

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

團隊合作獎

080409

轉、轉、轉、紙轉千迴

學校名稱：國立新竹科學園區實驗高級中等學校(國
小部)

作者： 小六 莊舒涵 小六 洪謙予 小六 王奕棠 小六 梁承瑞 小六 柯新宇 小六 楊過	指導老師： 黃于芳
--	------------------

關鍵詞：剪紙、紙旋轉

摘要

剪紙大師洪新富老師有張會隨著開合而旋轉的紙雕名片，讓我們好奇：

A、如何製作會旋轉的紙雕？

B、其旋轉角度有無規律？

在分析探討後，我們發現：

一、在菱形結構中，當摺線呈階梯狀，就能旋轉；

二、在鳶形結構中，要旋轉還須：「中線至較大剪角頂點距離」 \geq

「中線至較小剪角頂點距離」－「第一層和第三層剪線在對摺線上的間距」。

三、菱形和鳶形結構，不管每層剪角是否相同，相鄰兩層的旋轉角度皆會相差

「 180° －第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角」，

其中每層剪角相同的結構，相鄰兩層起始處夾角為一個摺角。

四、在圓形結構中，當摺線呈階梯狀，且摺角不等於 180° 即可旋轉，其中

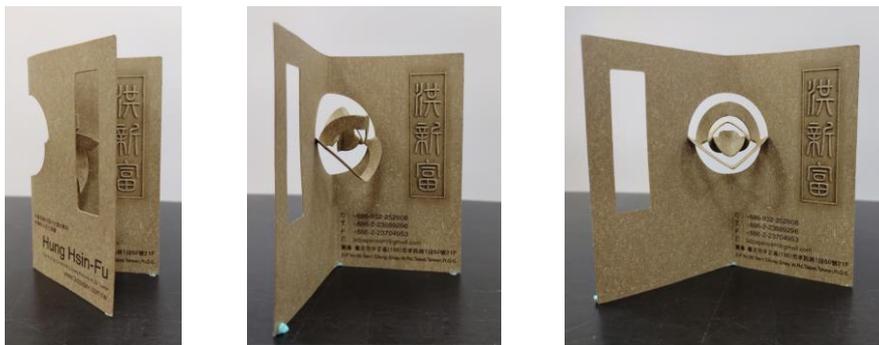
若摺角皆 $< 180^\circ$ ，則逆時針旋轉，若摺角皆 $> 180^\circ$ ，則順時針旋轉，

且旋轉角度都隨層數遞增。

壹、研究動機

有一次老師向我們展示了她剛拿到的一些剪紙作品，這些作品不但精緻，還會動呢！我們覺得非常新奇，繞著它們不斷讚嘆，老師看到我們對這些作品這麼有興趣，決定請它的原創者—洪新富老師來為我們上一堂課，認識「紙的變幻藝術」。

那一天，我們拿著色紙，剪了一刀又一刀，再將它摺了又摺，看到成果時的心情，更是充滿訝異和興奮。在洪老師示範的作品中，最吸引我們的，就是洪老師的名片中那個會「隨著開合名片而旋轉」的立體紙雕（如下圖組所示），我們十分好奇要如何製作這種能旋轉自如的紙雕，也很想知道它每一層的旋轉角度有沒有存在規律性？於是展開了一連串與剪刀和紙的奇妙旅程。



貳、研究目的

一、探討紙張旋轉的菱形結構及鳶形結構並找出能順利旋轉的關鍵要素。

二、探討菱形結構及鳶形結構中，剪紙層數和旋轉角度的關係。

三、探討紙張旋轉的圓形結構並找出能順利旋轉的關鍵要素。

四、探討圓形結構中，剪紙層數、摺角及間距和旋轉角度的關係。

參、研究設備及器材

電腦、GeoGebra 軟體、Word 軟體、西卡紙、剪刀、鉛筆、橡皮擦、量角器、圓規、直尺

肆、研究過程及方法

一、探討紙張旋轉的菱形結構及鳶形結構並找出能順利旋轉的關鍵要素

雖然原本洪老師名片中旋轉的立體紙雕是「圓形結構」，但為了瞭解這種可讓紙張旋轉的結構要素，於是我們先將原本圓弧的外框簡化成直線，並依據可剪出的外觀形狀分成「菱形結構」與「鳶形結構」來討論。

(一) 菱形結構

首先，我們先將一張紙對摺，並畫出一個等腰三角形。因為此種畫法在把紙展開時，會呈現出菱形的外觀。所以我們將依照此種畫法做出的旋轉結構稱為「菱形結構」。

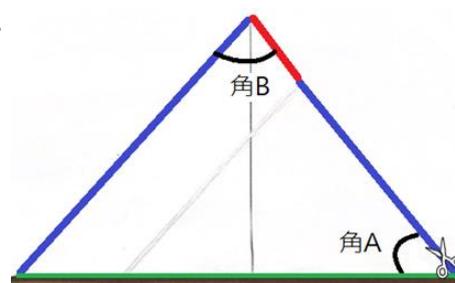
右圖一為菱形結構的示意圖，在這個結構中包含

下列要素：

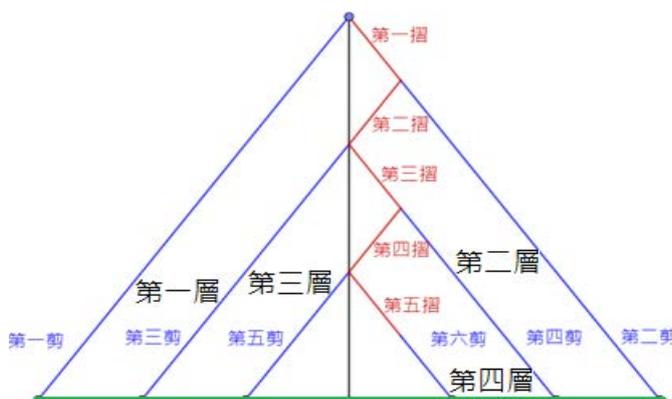
- 1、**綠色**的線段是將整張紙對摺的「**對摺線**」。
- 2、**藍色**的線段是我們要剪的部分，我們將它稱做「**剪線**」。
- 3、**紅色**的線段是剪完之後我們要摺的地方，我們將它稱做「**摺線**」。
- 4、**剪線**和**對摺線**之間的夾角，我們將它稱做「**剪角**」，並以「**角 A ($\angle A$)**」表示。
- 5、**剪線**和**摺線**之間的夾角，我們將它稱做「**摺角**」，並以「**角 B ($\angle B$)**」表示。

經過我們不斷測試與研究後發現：

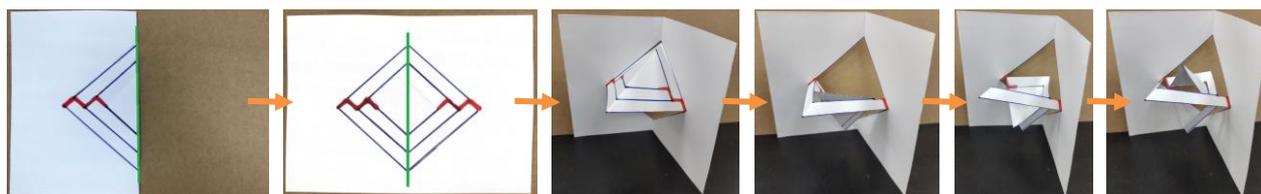
- 1、當菱形結構中各層的摺線呈現階梯狀時，如右圖二的**紅線**所示，紙張就可以依照如下圖三所示之步驟製作成能夠透過開合而順利旋轉、且每層不會互相重疊的旋轉紙雕了。



圖一

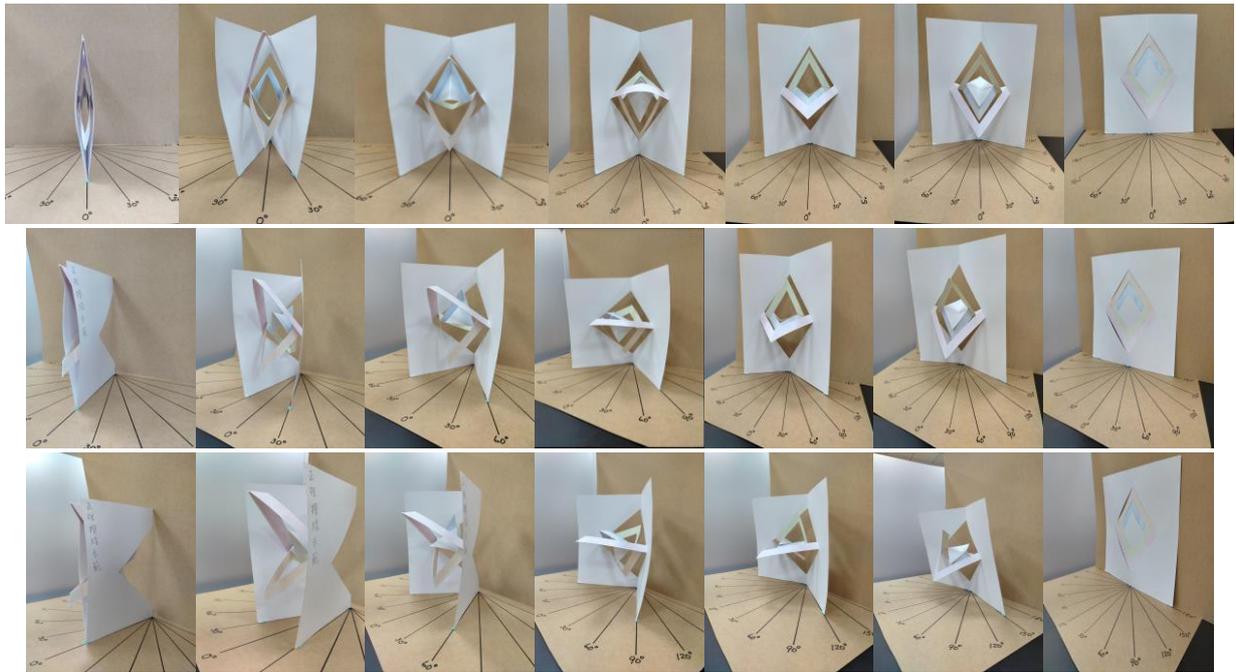


圖二：菱形結構示意圖



圖三：菱形結構展開過程圖

接著我們將整個菱形結構旋轉的狀態以每 30° 打開，並以三種不同拍攝角度呈現如下圖四：

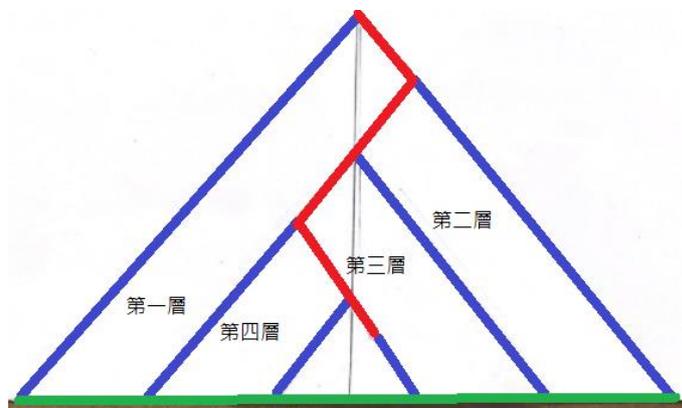


圖四

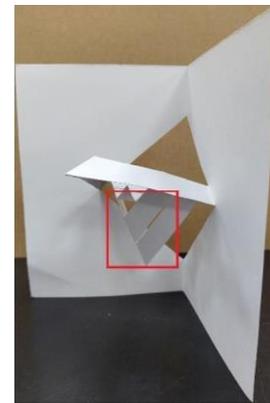
2、當菱形結構中，如果其中有摺線不是呈階梯狀的話，如下圖五中有一條摺線一次跨越了兩層（即第二層和第三層），

那麼當摺線成一直線的那兩層在剪好摺完後，就會合併成一層，如下圖六紅框所示。

這樣一來，就算剪了五層，但因為其中有兩層會同步旋轉，所以只會有四層不同的旋轉角度，和剪四層的狀態相同。因此相同摺線的那一層就顯得沒有意義了。



圖五：摺線非階梯狀的菱形結構示意圖



圖六：摺線非階梯狀展開圖

我們的發現：

在菱形結構中，當摺線呈現階梯狀的時候可以順利旋轉；

但如果其中有摺線不是呈階梯狀的話，這樣摺線成一直線的那兩層就會合併成一層。

(二) 鳶形結構：

若將一張紙對摺後，再畫出一個不等腰三角形，則此種畫法在把紙展開時會呈現出鳶形的外觀。因此，我們將依照此種畫法做出的旋轉結構稱為「鳶形結構」。

我們發現菱形結構只要各層的摺線呈現階梯狀，轉起來就會很順，而鳶形結構就算各層的摺線呈現階梯狀，還是有可能會因為在轉的時候卡住而轉不起來。

經過我們多次的測試與分析，發現在**鳶形結構**中，除了**摺線要呈現階梯狀**之外，還有一些**關鍵線段**要留意，如：

- 1、中線至較大剪角之頂點的距離，如下圖七及下圖九中的**橘線**所示。
- 2、「中線至較小剪角之頂點的距離」－「第一層剪線和第三層剪線在對摺線上的間距」，如下圖七及下圖九中的**綠線**所示。

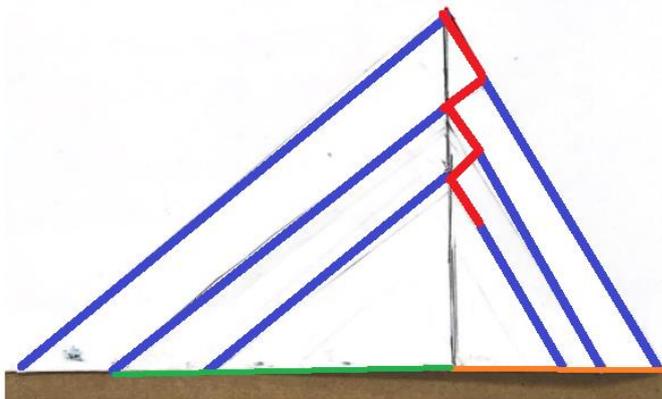
我們發現：如果要讓只有一條對稱軸的鳶形結構順利轉起來，除了摺線要呈現階梯狀之外，還必須要讓「中線至較大剪角之頂點的距離」 \geq

「中線至較小剪角之頂點的距離」－「第一層剪線和第三層剪線在對摺線上的間距」，

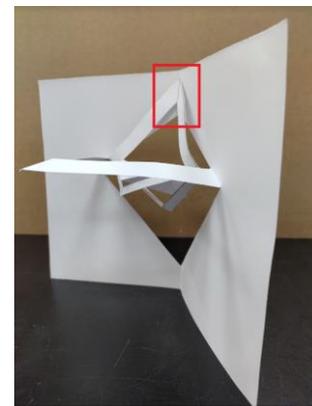
因為，如果「中線至較大剪角之頂點的距離」 $<$

「中線至較小剪角之頂點的距離」－「第一層剪線和第三層剪線在對摺線上的間距」時

（如下圖七），則在第二層要轉到頂端時，就會產生下圖八**紅框**所示的卡住過不去狀況：



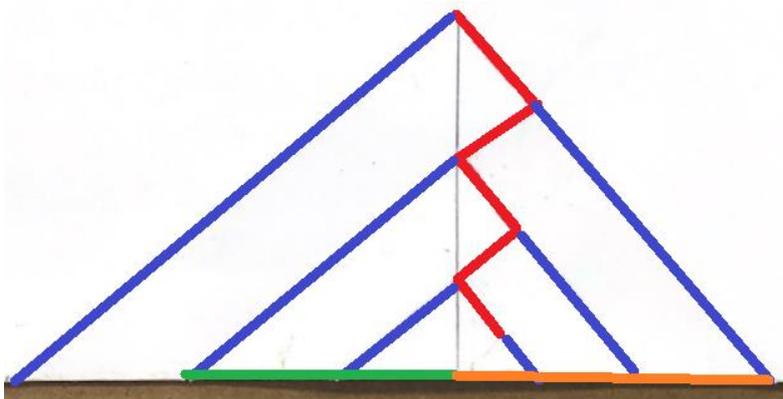
圖七：失敗的鳶形結構示意圖



圖八：鳶形結構失敗展開圖

而當「中線至較大剪角之頂點的距離」 \geq

「中線至較小剪角之頂點的距離」－「第一層剪線和第三層剪線在對摺線上的間距」時（如下圖九），紙張就能順利旋轉了，如下圖十所示：



圖九：成功的鳶形結構示意圖



圖十：鳶形結構成功展開圖

我們的發現：

如果要讓只有一條對稱軸的鳶形結構順利旋轉，必須要讓

「中線至較大剪角之頂點的距離」 \geq

「中線至較小剪角之頂點的距離」－「第一層剪線和第三層剪線在對摺線上的間距」。

二、探討菱形結構及鳶形結構中，剪紙層數和旋轉角度的關係

在分析完菱形結構和鳶形結構後，我們想知道：

每一層的旋轉角度分別是幾度？各層之間的旋轉角度是否存在規律性？

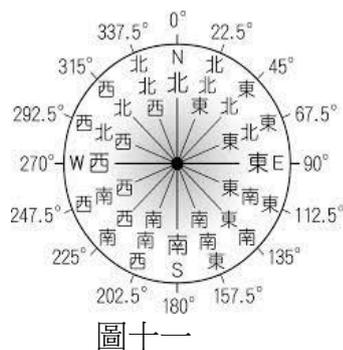
首先，因為這款旋轉的立體紙雕是透過「紙張開合引發旋轉」，而在紙張旋轉的過程中，「旋轉軸心的位置」會不斷改變。為了找出每一層所旋轉的角度，我們首先參考了方位角的標示方式，如下圖十一。

