地中海(M) 為中央放射狀填藍色，從葡萄牙(P)、西班牙(S)以黃、紅繞地中海(M)。
(7)遇紅色土耳其(T)，原本紅色希臘(G)換綠色。
(8)匈牙利(H)、瑞士(SW)、盧森堡(L)、馬其頓(M)相鄰國家多，會用到藍色。
(9)整個歐洲地圖可以四色完成。

研究方法

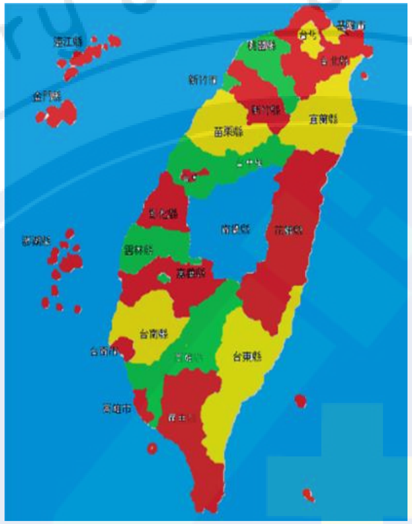
(六)探討我們找出的規則將它運用到實際的例子：

身在台灣當然也要來畫畫看台灣地圖囉！

3. 台灣縣市地圖（圖案來源：見參考資料六）

南投縣未與海相鄰，設定它為中央色塊，用放射狀圖形。

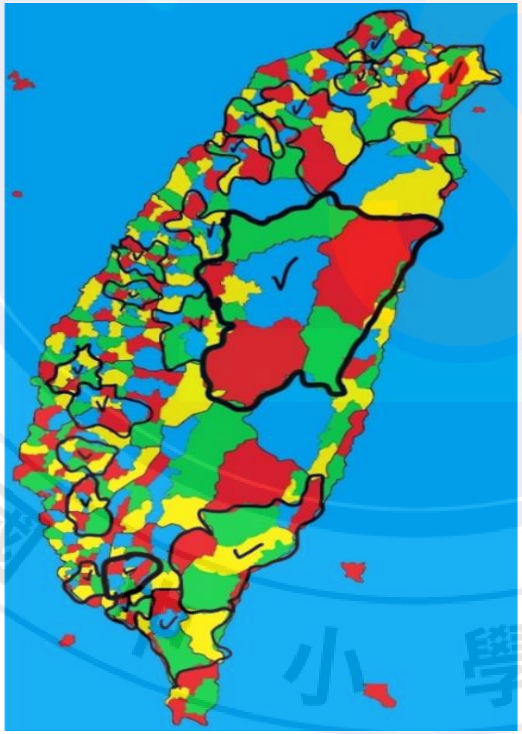
(1)先固定海洋為藍色。
(2)以南投為中央，與大海同為藍色。
(3)再填南投周圍的縣市。
(4)依上下層規則填其他縣市。
(5)與三色相鄰則使用第四色，共四色可完成。

