中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030426

佔地封雲-六角點格棋的勝利方程式

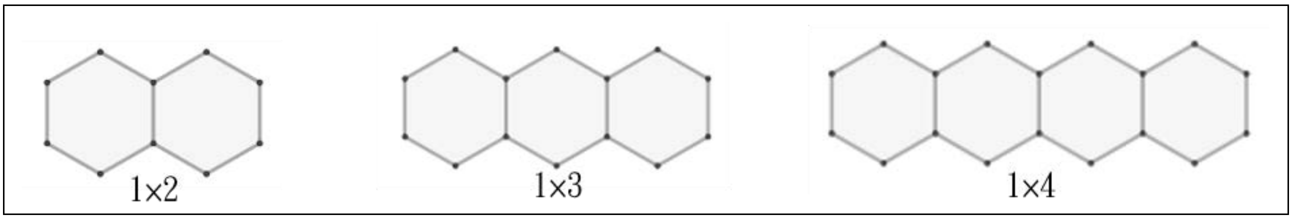
學校名稱：連江縣立敬恆國民中學

作者：	指導老師：
國一 劉真嘉 國一 曹宸浩	曹博凱

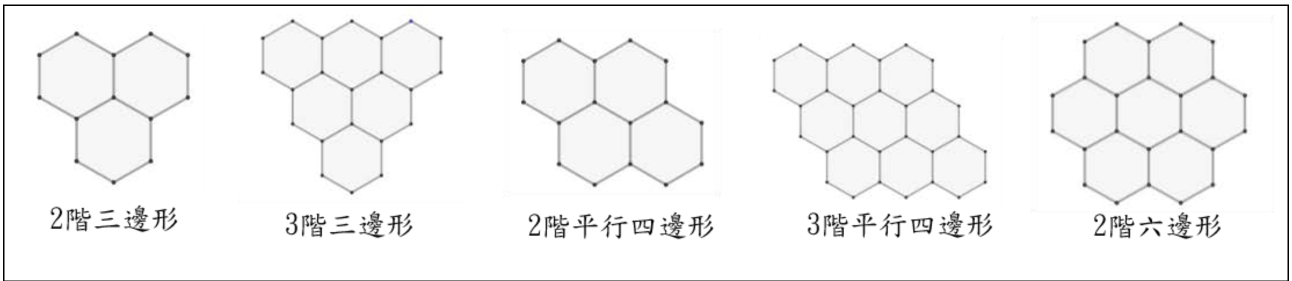
關鍵詞：點格棋、窮舉法、奇偶性

摘要

本次研究以六邊形排列成各種版面來進行點格棋為主題，透過「邊數」的改變去探討彼此的勝負關係，從中找出致勝的關鍵。我們從最簡單的長條形版面開始研究，用 1×n 來命名(n 是橫向六邊形的數量，如下圖)從 1×1 嘗試到 1×4，探討其中是否有必勝策略，並找出其中的關鍵去推導到 1×n 的情況。



接著我們開始排列其他版面，嘗試著找出通用的必勝策略。為了方便討論，其他規律圖形我們以六邊形的中心點連線所形成的圖形來命名，並參考魔術方塊的階層概念，一邊有多少六邊形就用幾「階」做命名。



我們研究了 2 階三邊形、3 階三邊形、2 階平行四邊形，以及 2 階六邊形這四種版面，將各種版面的所有可能列舉出來，並在其中找出決定勝負的關鍵。

壹、前言

一、研究動機

之前疫情爆發的時候，大部分的學校都改成線上上課，而我們當然也不例外。不只無法到校，連休息時間都得待在家中。這段時間對我們來說最好的休閒活動就是玩家中的switch，其中有一個我們很喜歡的遊戲，裡面包含了世界各地簡單的小遊戲，而點格棋是其中一個我們很喜歡的遊戲，雙方在方型排列的點陣中透過連線來鬥智，一開始都是找家人或朋友對戰，雙方有來有往，但後來在網路上找到了可以和電腦對戰的版本，可是不管怎麼樣都贏不了，所以就開始好奇電腦為什麼能一直贏？是不是有一種必勝的方程式？帶著這樣的好奇心，我們產生了研究這個主題的想法。

但後來發現之前幾屆有過類似的主題了，如第 50 屆的「圍地盤遊戲的必勝策略」、第 60 屆的「吃格子大亂鬥」，都是在研究四邊形的點格棋，在不同的版面獲勝的情況，於是我們想到 switch 中還有一款遊戲叫做六貫棋，透過六邊形的排列來進行的遊戲，而過程中我們發

現，相較於四邊形只能排出方陣，選擇六邊形可以排出更多特別的圖形，所以我們就有了以六邊形當作版面進行點格棋的規則這種想法，想試著從不同的版面找出一種必勝的方式。

二、研究目的

本次研究是想要在六邊形排列的各種版面中，找出各種版面必勝的可能，並列舉出所有可能性，去尋找其中的共通點。所以整理成以下目的：

一、探討 1×1 到 1×4 版面的必勝可能。

二、推廣出 1×n 的版面的必勝可能。

三、探討 2 階和 3 階三角形版面的必勝可能。

四、探討這兩種三角形版面中，影響勝負的關鍵因素。

五、探討 2 階平行四邊形版面的必勝可能。

六、探討 2 階六邊形版面的必勝可能。

七、透過以上不同版面，找尋這些必勝可能之間的是否有共通點。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra 自製六邊形的點格棋遊戲。

參、研究過程或方法

一、遊戲規則與名詞定義

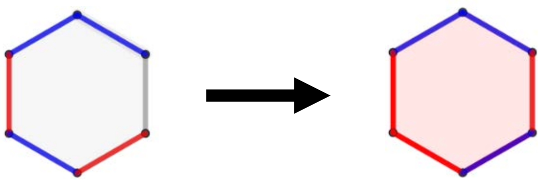
(一)規則

1.棋盤布置：

點格棋常見的規則是在紙上畫上「方形」排列的數個點當作棋盤，而這次我們選擇使用「六邊形」為基礎，拼接成幾種比較常見的規律圖形來做為研究目的。

2.進行方式：

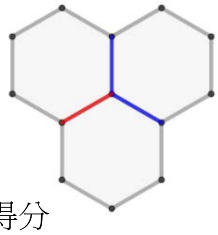
由兩人(或以上)輪流用不同顏色的筆將相鄰兩點連線，當連線使得六邊形完全封閉，則該名玩家可佔領這格得到 1 分(如下圖，紅方只要將灰色部分連起就可以佔領這一格)，同時這格將不能再連線。另外得到一分後，同一人可繼續連線，直到沒有得分才換人。



3.勝利條件：當無法再連線時，清點雙方所佔領的格子數，得分較多者獲勝。

(二)定義名詞與原則

1.先後手：因為先後順序不便於紀錄及觀察，所以我們使用藍色定為「先手」，紅色定為「後手」來呈現這次的研究。

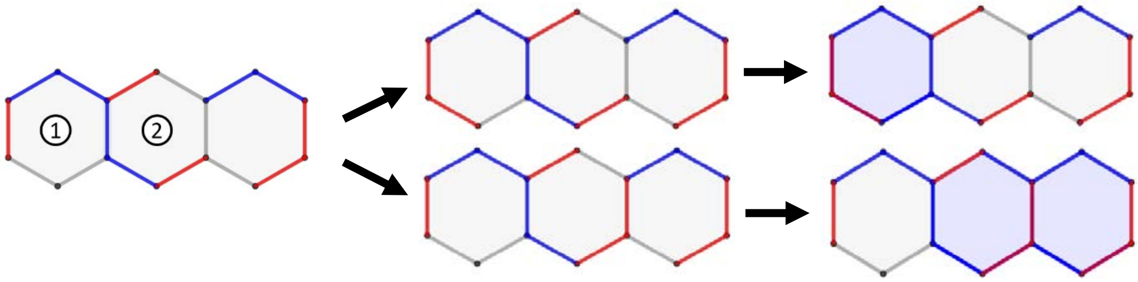


2.雙交界(右圖藍邊和紅邊)：兩個六邊形交接的邊。

3.外圍邊(右圖灰邊)：沒有與其他六邊形交接的邊。

4.被迫讓分：不管如何畫都會失分。如下圖紅方不管畫哪裡藍方都會得分

5.不讓分原則：在面臨被迫讓分得情況之前，不讓對方獲得任何一分。



6.分區：利用雙交界隔出不同的分數區，當一方面臨迫讓分後，另一方可以在分區內連續得到該分區的分數。(上方就是用雙交界區分出一個 1 分區和一個 2 分區，依照紅方的選擇，藍方可以獲得 1 分或 2 分)

7.減少失分原則：在面臨被迫讓分時，選擇失分較少的分區讓給對方。(上分這種情況紅方就會選擇將 1 分區讓給藍方)

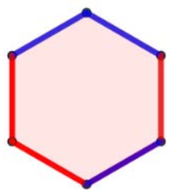
8.外圍邊隨機原則：經過我們多次嘗試，發現影響勝利的關鍵在「雙交界」，而外圍邊的選擇不影響結果，所以研究時外圍邊都是隨機選取。

9.對稱原則：圖形的翻轉或鏡射視為同一種。下圖都是區隔一個 1 分區和一個 2 分區，考慮外圍邊隨機原則，我們將它們視為同一種。

二、探討 1xn 的版面

為了進行不同圖形之間的比較，我們先從最簡單的 1xn 版面開始尋找規律，再試著透過這種規律，去推廣到不同的圖形。

(一)1x1 版面：共有 0 雙交界，6 外圍邊。



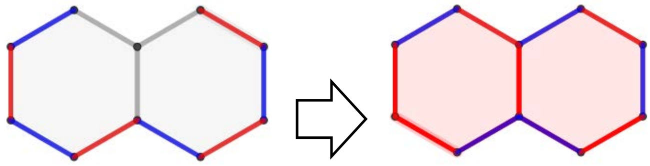
以藍方為先手的情況下，雙方輪替後，必為後手的紅方獲勝。

(二)1x2 版面：共有 1 雙交界，10 外圍邊。

我們在嘗試了幾次後，發現會影響到勝負的關鍵是有沒有畫再到雙交界上，而外圍

邊的選擇方式不影響戰局，所以外圍邊就是配合雙交界來隨機選取。在不讓分的條件下，會出現以下 2 種情況：

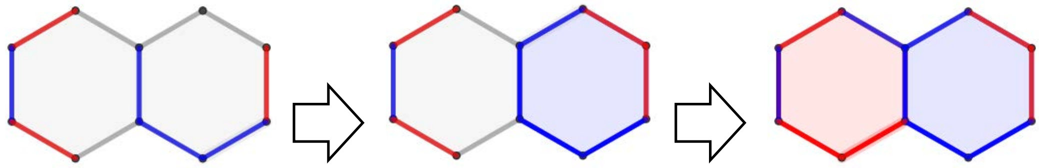
完成 0 雙交界、8 外圍邊：輪到藍方面臨被迫讓分，紅分能獲得 2 分。



藍方：紅方=0：2，後手的紅方獲勝。

完成 1 雙交界、6 外圍邊：

輪到紅方被迫讓分，藍方因此獲得 1 分，但得分後也要被迫讓分，換紅方得 1 分。



藍方：紅方=1：1，雙方平手。

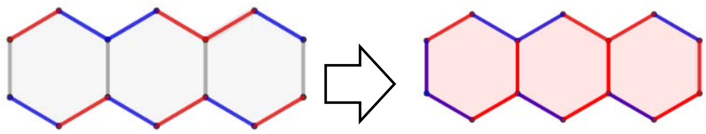
由上方可以看出，在 1×2 不讓分的情況下，藍方不可能獲勝，但只要刻意畫雙交界，必定能使戰局平手。

(三)1×3 版面：共有 2 雙交界，14 外圍邊。

在不讓分的情況，會出現以下 3 種情況。

完成 0 雙交界、12 外圍邊：

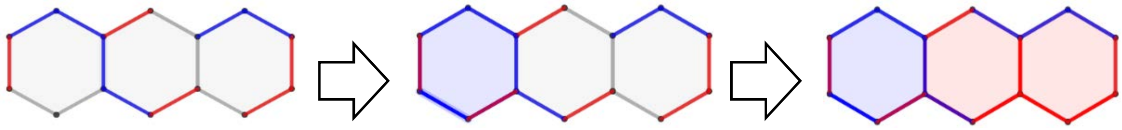
輪到藍方面臨被迫讓分的情況，不管畫哪裡，紅方都能一次獲得 3 分。



藍方：紅方=0：3，後手的紅方獲勝。

完成 1 雙交界、10 外圍邊：

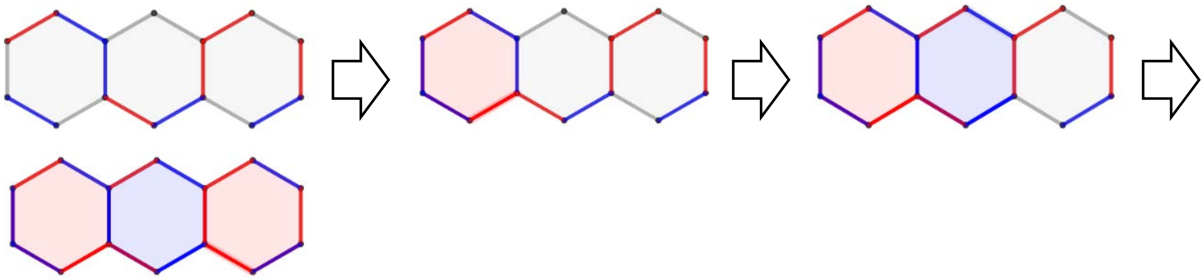
版面被隔成一個 1 分區和一個 2 分區，接著輪到紅方要被迫讓分，依照減少失分的原則，會選擇 1 分區讓給藍方，得分的同時也面臨被迫讓分，換紅方獲得 2 分。



藍方：紅方=1：2，後手的紅方獲勝。

完成 2 雙交界、8 外圍邊：

版面被隔成三個 1 分區，接著輪到藍方被迫讓分，紅方得 1 分後，面臨被迫讓分，換藍方得 1 分，接著又被迫讓分，紅分得 1 分。



藍方：紅方=1：2，後手的紅方獲勝。

由上方可以看出：在 1×3 不讓分的情況下，不管先完成幾個雙交界，都是由後手的紅方獲勝。

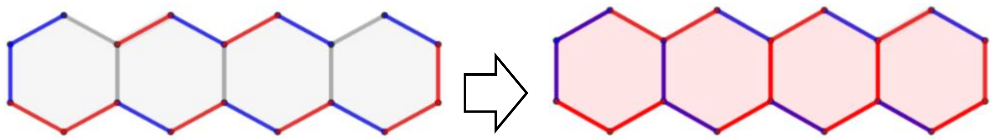
另外，有了前面幾種版面的經驗，我們也注意到，當有一方面臨被迫讓分的情況後，接下來雙方會輪流得分，同時考慮減少失分的原則，會從分數較少的分區讓給對方，所以接下來的紀錄，我們將會簡少文字描述，用圖片來呈現變化。