接著，由於這款立體紙雕的旋轉方向會隨著觀看角度及作品擺放位置的不同而改變，為了讓接下來的討論有一致性，我們決定一律讓作品中第一層的終點位置位於 180° 的位置，並將作品自左向右翻開使之旋轉。

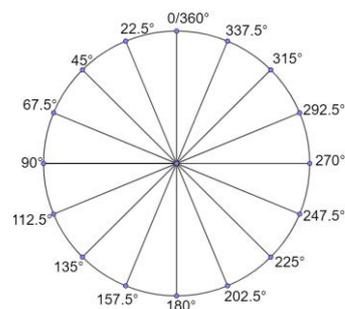
依此方式，我們發現菱形結構及鳶形結構的旋轉方向皆是逆時針旋轉，於是我們修改了方位角的角度累加方向，改以逆時針角度累加的方式標示角度，如下圖十二所示。

這樣一來，我們只需要找出每一層的起始處與終點處所對應的方位角，便可以知道每一層所旋轉的角度了。

其次，由於在菱形結構與鳶形結構中的摺線只要呈階梯狀即可，但是這樣一來變數太多不好討論，因此為了簡化問題，我們一律將摺線視為剪線的延伸線進行討論。



圖十一



圖十二

接著，我們先從菱形結構中「每層剪角相同」與「每層剪角不同」分別討論分析如下：

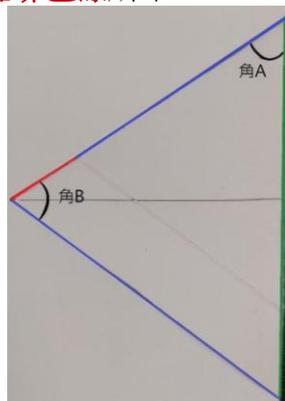
(一) 每層剪角相同的菱形結構—算法一

以下我們將分層討論每一層的旋轉角度算法：

1、第一層旋轉角度：

首先我們將菱形結構中的對摺線轉成縱向，如下圖十三所示。

接著我們沿著第一層摺線將紙摺過去，即會出現第一層的起始位置，如下圖十四的咖啡色線所示：



圖十三



圖十四

接著我們再用第二層起始處和第三層起始處的夾角（ $\angle B$ ）扣除 $3A - (180^\circ - 2A)$ ，就會得到 $\angle 3$ 了。

最後再用 360° 扣掉 $\angle 3$ ，就可以得到第三層的旋轉角度。

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$360^\circ - \{B - [3A - (180^\circ - 2A)]\} = 360^\circ - B + 5A - 180^\circ = 180^\circ - (180^\circ - 2A) + 5A = 7A$$

所以，由上述過程可知**第三層的旋轉角度是 $7A$** 。

4、第四層旋轉角度：

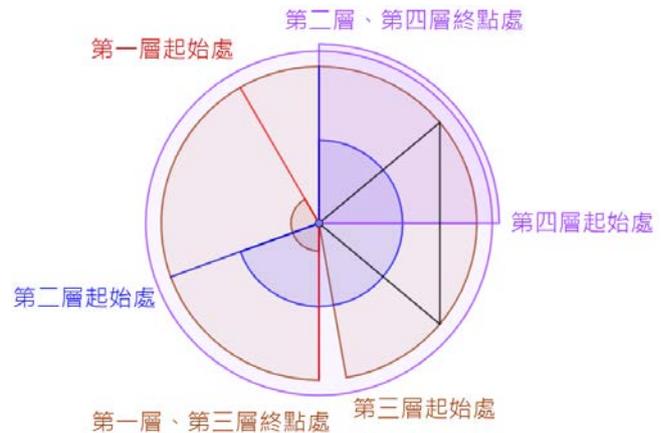
在觀察了第四層的旋轉路徑後，我們發現**第四層的終點處**和**第二層的終點處**一樣都在 0° 位置，且它的旋轉角度是 360° 再多一個**第四層起始處與終點處**的夾角，如**右圖十八**所示。

而**第四層起始處與終點處**的夾角會等於 $180^\circ -$ 「**第三層起始處與第四層起始處**的夾角（ $\angle B$ ）」-「**上圖十七中的 $\angle 3$** 」。

接著，我們將整個算式過程整理如下：

$$\begin{aligned} 360^\circ + 180^\circ - B - \angle 3 &= 540^\circ - B - \{B - [3A - (180^\circ - 2A)]\} \\ &= 540^\circ - 2B + 5A - 180^\circ = 360^\circ - 2 \times (180^\circ - 2A) + 5A = 9A \end{aligned}$$

所以，可以得知**第四層的旋轉角度是 $9A$** 。



圖十八

由上述對第一到四層旋轉角度的分析，我們發現這四層的旋轉角度存在著如下規律性：**第一層 $3A$ 、第二層 $5A$ 、第三層 $7A$ 、第四層 $9A$** 。因此，我們推測每增加一層，旋轉角度就會增加 $2A$ ，也就是兩個剪角的角度。

為了驗證這個推測是合理的，我們又嘗試從另外一個方向來分析每一層之間的旋轉角度變化情形。

（二）每層剪角相同的菱形結構—算法二

1、我們仔細觀察第一層的旋轉角度和**第二層的旋轉角度**，發現：

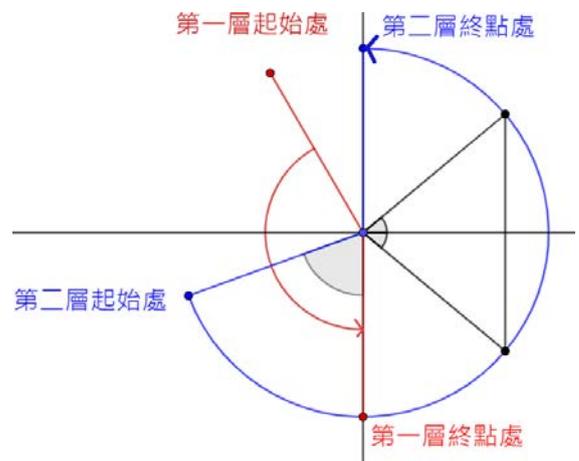
兩者之間在**第二層起始處~第一層終點處**是重疊的，如**右圖十九**的灰色角所示。

而第一層的旋轉角度為**第一層起始處與第二層起始處**的夾角（ $\angle B$ ）+ 灰色角；

第二層的旋轉角度 為 $180^\circ +$ 灰色角；

因此可以得知：**第二層的旋轉角度 - 第一層的**

旋轉角度 = $180^\circ -$ 第一層起始處與第二層起始處的夾角（ $\angle B$ ），也就是 $2A$ ，代表從第一層到第二層的旋轉角度增加了 $2A$ 。



圖十九

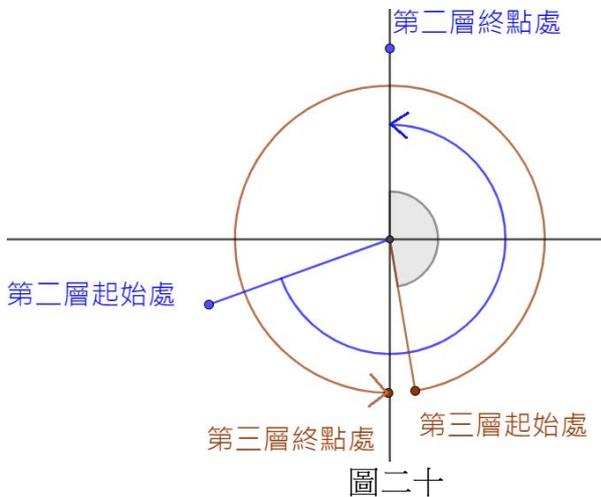
2、接著我們再仔細觀察**第二層的旋轉角度**和**第三層的旋轉角度**，發現：

兩者之間一樣在**第三層起始處~第二層終點處**是重疊的，如**下圖二十**的灰色角所示。

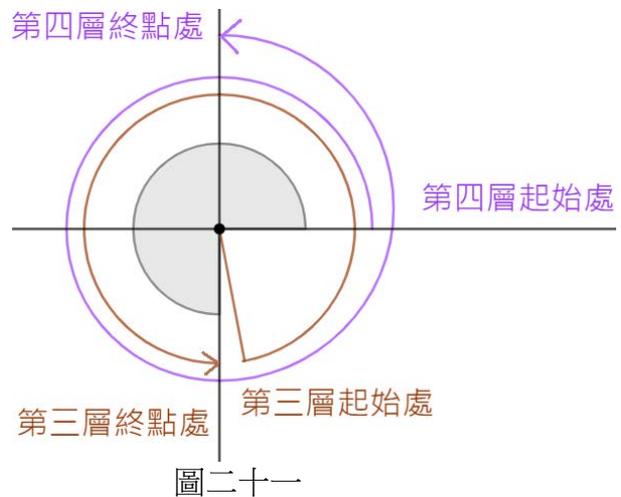
而第二層的旋轉角度為第二層起始處與第三層起始處的夾角（ $\angle B$ ）+ 灰色角；

第三層的旋轉角度為 180° + 灰色角；

因此可以得知：第三層的旋轉角度 - 第二層的旋轉角度 = 180° - 第二層起始處與第三層起始處的夾角（ $\angle B$ ），也就是 $2A$ ，代表從第二層到第三層的旋轉角度同樣增加了 $2A$ 。



圖二十



圖二十一

3、最後，我們又仔細觀察第三層的旋轉角度和第四層的旋轉角度，發現：

兩者之間依然在第四層起始處~第三層終點處是重疊的，如上圖二十一中的灰色角所示。

而第三層的旋轉角度為第三層起始處與第四層起始處的夾角（ $\angle B$ ）+ 灰色角；

第四層的旋轉角度為 180° + 灰色角；

因此可以得知：第四層的旋轉角度 - 第三層的旋轉角度 = 180° - 第三層起始處與第四層起始處的夾角（ $\angle B$ ），也就是 $2A$ ，代表從第三層到第四層的旋轉角度仍然是增加了 $2A$ 。

綜合上述分析，我們發現了以下幾點：

- 第 n 層的旋轉角度和第 $n+1$ 層的旋轉角度在第 $n+1$ 層起始處~第 n 層終點處是重疊的。
- 第 n 層的旋轉角度 = 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角 + 上述 a 的重疊角。
- 第 $n+1$ 層的旋轉角度 = 180° + 上述 a 的重疊角。
- 第 $n+1$ 層的旋轉角度 - 第 n 層的旋轉角度 = 180° - 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角。
- 因為每層剪角相同的菱形結構中，相鄰兩層起始處的夾角都是一個摺角（ $\angle B$ ），因此第 n 層的旋轉角度和第 $n+1$ 層的旋轉角度會差 $180^\circ - B = 180^\circ - (180 - 2A) = 2A$ 。

我們的發現：

- 第 $n+1$ 層的旋轉角度 - 第 n 層的旋轉角度 = 180° - 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角。
- 每層剪角相同的菱形結構中，相鄰兩層的旋轉角度會相差 $2A$ 。

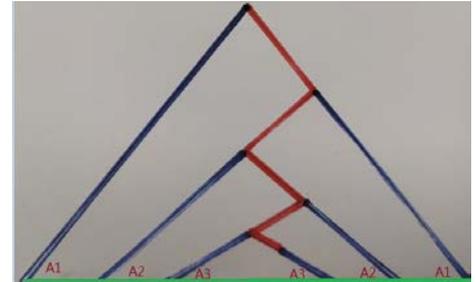
(三) 每層剪角不同的菱形結構

在每層剪角相同的結構中，因為每層剪角相同，所以奇數剪線會互相平行，偶數剪線也會互相平行。因此相鄰兩層起始處之間的夾角都會是一個摺角（ $\angle B$ ）；

但是，在每層剪角不同的結構中，因為每層的剪角皆不同，所以奇數剪線不會互相平行，偶數剪線也不會互相平行。

因此，相鄰兩層起始處之間的夾角就不會是固定的角度了，可想而知，這種結構的旋轉角度算法複雜許多。

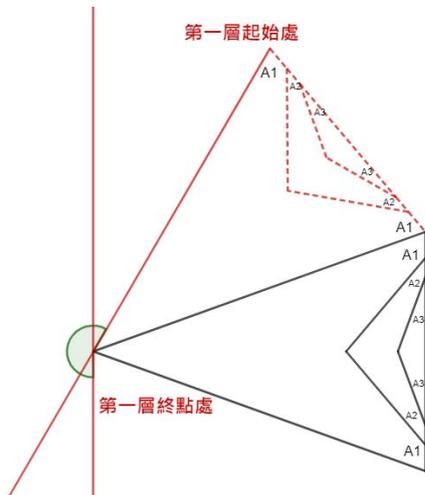
為了找出各層的旋轉角度，我們先將第一層的剪角標示為 A_1 ，第二層的剪角標示為 A_2 以此類推；各層的摺角標示也是依照相同的標示方式，如右圖二十二所示，接著開始分析各層旋轉角度的算法，過程如下：



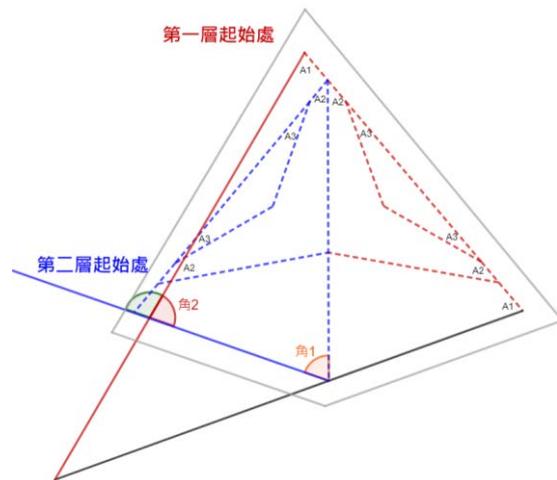
圖二十二

1、第一層旋轉角度：

下圖二十三為第一層旋轉路徑的示意圖，因為第一層旋轉角度只需要考慮第一層的剪角（ A_1 ），因此和每層剪角相同的算法是一樣的，所以可以得知第一層的旋轉角度是 $3A_1$ 。



圖二十三



圖二十四

2、第二層旋轉角度：

從上述分析（二）中我們發現除了第一層外，每一層的旋轉角度和上一層的旋轉角度有著以下的關聯：

第 $n+1$ 層的旋轉角度 - 第 n 層的旋轉角度 = $180^\circ -$ 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角。

因此只要把上一層的旋轉角度加上 180° 再減掉上一層和這一層起始處的夾角就可以知道這一層的旋轉角度了。

上圖二十四為第一層與第二層的示意圖，其中綠色角即為第一層起始處與第二層起始處的夾角，我們的算法為利用框起來的四邊形（灰色框示意處）內角和 360° 減掉 $2A_1$ 再減掉 $2\angle 1$ ，就會得到 $\angle 2$ 。然後，再用 $180^\circ - \angle 2$ ，就可以得到第一層起始處與第二層起始處的夾角了。

