中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030421

進擊的退化多邊形

學校名稱：新北市立永和國民中學

作者：	指導老師：
國二 林寅琪 國二 林沂潔 國二 常閎	蔡承昌

關鍵詞：垂足多邊形、退化多邊形、相似垂足中心

摘要

在平面上，給定任意一個多邊形以及一點 P，P 點對多邊形各邊延長線所做垂足形成的多邊形，我們稱作此多邊形的垂足多邊形。本研究將多邊形分為共點和共線的特定形式的退化多邊形來討論。探討如何對特定形式的退化多邊形作垂足多邊形；以及這些退化多邊形作的垂足多邊形之性質會不會與一般多邊形相同，有哪些相異之處。

再進一步推導出任意兩個四或五邊形都可以皆由垂足多邊形來相似，過程中利用退化多邊形來減少需要考慮的條件，更快地找到需要的點。而且所有的證明所需手法皆是國中課程內容，可以學以致用真的十分開心。

壹、 前言

關於垂足三角形的文獻十分豐富，性質與之相近的還有點對三角形各邊進行鏡射的鏡射三角形，而這兩種研究除了三角形以外，歷年來也有許多人嘗試擴展到 n 邊形，在諸多作品中我們注意到參賽 2021 年全國科學展覽會中的一篇作品：「**垂足多邊形的不變量與分類**」，在這篇作品中證明了：任意兩三角形都可以找到相似垂足中心、任意兩四邊形可以做複數次垂足多邊形後相似、在垂足等價關係下所有三角形都同類，所有四邊形也都是同一類。

所謂的相似垂足中心是指這個點能夠滿足對多邊形作垂足多邊形後能與另一個多邊形相似；在任意的兩個三角形都有辦法找到這樣的點，而四邊形由於目前沒有的方法尋找，因此退而求其次，利用複數個點連續的形變來相似。在這些前提之下，他們在四邊形上找到一個類似於三角形相似垂足中心的性質。敘述如下：

給定任意兩個四邊形 $\square A_1A_2A_3A_4$、$\square B_1B_2B_3B_4$ 後能找到點列 $\{P_1、P_2、\cdots、P_n\}$，點列 $\{P_1、P_2、\cdots、P_n\}$ 對 $\square A_1A_2A_3A_4$ 做的垂足四邊形會相似於 $\square B_1B_2B_3B_4$。

看了這麼多有趣的性質，我們決定要試著找到五邊形的相似垂足中心，但在嘗試各種點列對五邊形作垂足多邊形之後，我們發現特定的點即使造出了三頂點共線，在遵循原定義的前提下，依舊能符合過去已經被證明的垂足多邊形性質，就決定朝這個方向開始探討；以往在四邊形的研究中，出現三點共線的情況通常會被視為不好的結果，又或者單純視作圖形的化簡、依收斂的形式分類，例如 ：

「**由繁化簡~鏡射多邊形退化之探討**」；底下解釋何為化簡，又為甚麼會被當作不好的結果。

此時四邊形是指凸四邊形、凹四邊形和自交的四邊形，這樣的圖形會遇到一個問題，當點落在特定位置時做垂足多邊形會收斂成有共線的圖形，再做會成為三角形，如下圖 1，

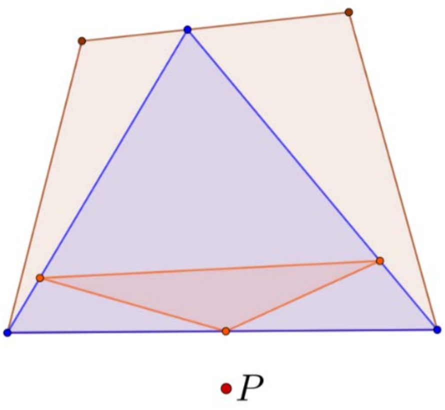


圖 1： P 點對四邊形做兩次垂足多邊形導致收斂成三角形

導致無法繼續研究，相當於四邊形在做垂足多邊形的過程中形變成三角形，也就是原圖形的性質沒有全部被保留，再繼續做下去也許會收斂成一個點，這是沒有意義的，因此以前的人通常都會避開這樣的圖形。

那麼是否能從這些收斂後的特殊圖形出發，往更廣義的四邊形甚至 n 邊形分類？這個問題激發了我們的好奇心，更驅使我們開始研究。我們期待以往被認為會少掉原有性質而無法還原的圖形可以找到特殊的方法，來讓即使是退化的圖形還是能符合原本的性質。並嘗試用這些「退化」的多邊形來幫助我們更快的找出四邊形跟五邊形的相似垂足中心。

為了能更快的將各種情況一般化，底下我們要先定義一些名詞。

貳、研究目的與問題

一.名詞定義

定義 1.1 (參考文獻[1]，定義 1.1)

給定 $n \geq 3$，以及平面上 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ (無大於等於三點共線的 n 邊形)和一點 P。

所謂 P 對 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 的「垂足多邊形」

是指 P 對該多邊形的延長線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 依序作垂足點

P_1、P_2、…、P_n 所形成的 n 邊形 $P_1P_2\cdots P_n$，如圖 2。

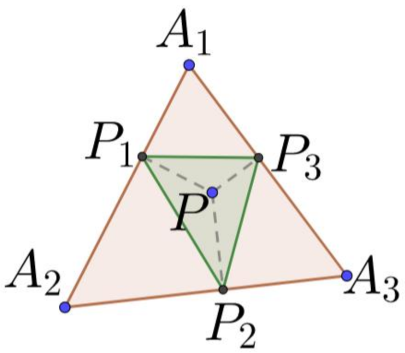


圖 2-1：給定 P 點對三角形做垂足多邊形

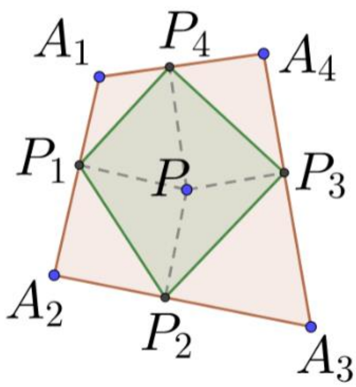


圖 2-2：給定 P 點對四邊形做垂足多邊形

定義 1.2

今平面上有一 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$，則過 P 在 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 上的垂足命名為 $A_1^{(1)}$，在 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 上的垂足命名為$A_2^{(1)}$，在 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 上的垂足命名為 $A_3^{(1)}$，以此類推，在 $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$ 的垂足命名為 $A_{n-1}^{(1)}$，在 $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 的垂足命名為 $A_n^{(1)}$

而在處理四邊形時，由於後面使用的手法會出現共點的情況，
故對同一個 P 點連續做垂足四邊形時，使用以下的命名方式：

定義 1.3

若在平面上有四邊形 $ABCD$，則在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上作的點命名為 A_1，在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上作的點命名為 B_1，在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上作的點命名為 C_1，在 $\overleftrightarrow{DA}$ 上作的點命名為 D_1。而在 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ 上作的點命名為 A_2，在 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 上作的點命名為 B_2，以此類推。

定義 1.4 (參考文獻[1]，定義 1.7)

給定平面上 n 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 以及有順序的點列 P_1、P_2、⋯、P_m。我們可以用 P_1對 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 作垂足多邊形，得 $A_1^{(1)}A_2^{(1)}\cdots\cdots A_n^{(1)}$；接著用 P_2 對 $A_1^{(1)}A_2^{(1)}\cdots\cdots A_n^{(1)}$ 作垂足多邊形，得 $A_1^{(2)}A_2^{(2)}\cdots\cdots A_n^{(2)}$；重複上述步驟，可得 $A_1^{(m)}A_2^{(m)}\cdots\cdots A_n^{(m)}$。我們將 n 邊形 $A_1^{(m)}A_2^{(m)}\cdots\cdots A_n^{(m)}$ 稱為「點列 P_1、P_2、⋯、P_m 對 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 做出的垂足多邊形」。

為了方便看出是哪些點所作的垂足多邊形，也可記作 $[A_1A_2\cdots\cdots A_n，P_1、P_2、\cdots、P_m]_\perp$。

(如果對同一點 P 重複作 n 次，記為$[A_1A_2\cdots\cdots A_n，P^n]_\perp$)。

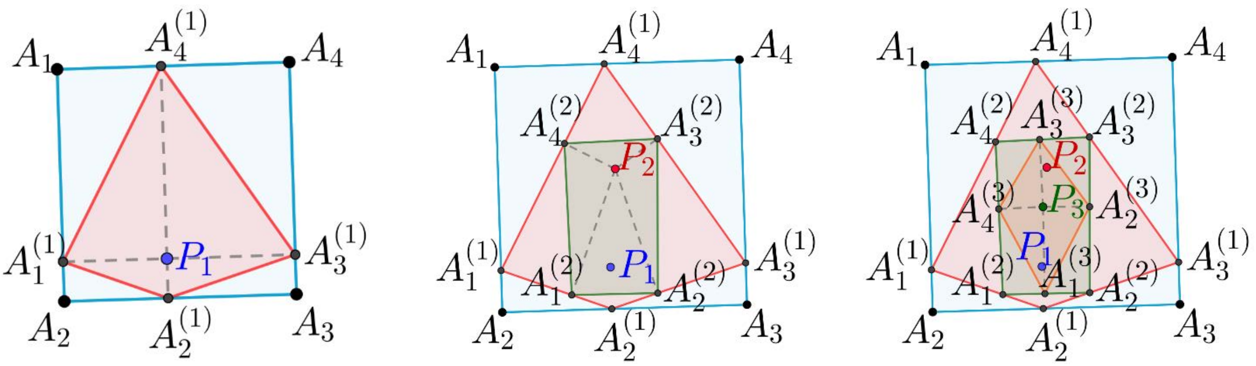


圖 3：點列 P_1、P_2、P_3 對四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 做出的垂足多邊形