(四)1×4 版面：共有 3 雙交界，18 外圍邊。

在不讓分的情況，會出現以下 6 種情況。

完成 0 雙交界、16 外圍邊：輪到藍方面臨被迫讓分。

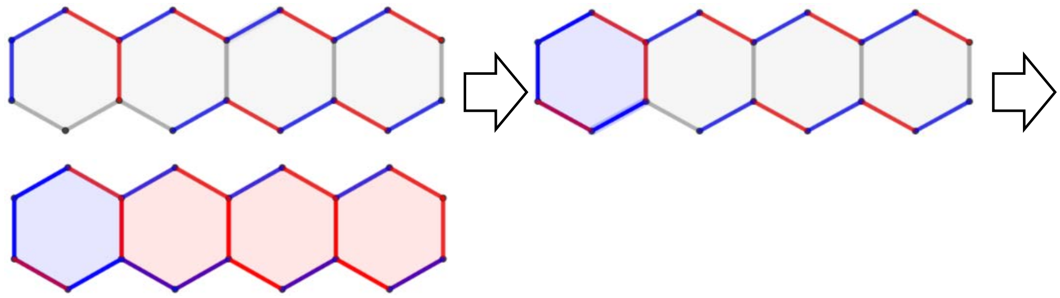
分成一個 4 分區



藍方：紅方=0：4，後手的紅方獲勝。

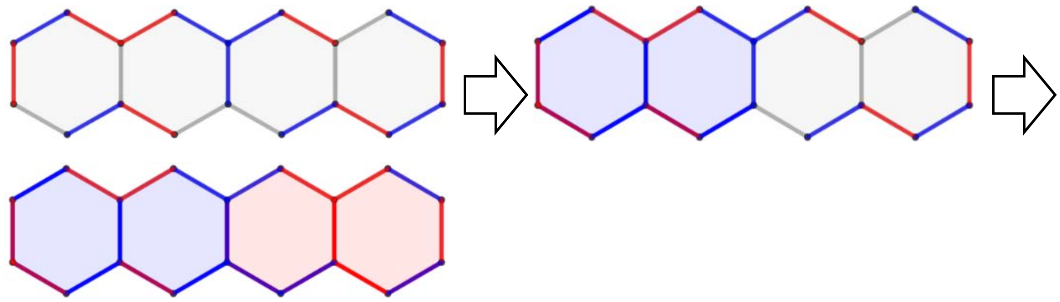
完成 1 雙交界、14 外圍邊：輪到紅方面臨被迫讓分。

分成一個 1 分區和一個 3 分區



藍方：紅方=1：3，後手的紅方獲勝。

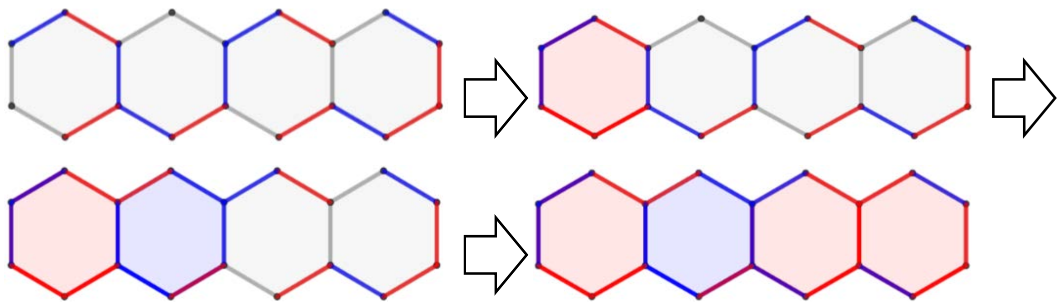
分成兩個 2 分區。



藍方：紅方=2：2，雙方平手。

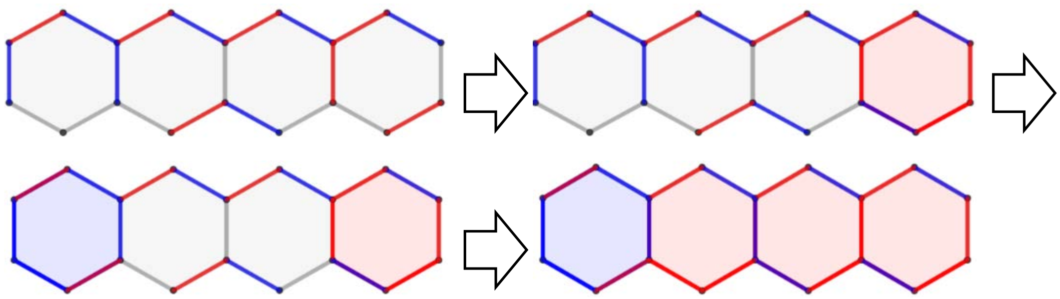
完成 2 雙交界、12 外圍邊：輪到藍方面臨被迫讓分。

分成兩個 1 分區和一個 2 分區。

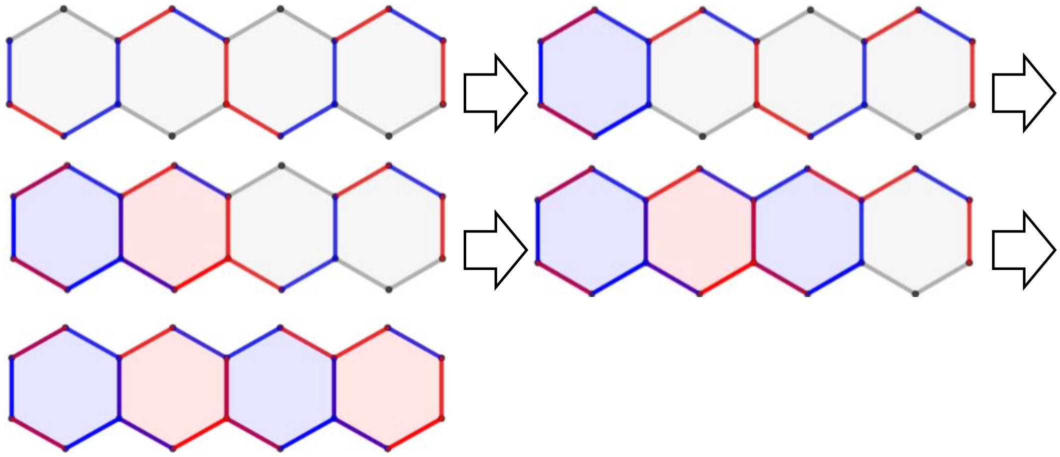


藍方：紅方=1：3，後手的紅方獲勝。

分成兩個 1 分區和一個 2 分區。



藍方：紅方=1：3，後手的紅方獲勝。

完成 3 雙交界、10 外圍邊：輪到紅方面臨被迫讓分。
分成四個 1 分區。  藍方：紅方=2：2，雙方平手。

在 1×1 到 1×4 這幾組操作中，我們發現只有紅方獲勝或平手的結果出現，所以想說是不是在 1×n 的情況中藍方永遠不會贏呢？於是便進行了接下來的推導來驗證這項猜測。

(五)1×n 版面：有 n-1 雙交界，4n+2 外圍邊

我們假設完全不完成雙交界，必定要完成 4n 條外圍邊，因為 4n=2(2n)必定是偶數，代表著輪到藍方面臨被迫讓分，由於沒有雙交界，只會有一個 n 分區，所以是紅方獲勝。

每當增加 m 個雙交界，外圍邊就會減少 2m 個(有 4n-2m 條)，也就是說在一方面臨被迫讓分之前需要完成 4n+m-2m=4n-m 條線。

接著我們分成兩種情況來討論：

m	奇數	偶數
面臨被迫讓分	紅方 (因為 4n-m 為奇數，輪到後手)	藍方 (因為 4n-m 為偶數，輪到先手)
	將分區的分數由小排到大，假設為 a_1，a_2，a_3，⋯，a_{m+1}，且 $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m+1}$，而因為會輪流失分，所以奇數項的分區都是一方獲得，而偶數項的分區由另一方獲得。	
分區數	m+1 (偶數)	m+1 (奇數)
得分過程	藍→紅→ ⋯ →藍→紅 藍方得分：$a_1+a_3+\cdots+a_m$ (共$\frac{m}{2}$項) 紅方得分：$a_2+a_4+\cdots+a_{m+1}$ (共$\frac{m}{2}$項)	紅→藍→紅→ ⋯ →藍→紅 藍方得分：$a_2+a_4+\cdots+a_m$ (共$\frac{m}{2}$項) 紅方得分：$a_1+a_3+\cdots+a_{m+1}$ (共$\frac{m}{2}+1$項)

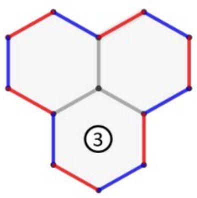
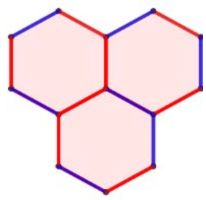
獲勝可能	兩方的分區數一樣多，又 $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m+1}$，所以會有兩種可能。 1.當 $a_1=a_2$，$a_3=a_4$，…，$a_m=a_{m+1}$，雙方會平手。 2.如果上述任意等號不成立，則紅方所佔領分區的分數比較多，因此紅方必定獲勝。 ※第 1 種情況的總分為 $2(a_2+a_4+\cdots+a_{m+1})$，也就是說只有 n 是偶數才會發生。	因為紅方比藍方多獲得一個分區，且 $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m+1}$，所以一定是紅方獲勝。

從獲勝可能來看，在 1×n 的版面藍方完全不可能獲勝，頂多產生平手的局面，但想要平手還必須在 n 是偶數的條件下，也就是說如果不讓分，「版面」就已經決定勝負了。

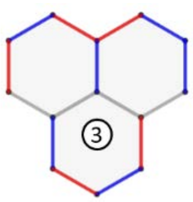
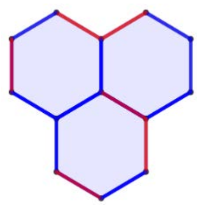
在操作 1×n 的版面時，我們發現面臨被迫讓分之後，接著就會輪流獲得分數，按照減少失分原則，會從分數少的分區開始獲得，所以接下來幾種版面，我們著重在記錄雙交界的數量、分區的數量，以及得分的流程，並在其中找尋致勝的關鍵。

三、2 階三角形的版面 (此版面共有 3 雙交界，12 外圍邊)

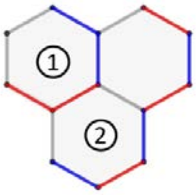
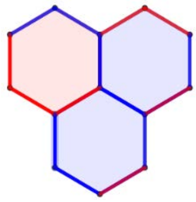
(一)完成 0 雙交界，12 外圍邊 (總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(3 分)		0：3	紅方

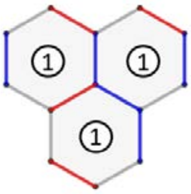
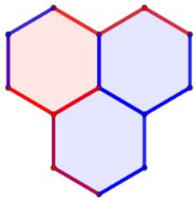
(二)完成 1 雙交界，10 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(3 分)		3：0	藍方

(三)完成 2 雙交界，8 外圍邊 (總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(2 分)		2：1	藍方

(四)完成 3 雙交界，6 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

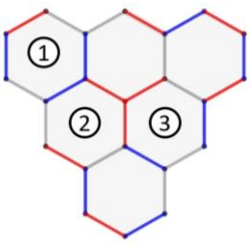
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)		2：1	藍方

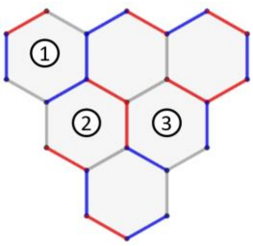
當完成 0 條或 1 條雙交界時，因為無法隔出分區，導致哪一方面臨被迫讓分就一定會輸；同時因為版面較小，使得完成 2 雙交界必定分出 2 個分區，考慮減少失分原則，在輪流得分之後，藍方會獲得最後一個分數較高的分區；而完成 3 雙交界必定會分出 3 個分區，這時依舊是藍方獲得最後一個分區。也就是說紅方只有在完成 0 雙交界的情況下才會獲勝，藍方只要任意完成一條雙交界就必定獲勝，只要掌握了這項原則，紅方根本不能獲勝。

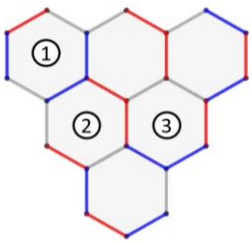
我們想了一下原因，發現是因為雙方輪替得分，所以當分區數是奇數時，被迫讓分的那一方就會輸，偶數則反之，再加上被迫讓分是由總完成的邊數(雙交界+外圍邊)來決定。所以從上方的結果判斷，我們暫時認定雙交界和分區數量都是偶數或奇數時，藍方會獲勝。同時也可以推測雙交界和分區數量為一奇一偶時，紅方會獲勝。為了確認這個結果我們在 3 階三角型的版面繼續探討這個想法的真實性。

四、3 階三角形的版面 (此版面共有 9 雙交界，18 外圍邊)

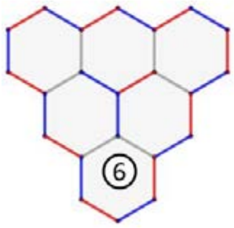
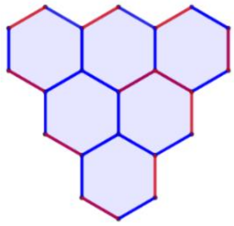
在研究時我們遇到分區分布相同，但雙交界不同的情況，如下面三張圖都是被分成 1,2,3 的分區，且分區分布都一樣，差別是在右上方 2 階三角形的雙交界變化，但得分的過程是一樣的，所以為了方便記錄，我們也將他們視為同一種。



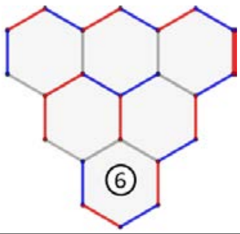
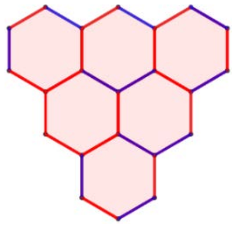
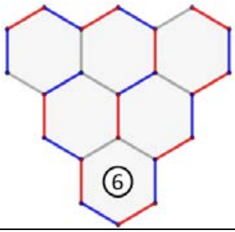
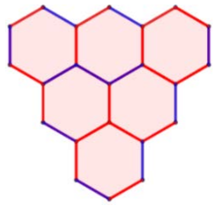
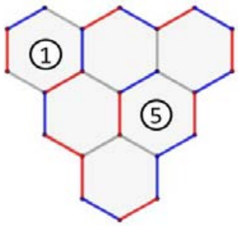
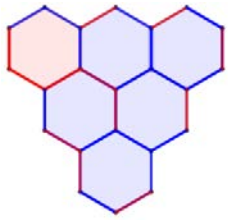
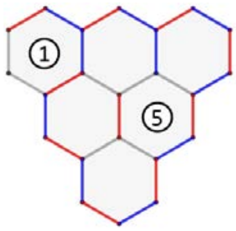
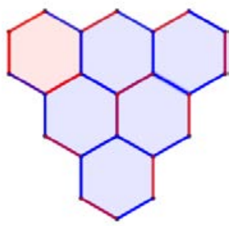