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$\angle 1 = 180^\circ - A_1 - A_2$$

$$\angle 2 = 360^\circ - 2A_1 - (180^\circ - A_1 - A_2) \times 2 = 360^\circ - 2A_1 - 360^\circ + 2A_1 + 2A_2 = 2A_2$$

因此，第一層起始處與第二層起始處的夾角為 $180^\circ - 2A_2$ 。

所以，第二層的旋轉角度為 $3A_1 + 180^\circ - (180^\circ - 2A_2)$ ，也就是 $3A_1 + 2A_2$ 。

3、第三層旋轉角度：

右圖二十五為第二層與第三層的示意圖，其中綠色角即為第二層起始處與第三層起始處的夾角。我們的算法為利用框起來的四邊形（灰色框示意處）內角和 $360^\circ - A_1 - A_2 - 2\angle 1$ ，會得到 $\angle 2$ 。

然後，再用 $180^\circ - \angle 2$ ，就可以得到第二層起始處與第三層起始處的夾角了。

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$\angle 1 = 180^\circ - 2A_2$$

$$\angle 2 = 360^\circ - A_1 - A_2 - (180^\circ - 2A_2) \times 2 = 3A_2 - A_1$$

因此，第二層起始處與第三層起始處的夾角為 $180^\circ - (3A_2 - A_1)$ 。

所以，第三層的旋轉角度為 $3A_1 + 2A_2 + 180^\circ - [180^\circ - (3A_2 - A_1)]$ ，也就是 $2A_1 + 5A_2$ 。

4、第四層旋轉角度：

右圖二十六為第三層與第四層的示意圖，其中綠色角即為第三層起始處與第四層起始處的夾角。我們的算法為利用框起來的四邊形（灰色框示意處）內角和 $360^\circ - A_2 - A_2 - 2\angle 1$ ，會得到 $\angle 2$ 。然後，再用 $180^\circ - \angle 2$ ，就可以得到第三層起始處與第四層起始處的夾角了。

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$\angle 1 = 180^\circ - A_2 - A_3$$

$$\angle 2 = 360^\circ - 2A_2 - (180^\circ - A_2 - A_3) \times 2 = 360^\circ - 2A_2 - 360^\circ + 2A_2 + 2A_3 = 2A_3$$

因此，第三層起始處與第四層起始處的夾角為 $180^\circ - 2A_3$ 。

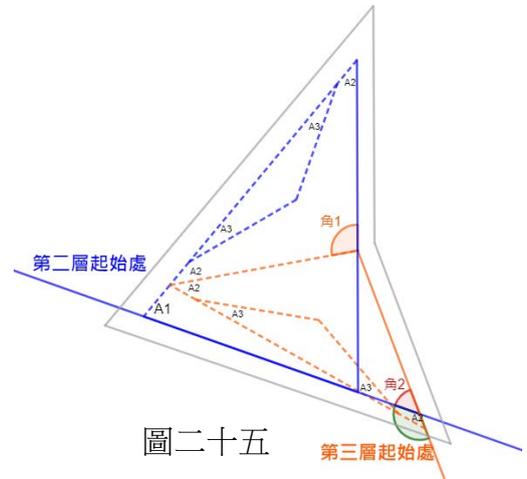
所以，第四層的旋轉角度為 $2A_1 + 5A_2 + 180^\circ - (180^\circ - 2A_3)$

，也就是 $2A_1 + 5A_2 + 2A_3$ 。

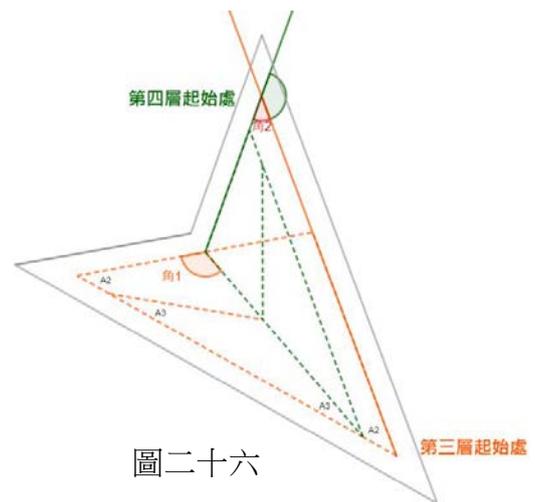
5、第五層旋轉角度：

右圖二十七為第四層與第五層的示意圖，其中綠色角即為第四層起始處與第五層起始處的夾角。我們的算法為利用框起來的四邊形（灰色框示意處）內角和 $360^\circ - A_2 - A_3 - 2\angle 1$ ，會得到 $\angle 2$ 。

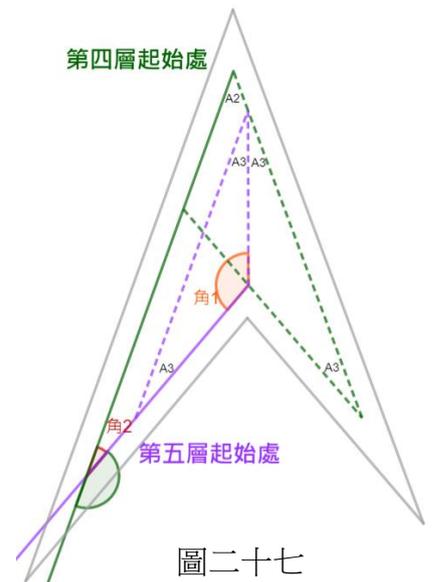
然後，再用 $180^\circ - \angle 2$ ，就可以得到第四層起始處與第五層起始處的夾角了。



圖二十五



圖二十六



圖二十七

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$\angle 1 = 180^\circ - 2A_3$$

$$\angle 2 = 360^\circ - A_2 - A_3 - (180^\circ - 2A_3) \times 2 = 3A_3 - A_2$$

因此，第四層起始處與第五層起始處的夾角為 $180^\circ - (3A_3 - A_2)$ 。

所以，第五層的旋轉角度為 $2A_1 + 5A_2 + 2A_3 + 180^\circ - [180^\circ - (3A_3 - A_2)]$ ，

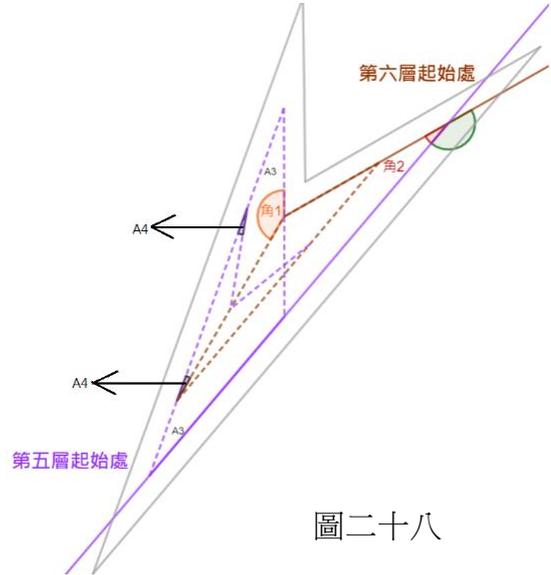
也就是 $2A_1 + 4A_2 + 5A_3$ 。

6、第六層旋轉角度：

右圖二十八為第五層與第六層的示意圖，其中綠色角即為第五層起始處與第六層起始處的夾角。

我們的算法為利用框起來的四邊形（灰色框示意處）內角和 $360^\circ - A_3 - A_3 - 2\angle 1$ ，會得到 $\angle 2$ 。

然後，再用 $180^\circ - \angle 2$ ，就可以得到第五層起始處與第六層起始處的夾角了。



圖二十八

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$\angle 1 = 180^\circ - A_3 - A_4$$

$$\angle 2 = 360^\circ - 2A_3 - (180^\circ - A_3 - A_4) \times 2 = 360^\circ - 2A_3 - 360^\circ + 2A_3 + 2A_4 = 2A_4$$

因此，第五層起始處與第六層起始處的夾角為 $180^\circ - 2A_4$ 。

所以，第六層的旋轉角度為 $2A_1 + 4A_2 + 5A_3 + 180^\circ - (180^\circ - 2A_4)$ ，也就是 $2A_1 + 4A_2 + 5A_3 + 2A_4$ 。

綜合前述針對剪角不同的菱形結構第一層到第六層的旋轉角度分析，我們將相鄰兩層的夾角與旋轉角度差整理如下表：

	第一、二層	第二、三層	第三、四層	第四、五層	第五、六層
中間的夾角	$180^\circ - 2A_2$	$180^\circ - (3A_2 - A_1)$	$180^\circ - 2A_3$	$180^\circ - (3A_3 - A_2)$	$180^\circ - 2A_4$
旋轉角度差	$2A_2$	$3A_2 - A_1$	$2A_3$	$3A_3 - A_2$	$2A_4$

從上面的表格我們發現：

當我們假設 n 為偶數時，第 $n-1$ 層與第 n 層旋轉角度差 $2A_{\frac{n}{2}+1}$ ，

而第 n 層與第 $n+1$ 層旋轉角度差 $3A_{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}}$ 。

並且，我們還發現一個有趣的現象：

從前面的各種研究中都可以發現層數 n 愈大時，旋轉角度就會愈大，

但是在剪角不同的狀況中，因為第 n 層與第 $n+1$ 層旋轉角度差 $3A_{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}}$ ，

所以如果 $A_{\frac{n}{2}}$ 比 $3A_{\frac{n}{2}+1}$ 的三倍還大， $3A_{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}}$ 就會是負的。

這樣一來，第 $n+1$ 層的旋轉角度會比第 n 層的旋轉角度還小。

亦即：在剪角不同的狀況中，當 $A_{\frac{n}{2}}$ 比 $3A_{\frac{n}{2}+1}$ 的三倍還大時，第 $n+1$ 層的旋轉角度會比第 n 層的旋轉角度還小。

(四) 每層剪角相同的鳶形結構

在分析完每層剪角相同與每層剪角不同的菱形結構中各層旋轉角度間的關係後，我們還想知道鳶形結構每一層的旋轉角度各是幾度？各層之間的旋轉角度是否存在規律性？

但是，由於鳶形結構中每一層都有兩個不同的剪角，若各層間相對應的剪角不同的話，整個結構的角度會變得很複雜。

因此，我們先就每層剪角相同的鳶形結構進行討論分析如下：

1、第一層旋轉角度：

我們從右圖二十九中發現第一層的旋轉角度

(紅色弧線部分) 是 180° 扣掉 $\angle 1$ ，

而 $\angle 1$ 是 $\angle B$ 扣掉 $\angle 2$ 。

我們先用 90° 扣掉 $\angle 3$ ($90^\circ - A_1$) 會得到 $\angle 2$ (A_1)。

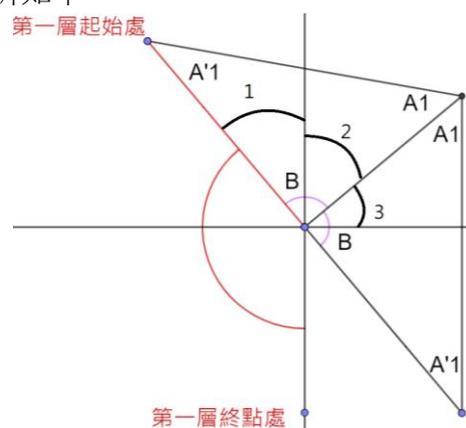
接著，再用 $\angle B$ 扣掉 $\angle 2$ 就會得到 $\angle 1$ 。

最後，拿 180° 扣掉 $\angle 1$ ，就是第一層的旋轉角度。

接著，我們將整個算式過程整理如下：

$$180^\circ - (180^\circ - A_1 - A'_1 - A_1) = 2A_1 + A'_1$$

所以，可以得知第一層的旋轉角度是 $2A_1 + A'_1$ 。



圖二十九

2、第二層以上的旋轉角度：

我們從分析(二)中得知除了第一層外，每一層的旋轉角度和上一層的旋轉角度有著以下的關聯：

第 $n+1$ 層的旋轉角度 - 第 n 層的旋轉角度 = $180^\circ -$ 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角。

也就是，第 n 層的旋轉角度是第 $n-1$ 層的旋轉角度加上

($180^\circ -$ 第 $n-1$ 層起始處和第 n 層起始處的夾角)，

而在每層剪角相同的鳶形結構中，

第 $n-1$ 層起始處和第 n 層起始處的夾角都會是 $\angle B$ ，也就是 $180^\circ - (A_1 + A'_1)$ 。

所以，可以得知第 n 層的旋轉角度是第 $n-1$ 層的旋轉角度再加上 $(A_1 + A'_1)$ 。

我們的發現：每層剪角相同的鳶形結構中，相鄰兩層的旋轉角度會相差 $(A_1 + A'_1)$ 。

(五) 每層剪角不同的鳶形結構

雖然每層剪角不同的鳶形結構中，因為有許多不同的剪角，而讓整個結構變得十分複雜。

但是，我們認為此結構的旋轉角度算法應該會和每層剪角不同的菱形結構有相似之處。於是，我們便開始針對每一層的旋轉角度分析如下：

1、第一層旋轉角度：

右圖三十是第一層旋轉角度示意圖。

因為第一層旋轉角度只需要考慮第一層的剪角 (A_1 和 A'_1)，

所以和每層剪角相同的鳶形結構算法是一樣的。

因此，可以得知第一層的旋轉角度是 $2A_1 + A'_1$ 。

2、第二層旋轉角度：

從分析(二)中我們知道除了第一層外，第 $n+1$ 層的旋轉角度 - 第 n 層的旋轉角度 = $180^\circ -$ 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角。

因此，只要把上一層的旋轉角度加上 180° 再減掉上一層和這一層起始處的夾角，就可以知道這一層的旋轉角度了。

右圖三十一為第一層與第二層的示意圖，其中綠色角即為第一層起始處與第二層起始處的夾角。

我們的算法為利用框起來的四邊形 (灰色框示意處) 內角和

$360^\circ - A_1 - A'_1 - 2\angle 1$ ，就會得到 $\angle 2$ 。

然後，再用 $180^\circ - \angle 2$ ，就可以得到

第一層起始處與第二層起始處的夾角了。

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$\angle 1 = 180^\circ - A'_2 - A_1$$

$$\angle 2 = 360^\circ - A_1 - A'_1 - (180^\circ - A'_2 - A_1) \times 2 = A_1 + 2A'_2 - A'_1$$

因此，第一層起始處與第二層起始處的夾角為 $180^\circ - (A_1 + 2A'_2 - A'_1)$ 。

所以，第二層的旋轉角度為 $2A_1 + A'_1 + 180^\circ - [180^\circ - (A_1 + 2A'_2 - A'_1)]$ ，也就是 $3A_1 + 2A'_2$ 。

3、第三層旋轉角度：

右圖三十二為第二層與第三層的示意圖，其中綠色角即為第二層起始處與第三層起始處的夾角。

我們的算法為利用框起來的四邊形 (灰色框示意處) 內角和 $360^\circ - A_1 - A'_2 - 2\angle 1$ ，會得到 $\angle 2$ 。

然後，再用 $180^\circ - \angle 2$ ，就可以得到第二層起始處與第三層起始處的夾角了。

接著，我們把上述過程的算式整理如下：

$$\angle 1 = 180^\circ - A'_2 - A_2$$

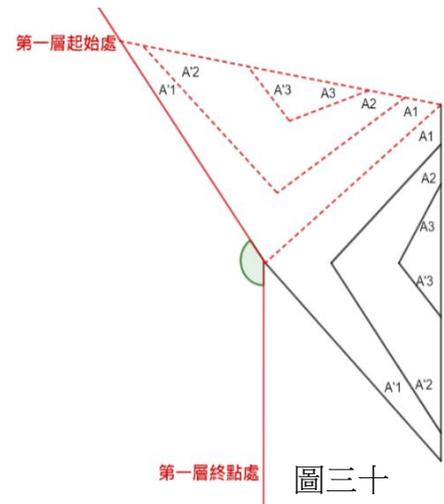
$$\angle 2 = 360^\circ - A_1 - A'_2 - (180^\circ - A'_2 - A_2) \times 2$$

$$= A'_2 + 2A_2 - A_1$$

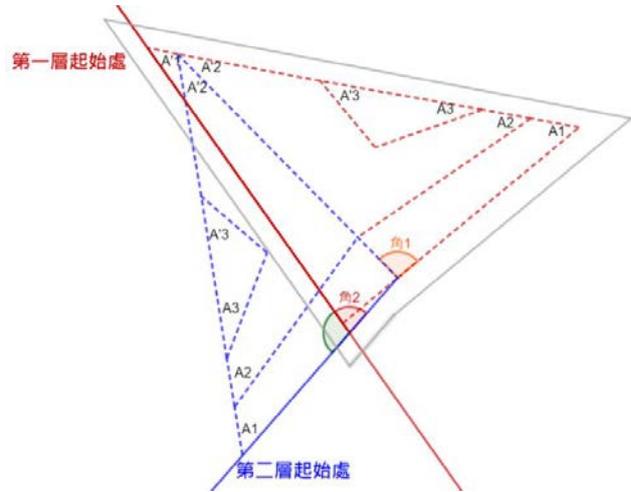
因此，第二層起始處與第三層起始處的夾角為 $180^\circ - (A'_2 + 2A_2 - A_1)$ 。