定義 2.1

退化多邊形

是多邊形的退化情況，是指某個幾何對象處於滿足多邊形定義的臨界。有幾種可能：

(1)不具面積或面積為 0

(2)具有邊長為 0 的邊

(3)具有角度為 180 度的內角

(4)具有 0 度或 360 度的內角

(5)所有邊重合

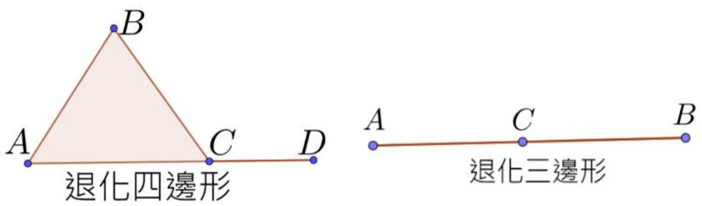


圖 4：常見的退化多邊形

定義 2.2

退化 n 邊形命名

當一退化 n 邊形上的點能構成 k 種相異直線，則稱此退化 n 邊形屬於 $G(n，k)$。

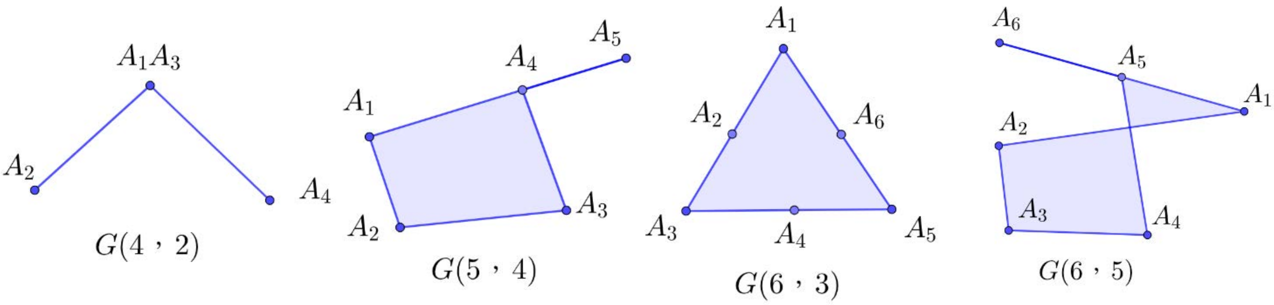


圖 5：退化 n 邊形以及其命名

但不是所有的退化多邊形都會在我們的研究中出現，

底下定義沒有三點共線多邊形在做垂足多邊形時會出現的退化多邊形。

定義 2.3

對於任意沒有三點共線的 k 邊形在其至多 $k-1$ 個頂點上任意補 a_1 到 a_{k-1} 個點

所形成的退化 n 邊形 $(\mathbf{1 \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{k} - 1，0 \le \boldsymbol{a_i} \le \boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}，\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots\cdots \boldsymbol{a_{k-1}} = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}})$。

這樣的多邊形，我們定義其屬於 $G(n，k)_\alpha$，如圖 6

為了方便簡稱，對於任意屬於 $G(n，k)_\alpha$ 的 n 邊形，稱其為 α $type$ 的 n 邊形。

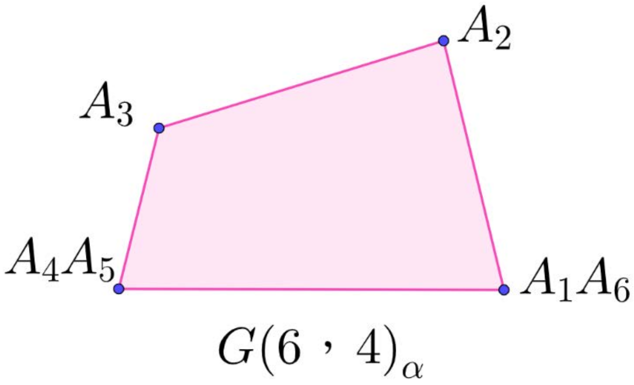


圖 6–1：α $type$ 的六邊形命名

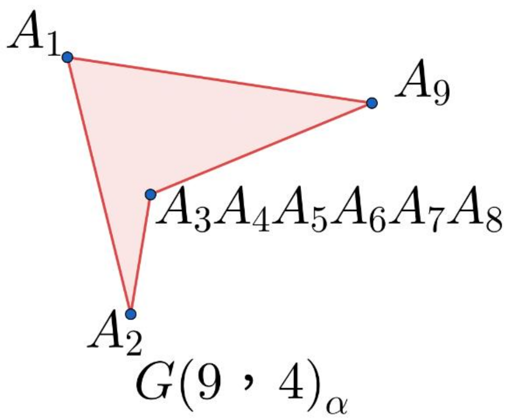


圖 6–2：α $type$ 的九邊形命名

定義 2.4

我們在任意沒有三點共線的 $n-1$ 邊形之 A_1、A_{n-1} 的延長線上，加上一點。

將其命名 A_n(不與 A_1、A_{n-1} 重合)，形成的退化 n 邊形屬於 $G(n，n-1)_\beta$，如下圖 7。

為了方便簡稱，對於任意屬於 $G(n，n-1)_\beta$ 的 n 邊形，稱其為 β $type$ 的 n 邊形。

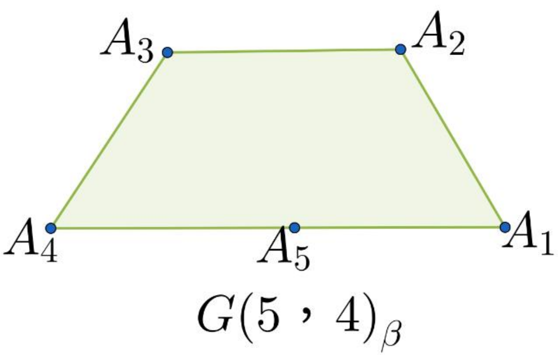


圖 7–1：β $type$ 的五邊形命名

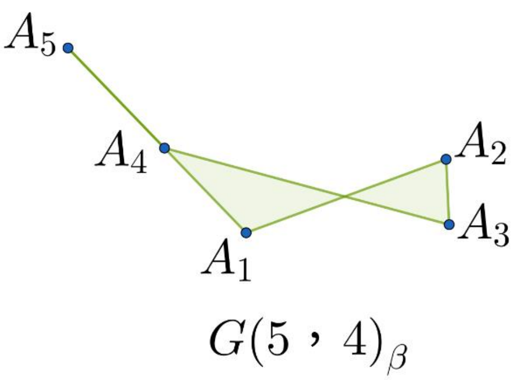


圖 7–2：β $type$ 的五邊形命名

定義 2.5

$\beta\ type$ 的 n 邊形之 A_k、A_{k+1} $(k \neq n-1, n)$ 的延長線上，加上一點。將其命名 A_0，如下圖 (不與 A_k、A_{k+1} 重合)，形成的退化多邊形 $A_1A_2 \ldots A_kA_0\ A_{k+1} \ldots A_n$ 屬於 $G(n+1, n-1)_\gamma$

為了方便簡稱，對於任意屬於 $G(n，n-2)_\gamma$ 的 n 邊形，稱其為 $\gamma\ type$ 的 n 邊形。

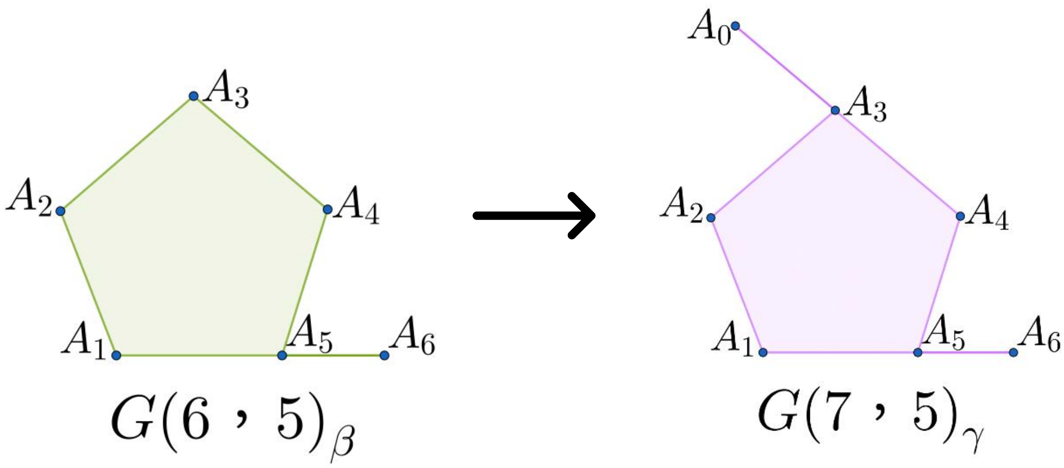


圖 8：用 $\beta\ type$ 的 $n-1$ 邊形構造出 $\gamma\ type$ 的 n 邊形之過程

二.研究目的

(一)如何對退化 n 邊形做垂足 n 邊形

(二)找出點對特定形式的退化多邊形作垂足多邊形會有那些性質。

(三)討論四邊形與特定的退化四邊形在垂足多邊形下的關係。

(四)對四邊形進行分類，給出四邊形 A 做垂足多邊形做到四邊形 B 所需最少步數。

(五)一般化將任意多邊形做垂足多邊形後變成退化多邊形，以及特定退化多邊形如何還原。

(六)證明任意的兩個五邊形找的到點列作垂足多邊形後相似。

三.研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra

參、研究架構

引入了特定形式的退化多邊形，這些退化多邊形是沒有三點共線多邊形(凸、凹、自交)一些特定點作垂足多邊形會出現的多邊形，本研究將會用到這些多邊形。(α、β、γ $type$)