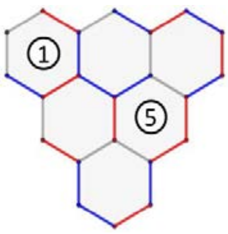
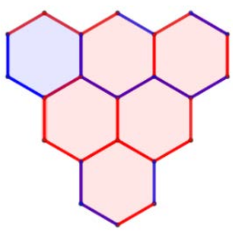
(一)完成 3 雙交界，18 外圍邊（總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分）

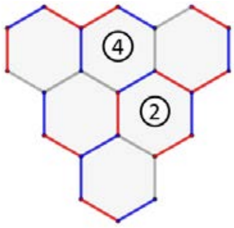
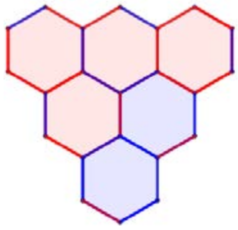
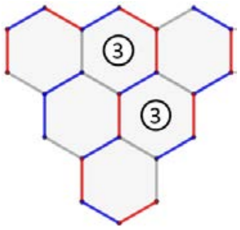
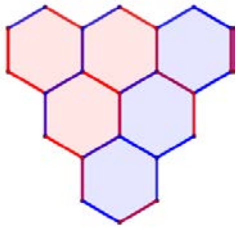
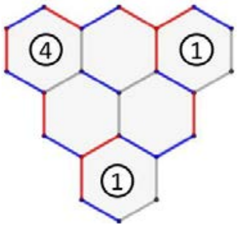
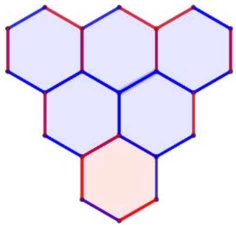
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(6 分)		6：0	藍方

(二)完成 4 雙交界，16 外圍邊（總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分）

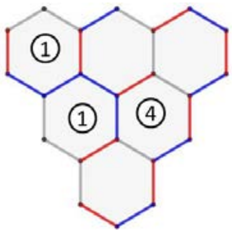
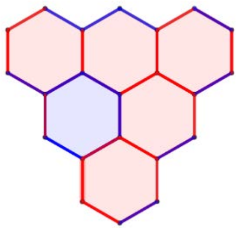
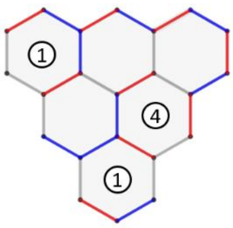
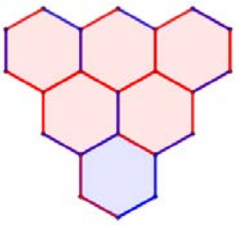
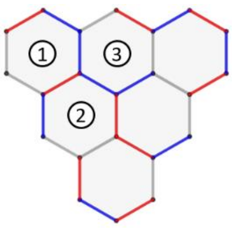
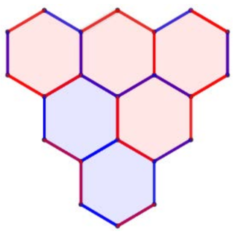
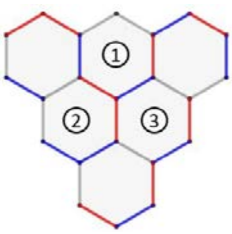
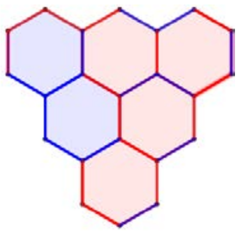
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(6 分)		0：6	紅方
				
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(5 分)		5：1	藍方
				

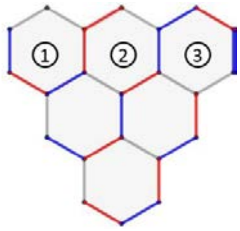
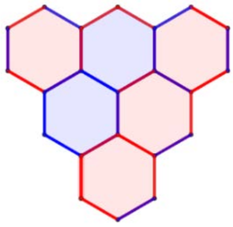
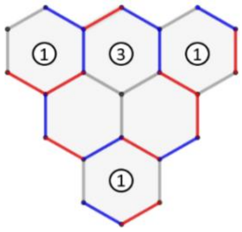
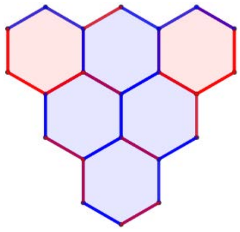
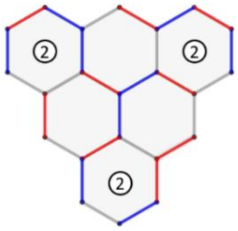
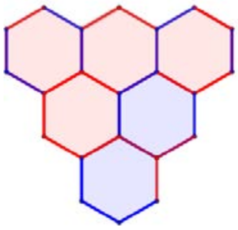
(三)完成 5 雙交界，14 外圍邊（總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分）

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(5 分)		1：5	紅方

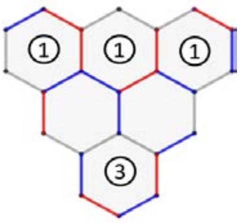
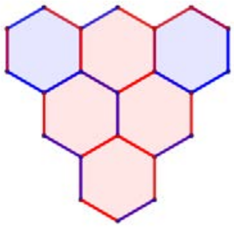
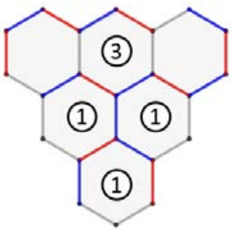
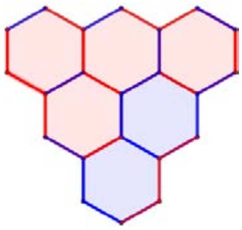
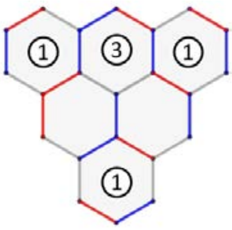
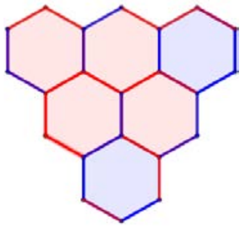
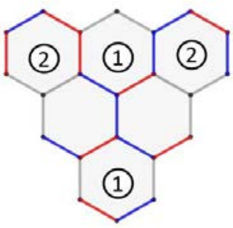
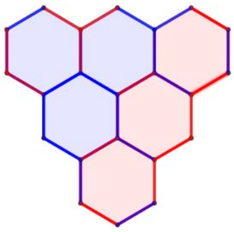
	紅(迫讓)→藍(2 分)→紅(4 分)		2：4	紅方
	紅(迫讓)→藍(3 分)→紅(3 分)		3：3	平手
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(4 分)		5：1	藍方

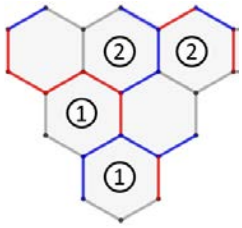
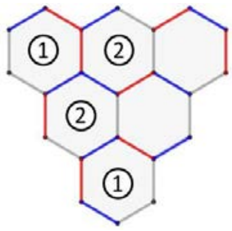
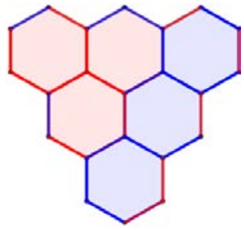
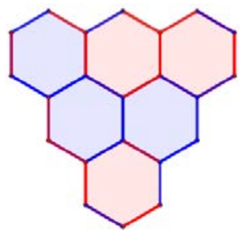
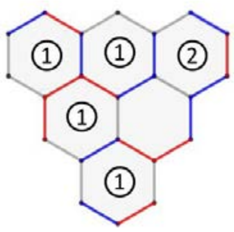
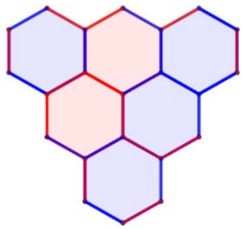
(四)完成 6 雙交界，12 外圍邊 (總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(4 分)		1：5	紅方
				
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		2：4	紅方
				

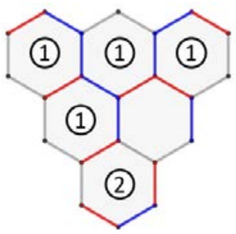
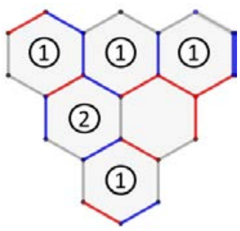
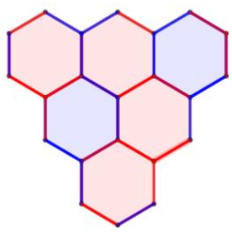
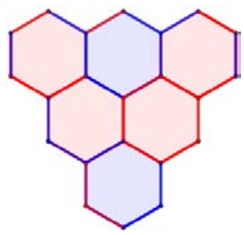
	藍(追讓)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		2：4	紅方
	藍(追讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(3 分)		4：2	藍方
	藍(追讓)→紅(2 分)→藍(2 分)→紅(2 分)		2：4	紅方

(五)完成 7 雙交界，10 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(追讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(3 分)		2：4	紅方
				
				
	紅(追讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(2 分)		3：3	平手

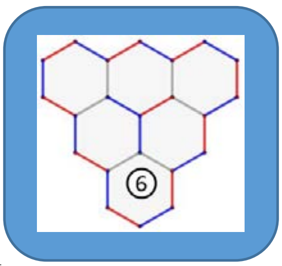
 	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(2 分)	 	3：3	平手
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(2 分)		4：2	藍方

(六)完成 8 雙交界，8 外圍邊（總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

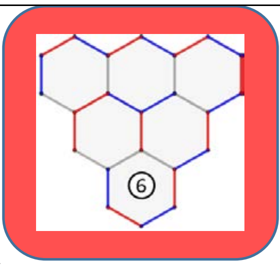
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(2 分)	 	2：4	紅方

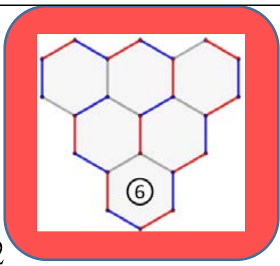
由於 3 階三角形版面無法像 2 階那樣輕易的看出結果，所以我們將上面幾張表整理成下表：