所以，第三層的旋轉角度為 $3A_1 + 2A'_2 + 180^\circ - [180^\circ - (A'_2 + 2A_2 - A_1)]$ ，

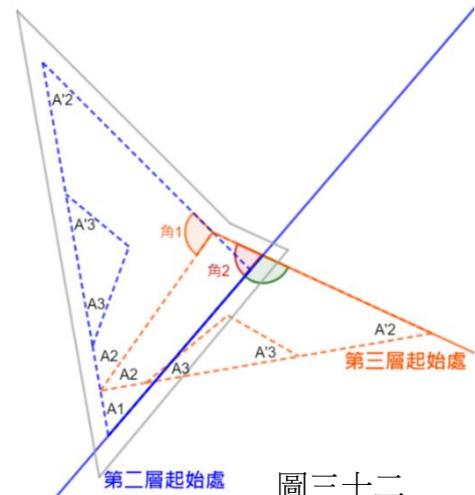
也就是 $2A_1 + 2A_2 + 3A'_2$ 。



圖三十



圖三十一



圖三十二

4、第四層以上的旋轉角度：

在分析完剪角不同的鸞形結構中第一層～第三層的旋轉角度後，我們發現其實相鄰兩層之間的旋轉角度差與剪角不同的菱形結構大致相同。

因此，我們在觀察了剪角不同的菱形結構與剪角不同的鸞形結構角度的差異後，發現兩者差異只有：

$$A_1 \text{ 分支成 } A_1 \text{ 和 } A'_1、A_2 \text{ 分支成 } A_2 \text{ 和 } A'_2 \dots\dots。$$

所以，我們先將相對應的角度做調換後，再將剪角不同的鸞形結構中相鄰兩層間的夾角與旋轉角度差整理成下表：

	第一、二層	第二、三層	第三、四層	第四、五層
中間的夾角	$180^\circ - (A_1 + 2A'_2 - A'_1)$	$180^\circ - (A'_2 + 2A_2 - A_1)$	$180^\circ - (A_2 + 2A'_3 - A'_2)$	$180^\circ - (A'_3 + 2A_3 - A_2)$
旋轉角度差	$A_1 + 2A'_2 - A'_1$	$A'_2 + 2A_2 - A_1$	$A_2 + 2A'_3 - A'_2$	$A'_3 + 2A_3 - A_2$

從上面的表格我們發現：

當我們假設 n 為偶數時，第 $n-1$ 層與第 n 層旋轉角度差 $A_n + 2A'_{\frac{n}{2}+1} - A'_{\frac{n}{2}}$ ，

而第 n 層與第 $n+1$ 層旋轉角度差 $A'_{\frac{n}{2}+1} + 2A_{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}}$ ；

並且我們還發現剪角不同的鸞形結構和剪角不同的菱形結構類似，都有可能發生層數愈大，旋轉角度就會愈小的狀況：

因為，第 $n-1$ 層與第 n 層旋轉角度差 $A_n + 2A'_{\frac{n}{2}+1} - A'_{\frac{n}{2}}$ ，

所以，如果 $A'_{\frac{n}{2}}$ 比 $A_n + 2A'_{\frac{n}{2}+1}$ 還大， $A_n + 2A'_{\frac{n}{2}+1} - A'_{\frac{n}{2}}$ 就會是負的，

這樣一來，第 n 層的旋轉角度會比第 $n-1$ 層的旋轉角度還小。

同理可知：因為第 n 層與第 $n+1$ 層旋轉角度差 $A'_{\frac{n}{2}+1} + 2A_{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}}$ ，

所以如果 $A_{\frac{n}{2}}$ 比 $A'_{\frac{n}{2}+1} + 2A_{\frac{n}{2}+1}$ 還大， $A'_{\frac{n}{2}+1} + 2A_{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}}$ 就會是負的，

這樣一來，第 $n+1$ 層的旋轉角度會比第 n 層的旋轉角度還小。

亦即：當 $A_{\frac{n}{2}}$ 比 $A'_{\frac{n}{2}+1} + 2A_{\frac{n}{2}+1}$ 還大時，第 $n+1$ 層的旋轉角度會比第 n 層的旋轉角度還小；

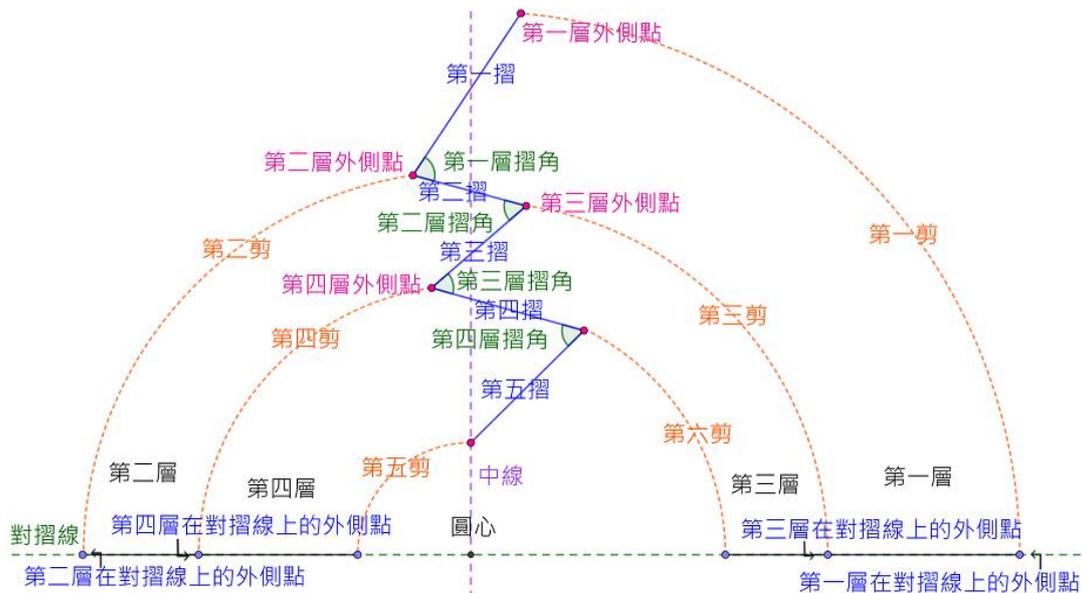
當 $A'_{\frac{n}{2}}$ 比 $A_n + 2A'_{\frac{n}{2}+1}$ 還大時，第 n 層的旋轉角度會比第 $n-1$ 層的旋轉角度還小。

三、探討紙張旋轉的圓形結構並找出能順利旋轉的關鍵要素

當我們將一張紙對摺，並畫出一個個不同半徑的同心半圓，那麼此種畫法在把紙展開時會呈現出圓形的外觀，因此我們將依照此種畫法做出的旋轉結構稱為「圓形結構」。

圓形結構較菱形結構及鸞形結構複雜許多，因此結構中包含的要素也比較多。

下圖三十三為圓形結構的示意圖，在這個結構中包含下列要素：



圖三十三

- (一) 綠色虛線是將整張紙對摺的對摺線。
- (二) 紫色虛線是通過圓心並和對摺線垂直的中線。
- (三) 橘色弧線是各層的剪線。
- (四) 藍色線段是各層的摺線。
- (五) 相鄰摺線間的夾角，我們將它稱做「摺角」。
- (六) 粉紅色點是各層的外側點，在之後計算角度時需要與藍色點連線使用。
- (七) 藍色點是各層在對摺線上的外側點，在之後計算角度時需要與粉紅色點連線使用。

經過我們不斷測試與研究後發現：

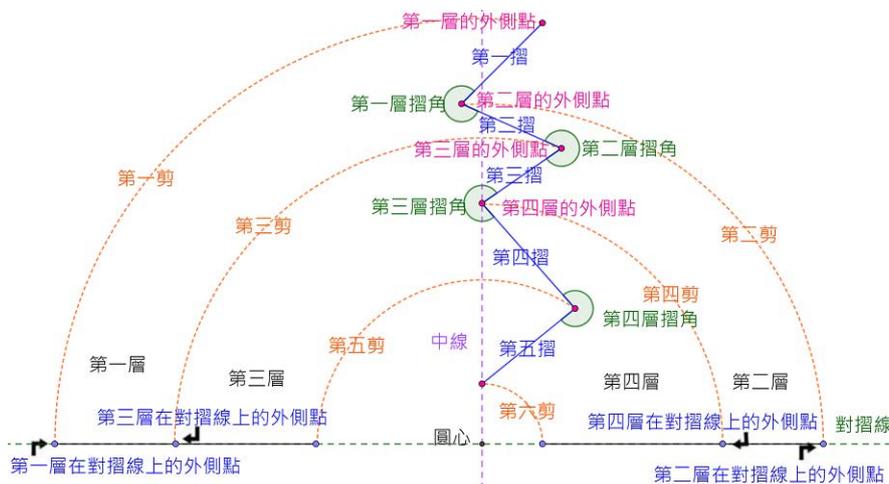
第一層在旋轉的過程中不會通過其他層剪出來的洞，而第二層是和第一層連動的。所以，當第一層轉動時，第二層就會跟著轉動，因此第二層也不會卡住。

又因為第三層是畫在第一層下方，所以不會和第一層卡住。

同樣地，第三層也不會和第二層卡住，因為它是和第二層連動的。

因此，三層以下的圓形結構只要符合下列條件即可讓紙張透過開合而順利的旋轉，且每層不會互相重疊：

- a. 各層的摺線呈現階梯狀，如上圖三十三中的藍線所示。
- b. 各層的摺角不等於 180° ，如上圖三十三的圓形結構中摺角皆小於 180° ，則旋轉方向為逆時針；而下圖三十四的圓形結構中摺角皆大於 180° ，則旋轉方向為順時針。



圖三十四

第四層有可能和第一層卡住，

因為第四層在畫的時候不是在第一層下方，也沒有和第一層連動，

因此，可能因為上一層剪下的洞不夠下一層順利通過而有可能和第一層卡住。

所以，如果想讓四層以上的圓形結構能夠順利旋轉，則必須從第四層開始分層檢查，檢查步驟如下：（以欲檢查第 n 層為例說明）

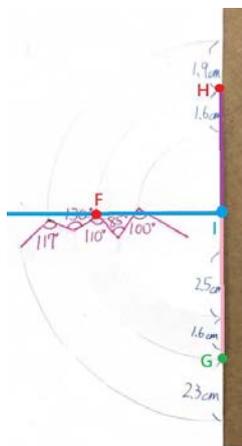
步驟一：以第 n 層的外側點（如下圖三十五及下圖三十七的 F 點）和對摺線垂直處當作中心點（如下圖三十五及下圖三十七的 I 點）。

步驟二：標示出第 n 層在對摺線上的外側點（如下圖三十五及下圖三十七的 H 點）到中心點的距離，下圖三十五及下圖三十七的紫線所示。

步驟三：標示出第 $n-1$ 層在對摺線上的外側點（如下圖三十五及下圖三十七的 G 點）到中心點的距離，如下圖三十五及下圖三十七的粉紅線所示。

步驟四：若紫線 $<$ 粉紅線，則可以順利旋轉。（如下圖三十六所示）

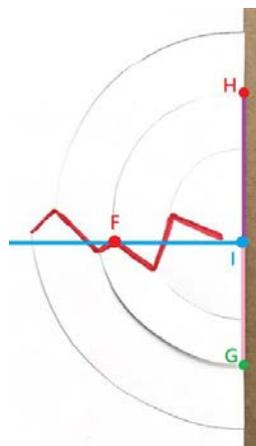
步驟五：若紫線 $>$ 粉紅線，則會因為卡住而無法順利旋轉。（如下圖三十八的紅框所示）



圖三十五



圖三十六

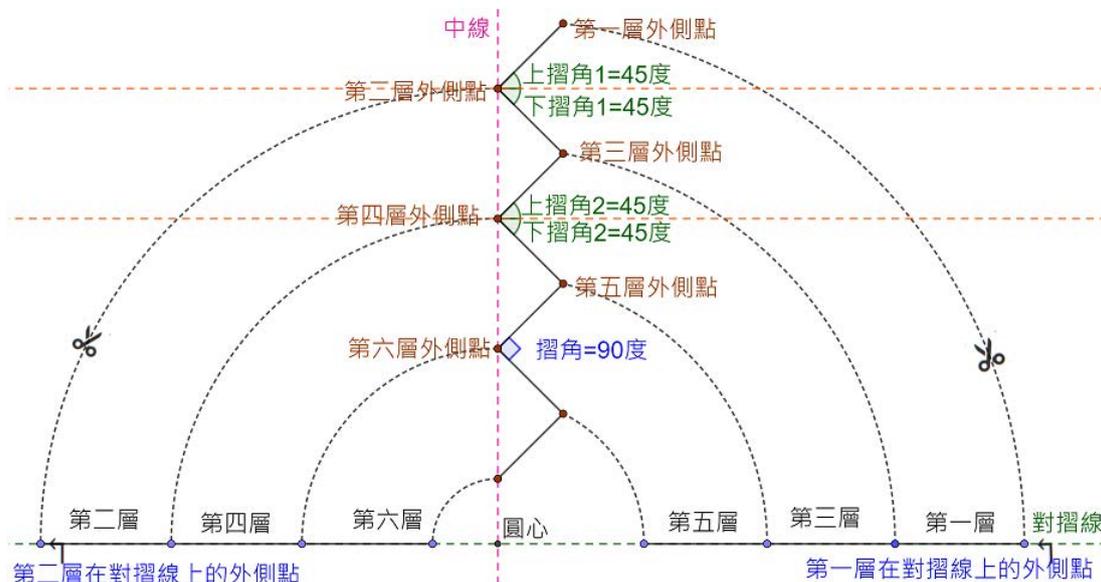


圖三十七



圖三十八

以下我們以固定每層摺角及中線上偶數層間距為例，示範如何做出能夠順利旋轉且不會卡住的六層旋轉結構：



圖三十九

- (1) 首先我們要把紙由下往上做對摺，我們稱這條綠色虛線為「對摺線」。
- (2) 畫一條和對摺線垂直的線，我們稱這條粉紅線為「中線」。
- (3) 中線和對摺線的交點就是整張圖的圓心。
- (4) 在中線由下往上先在 1 公分處做一個記號，接著每 2 公分做一個記號，這些記號我們稱它為「偶數層的外側點」。
- (5) 通過偶數層的外側點，各畫一條和對摺線平行的線
- (6) 以各偶數層的外側點為端點在平行線上方及下方各畫半個摺角（上圖三十九是以 45° 示範，代表摺角為 90° ）。
- (7) 兩條 45° 度角線的交點就成為「奇數層的外側點」。
- (8) 用圓規將每層的外側點以該層外側點到圓心的距離為半徑，畫一圓弧至對摺線上，接著只要將每條圓弧剪開，並沿著摺線摺起，便能讓紙旋轉了。

我們的發現：

- 1、三層以下的圓形結構只要符合下列條件即可讓紙張透過開合而順利的旋轉，且每層不會互相重疊：
 - a. 各層的摺線呈現階梯狀。
 - b. 各層的摺角不等於 180° 。其中，若摺角皆小於 180° ，則旋轉方向為逆時針；若摺角皆大於 180° ，則旋轉方向為順時針。
- 2、四層以上的圓形結構除了要符合上述條件外，還須分層檢查是否會有卡住狀況。

四、探討圓形結構中，剪紙層數、摺角及間距和旋轉角度的關係

由於在圓形結構中的變數較多，剪紙層數、摺角及間距都會影響旋轉角度，且因為每一層都是圓弧，各層的起始處也不像菱形結構或鳶形結構那樣有明確的一直線。因此，我們先以每層摺角及對摺線上的間距都相同的圓形結構為例進行分析，再針對摺角及間距的其他變化分別分析於後：