α、β、γ $type$ 的 n 邊形都能讓有限的點列對其作垂足多邊形之後變成凸 n 邊形，並且這三種類型的退化 n 邊形以及過程中出現的 n 邊形一樣有許多垂足多邊形之性質。

在這些前提之下，我們可以用另一種方法將「更廣義的」四邊形進行分類，並得到一個好的關係。也因退化 n 邊形的特殊性質，成功找到了將四邊形 A 作垂足多邊形後相似於四邊形 B 所需要的最少點數量的方法。

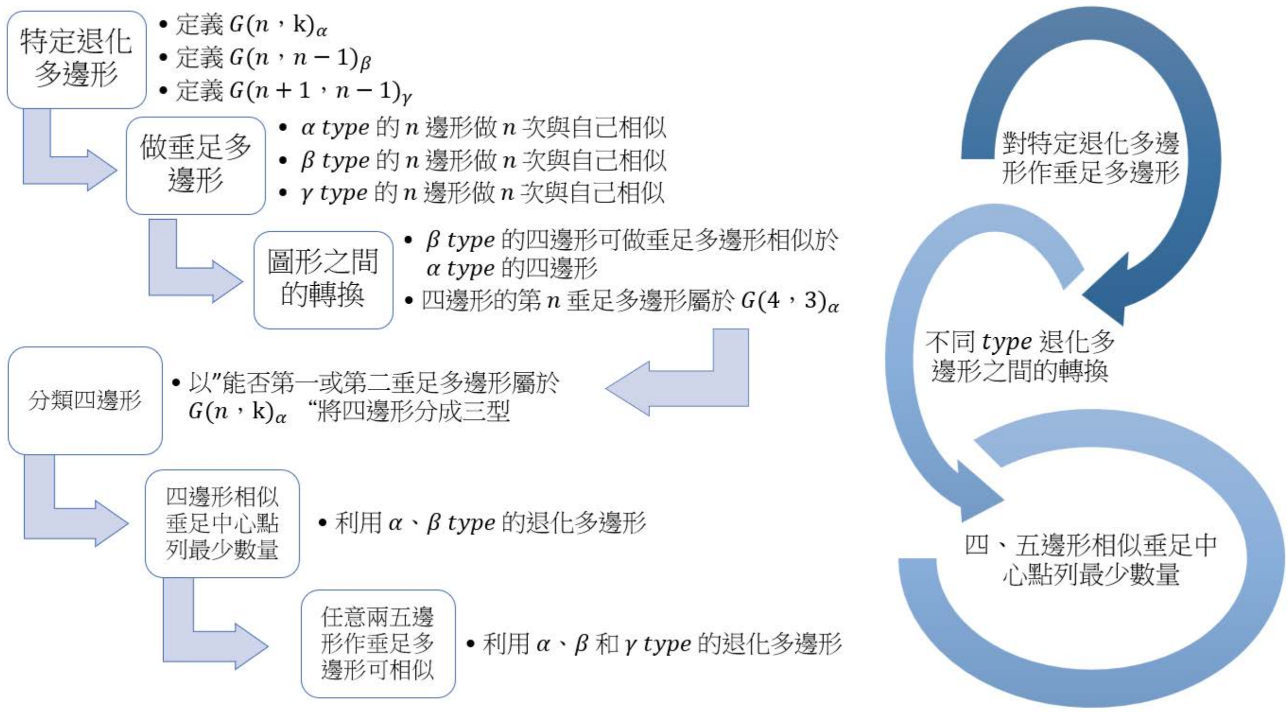


圖 9：架構圖

肆、研究過程與結果

一、給定 P 點，如何對退化 $\boldsymbol{n}$ 邊形作垂足 n 邊形

以往在垂足多邊出現連續三點共線的 n 邊形時，用相同的手法作垂足多邊形會導致點的數目減少，進而收斂，如下圖 10。

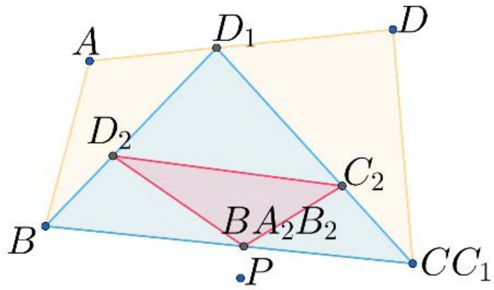


圖 10–1：四邊形的垂足多邊形是三角形

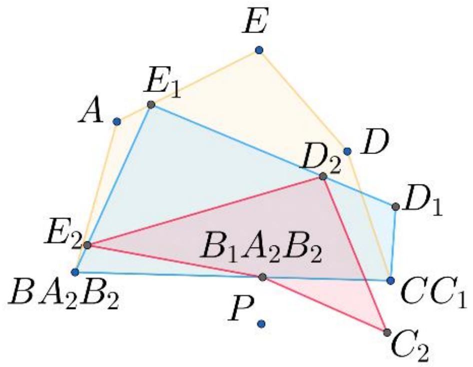


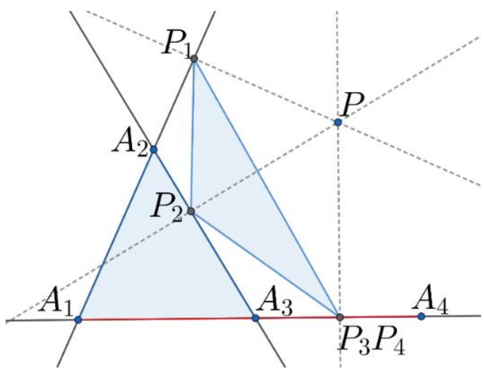
圖 10–2：五邊形的垂足多邊形是四邊形

我們想要嘗試在保持點數目的同時，觀察是否會有好的性質保留。

延伸**定義 1.1**，我們對有**連續**三點共線的圖形**【$\boldsymbol{\beta\ type}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 邊形】**做垂足多邊形。

如果有三點共線的情形，例如 $A_1A_3A_4$ 三點共線，此直線同時視為 $\overline{A_3A_4}$ 、$\overline{A_4A_1}$ 之延長線。這時通過 P 點對此共邊延長線的垂足視為兩點 P_3 、 P_4 ，如下圖 11；

圖 11：點對連續三點共線四邊形的第一垂足多邊形



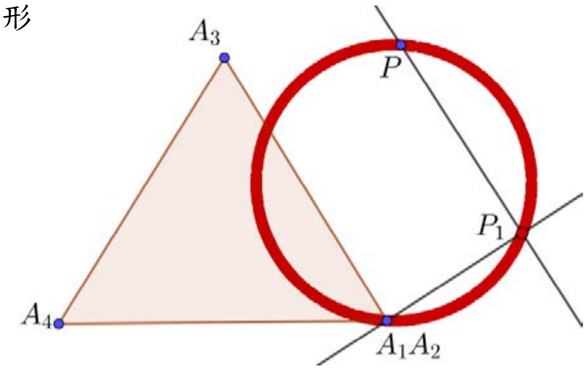


圖 12：紅圈為所有 P_1 點可能落在的位置

也就是說，對 $\boldsymbol{\beta\ type}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 邊形做一次垂足多邊形後會得到 $\boldsymbol{\alpha\ type}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 邊形。

接下來處理 $\alpha\ type$ 的 n 邊形，當我們對任意 $\alpha\ type$ 的 n 邊形作垂足多邊形時，通過共點的所有直線皆可視為此共點邊的延長線，以 P 點對此邊之延長線作垂足，所有可能的點 P_1 會形成一個以 $\overline{PA_1(A_2)}$ 為直徑的圓**【因 $\overline{\boldsymbol{PA_1(A_2)}}$ 中點到 $\boldsymbol{P}$ 、$\boldsymbol{A_1(A_2)}$ 、$\boldsymbol{P_1}$ 三點等距】**，如上圖 12。

選擇其中最特殊的點作為此邊之延長線垂足，我們以**共點** $\boldsymbol{A_1(A_2)}$ 作為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 上之垂足 P_1。