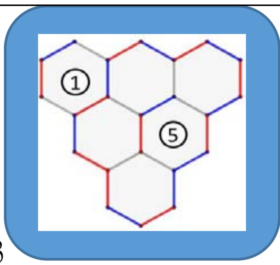
※藍色方格代表藍方獲勝，紅色方格代表紅方獲勝，綠色方格代表平手

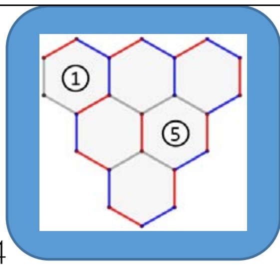
3 雙交界	 1

4雙交界

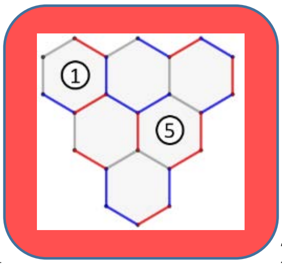
1


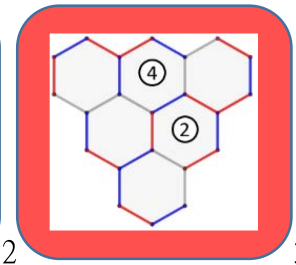
2


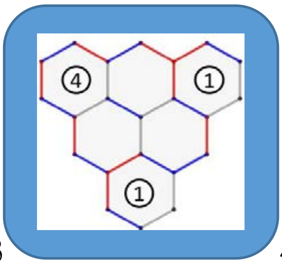
3


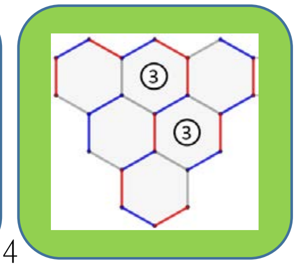
4


5雙交界

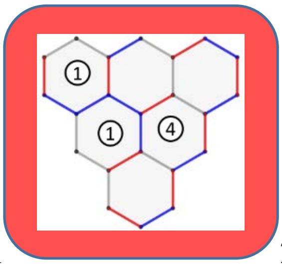
1


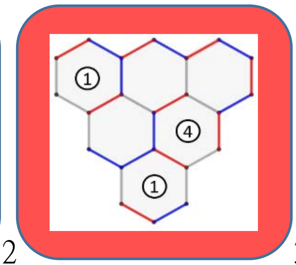
2


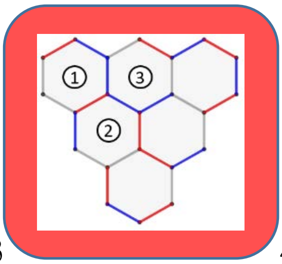
3


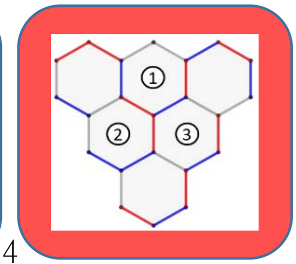
4


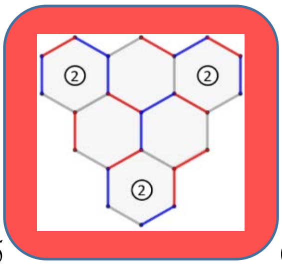
6雙交界

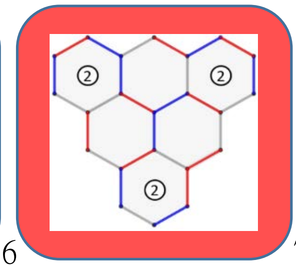
1


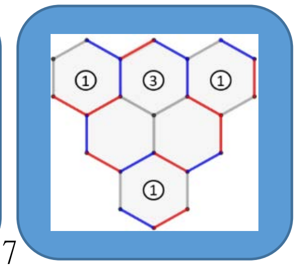
2


3


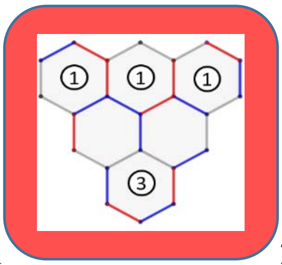
4


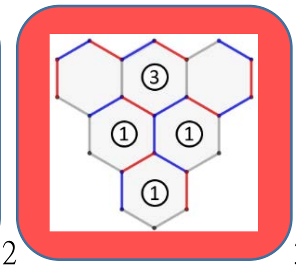
5


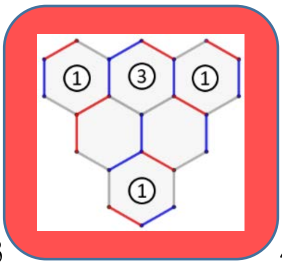
6


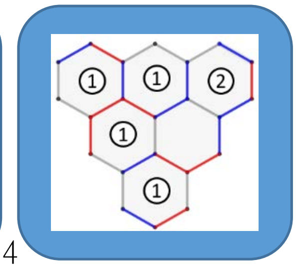
7


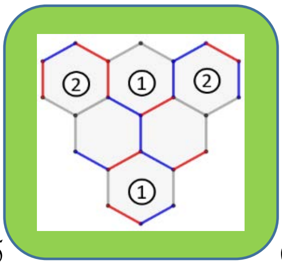
7雙交界

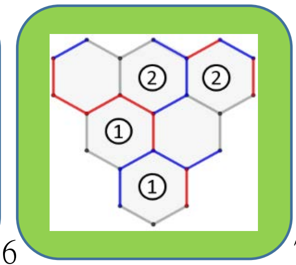
1


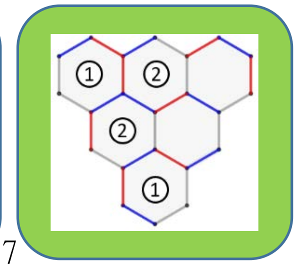
2


3


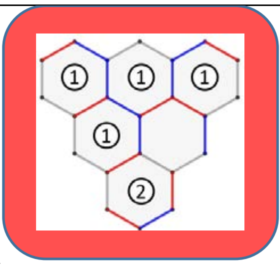
4


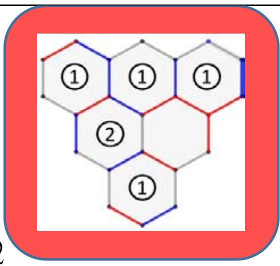
5


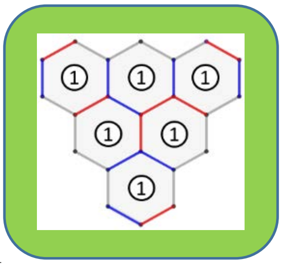
6


7


8雙交界

1


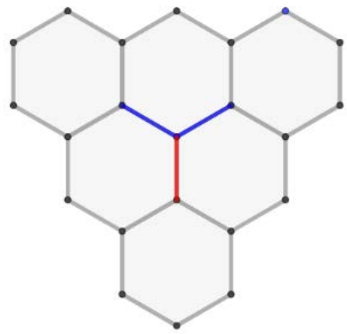
2


9 雙 交 界	 1

列出上表後我們更加肯定了完成雙交界數量和分區數量的關係，可以整理成下表

	完成奇數雙交界	完成偶數雙交界
分成奇數個分區	藍方勝	紅方勝
分成偶數個分區	紅方勝	藍方勝

不過和 2 階三角形版面相比，3 階三角形多了平手的情況，畢竟有 6 個六邊形，而平手的情況也和 $1\times n$ 一樣，將分區從小排到大 $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots$，當 $a_1=a_2$，$a_3=a_4$，⋯，雙方會平手。

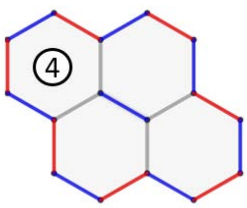
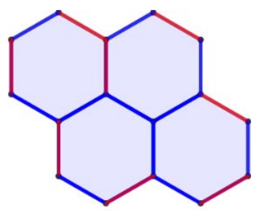


從前面可以看出，隨著雙交界的數量增加，藍方可以獲勝的圖形越來越少，而透過觀察後，我們發現只要完成中心的的三條雙交界後(如右圖)，藍方只有在上表 3 雙交界的第 1 張圖可以獲勝，但被迫讓分前還需要完成 18 條外圍邊，也就是說紅方只要在這之前隨意完成一條雙交界，就能立於不敗，接著只要避免上表 7 雙交界的第 5、6 這兩種情況，紅方必定獲勝。

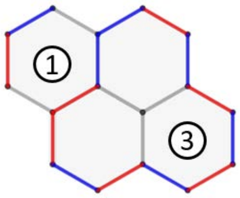
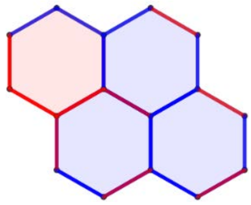
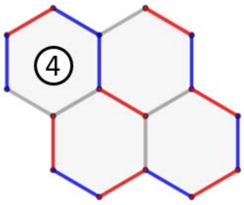
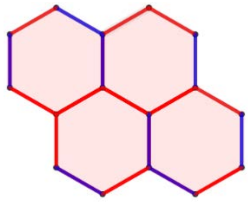
探討完兩種三角形版面後，我們開始去嘗試其他不同版面，想試試看不同版面間的勝負關係是否有共通點，所以就開始下來得嘗試。

五、2 階平行四邊形的版面 (此版面共有 5 雙交界，14 外圍邊)

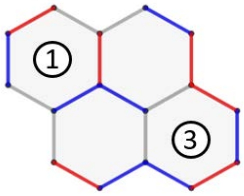
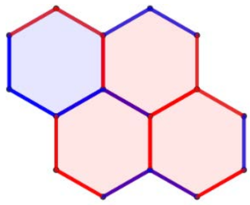
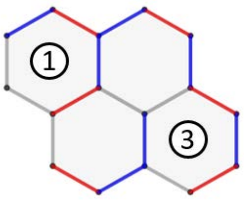
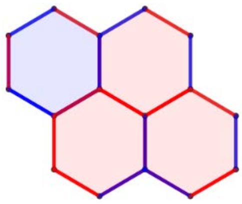
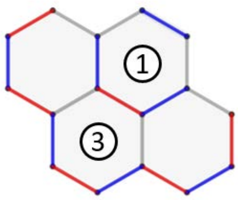
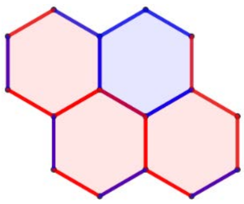
(一)完成 1 雙交界，14 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(4 分)		4：0	藍方

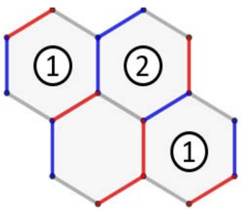
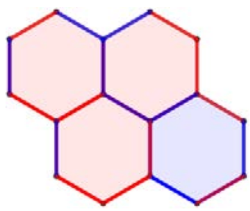
(二)完成 2 雙交界，12 外圍邊 (總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

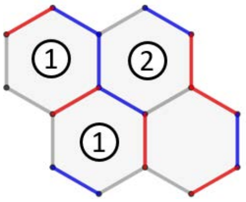
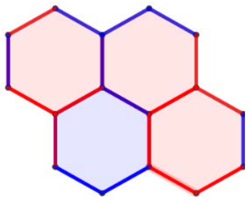
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(3 分)		3：1	藍方
	藍(迫讓)→紅(4 分)		0：4	紅方

(三)完成 3 雙交界，10 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

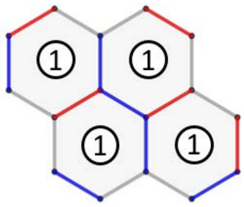
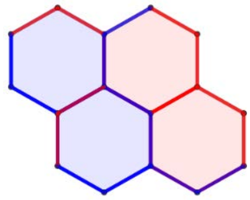
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(3 分)		1：3	紅方
				
				

(四)完成 4 雙交界，8 外圍邊 (總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

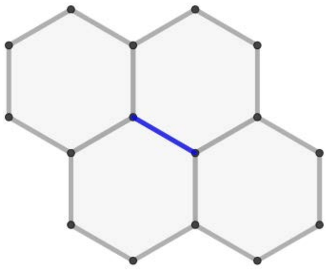
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(2 分)		1：3	紅方

	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(2 分)		1：3	紅方

(五)完成 5 雙交界，6 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)		2：2	平手

從上方幾張表可以發現，完成的雙交界數量越多，紅方越容易獲勝，但仔細觀察後我們還發現了其中有一個關鍵，就是最中心的雙交界(如右圖)，只要有完成這一條的情況，都是紅方獲勝或是平手，也就是說紅方完成這條後就立於不敗。

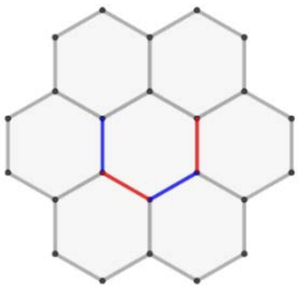


在 3 階三角形和 2 階四邊形這兩種版面中，我們發現在版面的中間，都一些雙交界會直接影響到結果，只要完成這些關鍵就會直接決定獲勝者。所以在接下來的 2 階六邊形我們開始嘗試著驗證我們的想法。

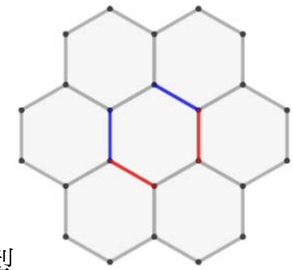
六、2 階六邊形的版面 (此版面共 12 條雙交界，18 條外圍邊)

既然前面猜想中心的雙交界會影響到結果，所以接下來的嘗試我們會把著重在中心雙交界對勝負的影響。不過相較於前面幾種版面，2 階六邊形版面比較特別的地方在於最中心的六邊形全部的邊都是雙交界，所以考慮不讓分原則，這六條邊在被迫讓分前，必須完成四條，我們就分為三種情況來探討，如下：

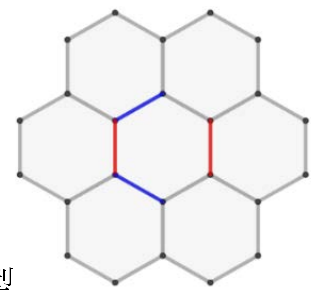
四連型



雙二型

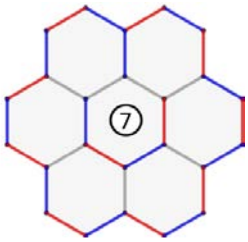
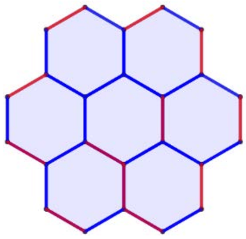


三一型



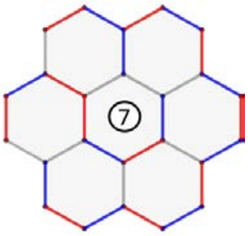
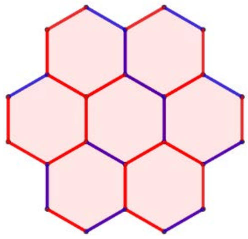
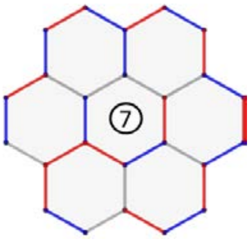
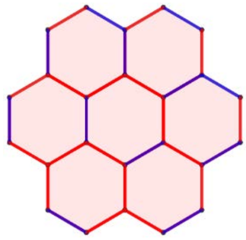
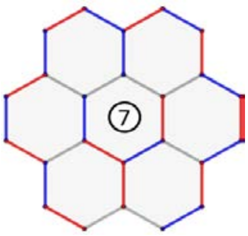
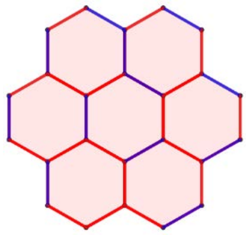
(一)完成 5 雙交界，18 外圍邊（總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分）

四連型

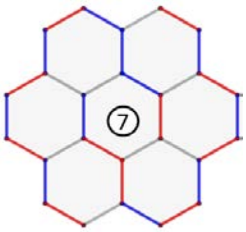
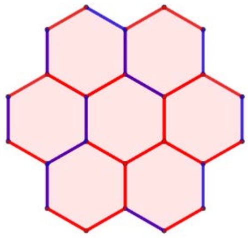
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(7 分)		7：0	藍方

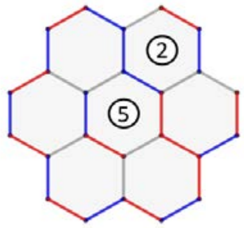
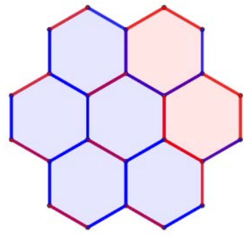
(二)完成 6 雙交界，16 外圍邊（總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分）

四連型

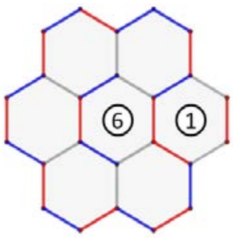
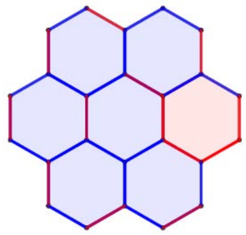
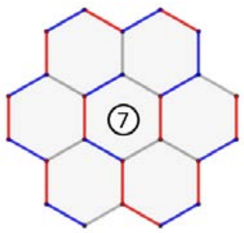
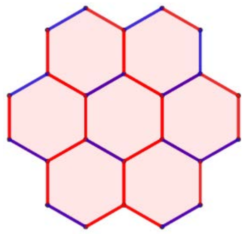
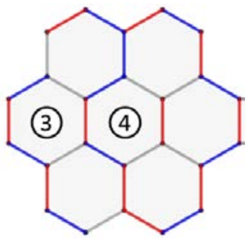
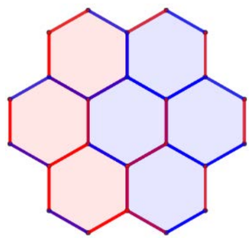
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(7 分)		0：7	紅方
				
				

雙二型

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(7 分)		0：7	紅方

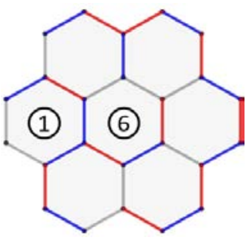
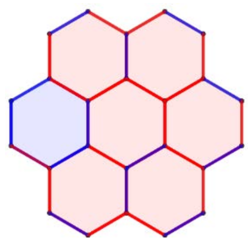
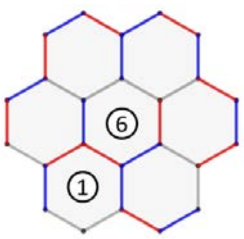
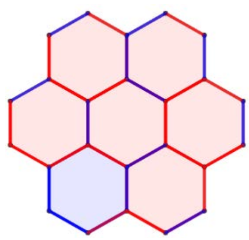
	藍(迫讓)→紅(2 分)→藍(5 分)		5：2	藍方