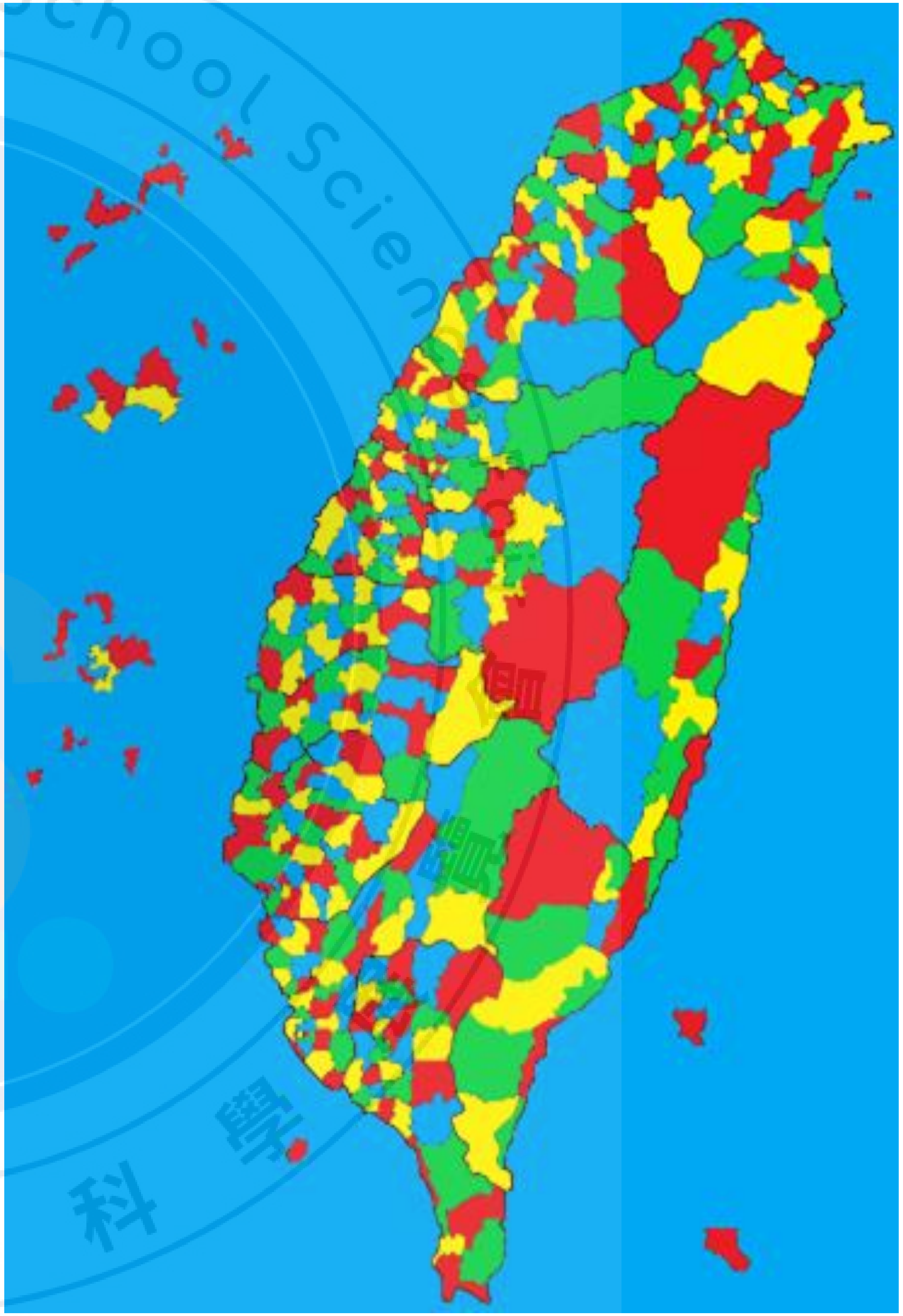


4. 台灣鄉鎮市地圖（圖案來源：見參考資料七）

鄉鎮市地圖更複雜，有許多細碎的圖形，可先想像是中央有色塊放射狀圖形。
將中央色塊打勾，圍繞的色塊用黑色框出，如右圖所示。

(1)以南投縣仁愛鄉為中央色塊，以放射狀圖形規則填色。
(2)由東北角往南以逆時針方向尋找中央有色塊放射狀圖形填色。
(3)其他以上下層的概念來填色。
(4)零星的色塊單獨填色，共四色。