故若有兩點或兩點以上共點的情形，例如 A_n 、 A_{n+1} 兩點重合；

則通過 P 點對此 A_nA_{n+1} 邊延長線的垂足位置落在 P_n，會與點 A_nA_{n+1} 重合，如下圖 13。

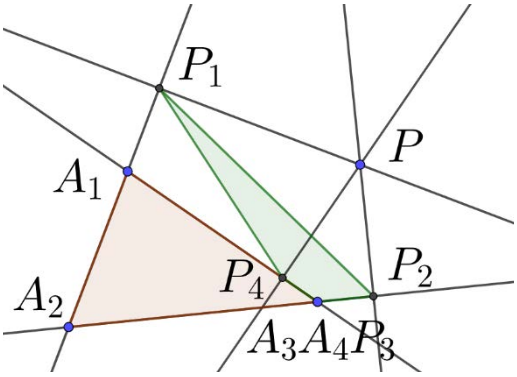


圖 13：P 點對 $\alpha\ type$ 的四邊形做垂足多邊形

在定義如何選擇 $\boldsymbol{P}$ 點對共點邊所作之垂足後，代表我們已經可以處理作垂足多邊形出現 $\boldsymbol{\alpha\ type}$ 多邊形的情形，此時多邊形不會收斂而是能繼續進行討論。

接續以往討論垂足多邊形的等價關係，我們想要觀察當拓展以往垂足多邊形做法之後處理退化 n 邊形時能不能得到漂亮的性質；

意即能不能找到有限點列使得此點列對退化 n 邊形作出的垂足多邊形與自己相似。

二、點對特定退化 $\boldsymbol{n}$ 邊形作的垂足多邊形性質討論

引理 1.1 (參考資料[3])

已知給定任意一個 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 以及一點 P ，

若 P 對 $A_1A_2\cdots A_n$ 所做的第 n 垂足多邊形連續三頂點均不共線，

則第 n 垂足 n 邊形「必定與原 n 邊形相似」。

證明:

我們假設垂足中心為 P 點,則透過 n 組四點共圓,我們可以得到:

$$\begin{cases}\angle PA_1A_2=\angle PA_n^{(1)}A_1^{(1)}=\angle PA_{n-1}^{(2)}A_n^{(2)}=\cdots=\angle PA_1^{(n)}A_2^{(n)}\\ \angle PA_2A_1=\angle PA_2^{(1)}A_1^{(1)}=\angle PA_2^{(2)}A_1^{(2)}=\cdots=\angle PA_2^{(n)}A_1^{(n)}\end{cases}$$

接著再將 n 邊形分成 n 組相似三角形合併即可證明。

延伸**引理 1.1**，我們嘗試證明任意 $\alpha\ type$ 的 n 邊形也有此性質。

定理 1.1

給定任意 $\alpha\ type$ 的 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 以及一點 P，
若 P 點不在各邊延長線以及任意的 3 點所作的圓上，
則 P 對 $A_1A_2\cdots A_n$ 所作的第 n 垂足多邊形會與原圖形相似。

在證明之前，我們先觀察點對 $\alpha\ type$ 的 n 邊形連續作垂足多邊形後角度的變化關係。底下舉 $G(4,3)_\alpha$ 為例：

$\angle PAB=\angle PD_1A_1=\angle PC_2D_2=\angle PB_3C_3=\angle PA_4B_4$
$\angle PAD=\angle PA_1D_1=\angle PA_2D_2=\angle PA_3D_3=\angle PA_4D_4$
$\angle PBC=\angle PA_1B_1=\angle PD_2A_2=\angle PC_3D_3=\angle PB_4C_4$
$\angle PBA=\angle PB_1A_1=\angle PB_2A_2=\angle PB_3A_3=\angle PB_4A_4$
$\angle PCD=\angle PB_1C_1=\angle PA_2B_2=\angle PD_3A_3=\angle PC_4D_4=90°$
$\angle PCB=\angle PC_1B_1=\angle PC_2B_2=\angle PC_3B_3=\angle PC_4B_4$
$\angle PDA=\angle PC_1D_1=\angle PB_2C_2=\angle PA_3B_3=\angle PD_4A_4$
$\angle PDC=\angle PD_1C_1=\angle PD_2C_2=\angle PD_3C_3=\angle PD_4C_4=90°$

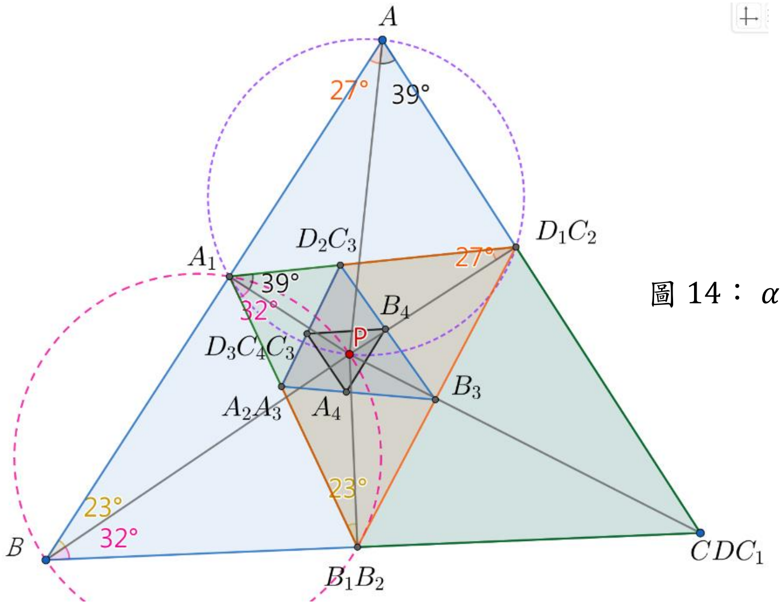


圖 14：$\alpha\ type$ 的四邊形之角度變化示意圖

觀察之後發現 $\alpha\ type$ 的 n 邊形的垂足多邊形依舊會保留

$$\begin{cases}\angle PA_1A_2=\angle PA_n^{(1)}A_1^{(1)}=\angle PA_{n-1}^{(2)}A_n^{(2)}=\cdots=\angle PA_1^{(n)}A_2^{(n)}\\ \angle PA_2A_1=\angle PA_2^{(1)}A_1^{(1)}=\angle PA_2^{(2)}A_1^{(2)}=\cdots=\angle PA_2^{(n)}A_1^{(n)}\end{cases}$$

在這裡補充說明正序角與逆序角:

若組成角的點序是順的，例如 $\angle PAB$、$\angle PA_1A_2$、$\angle PA_nA_1$，我們稱為正序；

若組成角的點序是倒著的，例如 $\angle PBA$、$\angle PA_2A_1$、$\angle PA_1A_n$，我們稱為逆序。

觀察後發現 $\alpha\ type$ 的 n 邊形的垂足多邊形與對 n 邊形的垂足多邊形之角度關係相同，也就是:

當組成角的點為正序時， 作下一層垂足多邊形同樣的角度的點 會往前一個，如下 $\angle PAB = \angle PD_1A_1$；$\angle PA_2A_3 = \angle PA_1^{(1)}A_2^{(1)}$	當組成角的點為逆序時， 作下一層垂足多邊形同樣角度的角的點 不會改變，如下 $\angle PAD = \angle PA_1D_1$；$\angle PA_2A_1 = \angle PA_2^{(1)}A_1^{(1)}$。

與 P 點對 n 邊形的垂足多邊形的角度關係相同，只要能解釋原因，

就可以用與**引理 1.1** 相同的手法來證明。

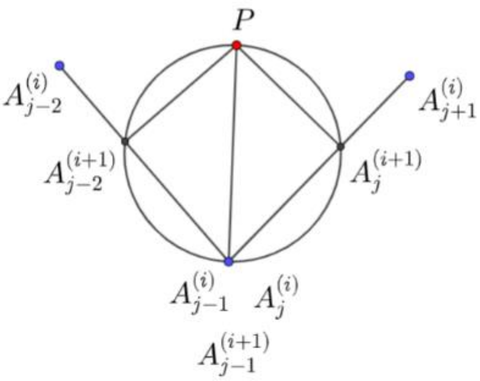
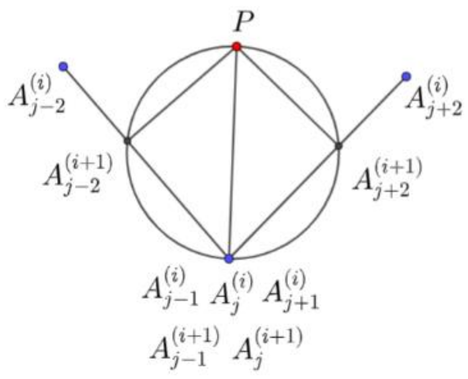
證明:

對於任意的 $A_j^{(i)}$ $(0 \le i \le n+k-1$，$1 \le j \le n)$， P、$A_{j-1}^{(i+1)}$、$A_j^{(i)}$、$A_j^{(i+1)}$ 四點共圓

(如果 $j-1=0$ 視為 $n+k$)，因為 $\angle PA_{j-1}^{(i+1)}A_j^{(i)} = \angle PA_j^{(i+1)}A_j^{(i)} = 90°$