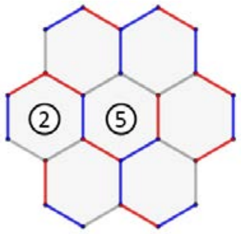
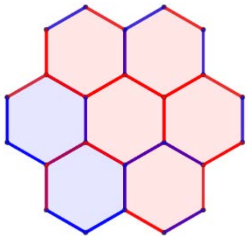
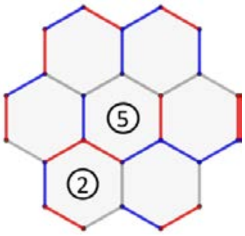
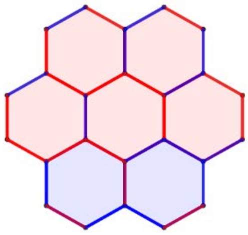
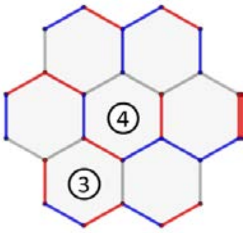
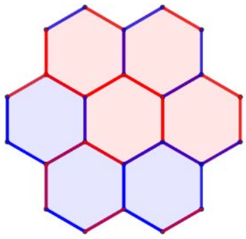
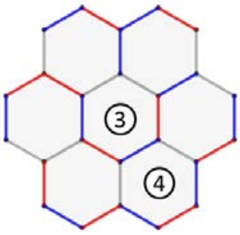
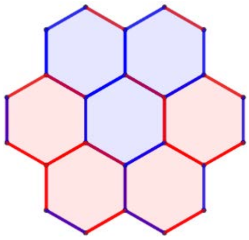
三一型

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(6 分)		6：1	藍方
	藍(迫讓)→紅(7 分)		0：7	紅方
	藍(迫讓)→紅(3 分)→藍(4 分)		4：3	藍方

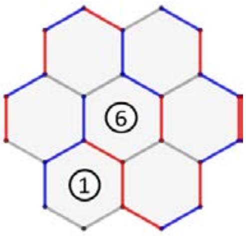
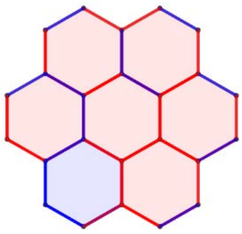
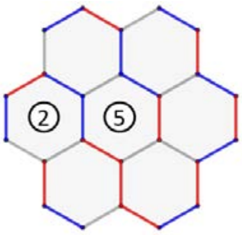
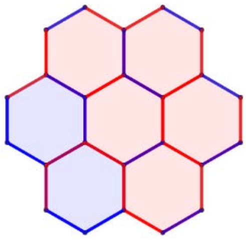
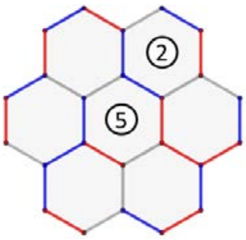
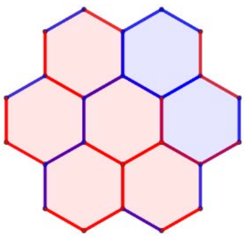
(三)完成 7 雙交界，14 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

四連型

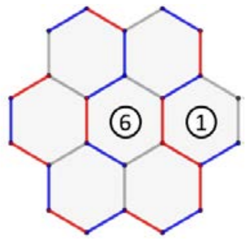
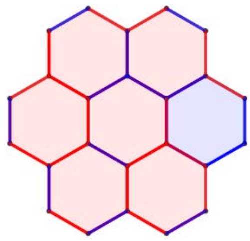
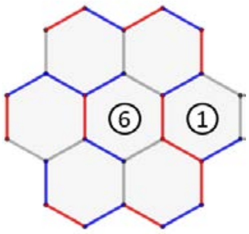
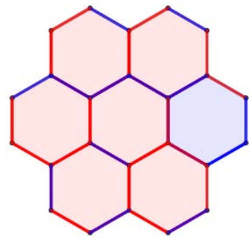
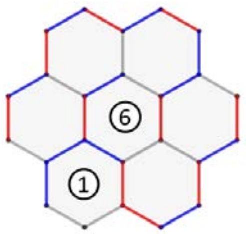
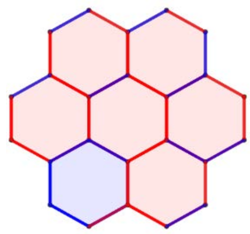
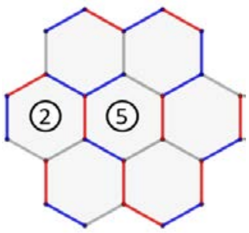
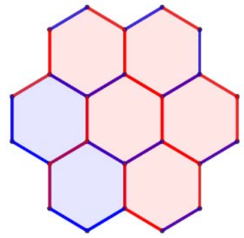
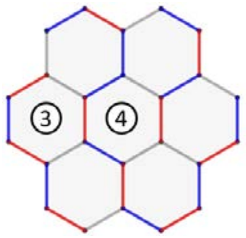
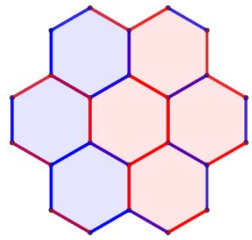
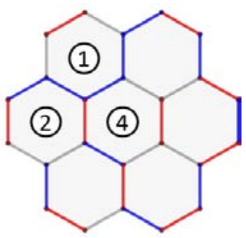
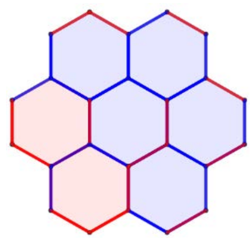
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(6 分)		1：6	紅方
				

	紅(迫讓)→藍(2 分)→紅(5 分)		2：5	紅方
				
	紅(迫讓)→藍(3 分)→紅(4 分)		3：4	紅方
				

雙二型

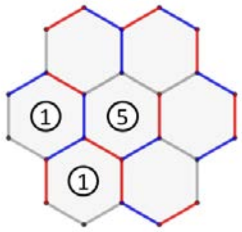
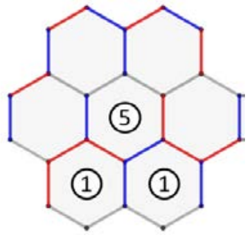
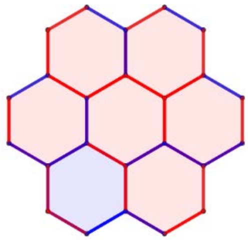
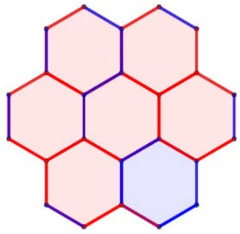
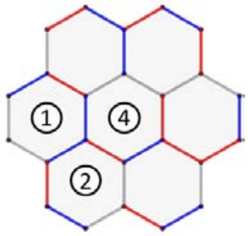
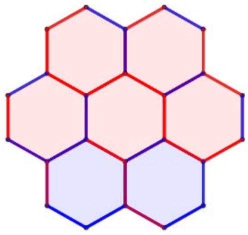
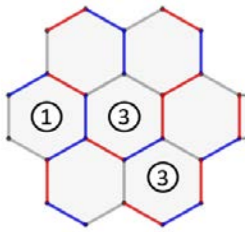
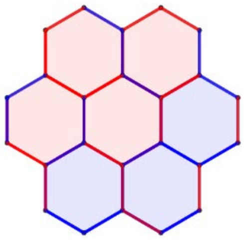
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(6 分)		1：6	紅方
	紅(迫讓)→藍(2 分)→紅(5 分)		2：5	紅方
				

三一型

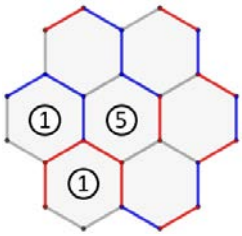
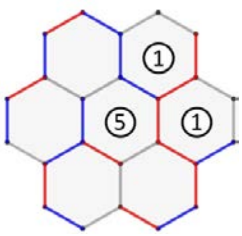
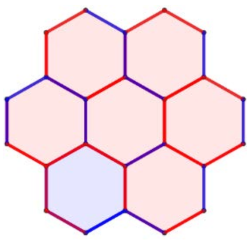
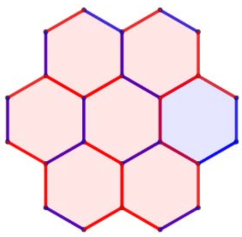
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(6 分)		1：6	紅方
				
				
	紅(迫讓)→藍(2 分)→紅(5 分)		2：5	紅方
	紅(迫讓)→藍(3 分)→紅(4 分)		3：4	紅方
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(2 分)→藍(4 分)		5：2	藍方

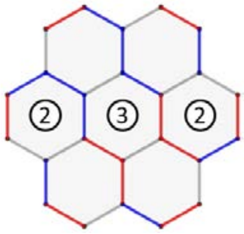
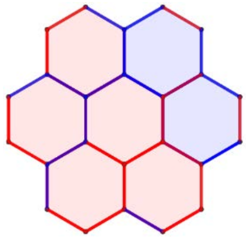
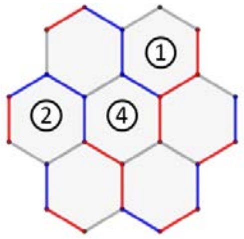
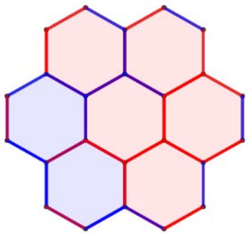
(四)完成 8 雙交界，12 外圍邊 (總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

四連型

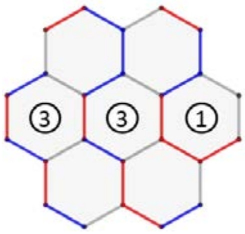
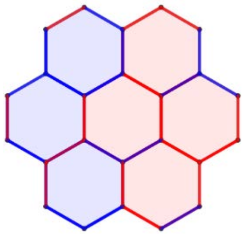
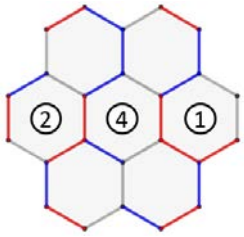
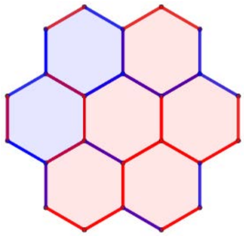
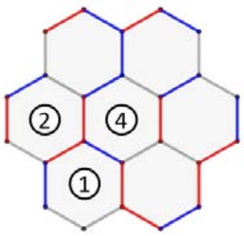
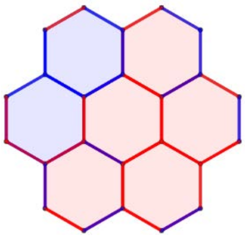
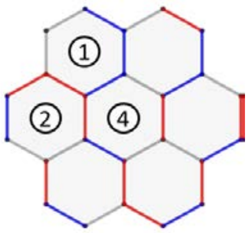
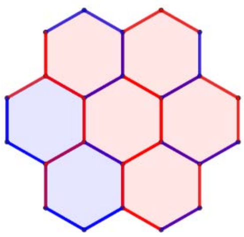
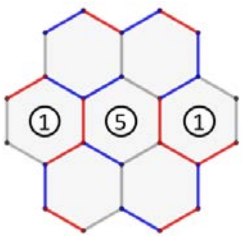
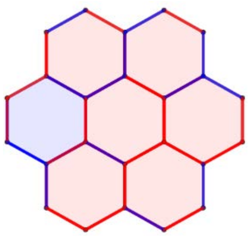
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(5 分)	 	1：6	紅方
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		2：5	紅方
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(3 分)→紅(3 分)		3：5	紅方

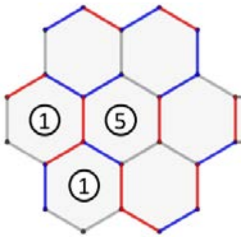
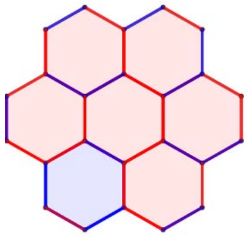
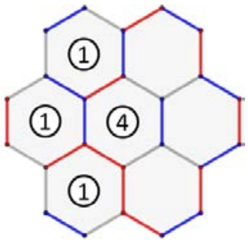
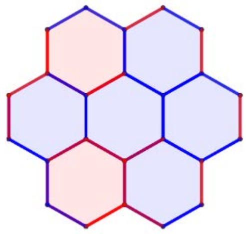
雙二型

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(5 分)	 	1：6	紅方

	藍(迫讓)→紅(2 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		2：5	紅方
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(4 分)		2：5	紅方

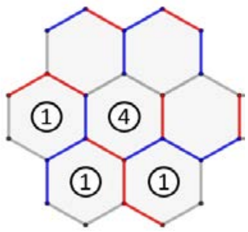
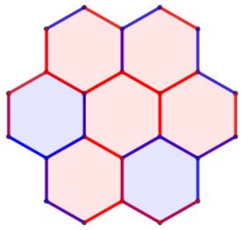
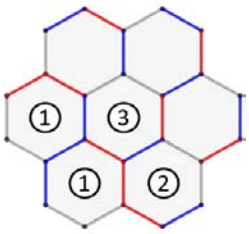
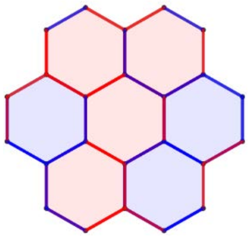
三一型

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(3 分)→紅(3 分)		3：4	紅方
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		2：5	紅方
				
				
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(5 分)		1：6	紅方

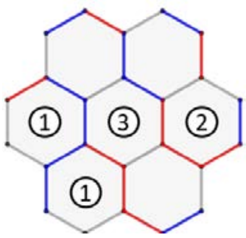
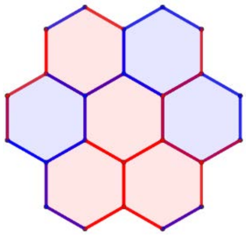
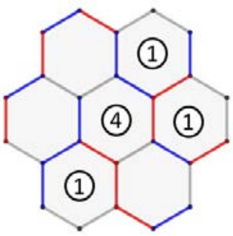
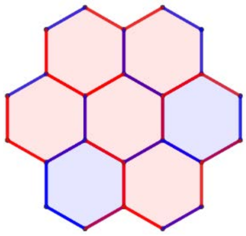
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(5 分)		1：6	紅方
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(4 分)		5：2	藍方

(五)完成 9 雙交界，10 外圍邊 (總和：奇數 → 輪到紅方面臨被迫讓分)