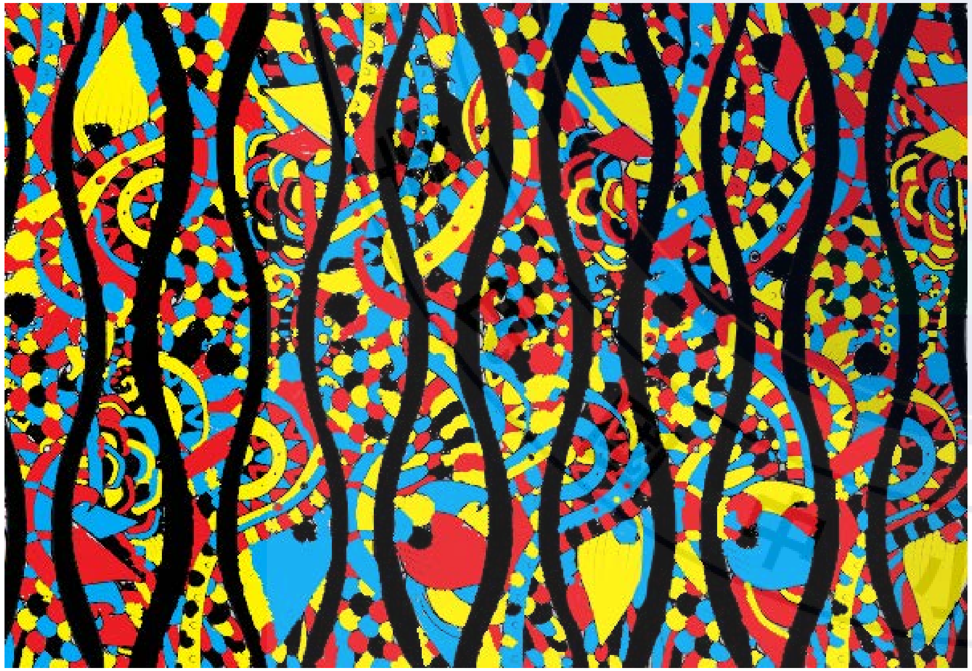
研究方法

(六)探討我們找出的規則將它運用到實際的例子：

5. 最後挑戰複雜的纏繞畫（圖案來源：見參考資料八）

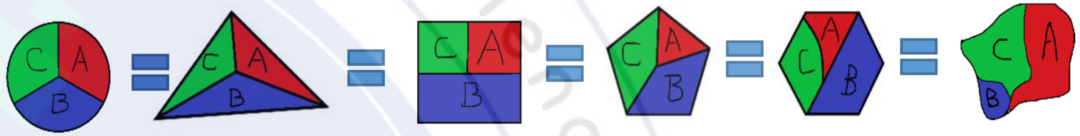
在網路上找了張纏繞畫來填色。
難處在波浪狀圖形已固定為黑色。
所以要先避開黑色。

(1)先將波浪狀圖形固定為黑色。
(2)由右上至左下，依我們的上色規則填色。
(3)長條圖形儘量以兩種顏色填滿，讓相鄰部份有顏色可填。
(4)四色可完成。



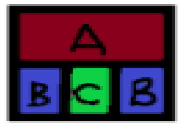
研究結果

一、剛開始分析基本圖時，以三角形、四邊形、五邊形、六邊形……等去區分，後來才發現其實這些形狀不是重點，而是要觀察每色塊與多少色塊相鄰，才是填色的依據。



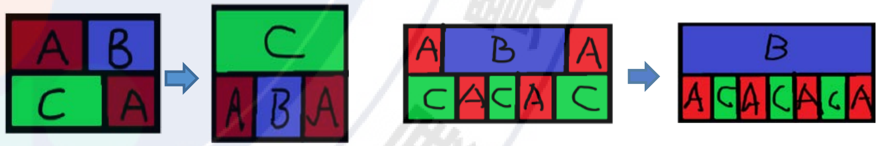
二、我們將基本圖形分成：上下層、放射狀、中央有色塊的放射狀及同心圓四種基本圖形去分析。