四邊形 $P\,A_{j-1}^{(i+1)}A_j^{(i)}A_j^{(i+1)}$ 為一圓內接四邊形，即使有共點的情況，此敘述亦成立。

底下舉兩種不同的共點情況為例：

第一種情況：當 $A_{j-1}^{(i)}$ 、$A_j^{(i)}$ 兩點共點	第二種情況：當 $A_{j-1}^{(i)}$、$A_j^{(i)}$ 、$A_{j+1}^{(i)}$ 三點共點
	

因此，我們可以得知 ΔPA_1A_2 相似於 $\Delta PA_1^{(n)}A_2^{(n)}$。同理，我們可以證明

$$\Delta PA_2A_3 \sim \Delta PA_2^{(n)}A_3^{(n)}、\Delta PA_3A_4 \sim \Delta PA_3^{(n)}A_4^{(n)}、\ldots、\Delta PA_nA_1 \sim \Delta PA_n^{(n)}A_1^{(n)}$$

最後再將此 n 組三角形合併得證。由此證明，

對於任意 $\alpha\ type$ 的 n 邊形都可以找到一點 P ，對其作 n 次垂足多邊形會與原圖形相似。

在處理完 $\alpha\ type$ 的 n 邊形後，我們試著處理 $\beta\ type$ 的 n 邊形。

定理 1.2.1

對於任意 $\beta\ type$ 的 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，
若 P 點落在通過 A_n 點且垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_{n-1}}$ 的直線上，
則 P 對 $A_1A_2\cdots A_n$ 所作的第 n 垂足多邊形會與原圖形相似。

證明：

底下舉 A_1、A_2、A_3、A_4 四點形成的 $G(4,3)_\beta$ 為例，以 P 點對四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 作的第一、第二垂足多邊形分別是四邊形 $A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_3^{(1)}A_4^{(1)}$；四邊形 $A_1^{(2)}A_2^{(2)}A_3^{(2)}A_4^{(2)}$，如下圖 15。

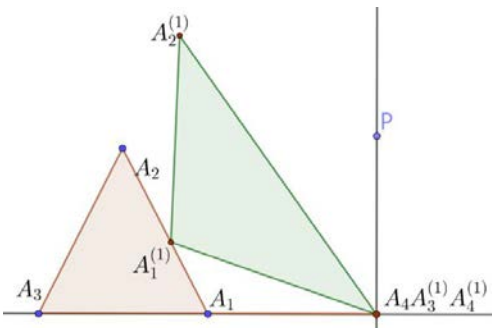


圖 15–1：第一垂足多邊形

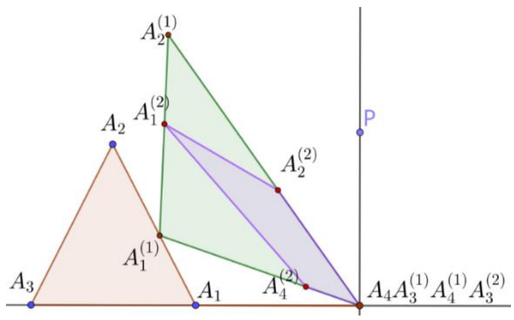


圖 15–2：第二垂足多邊形

當 $\overleftrightarrow{PA_4}$ 垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 時，可得到以下關係：

$\angle PA_3^{(1)}A_4^{(1)}=\angle PA_4A_1$；$\angle PA_4^{(1)}A_3^{(1)}=\angle PA_4A_3$，皆為 $90°$，與前面證明相同的角度關係。

也就是 $\angle PA_4A_1=\angle PA_3^{(1)}A_4^{(1)}=\angle PA_2^{(2)}A_3^{(2)}=\angle PA_1^{(3)}A_2^{(3)}=\angle PA_4^{(4)}A_1^{(4)}$

和 $\angle PA_4A_3=\angle PA_4^{(1)}A_3^{(1)}=\angle PA_4^{(2)}A_3^{(2)}=\angle PA_4^{(3)}A_3^{(3)}=\angle PA_4^{(4)}A_3^{(4)}$，

維持正序角的角度到下一層位置不變及逆序角的角度到下一層往前一組，

之後用**定理 1.1** 的手法來將其切割成四組相似三角形即可說明，如下圖 16。

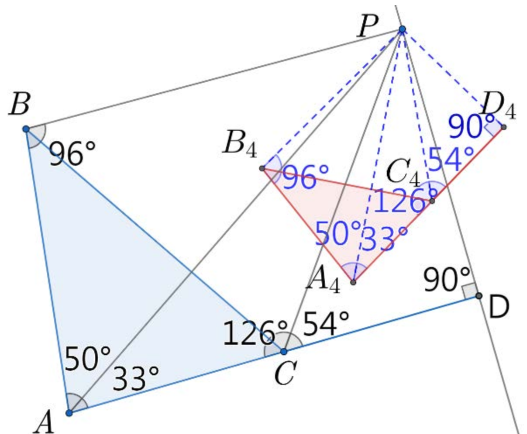


圖 16：利用**定理 1.1** 的切割手法，得出與其第四垂足多邊形會相似。

推廣到 n 邊形的情況，當 $\overleftrightarrow{PA_n}$ 垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_{n-1}}$ 時，也可得到以下關係：

$\angle PA_{n-1}^{(1)}A_n^{(1)} = \angle PA_nA_1$；$\angle PA_n^{(1)}A_{n-1}^{(1)} = \angle PA_nA_{n-1} = 90°$。

只要 $\angle PA_nA_1 = \angle PA_{n-1}^{(1)}A_n^{(1)}$ 且 $\angle PA_nA_{n-1} = \angle PA_n^{(1)}A_{n-1}^{(1)}$，亦即維持正序角和逆序角的角度關係，之後即可用定理 1.1 的手法來將其切割成 n 組相似三角形來說明。

因此對於**任意 β type 的 n 邊形一定能找到 P 點對其作的第 n 垂足多邊形會與原圖形相似**。

舉 β type 的五邊形為例，只要 P 點落在通過 A_5 點且垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 的直線上，P 點對這個五邊形的五垂足多邊形會與原圖型相似，如下圖 17。

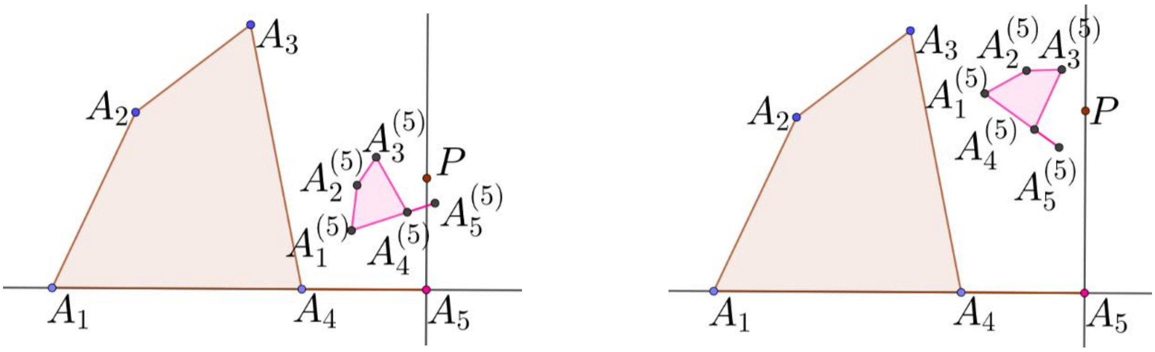


圖 17：P 點在通過垂線上對 β type 的五邊形的第四垂足多邊形的兩種情況

利用相同的手法，我們也可以證明 γ type 的多邊形有類似的性質：

定理 1.2.2

對於任意 γ type 的 $n+1$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_kA_0A_{k+1} \dots A_n$，

若通過 A_0 且垂直 $\overleftrightarrow{A_kA_0}$ 的直線與過 A_n 垂直 $\overleftrightarrow{A_1A_n}$ 的直線交於一點 P

則 P 點對此 γ type 的 $n+1$ 邊形的第 $n+1$ 垂足多邊形會與原圖形相似。

證明：

利用定理 1.2.1 即可證明如果 P 點存在，那麼 P 點對 γ type 的 $n+1$ 邊形的第 n 垂足多邊形會與原圖形相似，如圖 18 。不過並不是所有的 γ type 多邊形都存在這樣的 P 點。

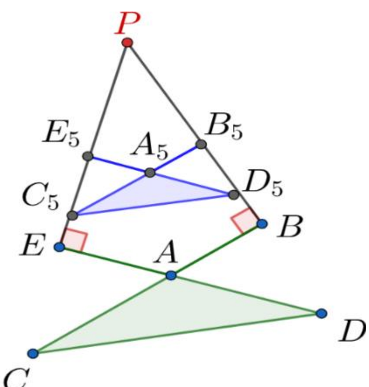


圖 18 ：P 點對 γ type 的五邊形的第五垂足多邊形會相似原圖形。

在證明完上述性質之後，我們不禁好奇 P 點任意移動而非固定在通過 A_n 點且垂直 $\overleftrightarrow{A_nA_{n-1}}$ 的直線上時會發生甚麼事，藉由 Geogebra 作圖觀察，我們發現一個神奇的情況。