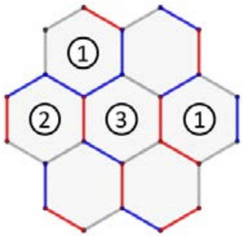
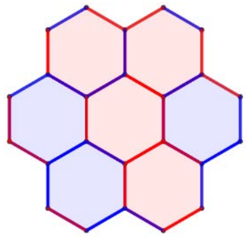
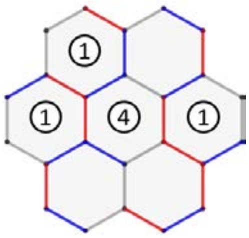
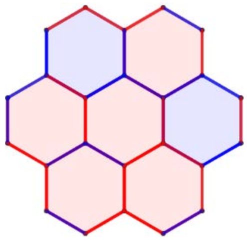
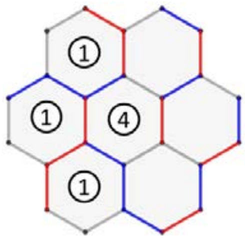
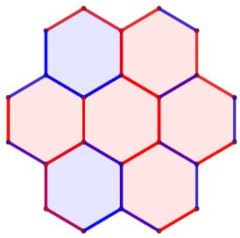
四連型

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(4 分)		2：5	紅方
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		3：4	紅方

雙二型

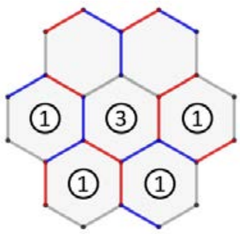
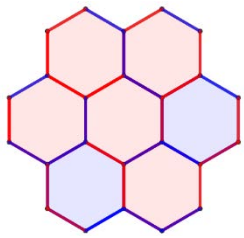
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		3：4	紅方
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(4 分)		2：5	紅方

三一型

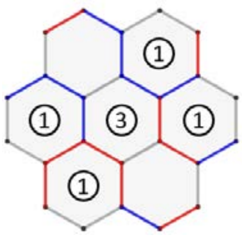
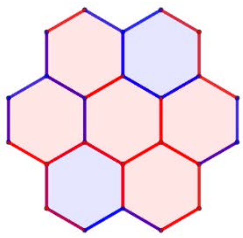
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(2 分)→紅(3 分)		3：4	紅方
	紅(迫讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(4 分)		2：5	紅方
				

(六)完成 10 雙交界，8 外圍邊 (總和：偶數 → 輪到藍方面臨被迫讓分)

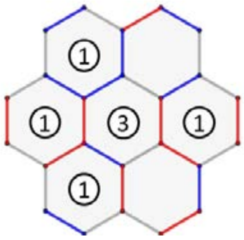
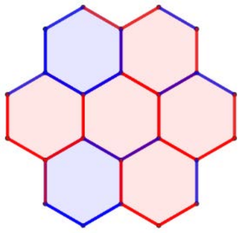
四連型

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(3 分)		2：5	紅方

雙二型

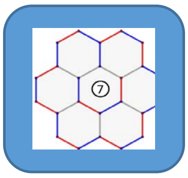
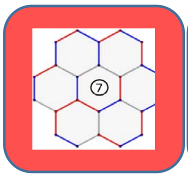
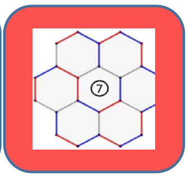
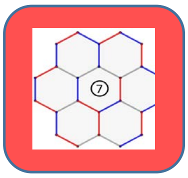
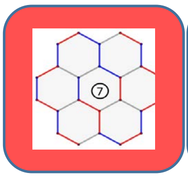
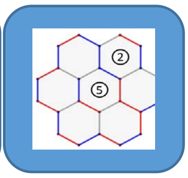
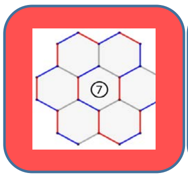
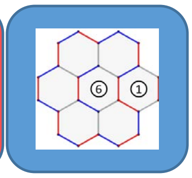
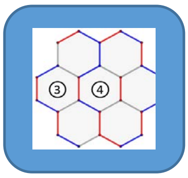
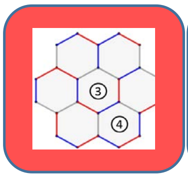
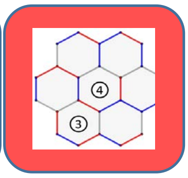
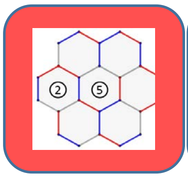
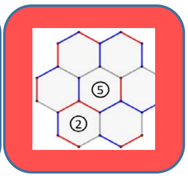
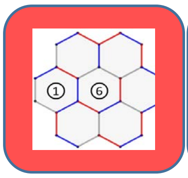
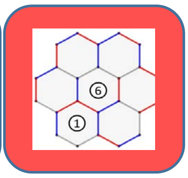
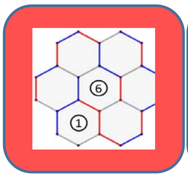
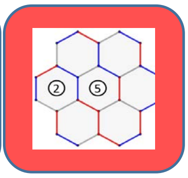
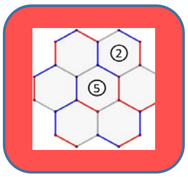
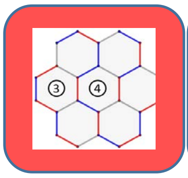
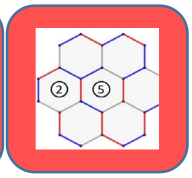
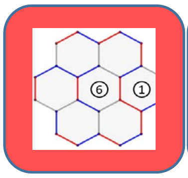
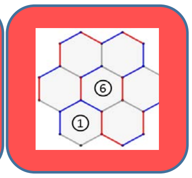
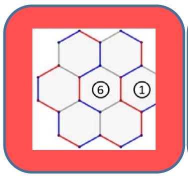
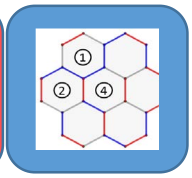
分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(3 分)		2：5	紅方

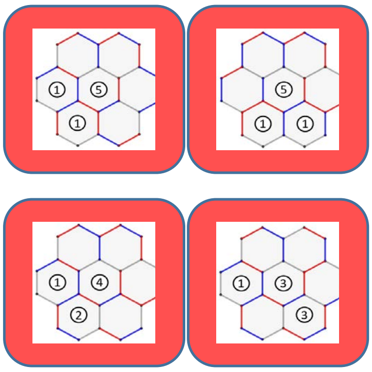
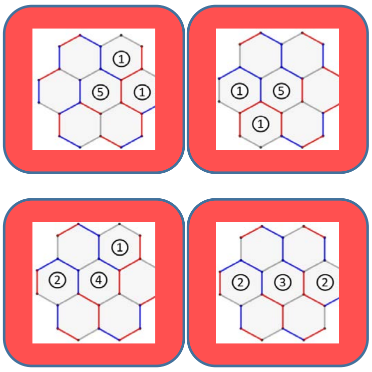
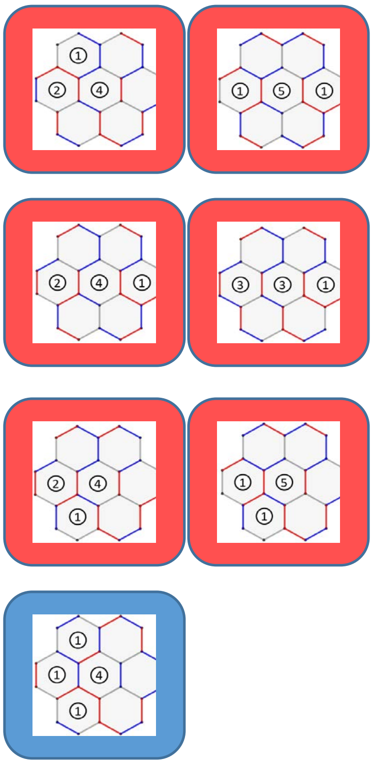
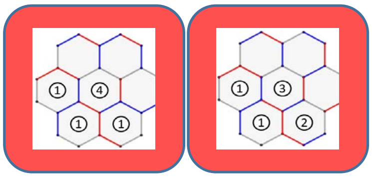
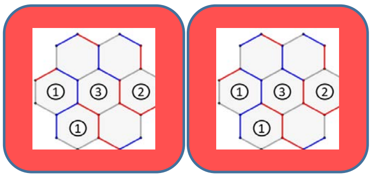
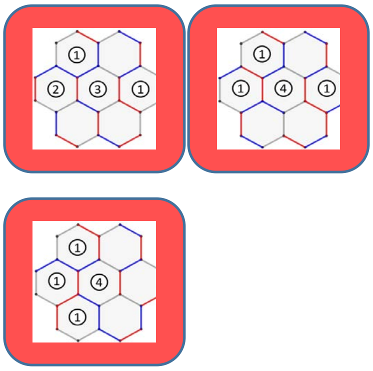
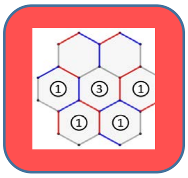
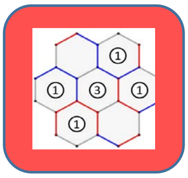
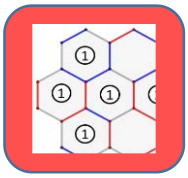
三一型

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(迫讓)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(3 分)		2：5	紅方

二階六邊形版面也是相當複雜，所以我們也將它整理成表，列在下方：

備註：藍色方格代表藍方獲勝，紅色方格代表紅方獲勝

	四連型	雙二型	三一型
5雙交界			
6雙交界	  	 	  
7雙交界	     	  	     

8 雙交界			
9 雙交界			
10 雙交界			

從上表可知，雖然紅方幾乎都獲勝，但並不像前兩種版面那樣百分之百成功，不過排列的方式對戰局還是有一定的影響。我們觀察後發現雙交界≦6 要完成被迫讓分前，外圍邊所需的數量都是雙交界的兩倍以上，也就是說紅方在被迫讓分前，有許多機會去增加雙交界，讓完成的雙交界數＞6，而這個情況下藍方只剩三一型裡唯一的獲勝可能，但紅方是後手，中心要完成 4 條雙交界的最後一條是由紅方決定，所以完全可以避免三一型的發生，也就是說在二階六邊形的版面中，紅方必勝。

肆、研究結果

一、1×n 版面的必勝方式

考慮奇偶數的情況下，列出在 1×n 版面中，m 條雙交界對勝負的影響，如下表：

m \ n	奇數	偶數
奇數	紅方必勝	平手或紅方勝利
偶數	紅方必勝	紅方必勝

因此在不讓分的條件下，如果遇到 n 等於偶數時，因為雙交界數遠小於外圍邊數，所以先手可以在面臨被迫讓分前將所有雙交界完成(共 n-1 條必為奇數)，使得戰局必定平手。但如果 n 等於奇數時，紅方必定勝利。

二、2 階三角形與 3 階三角形的必勝方式

在 2 階的情況下只要完成任意一條雙交界，藍方就會獲勝。而 3 階的情況比較複雜，原本以為雙方都有機會獲勝，但整理成表格後，發現隨著完成的雙交界增加，藍方可以獲勝的可能變小，加上紅方只要完成最中心的三條雙交界就可以立於不敗。

透過以上的研究，我們發現完成雙交界數和分區數對雙方勝負的影響，如下表：

	完成奇數雙交界	完成偶數雙交界
分成奇數個分區	藍方勝	紅方勝
分成偶數個分區	紅方勝	藍方勝

可以統整成：

完成雙交界數 ＋ 分區數 ＝	奇數	紅方獲勝
	偶數	藍方獲勝

其中有特例，當版面有偶數個六邊形，且分區的分數兩兩相同時，就會導致雙方平手。

三、2 階平行四邊形與 2 階六邊形版面的必勝方式

在探討的過程中，我們發現可以透過技巧性的選擇中心的雙交界來決定勝負，而這兩種版面只要完成中心的關鍵雙交界，必定是紅方獲勝。有了這次嘗試，我們也更加肯定了中心的雙交界對勝負會有一定的影響，但我們目前資料量過小，無法輕易下此結論，不過這將會是我們未來努力的方向。

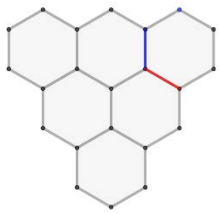
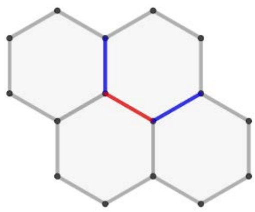
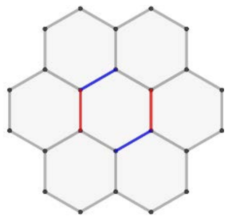
四、不同版面間的關聯

一開始我們是猜想不同版面間應該可以透過堆疊的方式，去尋找一種固定的規律，但這次研究下來，發現不同版面間的關聯性沒有那麼強，反而會隨著不同的排列方式，增加不同數量的雙交界，而雙交界的數量及排列才是決定勝負的重要因素。

伍、討論

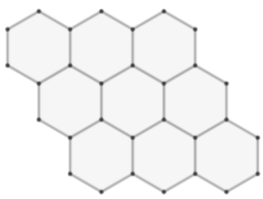
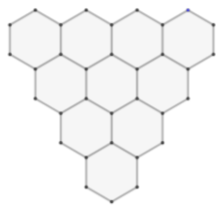
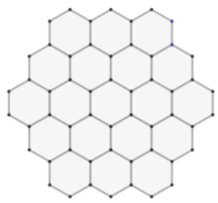
一、雙交界的差別

剛開始在進行研究時，我們覺得每條雙交界對勝負的影響力應該是同等的，但是當版面變豐富，階層變多時，開始發現雙交界之間也是有差別的。例如：三角形版面的角落只需要兩條雙交界就可以隔出一個分區，但平行四邊形版面的角落反而需要三條，甚至在六邊形版面中心的雙交界完全無法隔出分區(如下呈現)。不過我們目前研究的階層比較少，這些差異還不明顯，若是未來繼續此研究的話，我們會考慮將雙交界再細分去探討，也許會有更明確的結果。

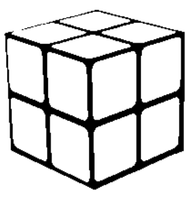
二、延續研究的可行性

這次研究我們選擇將點格棋原本的四邊形版面，改成六邊形的情況，相較之下可以拼出更豐富的版面，但因為六邊形的邊數較多，在操作上較為耗時，想要探討更多階的版面，難度相當的大。我們本來有嘗試列出 3 階四邊形(如下)的可能性，其共有 38 條邊，列完後發現已經佔了十幾頁，更何況 4 階三角形(共有 42 條邊)和 3 階六邊形版面(共有 72 條邊)這兩種，光是列出所有可能性就是浩大的工程，如果想要找出 n 階的規律，勢必得做更多階的版面，那麼邊數絕對是倍數的增加，以我們的能力不易做到，有事我們覺得這次可惜的地方。

三、其他的推廣方向

雖然如上面所說想要繼續找出 n 階的規律十分困難，但我們用魔術方塊的階層概念在替版面命名時，忽然產生了「是不是可以在魔術方塊上進行點格棋」這種想法，也就是將點格棋推廣到立體的圖形(如下)，原本還有外圍邊和雙交界的差別，但立體圖形上的邊全部都是雙交界，完全就是一種新的課題。