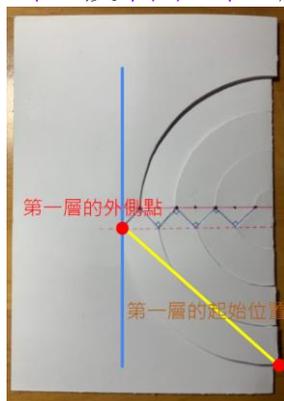
(一) 每層摺角 $< 180^\circ$

1、每層摺角、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：

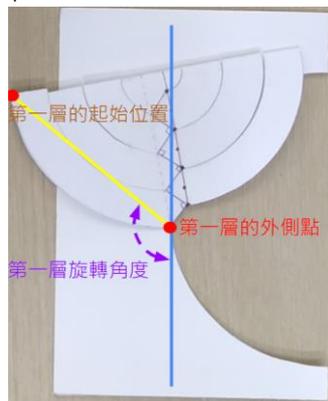
以下我們以摺角 90° ，對摺線上的間距 2 公分為例子進行分析。

首先，我們將圓形結構中的對摺線轉成縱向，如下圖四十所示。接著，我們將第一層的外側點與第一層在對摺線上的外側點連線，如下圖四十一中的黃線所示。

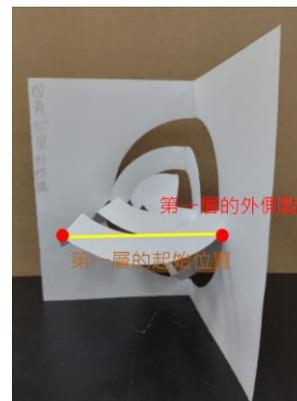
最後，沿著第一層摺線將紙摺過去，黃線所示的位置即為第一層的起始位置，如下圖四十一及下圖四十二所示：



圖四十



圖四十一

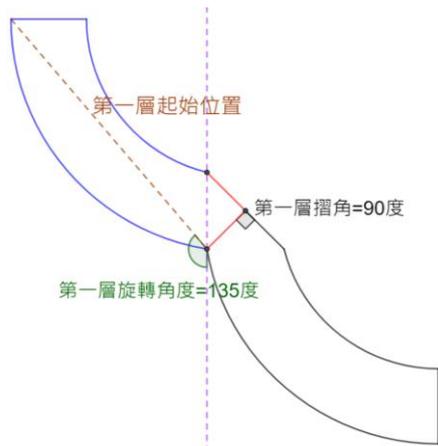


圖四十二

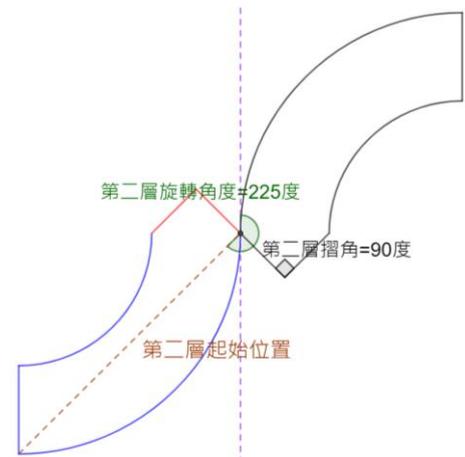
接下來我們便以各層外側點與該層在對摺線上的外側點連線為該層的起始位置進行各層旋轉角度的分析。

我們發現：在每層摺角 $< 180^\circ$ 的圓形結構中，旋轉方向和菱形結構一樣是逆時針，且奇數層的終點處都在 180° 位置，而偶數層的終點處都在 0° 位置。

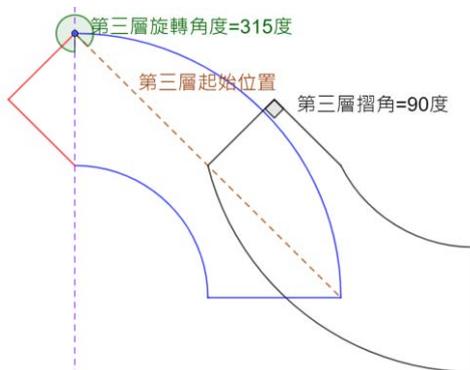
接著我們便可依據各層的起始處和終點處位置找出各層的旋轉角度，如上圖四十一中的紫色圓弧部分即為第一層的旋轉角度。而下圖四十三~下圖四十六，則是以摺角 90° ，間距2公分所繪製出的第一層到第四層旋轉角度示意圖，其中黑線框起的部分是每層原本的位置，也就是還沒摺之前每層一開始畫的地方，藍線則是每層旋轉過後最後停留的位置，紅線是摺線，藍點是每層的外側點，黑色是每層的摺角，綠色角度就是我們要算的旋轉角度。



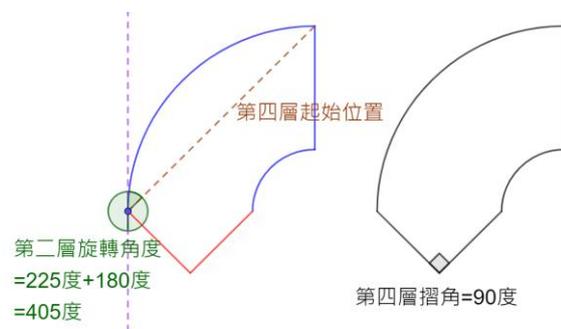
圖四十三：第一層旋轉角度



圖四十四：第二層旋轉角度



圖四十五：第三層旋轉角度



圖四十六：第四層旋轉角度

因為這部分計算角度的方法已經超過我們現在的能力範圍了，所以我們使用 Geogebra 的程式來計算角度，並將第一層~第四層的旋轉角度紀錄於下表：

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	90°	90°	90°	90°
旋轉角度	135°	225°	315°	405°

從上表我們可以發現：

當每層摺角及間距都相同時，愈內層的旋轉角度會愈大，並剛好相差一個摺角的角度。

接著，我們想再探討當每層摺角都 $< 180^\circ$ 時，「每層摺角都相同、間距都不相同」、
 「每層摺角都不相同、間距都相同」、「每層摺角、間距都不相同」，
 以及當每層摺角都 $> 180^\circ$ 時，「每層摺角、間距都相同」、「每層摺角都相同、間距都不相
 同」、「每層摺角都不相同、間距都相同」、「每層摺角、間距都不相同」

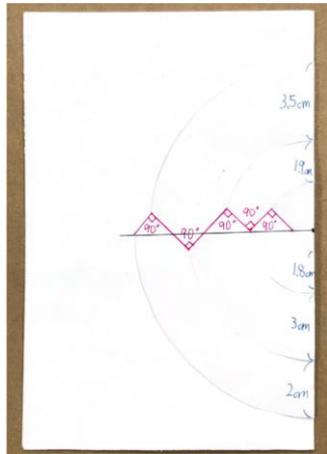
這七種不同情況下，其間距和摺角的變化對旋轉角度所造成的影響，進行分析，
 並將這七種不同情況中一到四層旋轉前後的位置、旋轉角度及摺角都記錄下來，成果如下：

2、每層摺角都相同、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：

以下我們以摺角 90° ，對摺線上的間距分別為 3.5 公分、1.9 公分、1.8 公分、3 公分
 和 2 公分為例子進行分析。

下圖四十七為其結構圖，下圖四十八為其展開圖，

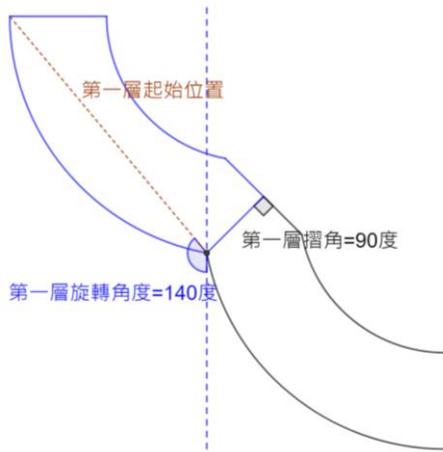
下圖四十九到下圖五十二則是第一層到第四層旋轉角度示意圖：



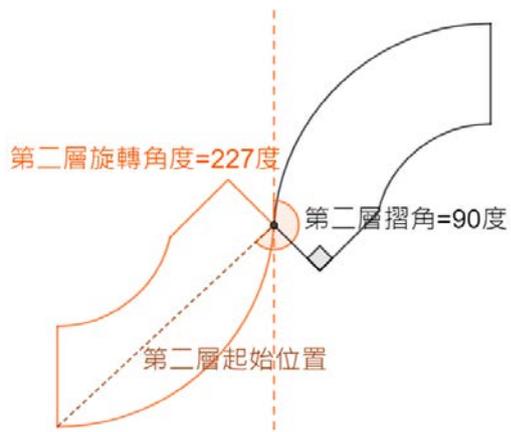
圖四十七



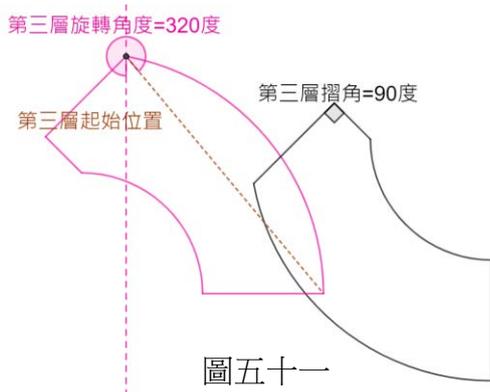
圖四十八



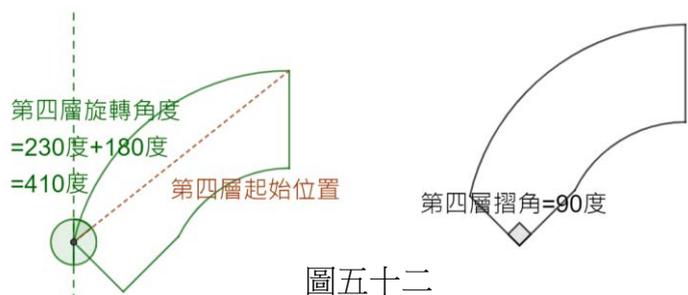
圖四十九



圖五十



圖五十一



圖五十二

接著我們將第一層～第四層的旋轉角度紀錄於下表：

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	90°	90°	90°	90°
旋轉角度	140°	227°	320°	410°

從上表我們可以發現：

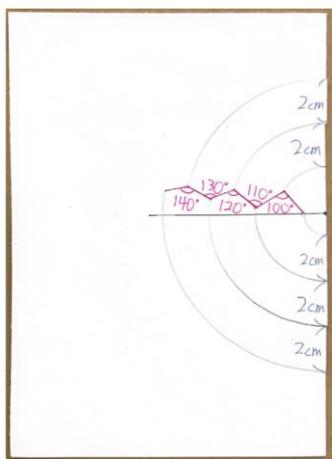
當每層摺角都相同、間距都不相同的時候，愈內層的旋轉角度會愈大，而且每層相差的角度都會大約是一個摺角的角度。

3、每層摺角都不相同、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：

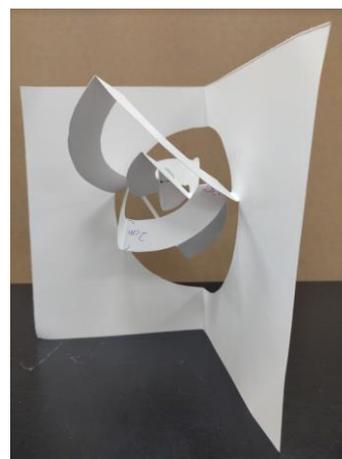
以下我們以摺角分別為140°、130°、120°和110°，對摺線上的間距2公分為例子進行分析。

下圖五十三為其結構圖，下圖五十四為其展開圖，

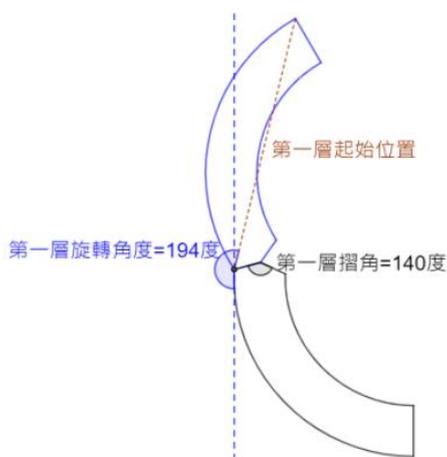
下圖五十五到圖五十八則是第一層到第四層旋轉角度示意圖：



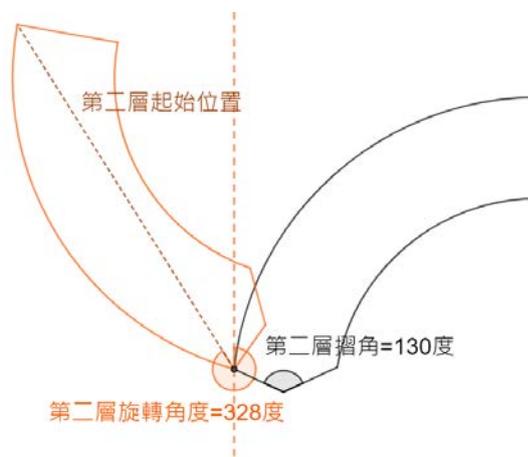
圖五十三



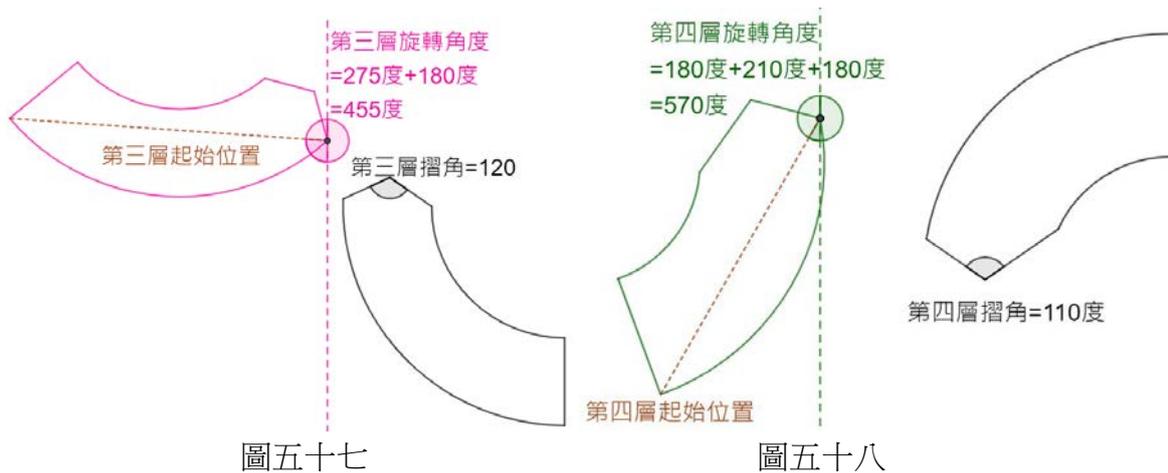
圖五十四



圖五十五



圖五十六



接著我們將第一層~第四層的旋轉角度紀錄於下表：

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	140°	130°	120°	110°
旋轉角度	194°	328°	455°	570°

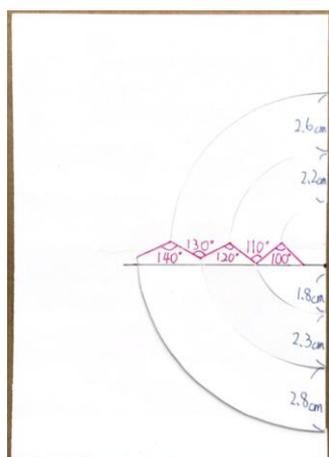
從上表我們可以發現：當每層摺角都不相同、間距都相同的時候，愈內層的旋轉角度會愈大，且每層相差大約一個當層的摺角。