當 P 點任意移動時 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 相似於 $A_1^{(4)}A_2^{(4)}\dots\dots A_{n-1}^{(4)}$，$A_n^{(4)}$ 在 $\overleftrightarrow{A_1^{(4)}A_{n-1}^{(4)}}$ 上的相對位置不固定，會隨著 P 點**變動**。

定理 1.3.1

對於任意 β $type$ 的 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，給定一點 P 對 $\overleftrightarrow{A_1A_n}$ 作垂線交於點 A_0；P 點對 $A_1A_2\cdots A_n$ 所作的第 n 垂足多邊形相似於 $A_1\,A_2\,A_3\cdots\cdots A_{n-1}\,A_0$。

證明：

P 點對 n 邊形 $A_1\,A_2\,A_3\cdots\cdots A_{n-1}\,A_n$ 作一次垂足多邊形得 $A_1^{(1)}A_2^{(1)}\cdots\cdots A_n^{(1)}$，不論 A_n 在 $\overleftrightarrow{A_1A_{n-1}}$ 上的何處，$A_{n-1}^{(1)}$、$A_n^{(1)}$ 必都與 A_0 重合，以四邊形 $A_1\,A_2\,A_3A_4$ 為例，如下圖 19。

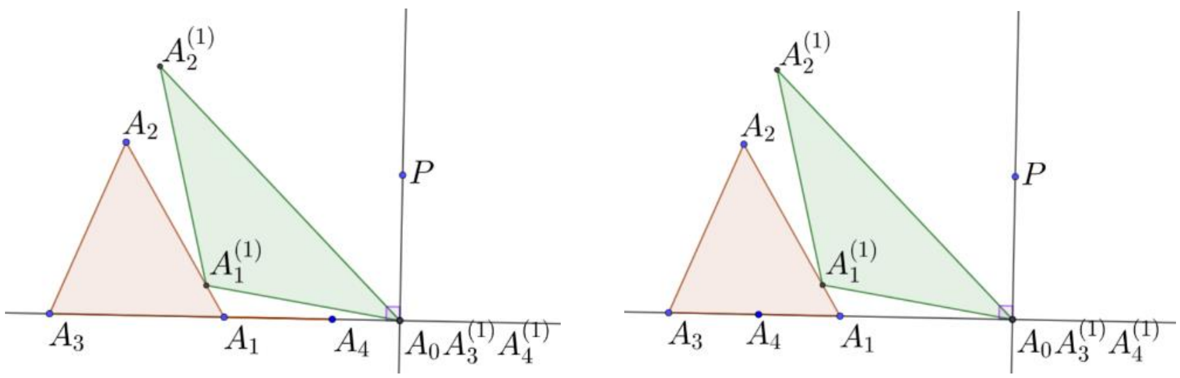


圖 19：當點 A_4 固定在 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 上時，P 點對 β $type$ 的四邊形的第一垂足多邊形

也就是說不管 A_n 落在 $\overleftrightarrow{A_1A_{n-1}}$ 的延長線上的何處，都不會影響第一垂足多邊形。

一般化之後我們可以得到：

P 對 $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 所做的垂足都為 A_0，且 $A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_3^{(1)}\dots\dots A_n^{(1)}$ 屬於 $G(n，n-1)_\alpha$。

然後 P 點對 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_n$ 和對 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_0$ 的第一垂足多邊形相同，所以可以直接視為 P 點對 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}A_0$ 作垂足多邊形。

由於 $\overleftrightarrow{PA_0}$ 垂直於 $\overleftrightarrow{A_1A_{n-1}}$ ，所以套用定理 1.2 即可說明， P 點對 $\beta\ type$ 的 n 邊形的第 n 垂足多邊形，會相似於 n 邊形 $A_1\ A_2\ A_3 \cdots\cdots\ A_{n-1}\ A_0$，故得證；如圖 20。

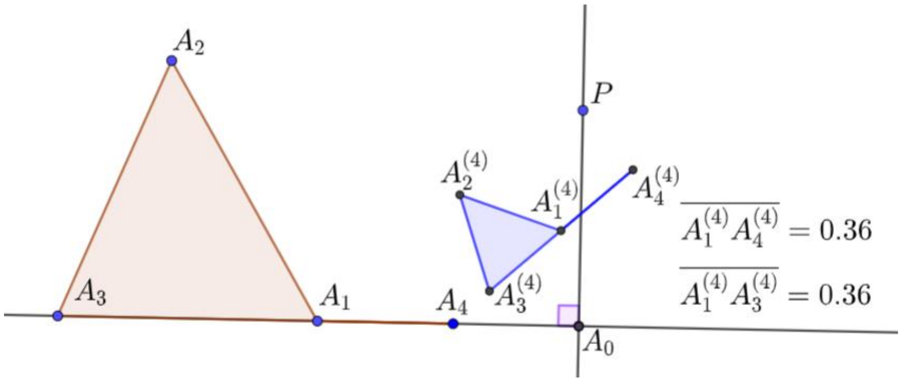


圖 20：以 $\beta\ type$ 的四邊形為例，當 $\overline{A_1A_0}:\overline{A_3A_0} = 2:1$ 可得 $\overline{A_1^{(4)}A_3^{(4)}}:\overline{A_3^{(4)}A_4^{(4)}} = 2:1$

有了定理 1.3.1，我們就可以說明當初用 Geogebra 所觀察到的現象，

其原理便是 $\boldsymbol{\overline{A_1A_{n-1}}:\overline{A_{n-1}A_0} = \overline{A_1^{(n)}A_{n-1}^{(n)}}:\overline{A_{n-1}^{(n)}A_n^{(n)}}}$ ，而當 P 點移動時，

點 A_0 也會跟著移動，故 $A_n^{(4)}$ 在 $\overleftrightarrow{A_1^{(4)}A_{n-1}^{(4)}}$ 上的相對位置不固定，會隨著 P 點位置改變。

利用相同的手法，我們也可以證明 $\gamma\ type$ 的多邊形有類似的性質：

> **定理 1.3.2**
>
> 對於任意 $\gamma\ type$ 的 $n+1$ 邊形 $A_1A_2 \ldots A_kA_0A_{k+1} \ldots A_n$ ，給定一點 P 對 $\overleftrightarrow{A_kA_0}$ 作垂線交於點 B_1；對 $\overleftrightarrow{A_1A_n}$ 作垂線交於點 B_2。
> P 點對 $A_1A_2 \ldots A_kA_0A_{k+1} \ldots A_n$ 所作的第 $n+1$ 垂足多邊形會相似於 $A_1\ A_2\ A_3 \cdots A_kB_1A_{k+1} \cdots\ A_{n-1}\ B_2$。

證明：

利用定理 1.3.1 得證。故給定 P 點後就能知道第五垂足多邊形會相似誰，如圖 21。

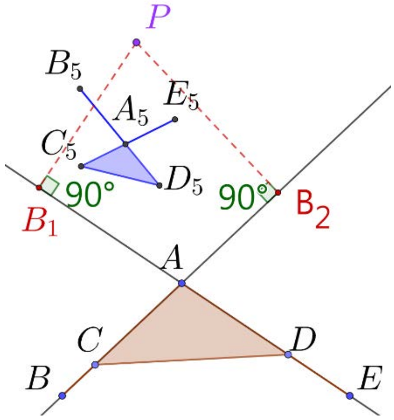


圖 21：P 點對 $\gamma\ type$ 的五邊形 $ABCDE$ 的第五垂足多邊形會相似於五邊形 AB_1CDB_2

有了**定理 1.3** 我們發現不管是 β *type* 或 γ *type* 的多邊形，我們都可以利用 P 點的位置來調整三點共線時點序在中間的點 (ABC 三點中的 B 點) 的相對位置。

證明了**定理 1.1** 到 **1.3** 後，我們得知：

不管是 α *type* 或 β *type* 的多邊形都可以**找到點作出第 n 垂足多邊形後相似於自己**。

有了這些定理後，我們想研究 α *type* 與 β *type* 的四邊形跟一般四邊形之間的關係。

三、四邊形、α type 的四邊形、β *type* 的四邊形之關係。

此處的四邊形是指非退化四邊形，包含凸四邊形、凹四邊形、自交四邊形。

(一)可以找到 P 點對 β *type* 的四邊形的垂足多邊形相似於 α type 的四邊形

定理 2.1

對於任意的 β *type* 四邊形 $ABCD$、α type 的四邊形$EFGH$，
存在 P 點對 $ABCD$ 的垂足多邊形相似於 $EFGH$ 。

證明：

我們從之前有人做過的文獻中知道給定兩個三角形 ΔABC、ΔEFG，

可以找到 P 點，使 P 點對 ΔABC 做的垂足三角形與 ΔEFG 相似，這樣的 P 點共有 12 個。

β *type* 四邊形 $ABCD$ 是由三條相異直線所構成的四邊形，故我們以任意點對 $ABCD$ 作垂足多邊形時，會跟對三角形作垂足多邊形的情況相同，都是對三條相異直線找垂足。