陸、結論

點格棋這個遊戲流傳多年，已經有許多人從不同的觀點去尋找必勝方程式，而我們這次選擇用雙交界的數量去研究勝利的規律。從研究中我們發現影響勝負最重要的就是**雙交界和分區數的奇偶性**，完成雙交界的個數是奇是偶，會影響到誰先被迫讓分，分區重要的反而不是分數，而是分區的數量，只要配合減少失分的原則，誰獲得最後一個分區，基本上就會獲勝(偶爾會平手)，也就是這次研究可以說是在討論兩種奇偶性之間的互相影響。

但人畢竟是能夠自主思考的，誰也想不到對方下一步會如何進行，就算完成的雙交界數量固定，也會因為不同畫法產生不同分區，導致各種勝利的可能，所以想要統整出不同版面通用的必勝方式還是相當困難的，只能針對不同版面列出所有可能性，再由雙方自行判斷情勢，找出屬於各自的勝利方程式。

柒、參考資料及其他

一、劉佩雯、韓杰霖、陳怡君、陳奕達(2010)。圍地盤遊戲的必勝策略。第 50 屆全國中小學科學展覽會國中組數學科

二、涂筱嫻、洪雅俐、吳珮辰(2020)。吃格子大亂鬥。第 60 屆全國中小學科學展覽會國中組數學科

三、GeoGebra 自製六邊形的點格棋遊戲。

網址：https://www.geogebra.org/m/tedxfjuc

【評語】030426

本作品所討論的是在棋盤上進行的一種對局遊戲（Dots and Boxes、點格棋）的致勝策略。原始的遊戲是在正常的棋盤上（每個格子都是正方形的棋盤）進行，本作品考慮的是在由正六邊形所拼接而出的棋盤上進行這樣的遊戲。由於邊與邊之間的連動性較原本的棋盤複雜，問題變的更為有趣，分析起來也更有難度。作者們由 1xn 的棋盤著手，針對達到臨界情況時，哪一種殘局對先手或後手而言是具有優勢作了討論與分析，並進一步的把結果擴展到其它特殊造形的棋盤上。想法頗具創意，值得鼓勵。這個問題與一般的雙人對戰問題有一個關鍵的不同點，就是在遊戲過程中，某一方可能因為滿足了特定的條件而連續走了不只一步。這個關鍵的不同點也讓分析遊戲是否存在著必勝策略變的更為困難。從某一種特定的殘局（臨界狀態）著手，針對此種殘局的各類型態說明先後手誰較具有優勢是很不錯的想法。除此之外，本作品的問題也是相當熱門的研究問題，各種棋盤遊戲，將之前已經探討的四邊形，換成六邊形，也是一種很自然的推廣。內容部分可以看出作者的耐心，需要花費不少步驟先把所有可能性分類清楚，每一分類再繼續將所有可能性完成，不過很有可能先前的一些作品或許已經提供一些關鍵想

法．後面有點可惜的是，沒能跳出原本分析此問題的框架，只是針對滿足特定條件的殘局分析，而無法針對最關鍵的問題—如何走出致勝的殘局，給出一些具體的結論。說明某一方具有優勢幾乎都是透過例子來闡述，沒有給出一個確實的判別規則是有點可惜的。是否可以對殘局作進一步的分類，給出特定某幾類殘局先後手勝負的判斷準則？如果可以在這個部分再多做著墨會更好。

作品簡報

「佔」地「封」雲

— 六角點格棋的勝利方程式

組別：國中組
科別：數學科

研究動機

點格棋是一個我們很喜歡的一個小遊戲，但是在網路上和電腦對決的時候，不管怎麼樣都贏不了，所以就開始好奇電腦為什麼能一直贏？是不是有一種必勝的方程式？帶著這樣的好奇心，我們產生了研究這個主題的想法。

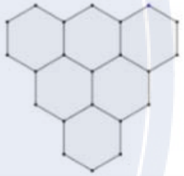
不過之前已經有不少人研究過四邊形的點格棋，所以我們改成六邊形的排列來進行的遊戲，相較於四邊形只能排出方陣，六邊形可以排出更多特別的圖形，所以我們就有了以六邊形當作版面進行點格棋的規則這種想法，想試著從不同的版面找出一種必勝的方式。

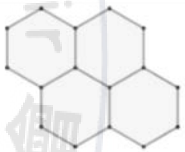

1x2

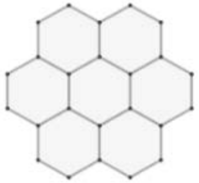

1x3


1x4


2階三邊形


3階三邊形


2階平行四邊形


2階六邊形

研究目的

一、探討1x1到1x4版面的必勝可能。

二、推廣出1xn的版面的必勝可能。

三、探討2階和3階三角形版面的必勝可能。

四、探討這兩種三角形版面中，影響勝負的關鍵因素。

五、探討2階平行四邊形版面的必勝可能。

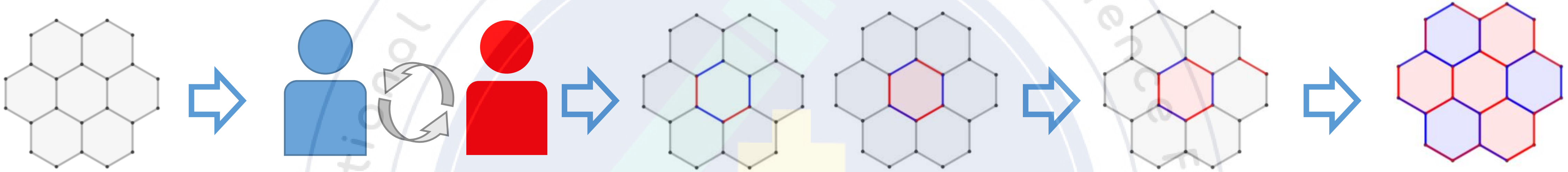
六、探討2階六邊形版面的必勝可能。

七、透過以上不同版面，找尋這些必勝可能是否有共通點。

研究過程與方法

一、遊戲規則與名詞定義

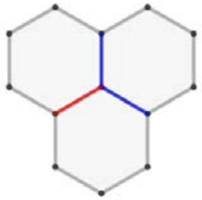
➢ 遊戲規則：



六邊形版面　雙方輪替畫線　完成該格最後一條邊者得到一分　得分可再畫一條　得分較多者獲勝

➢ 定義名詞與原則

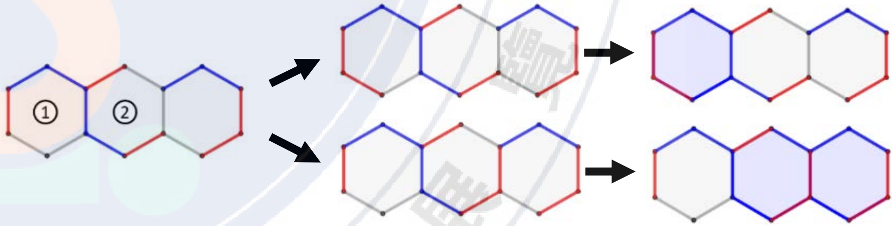
- 先後手：藍色定為「先手」，紅色定為「後手」。
- 外圍邊：沒有與其他六邊形交接的邊。
- 雙交界：兩個六邊形交接的邊。



圖一

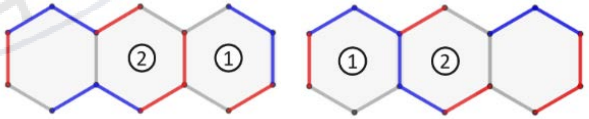
- 分區：利用雙交界隔出不同的分數區。
- 被迫讓分：不管如何畫都會失分。

- 不讓分原則：在面臨被迫讓分得情況之前，不讓對方獲得任何一分
- 減少失分原則：在面臨被迫讓分時，選擇失分較少的分區讓給對方



圖二

- 外圍邊隨機原則：外圍邊的選擇不影響結果，所以隨機選擇。
- 對稱原則：圖形的翻轉或鏡射視為同一種。

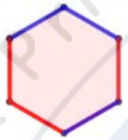


圖三

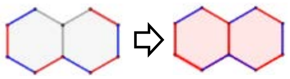
二、1xn的版面

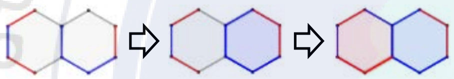
- **1x1版面：共有0雙交界，6外圍邊。**

藍方為先手的情況下，雙方輪替後，必為後手的紅方獲勝。

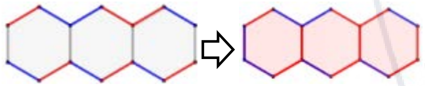


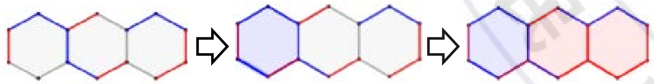
- **1x2版面：共有1雙交界，10外圍邊。**

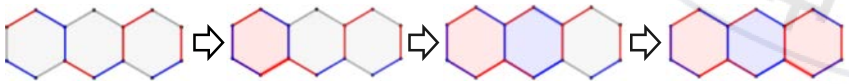
完成0雙交界、8外圍邊：


完成1雙交界、6外圍邊：


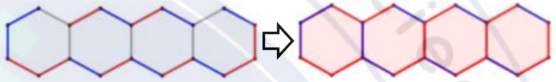
- **1x3版面：共有2雙交界，14外圍邊。**

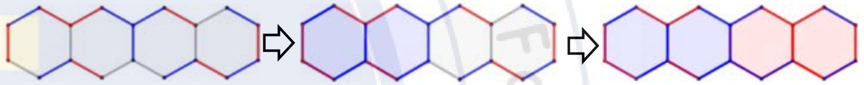
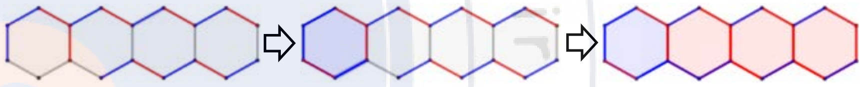
完成0雙交界、12外圍邊：


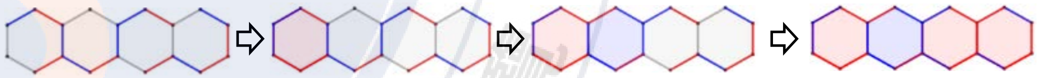
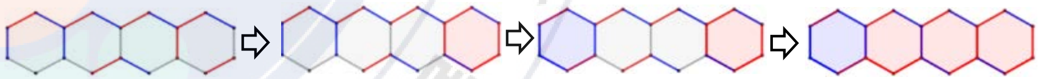
完成1雙交界、12外圍邊：


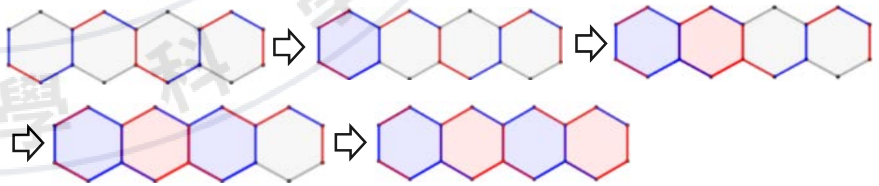
完成2雙交界、8外圍邊：


- **1x4版面：共有3雙交界，18外圍邊。**

完成0雙交界、16外圍邊：


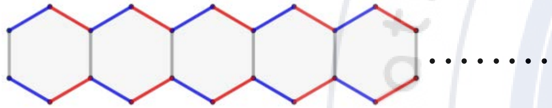
完成1雙交界、14外圍邊：



完成2雙交界、12外圍邊：



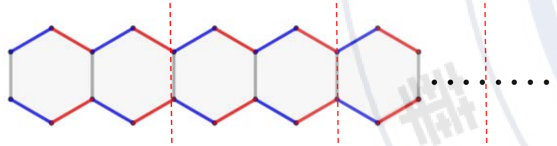
完成3雙交界、10外圍邊：


➢ 1xn版面：共n-1雙交界，4n+2外圍邊。

不畫雙交界，被迫讓分前要完成4n條外圍邊，且只有1個分區



每多完成 m 條雙交界外圍邊就要少 2m 條。且會被分成 m+1 個分區



考慮雙交界時，被迫讓分前需要完成

$$\underbrace{4n}_{\text{未畫雙交界完成邊數}} + \underbrace{m}_{\text{每多一條雙交界}} - \underbrace{2m}_{\text{少畫兩條外圍邊}} = 4n-m \text{ 條線}$$

m是奇數時
→ 畫線數4n-m 為奇數 → 紅方被迫讓分 → 藍方先得分
→ 分區數 m+1 為偶數 → 設分區數由小到大為$a_1, a_2, \cdots, a_{m+1}$

得分順序：藍→紅→ ⋯ →藍→紅

藍方得分：$a_1+a_3+\cdots+a_m$ （共$\frac{m}{2}$項）

紅方得分：$a_2+a_4+\cdots+a_{m+1}$ （共$\frac{m}{2}$項）

兩方的分區數一樣多，又 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{m+1}$ → 紅方勝利

※如果$a_1=a_2$，$a_3=a_4$，⋯，$a_m=a_{m+1}$則會 平手

m是偶數時
→ 畫線數4n-m 為偶數 → 藍方被迫讓分 → 紅方先得分
→ 分區數 m+1 為奇數 → 設分區數由小到大為$a_1, a_2, \cdots, a_{m+1}$

得分順序：紅→藍→紅→ ⋯ →藍→紅

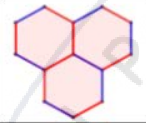
藍方得分：$a_2+a_4+\cdots+a_m$ （共$\frac{m}{2}$項）

紅方得分：$a_1+a_3+\cdots+a_{m+1}$ （共$\frac{m}{2}+1$項）

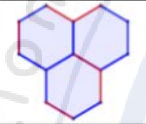
紅方會多獲得一個分區，又 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{m+1}$ → 紅方勝利

三、2階三邊形的版面
（此版面共有3雙交界，12外圍邊）

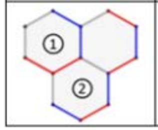
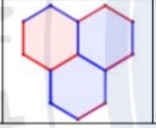
(一)完成 0 雙交界，12 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(追讓)→紅(3 分)		0：3	紅方

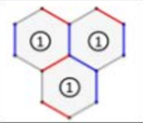
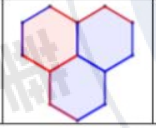
(二)完成 1 雙交界，10 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(追讓)→藍(3 分)		3：0	藍方