三、由上下層，上層為一的圖形，我們發現上層只需一色，下層不管畫幾個，只要相隔一個就可以同色，共三色即可完成

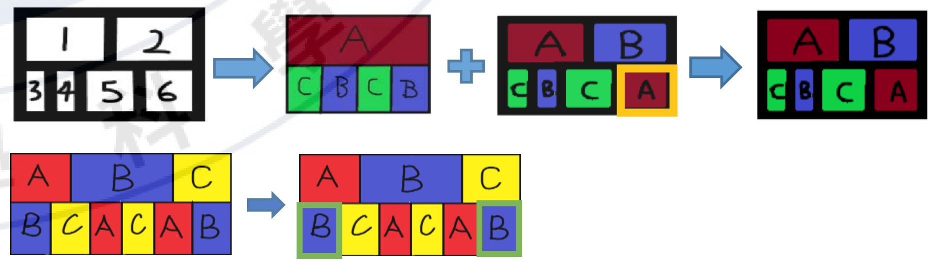


四、由上層為二及三的圖形，可歸納成以下三種情形：

(一)有一對一時，可視為上層為一的圖形，共三色。

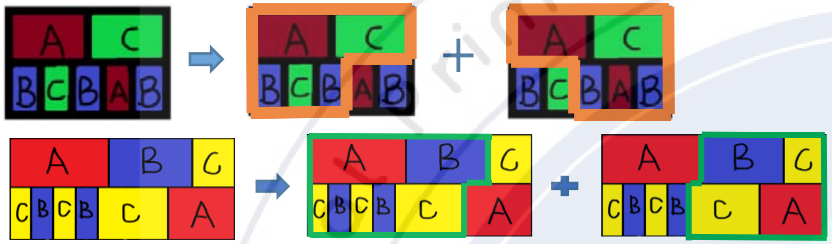


(二)有一對二時，可視為上層為一的圖形及單獨色塊，共三色。



研究結果

(三)下層色塊變多時，視為二個上層為一的圖形處理。



五、當上下層圖形愈來愈複雜，出現第四色後，也可借由換色，用三色完成。

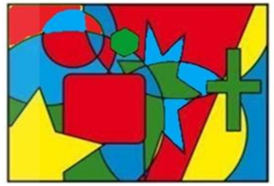
六、放射狀圖形，偶數色塊只需兩色，奇數色塊需三色，中間有圖形，各再加一色。

七、同心圓不管畫了幾層，都可用兩色完成。

八、圖形複雜後，將多個基本型合併，考慮重疊地區已固定上色，才會出現第四色。

九、由綜合應用得知，複雜圖形也可以用合併基本圖來分析，一般可用四色填滿。

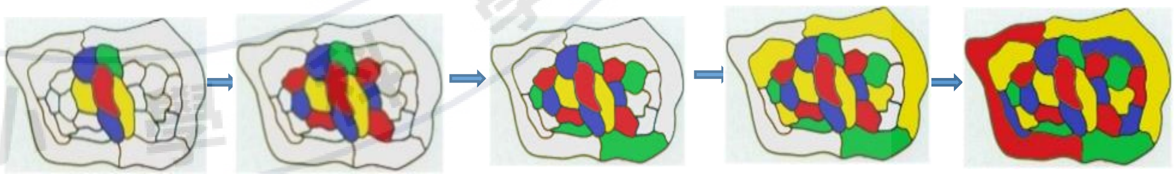
十、複雜圖形初步填色用到第五色時，需換色，並將相鄰同色的換色，可四色完成。



十一、TIMOTHY SIPKA的問題是：從外層開始填色，最後中央色塊被周圍四色包圍，只好使用第五色。

(一)從中央向外填色，就可以四色完成，如下圖：

(二)最外層是大面積與多色塊相鄰，到最後兩層時，要先填大面積最外層，再填倒數第二層。如下圖：



研究結果

十三、廣西大學余熙瑩教授的問題是：
五層以上中央有色塊複雜放射狀圖形中，無論由內到外或由外到內，不換色就需要五色。
我們的解法是將小色塊第五色換色，再逐層將相鄰同色者換色，如下圖：

十四、我們用研究出來的方法，成功的完成了實際的例子，如：世界地圖、歐洲地圖、台灣縣市地圖、台灣鄉鎮市地圖及複雜的纏繞畫等。

討論及建議

我們還發現五層以上中央有色塊複雜放射狀圖形，最外層只有一色或兩色可能會更困難。如果這種圖形繼續發展下去，應該仍有許多可研究之處。

未來，如能用我們研究的規則步驟，寫入電腦，也許可以更快速的處理更複雜的圖形。

參考資料及其他

一、 w_ou（2021.01.25）。四色定理。【Bai Du百度】。取自 https://baike.baidu.hk/item/%E5%9B%9B%E8%89%B2%E5%AE%9A%E7%90%86/805159

二、TIMOTHY SIPKA, Alma College (2002, November) Alfred Bray Kempe’s “Proof” of the Four-Color Theorem. MATH HORIZONS. Retrieved from https://mathweb.ucsd.edu/~ssam/old/19W-154/kempe.pdf

三、 余熙瑩。世界數學難題：「四色定理不成立」的一些探討。【每日頭條】。取自 https://kknews.cc/science/y28ebng.html

結論

即使電腦用演算法以四色完成了百億種圖案，但四色定理似乎沒有顯示有系統的著色方法，我們這次以小學生之力，試著有系統的探究這個問題，發現**著色通則**步驟如下：

1. 先將圖案解構出基本圖形，依基本圖形著色規則上色。
2. 大色塊及相鄰色塊多的要優先處理。
3. 兩基本圖形相鄰重疊區域，固定色塊會限制用色，遇到第五色，必須換色。
4. 換色後相鄰同色再逐一換色，直到能用四色完成為止。

我們成功的以四色挑戰了複雜圖形的著色。因此我們領悟到寶貴的經驗：面對複雜事物時，要從簡單的開始做起，然後觀察、歸納、推導，再循序漸進的推廣到解決更複雜的問題上。