唯一不同的地方是 $ABCD$ 三點共線邊的延長線上之垂足**視為兩個點**；如下圖 22

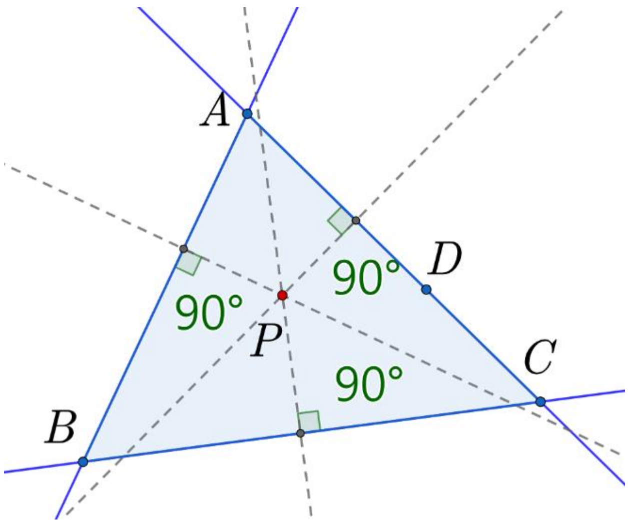
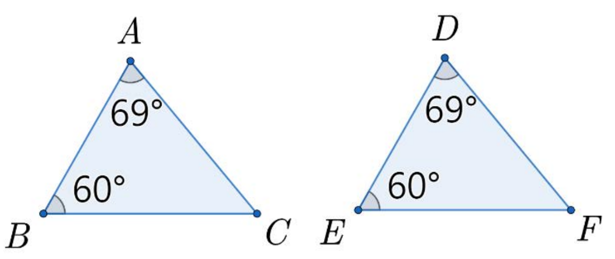
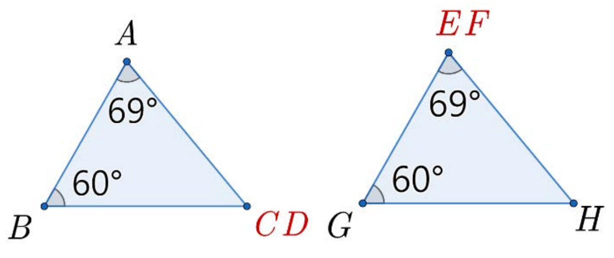


圖 22：任意 P 點對 β *type* 四邊形 $ABCD$ 作垂足多邊形，相當於對三條直線找垂足

但是即使圖形是三角形且角度都相等的 α type 的四邊形不一定相似，

還要依共點的位置而定。若是共點所在位置的角度不一樣，則不相似。底下舉例來說明：

在三角形時	在 α type 的四邊形時
	
$\Delta ABC \sim \Delta DEF(AA$相似)	共點所在位置的角度不一樣，所以不相似

利用上述的說明，可以得知兩 α type 的四邊形要達到相似，除了角度都要一樣之外，還需考慮視為兩個點的共點所在位置的角度也必須一樣。所以必須針對視為兩個點的三點共線邊的延長線上之垂足討論，但是藉由 2020 年全國科學展覽會中的一篇作品：「那裡就是你」知道做出來的相似三角形的對應點可以落在任意直線上，亦即共點所在位置的角度能相同，如下圖 23。故存在 P 點對 $ABCD$ 的垂足多邊形相似於 $EFGH$。證明完畢。

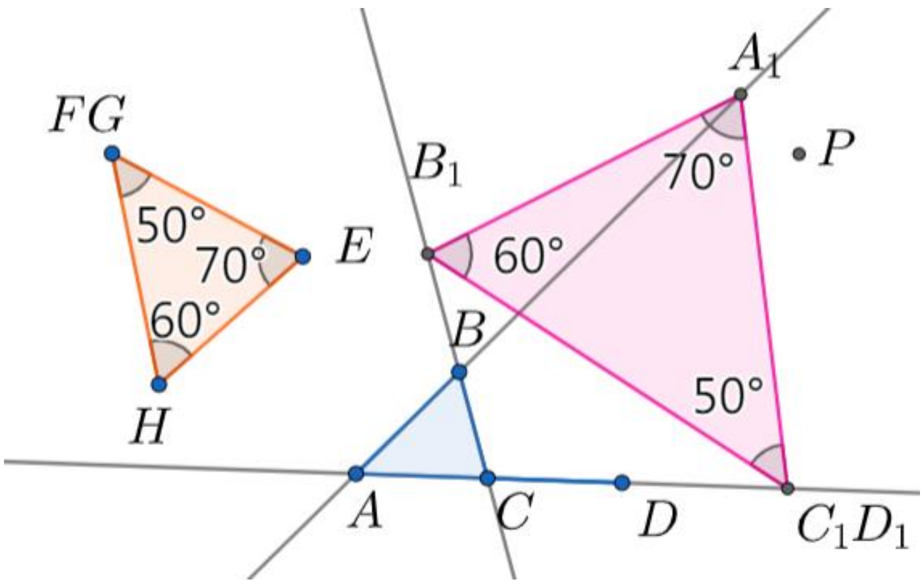
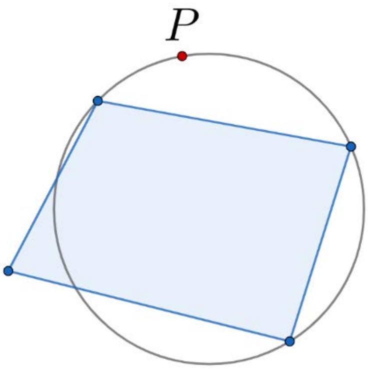
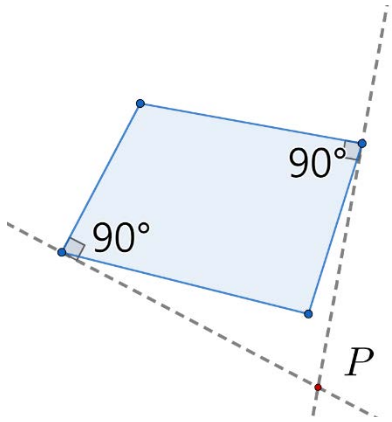


圖 23：P_1 對 $\beta\ type$ 的四邊形的第一垂足多邊形可以相似於任意的 $\alpha\ type$ 的四邊形

(二)找到 P 點對四邊形的第 $\boldsymbol{n}$ 垂足多邊形後屬於 $G(4,3)_\alpha$

為了以 P 點對四邊形作垂足多邊形得 $\alpha\ type$ 的四邊形，必須先作出 $\beta\ type$ 的四邊形。作出 $\beta\ type$ 的四邊形有兩種方法，如下表：

<table>
<tr><th>方法一</th><th>方法二</th></tr>
<tr><td>當 P 點落在原四邊形任三點所作的圓上

但 P 點對四邊形作四次垂足多邊形後不會與原四邊形相似，其原因是垂足多邊形後其製造出來的三點共線，也就是 180° 的角，不是由兩個 90° 組成，但我們對三點共線的垂足找法會將其分為兩個 90°，就會無法保持定理 1.1 的角度關係，故不使用此方法。(除了圓上符合方法二的兩點)</td><td>選擇 P 點使得垂足落在四邊形的任意兩點上

但 P 點對哪兩條邊之延長線作垂足交於原圖形的兩點是有限制的：
(1)垂足落在相鄰兩點
P 點在過此兩點的對邊垂線之交點。
(2)垂足落在不相鄰的兩點，
P 點在過此兩點且相鄰的兩邊垂線交點。</td></tr>
</table>

底下說明正序、逆序與方法二限制的原因。

根據**定理 1.1** 我們知道角度變化的規律有以下性質:

(1) 當角的點為正序時，作下一層垂足多邊形同樣的角度的角的點會往前移一個。

(2) 當角的點為逆序時，作下一層垂足多邊形同樣角度的角的點不會改變。

故 90° 角皆為正序或逆序，就不會在某次垂足多邊形重合成 180°**(因點都在變動或都不動)**

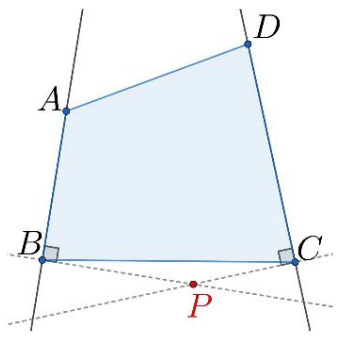
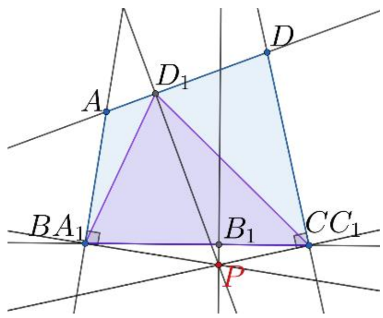
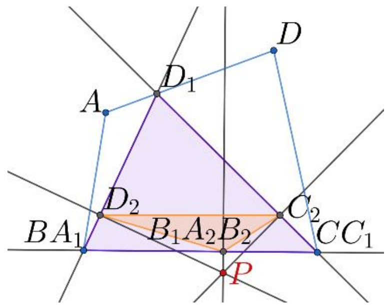
根據正序、逆序的限制又有底下兩種方式尋找 P 點。

(為方便討論接下來的點都以 $ABCD$ 為點命名)