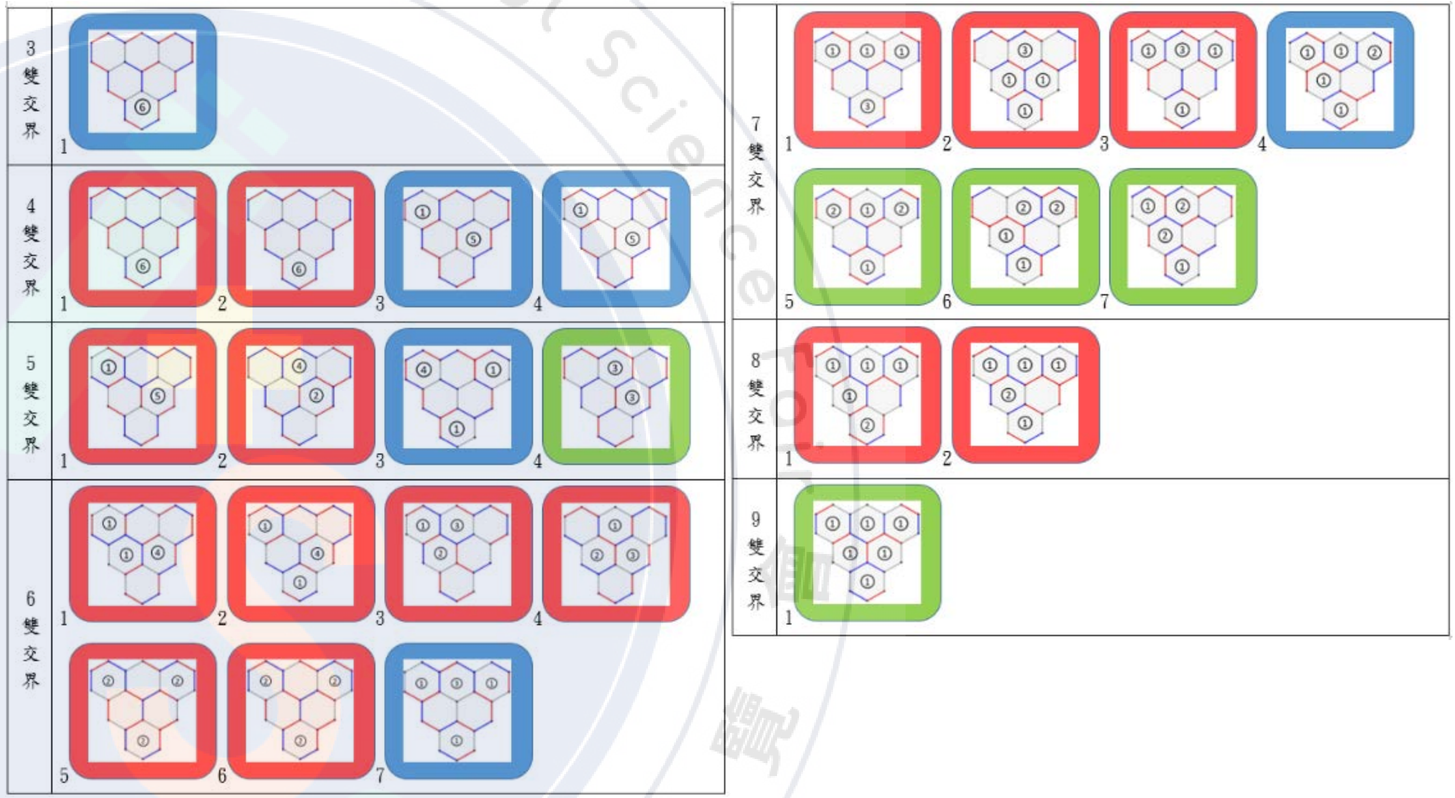
(三)完成 2 雙交界，8 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	藍(追讓)→紅(1 分)→藍(2 分)		2：1	藍方

(四)完成 3 雙交界，6 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
	紅(追讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)		2：1	藍方

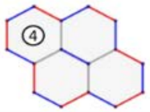
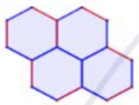
四、3階三邊形的版面
（此版面共有9雙交界，18外圍邊）



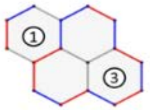
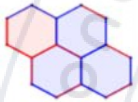
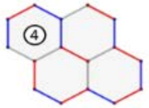
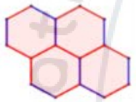
	完成奇數雙交界	完成偶數雙交界
分成奇數個分區	藍方勝	紅方勝
分成偶數個分區	紅方勝	藍方勝

五、2階平行四邊形的版面
（此版面共有5雙交界，14外圍邊）

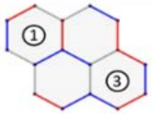
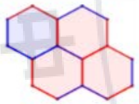
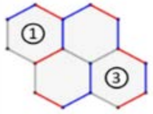
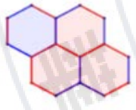
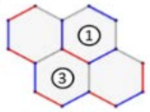
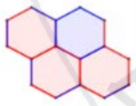
(一)完成 1 雙交界，14 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 ④	紅(追讓)→藍(4 分)		4：0	藍方

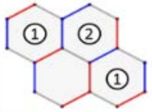
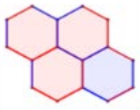
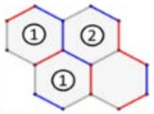
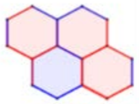
(二)完成 2 雙交界，12 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 ① ③	藍(追讓)→紅(1 分)→藍(3 分)		3：1	藍方
 ④	藍(追讓)→紅(4 分)		0：4	紅方

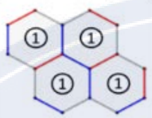
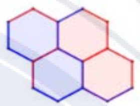
(三)完成 3 雙交界，10 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 ① ③	紅(追讓)→藍(1 分)→紅(3 分)		1：3	紅方
 ① ③	紅(追讓)→藍(1 分)→紅(3 分)		1：3	紅方
 ① ③				

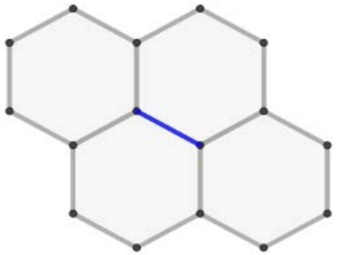
(四)完成 4 雙交界，8 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 ① ② ①	藍(追讓)→紅(1 分)→藍(1 分) → 紅(2 分)		1：3	紅方
 ① ② ①				

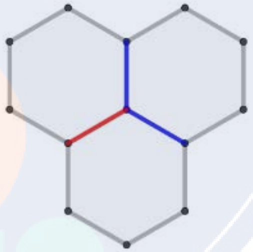
(五)完成 5 雙交界，6 外圍邊

分區分布	得分順序(由左至右)	結果	藍:紅	獲勝
 ① ① ① ①	紅(追讓)→藍(1 分)→紅(1 分)→藍(1 分)→紅(1 分)		2：2	平手

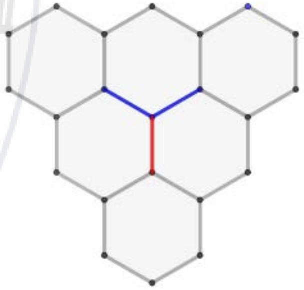
其中的關鍵是在最中心的雙交界，只要完成這一條的情況，都是紅方獲勝或是平手，也就是說紅方立於不敗。



除此之外：完成其中一條藍方勝利

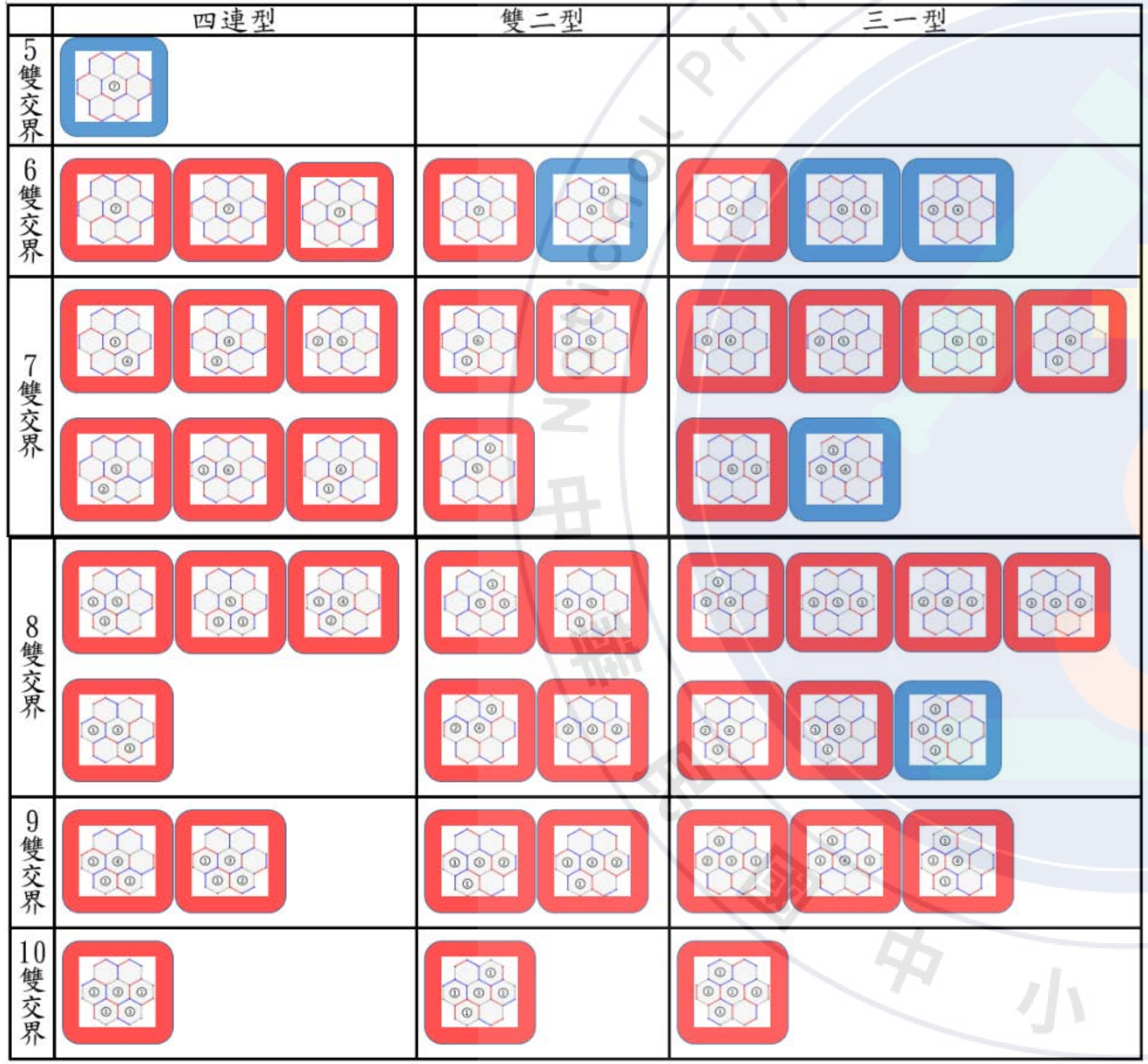


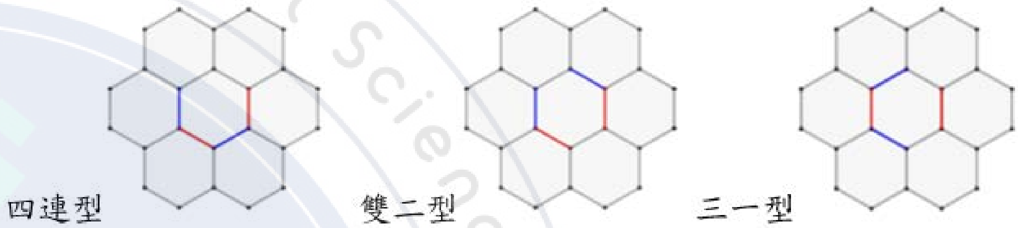
完成三條紅方勝利



前面的2階和3階三邊形這兩種版面中，可以發現在版面的中心，會有一些雙交界對結果產生直接的影響，只要完成這些關鍵就能直接決定獲勝者。

六、2階六邊形的版面
（此版面共有3雙交界，12外圍邊）





「三一型」藍方獲勝的機會較多

紅方為後手，可以決定中心雙交界的排列

避開三一型，且被迫讓分前完成大於6條的雙交界。

紅方獲勝

伍、研究結果

➢ 1xn版面的必勝方式：

考慮奇偶數的情況下，列出在1xn版面中，m條雙交界對勝負的影響，如下

m \ n	奇數	偶數
奇數	紅方必勝	平手或紅方必勝
偶數	紅方必勝	紅方必勝

➢ 規律版面的必勝方式：

版面	2階三邊形	3階三邊形	2階平行四邊形	2階六邊形
過程	完成任意一條雙交界	完成三條中心雙交界	完成中心的一條雙交界	避開中間為三一型的情況
勝利方	藍方	紅方	紅方	紅方

完成雙交界數 + 分區數	奇數	紅方獲勝
	偶數	藍方獲勝

$\boxed{\text{中心雙交界影響勝負}}$

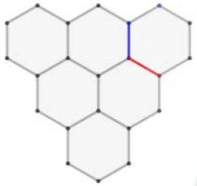
➢ 不同版面間的關聯

這次研究發現不同版面間的關聯性沒有那麼強，反而會隨著不同的排列方式，增加不同數量的雙交界，而雙交界的數量及排列才是決定勝負的重要因素。

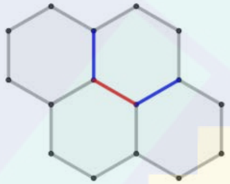
陸、討論

➢ 雙交界的差別

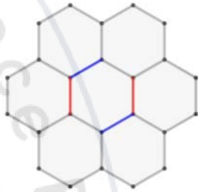
剛開始我們覺得每條雙交界對勝負的影響力應該是同等的，但是當版面變豐富，階層變多時，開始發現雙交界之間也是有差別的。



兩條雙交界可隔出分區



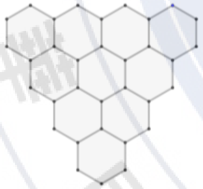
三條雙交界可隔出分區



四條雙交界卻無法隔出分區

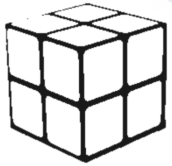
➢ 延續研究的可行性

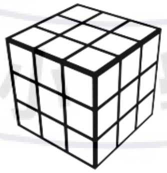
我們選擇將點格棋原本的四邊形版面，改成六邊形的情況，相較之下可以拼出更豐富的版面，但因為六邊形的邊數較多，在操作上較為耗時，想要探討更多階的版面，難度相當的大。



➢ 其他的推廣方向

將點格棋推廣到立體的圖形，原本還有外圍邊和雙交界的差別，但立體圖形上的邊全部都是雙交界。





柒、結論

- 影響勝負最重要的就是雙交界和分區數的奇偶性

雙交界的奇偶性 → 影響誰先被迫讓分

分區數的奇偶性 → 影響誰獲得最後分區

- 人的自主想法是影響勝負最大變因 → 最穩妥的勝利方勝：列出所有可能性

捌、參考資料

一、劉佩雯、韓杰霖、陳奕達、陳怡君(2010)。圍地盤遊戲的必勝策略。第50屆全國中小學科學展覽會國中組數學科。

二、涂筱嫻、洪雅俐、吳珮辰(2020)。吃格子大亂鬥。第60屆全國中小學科學展覽會國中組數學科

三、GeoGebra自製六邊形的點格棋遊戲。