4、每層摺角、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：

以下我們以摺角分別為140°、130°、120°和110°，對摺線上的間距分別為2.6公分、2.2公分、1.8公分、2.3公分和2.8公分為例子進行分析。

下圖五十九為其結構圖，下圖六十為其展開圖。

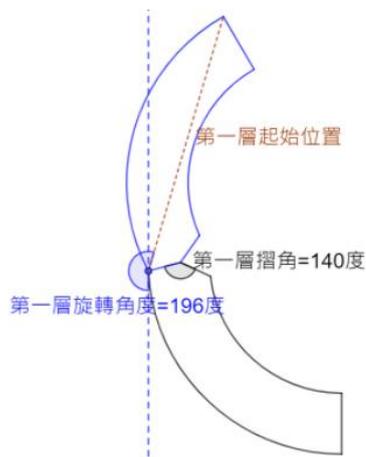
下圖六十一到下圖六十四則是第一層到第四層旋轉角度示意圖：



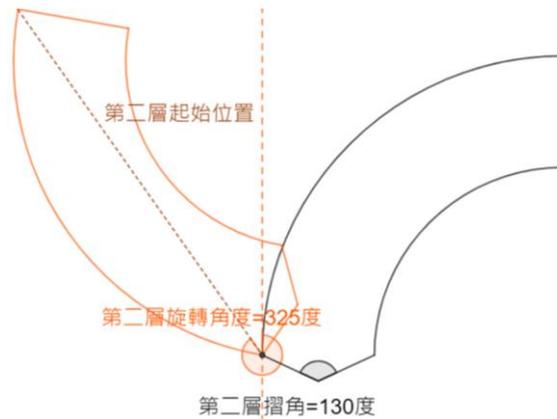
圖五十九



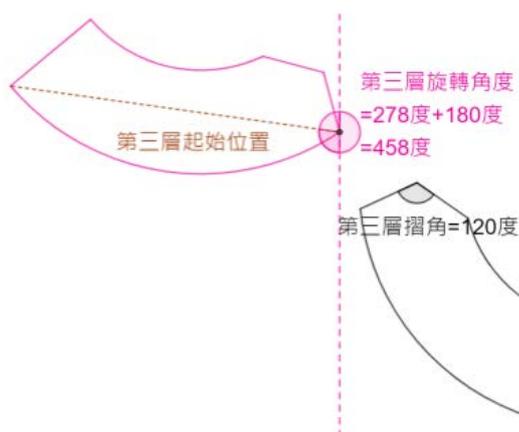
圖六十



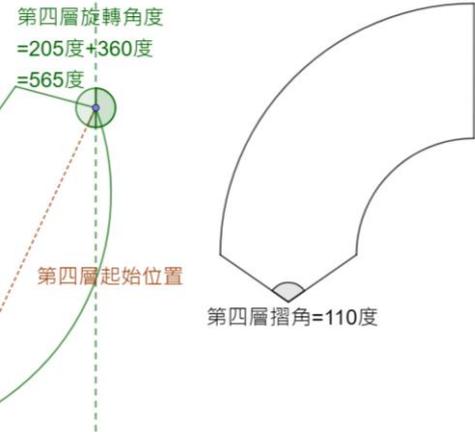
圖六十一



圖六十二



圖六十三



圖六十四

接著我們將第一層~第四層的旋轉角度紀錄於下表：

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	140°	130°	120°	110°
旋轉角度	196°	325°	458°	565°

從上表我們可以發現：當每層摺角、間距都不相同時，愈內層的旋轉角度會愈大，且每層相差大約一個當層的摺角。

我們的發現：

在圓形結構中，當每層摺角 $< 180^\circ$ 時，不管每層摺角及對摺線上的間距是否都相同，愈內層的旋轉角度都會愈大，且相鄰兩層的旋轉角度都會相差大約一個當層的摺角。

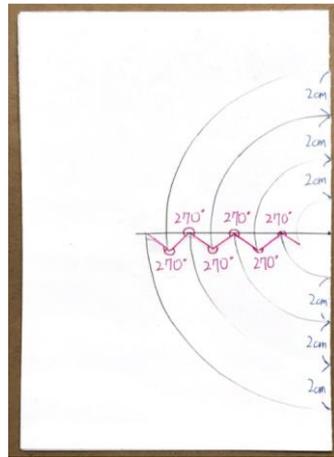
(二) 每層摺角 $> 180^\circ$

1、每層摺角、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：

以下我們以摺角 270° ，對摺線上的間距為 2 公分為例子進行分析。

下圖六十五為其結構圖，下圖六十六為其展開圖。

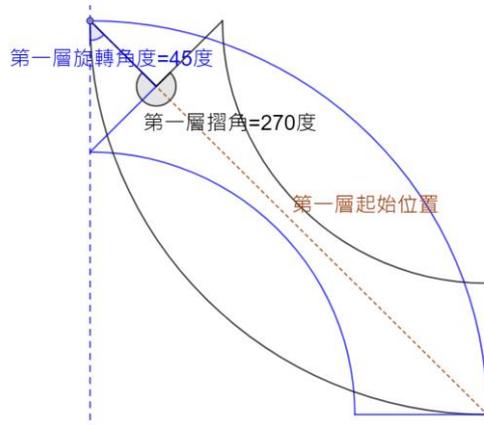
下圖六十七到下圖七十則是第一層到第四層旋轉角度示意圖：



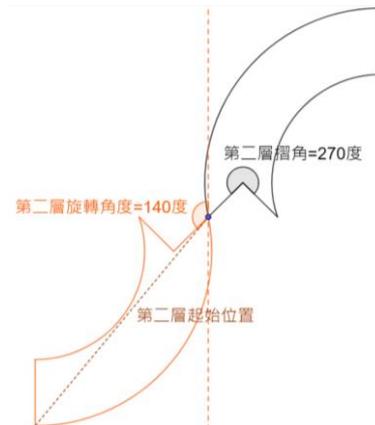
圖六十五



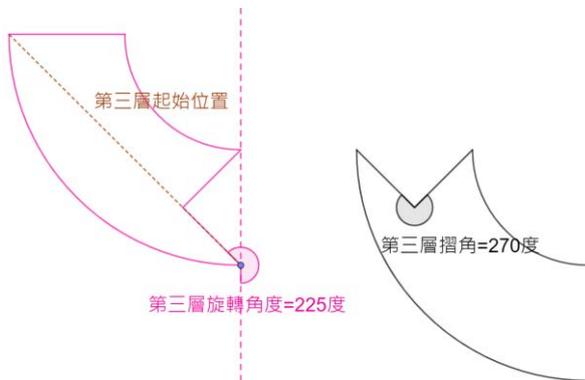
圖六十六



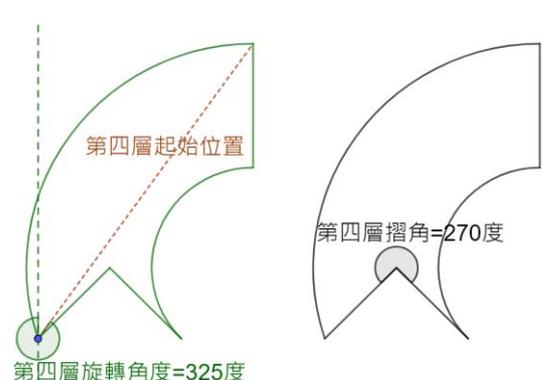
圖六十七



圖六十八



圖六十九



圖七十

接著我們將第一層~第四層的旋轉角度紀錄於下表：

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	270°	270°	270°	270°
旋轉角度	45°	140°	225°	325°

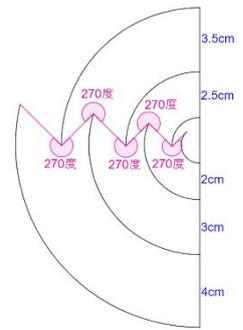
從上表我們可以發現：當每層摺角都 > 180° 且相同、間距也都相同的時候，愈內層的旋轉角度會愈大。

接著，我們繼續以此模式分析接下來的三種狀況，並將成果記錄如下：

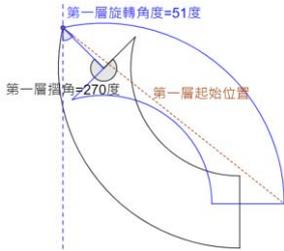
2、每層摺角都相同、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：

以下我們以摺角 270° ，對摺線上的間距分別為 3.5 公分、2.5 公分、2 公分、3 公分和 4 公分為例子進行分析。

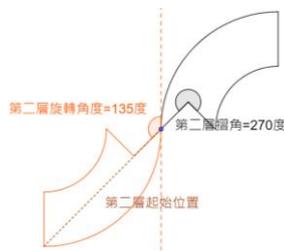
右圖七十一為其結構圖，下圖七十二到下圖七十五是第一層到第四層旋轉角度示意圖，右下表則為旋轉角度紀錄表：



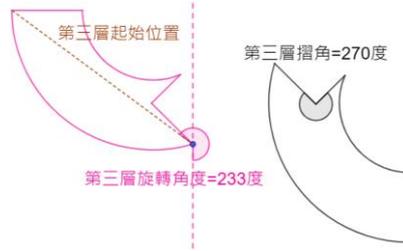
圖七十一



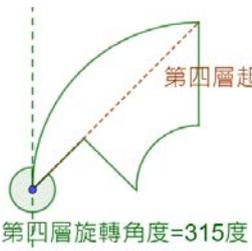
圖七十二



圖七十三



圖七十四



圖七十五

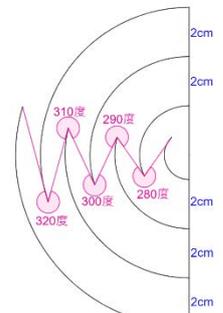
	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	270°	270°	270°	270°
旋轉角度	51°	135°	233°	315°

從上表我們可以發現：當每層摺角都 $> 180^\circ$ 且相同、間距都不相同的時候，愈內層的旋轉角度會愈大，

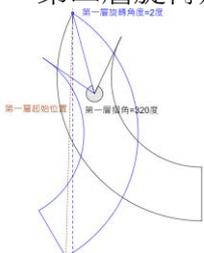
3、每層摺角都不相同、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：

以下我們先以摺角分別為 320° 、 310° 、 300° 、 290° 和 280° ，對摺線上的間距 2 公分為例子進行分析。

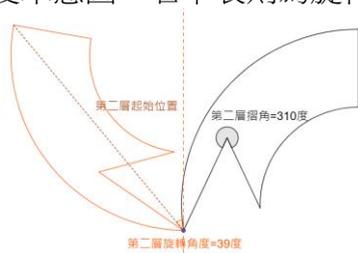
右圖七十六為其結構圖，下圖七十七到下圖八十是第一層到第四層旋轉角度示意圖，右下表則為旋轉角度紀錄表：



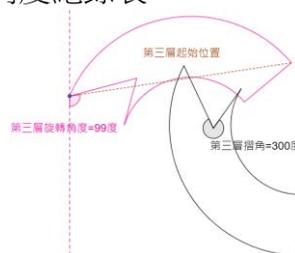
圖七十六



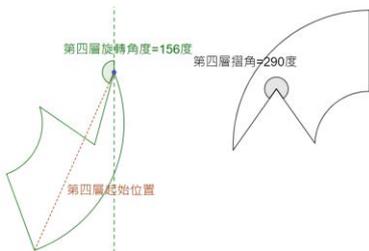
圖七十七



圖七十八



圖七十九



圖八十

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	320°	310°	300°	290°
旋轉角度	2°	39°	99°	156°

接著，我們再將每層的摺角差距拉大，以摺角分別為 240° 、 210° 、 260° 、 300° 和 280° ，對摺線上的間距 2 公分為例子進行分析。

下圖八十一為其結構圖，下表則為旋轉角度紀錄表：



圖八十一

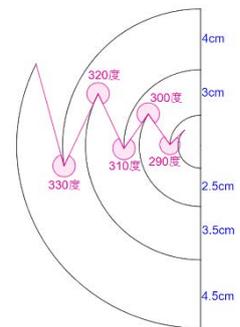
	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	240°	210°	260°	300°
旋轉角度	23°	193°	318°	397°

由上面兩個旋轉角度紀錄表可以發現：當每層摺角都 $>180^\circ$ 但不相同、間距都相同的時候，愈內層的旋轉角度會愈大，且當每層摺角差距拉大時，旋轉角度差也會變大。

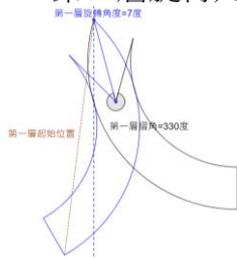
4、每層摺角、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：

以下我們先以摺角分別為 330° 、 320° 、 310° 、 300° 和 290° ，對摺線上的間距分別為4公分、3公分、2.5公分、3.5公分和4.5公分為例子進行分析。

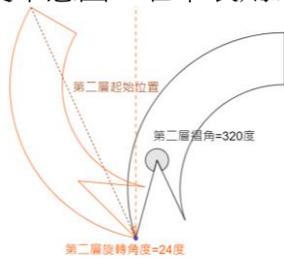
右圖八十二為其結構圖，下圖八十三到下圖八十六是第一層到第四層旋轉角度示意圖，右下表則為旋轉角度紀錄表：



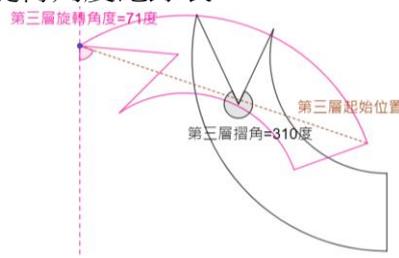
圖八十二



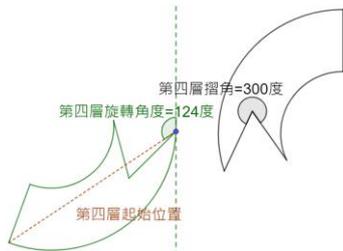
圖八十三



圖八十四



圖八十五



圖八十六

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	330°	320°	310°	300°
旋轉角度	7°	24°	71°	124°

接著，我們再將每層的摺角差距拉大，以摺角分別為 240° 、 210° 、 260° 和 300° ，對摺線上的間距分別為2.65公分、1.32公分、1.97公分和2.33公分為例子進行分析。

下圖八十七為其結構圖，下表則為旋轉角度紀錄表：



圖八十七

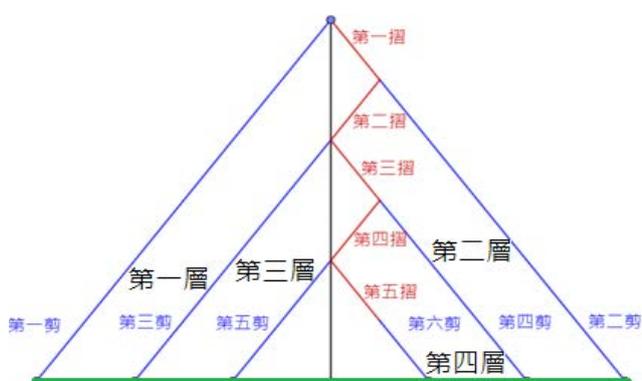
	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	240°	210°	260°	300°
旋轉角度	23°	193°	318°	397°

由上面兩個旋轉角度紀錄表可以發現：當每層摺角都 $> 180^\circ$ 但不相同、間距也都不相同的時候，愈內層的旋轉角度會愈大，且當每層摺角差距拉大時，旋轉角度差也會變大。

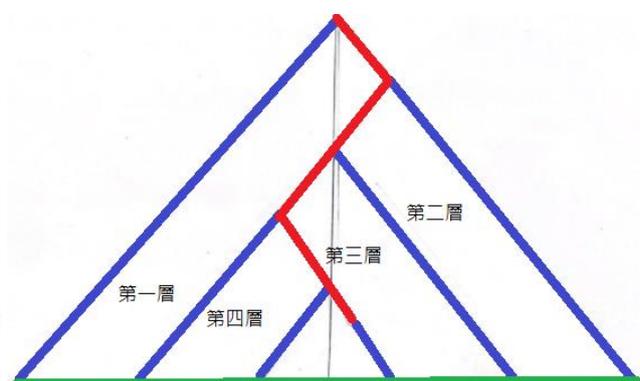
伍、研究結果

一、探討紙張旋轉的菱形結構及鳶形結構並找出能順利旋轉的關鍵要素

- (一) **菱形結構**：我們發現在菱形結構中，當摺線呈現階梯狀的時候可以正常的旋轉（如下圖八十八所示）；
但如果其中有摺線不是呈階梯狀的話，這樣摺線成一直線的那兩層就會合併成一層，（如下圖八十九所示）因此相同摺線的那一層就顯得沒有意義了。

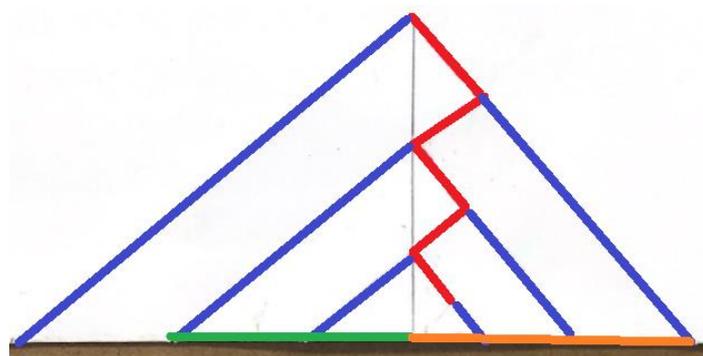


圖八十八



圖八十九

- (二) **鳶形結構**：我們發現如果要讓只有一條對稱軸的鳶形結構順利旋轉，除了摺線要呈階梯狀外，必須要讓「中線至較大剪角之頂點的距離」 \geq 「中線至較小剪角之頂點的距離」-「第一層剪線和第三層剪線在對摺線上的間距」（如下圖九十中橘線 $>$ 綠線，即為可以旋轉的鳶形結構）。

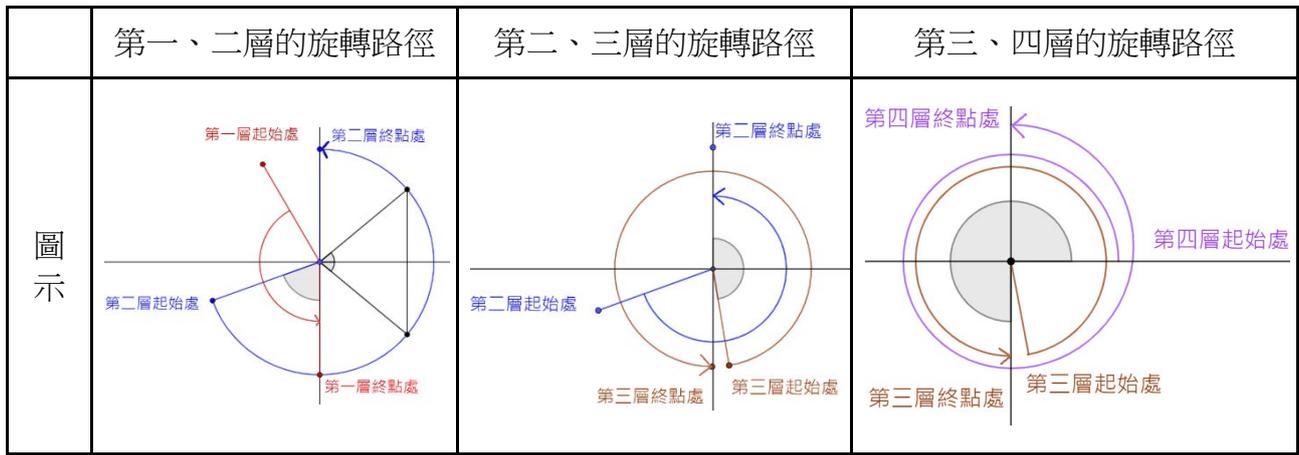


圖九十

二、探討菱形結構及鳶形結構中，剪紙層數和旋轉角度的關係

(一) 每層剪角相同的菱形結構

我們將第一層到第四層中，相鄰兩層的旋轉路徑及第 $n+1$ 層起始處~第 n 層終點處的重疊部分（灰色角）標示整理如下表：



從上表我們可以發現：

- 1、第 n 層的旋轉角度和第 $n+1$ 層的旋轉角度在第 $n+1$ 層起始處～第 n 層終點處是重疊的。
- 2、第 n 層的旋轉角度 = 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角 + 上述 1 的重疊角。
- 3、第 $n+1$ 層的旋轉角度 = 180° + 上述 1 的重疊角。
- 4、第 $n+1$ 層的旋轉角度 - 第 n 層的旋轉角度 = 180° - 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角。
- 5、因為每層剪角相同的菱形結構中，相鄰兩層起始處的夾角都是一個摺角 ($\angle B$)，因此第 n 層的旋轉角度和第 $n+1$ 層的旋轉角度會差 $180^\circ - B = 2A$ 。

(二) 每層剪角不同的菱形結構

我們將每層剪角不同的菱形結構中相鄰兩層的夾角與旋轉角度差整理如下表：

	第一、二層	第二、三層	第三、四層	第四、五層	第五、六層
中間的夾角	$180^\circ - 2A_2$	$180^\circ - (3A_2 - A_1)$	$180^\circ - 2A_3$	$180^\circ - (3A_3 - A_2)$	$180^\circ - 2A_4$
旋轉角度差	$2A_2$	$3A_2 - A_1$	$2A_3$	$3A_3 - A_2$	$2A_4$

從上面的表格我們發現：

- 1、當我們假設 n 為偶數時，第 $n-1$ 層與第 n 層旋轉角度差 $2A_{\frac{n}{2}+1}$ ，
而第 n 層與第 $n+1$ 層旋轉角度差 $3A_{\frac{n}{2}+1} - A_{\frac{n}{2}}$ 。
- 2、在剪角不同的狀況中，當 $A_{\frac{n}{2}}$ 比 $3A_{\frac{n}{2}+1}$ 的三倍還大時，第 $n+1$ 層的旋轉角度會比第 n 層的旋轉角度還小。

(三) 每層剪角相同的鸞形結構

- 1、第一層的旋轉角度是 $2A_1 + A'_1$
- 2、第二層以後的旋轉角度同樣具有「第 $n+1$ 層的旋轉角度 - 第 n 層的旋轉角度 = 180° - 第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角」的規律。
也就是，第 $n+1$ 層的旋轉角度 = 第 n 層的旋轉角度 + (180° - 第 n 層起始處和第 $n+1$ 層起始處的夾角)，

而在每層剪角相同的鳶形結構中，

第 n 層起始處和第 $n+1$ 層起始處的夾角都會是 $\angle B$ ，也就是 $180^\circ - (A_1 + A'_1)$ 。

所以，可以得知第 $n+1$ 層的旋轉角度是第 n 層的旋轉角度再加上 $(A_1 + A'_1)$ 。

(四) 每層剪角不同的鳶形結構

我們將每層剪角不同的鳶形結構中相鄰兩層中間的夾角與旋轉角度差整理如下表：

	第一、二層	第二、三層	第三、四層	第四、五層
中間的夾角	$180^\circ - (A_1 + 2A'_2 - A'_1)$	$180^\circ - (A'_2 + 2A_2 - A_1)$	$180^\circ - (A_2 + 2A'_3 - A'_2)$	$180^\circ - (A'_3 + 2A_3 - A_2)$
旋轉角度差	$A_1 + 2A'_2 - A'_1$	$A'_2 + 2A_2 - A_1$	$A_2 + 2A'_3 - A'_2$	$A'_3 + 2A_3 - A_2$

從上面的表格我們發現：

1、當我們假設 n 為偶數時，第 $n-1$ 層與第 n 層旋轉角度差 $A_{\frac{n}{2}} + 2A'_{\frac{n}{2}+1} - A'_{\frac{n}{2}}$ ，

而第 n 層與第 $n+1$ 層旋轉角度差 $A_{\frac{n}{2}} + 2A'_{\frac{n}{2}+1} - A'_{\frac{n}{2}}$ 。

2、當 $A_{\frac{n}{2}}$ 比 $A'_{\frac{n}{2}+1} + 2A_{\frac{n}{2}+1}$ 還大時，第 $n+1$ 層的旋轉角度會比第 n 層的旋轉角度還小。

3、當 $A'_{\frac{n}{2}}$ 比 $A_{\frac{n}{2}} + 2A'_{\frac{n}{2}+1}$ 還大時，第 n 層的旋轉角度會比第 $n-1$ 層的旋轉角度還小。

三、探討紙張旋轉的圓形結構並找出能順利旋轉的關鍵要素

三層以下的圓形結構只要符合下列條件即可讓紙張透過開合而順利的旋轉，且每層不會互相重疊：

(一) 各層的摺線呈現階梯狀。

(二) 各層的摺角不等於 180° 。且若摺角皆小於 180° ，則旋轉方向為逆時針；

若摺角皆大於 180° ，則旋轉方向為順時針。

若是要讓四層以上的圓形結構能夠順利旋轉，則必須從第四層開始分層檢查，檢查步驟如下：（以欲檢查第 n 層為例說明）

步驟一：以第 n 層的外側點和對摺線垂直處當作中心點。

步驟二：標示出第 n 層在對摺線上的外側點到中心點的距離。

步驟三：標示出第 $n-1$ 層在對摺線上的外側點到中心點的距離。

步驟四：若「第 n 層在對摺線上的外側點到中心點的距離」 $<$ 「第 $n-1$ 層在對摺線上的外側點到中心點的距離」，則可以順利旋轉；反之則會因為卡住而無法順利旋轉。

四、探討圓形結構中，剪紙層數、摺角及間距和旋轉角度的關係

由於在圓形結構中的變數較多，剪紙層數、摺角及間距都會影響旋轉角度，且因為每一層都是圓弧，各層的起始處也不像菱形結構或鳶形結構那樣有明確的一直線，為了簡化問題，因此我們先以各層外側點與該層在對摺線上的外側點連線為該層的起始位置進行各層旋轉角度的分析，我們發現：

在每層摺角 $< 180^\circ$ 的圓形結構中，旋轉方向和菱形結構一樣是逆時針，

且奇數層的終點處都在 180° 位置、偶數層的終點處都在 0° 位置；

而在**每層摺角** $>180^\circ$ 的圓形結構中，旋轉方向則會變成**順時針**，且奇數層的終點處都在 0° 位置、偶數層的終點處都在 180° 位置。以下是針對摺角及對摺線上的間距不同變化下，各層旋轉角度的分析：

(一) 每層摺角 $<180^\circ$

- 1、每層摺角、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大，並且會相差一個摺角的角度。
- 2、每層摺角都相同、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大，而且每層相差的角度都會大約是一個當層摺角的角度。
- 3、每層摺角都不相同、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大，而且每層相差的角度都會大約是一個當層摺角的角度。
- 4、每層摺角、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大，而且每層相差的角度都會大約是一個當層摺角的角度。

(二) 每層摺角 $>180^\circ$

- 1、每層摺角、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大。
- 2、每層摺角都相同、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大。
- 3、每層摺角都不相同、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大，而且當每層摺角差距拉大時，旋轉角度差也會變大。
- 4、每層摺角、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：我們發現愈內層的旋轉角度會愈大，而且當每層摺角差距拉大時，旋轉角度差也會變大。

陸、結論

一、要製作出能讓紙張順利旋轉的作品，結構中的關鍵要素為**摺線必須呈線階梯狀**。

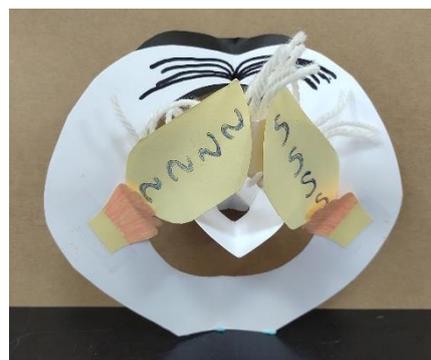
二、在菱形結構、鸞形結構及圓形結構中，各層的旋轉角度皆遵循著以下規律：

「第 $n+1$ 層的旋轉角度－第 n 層的旋轉角度 $=180^\circ$ －第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角」。

三、旋轉結構的應用：

我們運用這次研究的成果製作了四份應用的作品，分別展示及說明如下：

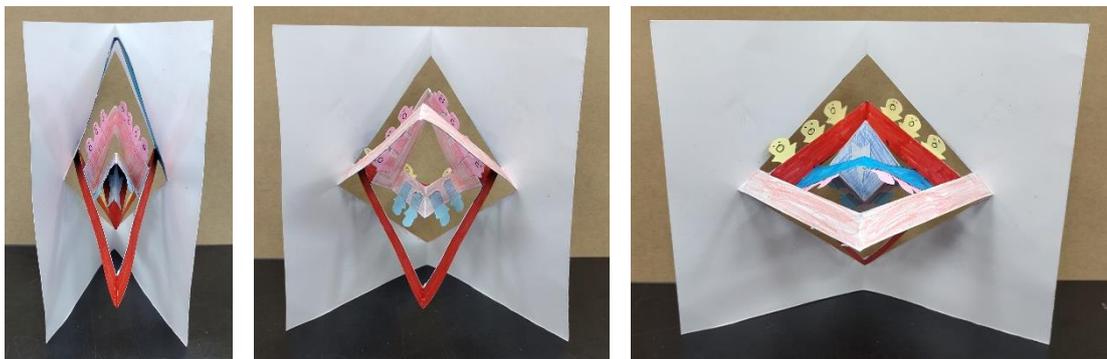
(一) 將旋轉的圓形結構想像成一個捧著碗吃麵的人，製作以下具趣味性的作品：



(二) 結合圓形結構及菱形結構，製作了一張充滿驚喜的生日卡片：



(三) 結合菱形結構及鳶形結構，並將它想像成一項有多種軌道交替旋轉的遊樂設施，坐在這個刺激的遊樂設施上的人們紛紛露出驚恐的表情，製作了這份遊樂設施的設計作品：



(四) 如果在原有的旋轉結構上，加入另外一個旋轉結構，會是怎麼樣呢？因為有了這個好奇，我們挑戰了在圓形結構上的一層及第二層上，又分別設計了菱形結構，製作出這份「轉中轉」的作品：



四、未來發展方向：

目前我們只研究了能讓紙張旋轉的菱形結構、鳶形結構及圓形結構，發現這些結構都有相似性，各層的旋轉角度也有存在規律性，因此很好奇除了菱形、鳶形及圓形之外，其他外觀的結構是否也可以順利旋轉？不同剪紙層數的旋轉角度是否也有規律？這些都是我們未來可以研究的方向。

柒、參考資料及其他

一、洪新富（2019）立體書創作手冊。野蜂國際開發有限公司。

【評語】 080409

1. 該作品探討紙雕摺紙中特殊形狀之可摺性與摺紙過程中剪處變化的角度，從旋轉自如的立體紙雕引發探究紙張能順利旋轉的關鍵要素，頗具應用價值，探討菱形、鳶形，再到圓形並將結果應用於有趣的摺紙作品，饒富趣味性。
2. 該摺紙在展開時，中間剪開處會跟隨旋轉不易觀察，研究者依照實際現象推估各層的起始處與終點處再歸納其規律為研究結果，若能詳細解釋旋轉的定義，該研究歷程會更完整。
3. 此研究問題為生活中常見的現象，涉及空間旋轉觀察難度高，富有研究精神。

作品簡報

轉、轉、轉、紙轉千迴

科別：數學科

組別：國小組

研究動機：

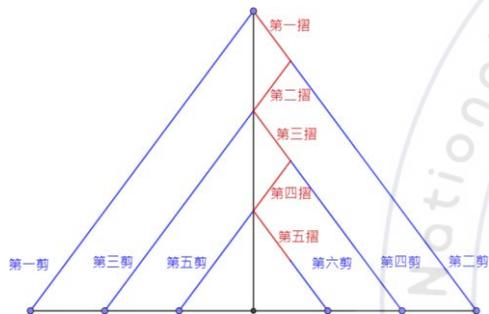
我們在一次因緣際會下，被洪新富老師那張會隨著紙張開合而旋轉的名片所吸引，我們十分好奇要如何製作這種能旋轉自如的紙雕，也很想知道它每一層的旋轉角度有沒有存在規律性？於是展開了一連串與剪刀和紙的奇妙旅程。

研究目的：

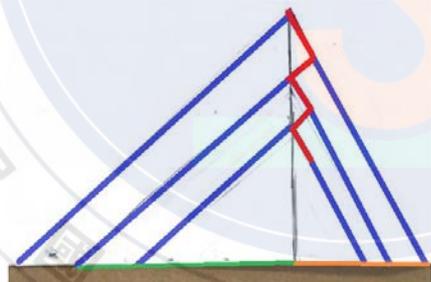
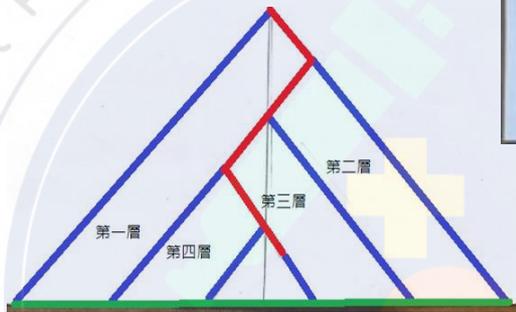
- 一、探討紙張旋轉的菱形結構及鳶形結構。
- 二、探討菱形結構及鳶形結構中，
剪紙層數和旋轉角度的關係。
- 三、探討紙張旋轉的圓形結構。
- 四、探討圓形結構中，剪紙層數、
摺角、剪角以及間距和旋轉角度的關係。



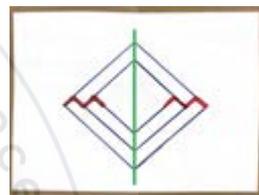
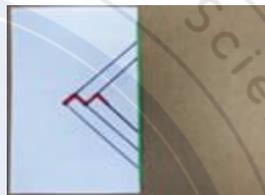
一、探討紙張旋轉的菱形結構及鳶形結構



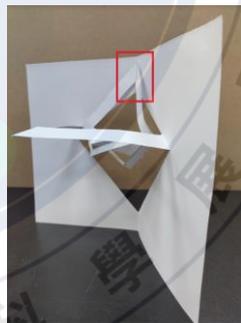
菱形結構



鳶形結構

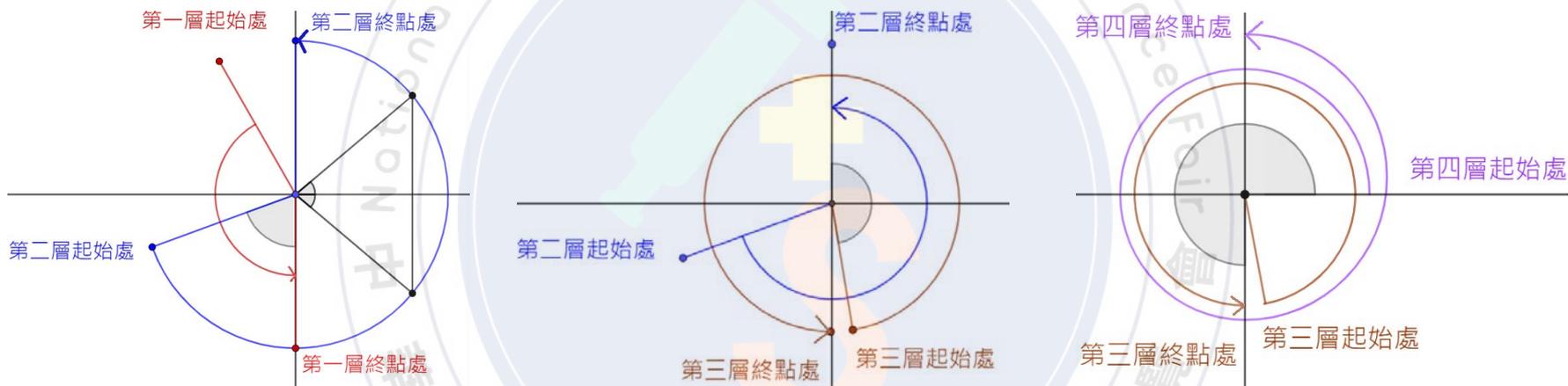


菱形結構
展開過程



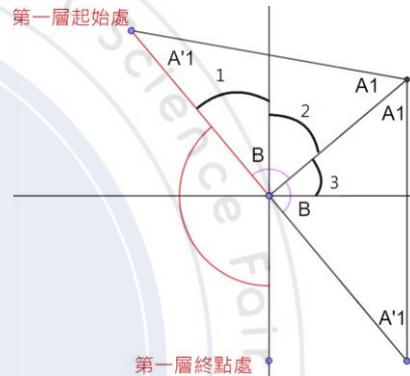
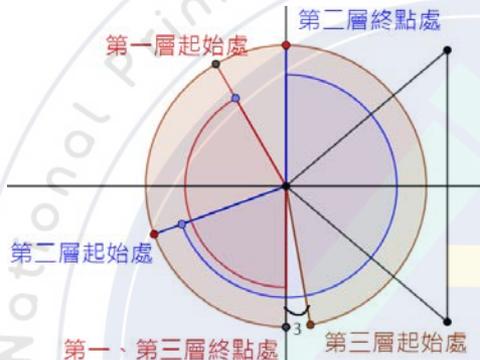
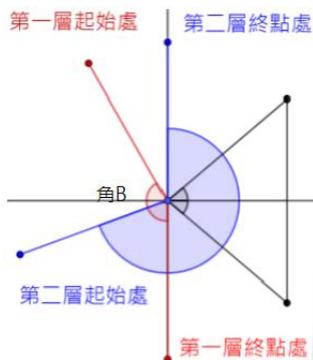
失敗的鳶形結構

二、探討菱形結構及鳶形結構中，剪紙層數和旋轉角度的關係



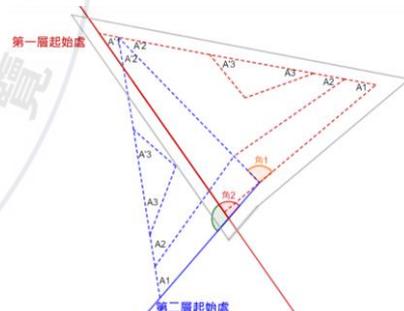
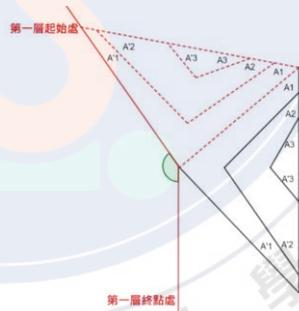
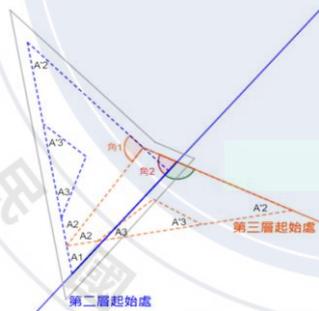
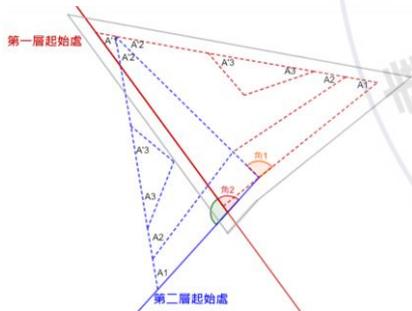
第 $n+1$ 層的旋轉角度-第 n 層的旋轉角度= 180° -第 n 層起始處與第 $n+1$ 層起始處的夾角

分析每層剪角相同與剪角不同的菱形和鳶形結構



每層剪角相同的菱形結構

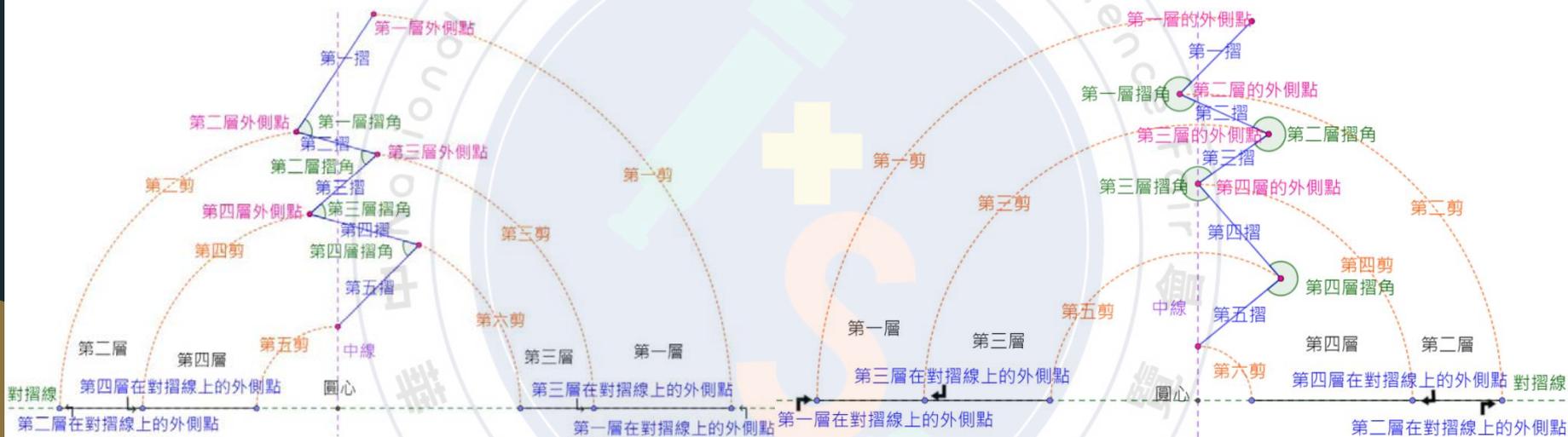
每層剪角相同的鳶形結構



每層剪角不同的菱形結構

每層剪角不同的鳶形結構

三、探討紙張旋轉的圓形結構



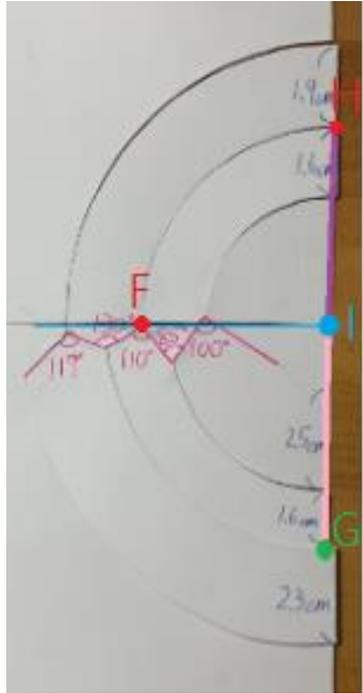
摺角 $\lt; 180^\circ$ 的圓形結構

旋轉方向為逆時針

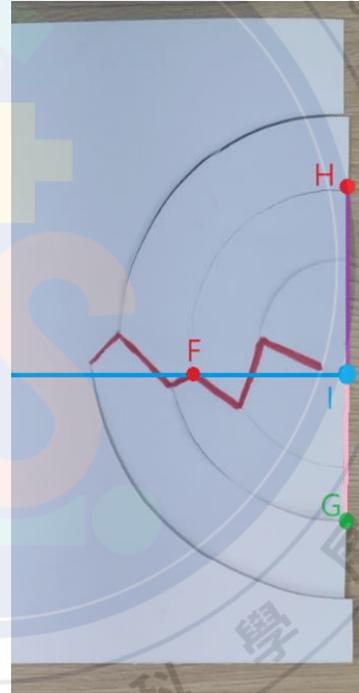
摺角 $\gt; 180^\circ$ 的圓形結構

旋轉方向為順時針

圓形結構成功範例($\overline{HI} < \overline{GI}$)

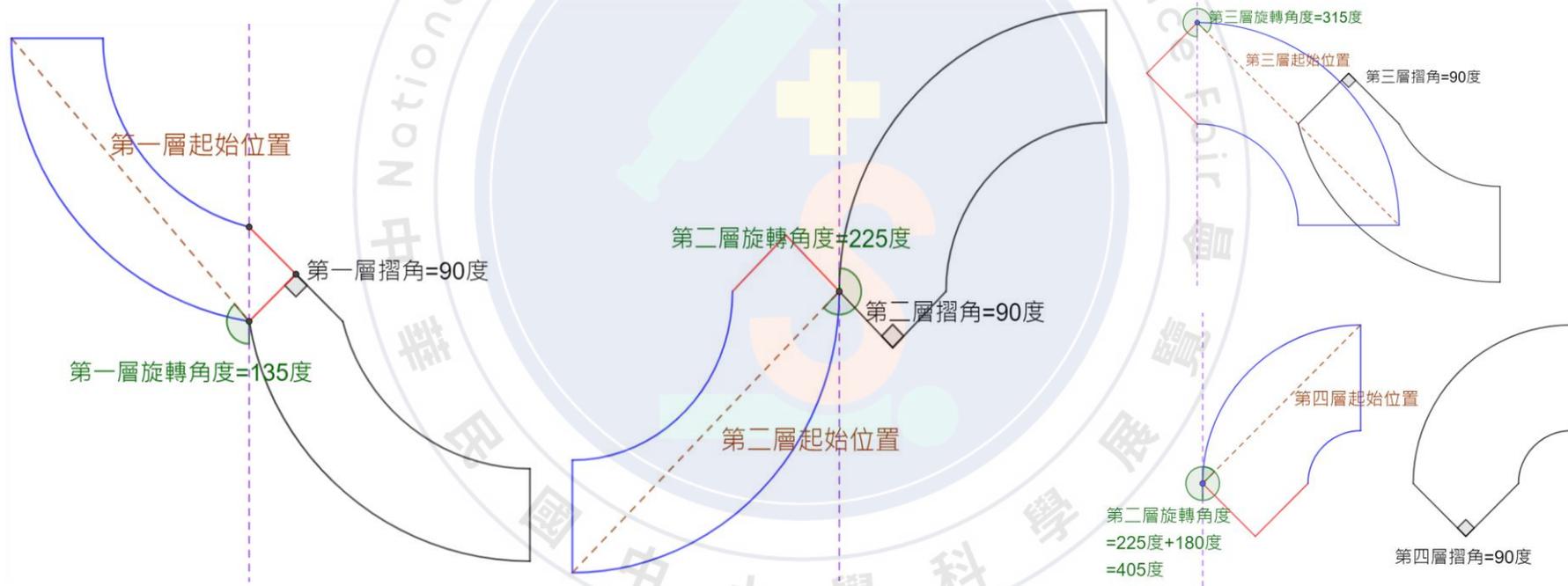


圓形結構失敗範例($\overline{HI} > \overline{GI}$)



四、探討圓形結構中，剪紙層數、摺角及間距和旋轉角度的關係

我們將圓形結構的旋轉路徑轉為平面圖，如下圖所示：



每層摺角 $< 180^\circ$

1、每層摺角、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：
愈內層的旋轉角度愈大，且每層會相差一個摺角的角度。

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	90°	90°	90°	90°
旋轉角度	135°	225°	315°	405°

2、每層摺角都相同、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：
愈內層的旋轉角度愈大，且每層相差大約一個當層摺角的角度。

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	90°	90°	90°	90°
旋轉角度	140°	227°	320°	410°

3、每層摺角都不相同、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：
愈內層的旋轉角度愈大，且每層相差大約一個當層摺角的角度。

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	140°	130°	120°	110°
旋轉角度	194°	328°	455°	570°

4、每層摺角、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：
愈內層的旋轉角度愈大，且每層相差大約一個當層摺角的角度。

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	140°	130°	120°	110°
旋轉角度	196°	325°	458°	565°

每層摺角 $>180^{\circ}$

1、每層摺角、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：愈內層的旋轉角度愈大。

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	270°	270°	270°	270°
旋轉角度	45°	140°	225°	325°

2、每層摺角都相同、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：愈內層的旋轉角度會愈大

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	270°	270°	270°	270°
旋轉角度	51°	135°	233°	315°

3、每層摺角都不相同、對摺線上的間距都相同的旋轉角度：愈內層的旋轉角度會愈大

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	320°	310°	300°	290°
旋轉角度	2°	39°	99°	156°

4、每層摺角、對摺線上的間距都不相同的旋轉角度：愈內層的旋轉角度會愈大

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	330°	320°	310°	300°
旋轉角度	7°	24°	71°	124°

3-2、將第三種狀況的摺角差距拉大：
旋轉角度差會變大。

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	240°	210°	260°	300°
旋轉角度	23°	193°	318°	397°

4-2、將第四種狀況的摺角差距拉大：
旋轉角度差會變大。

	第一層	第二層	第三層	第四層
摺角	240°	210°	260°	300°
旋轉角度	23°	193°	318°	397°

結論

- 一、要製作出能讓紙張順利旋轉的作品，結構中的關鍵要素為摺線必須呈現**階梯狀**。
- 二、在菱形結構、鳶形結構及圓形結構中，各層的旋轉角度皆遵循著以下規律：
第n+1層的旋轉角度-第n層的旋轉角度=180°-第n層起始處與第n+1層起始處的夾角
- 三、旋轉結構的應用：