方式一：以 P 點對不相鄰的兩邊作垂足落在相鄰的兩點

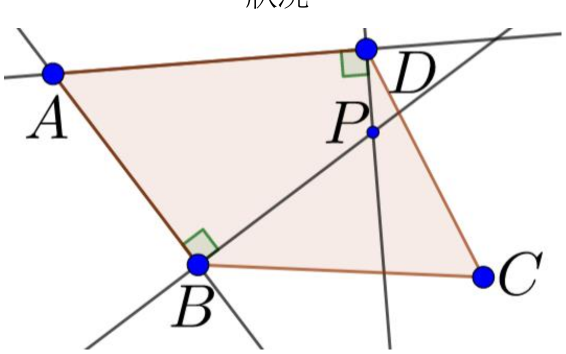
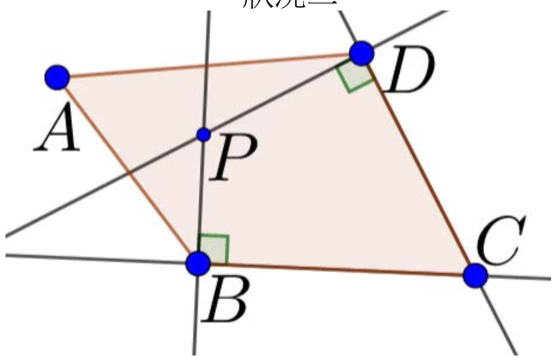
說明：

此時 $\angle PBA=\angle PCD=90°$。以 P 點連續對四邊形做垂足多邊形，作第一次垂足多邊形後因為 $\angle PBA$ 為逆序、 $\angle PCD$ 為正序，可以推論出第一垂足多邊形之角度關係 $\angle PB_1A_1=\angle PB_1C_1=90°$ ，故 A_1、B_1、C_1 共線，形成的四邊形屬於 $G(4，3)_\beta$，作第二次垂足多邊形後，因為 A_1、B_1、C_1 共線，所以 P 對 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 的垂足 A_2、B_2 會落在 B_1 上，形成四邊形屬於 $G(4，3)_\alpha$；過程如下表。

 $\angle PBA=\angle PCD=90$	 $\square A_1B_1C_1D_1\in G(4，3)_\beta$	 $\square A_2B_2C_2D_2\in G(4，3)_\alpha$

方式二：以 P 點對相鄰的兩邊作垂足落在不相鄰的兩點

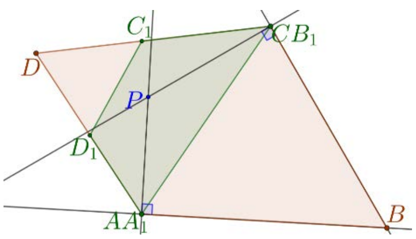
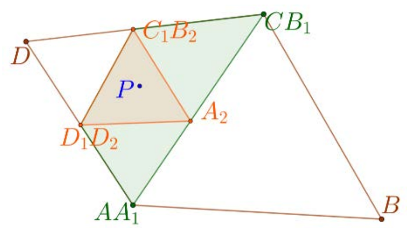
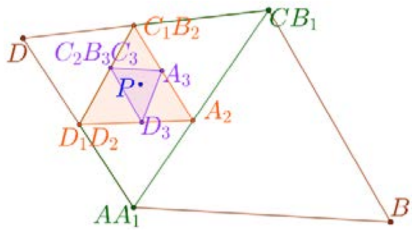
因為選定不相鄰點之後，含兩點的相鄰兩邊會有兩種狀況，如下表：

狀況一	狀況二
 P 點落在過 B 點的 $\overline{BA}$ 垂線與過 D 點的 $\overline{DA}$ 垂線之交點。	 P 點落在過 B 點的 $\overline{BC}$ 垂線與過 D 點的 $\overline{DC}$ 垂線之交點。

說明：

P 點對 $\overleftrightarrow{AD}$ 及 $\overleftrightarrow{CD}$ 作垂足分別落在 A 及 C 點，此時 $\angle PAD=\angle PCD=90°$；以 P 點連續

對四邊形做垂足多邊形，由之前的推論可得知，由於 $\angle PAD$ 為逆序、 $\angle PCD$ 為正序，所以以 P 點對此四邊形作第二次垂足多邊形後 $\angle PA_2D_2 = \angle PA_2D_2 = 90°$ ，故 D_2 、A_2 、B_2 共線，形成的四邊形屬於 $G(4，3)_\beta$ ；作第三次垂足多邊形後，因為 D_2 、A_2 、B_2 共線，所以 A_3 、 D_3 會落在 A_2 ，形成的四邊形屬於 $G(4，3)_\alpha$ ；過程如下表。另一種狀況也可以由此類推。

		
□$A_2B_2C_2D_2$ 是非退化四邊形	□$A_2B_2C_2D_2 \in G(4，3)_\beta$	□$A_3B_3C_3D_3 \in G(4，3)_\alpha$

這兩種方式分別會使第一或第二垂足多邊形屬於 $G(4，3)_\beta$，**讓四邊形退化**。

根據角度的變化關係，我們可以得知當 P 點所作之垂足有兩點分別落於四邊形的相異兩點上時(P 點不能在任意邊的延長線上)，以 P 點連續對此四邊形做四次垂足多邊形後仍會與自己相似，如圖 24。

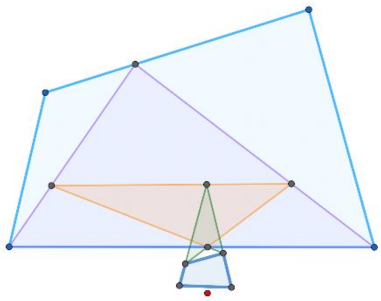


圖 24–1：方式一

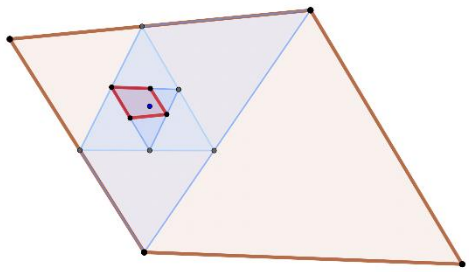


圖 24–2：方式二

也就是說這兩種方式的第四垂足多邊形都會與原圖相似，**讓四邊形在退化後可以還原**。但並不是所有四邊形皆可使用這兩種方式作出垂足多邊形屬於 $G(4，3)_\beta$ ，底下我們將以四邊形作垂足多邊形作出 $\beta\ type$ 的四邊形所需次數分類。

四、任意兩四邊形如何找到相似垂足中心的點列最少數量

如果 P 點對任意四邊形作複數次垂足多邊形後屬於 $G(4，3)_\beta$ ，那 P 點有兩種找法(對不相鄰的兩邊作垂足落在相鄰的兩點、對相鄰的兩邊作垂足落在不相鄰的兩點)，且我們知道 P 點不能落在任意邊的延長線上，所以並不是所有的四邊形都能找到相對應 P 點作垂足多邊形屬於 $G(4，3)_\beta$ 。

底下將利用 P 點存在的情形將四邊形分類成 A、B、C 三種類型，

並探討各個類型的四邊形的垂足多邊形能否屬於 $G(4，3)_\beta$；如果可以，需要做幾次。

A 型**【找不到 P 點對作垂足多邊形屬於 $G(4，3)_\beta$ ，含矩形】**：

有相鄰兩角為 90° 的四邊形。

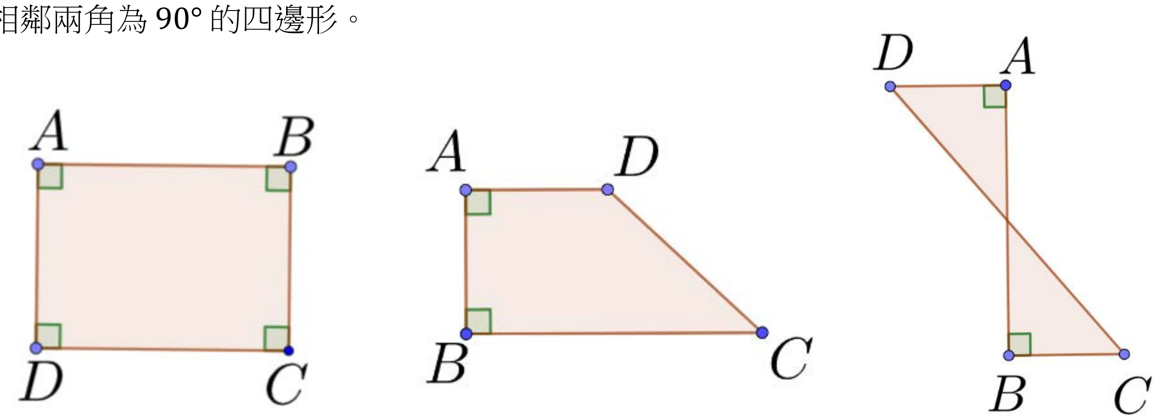


圖 25：A 型的四邊形

B 型**【僅存在對相鄰兩邊作垂足落在不相鄰兩點之 P 點作垂足多邊形屬於 $G(4，3)_\beta$ 】**：

兩雙對邊互相平行或只有一雙對角都是 90° 的四邊形(不含矩形)。

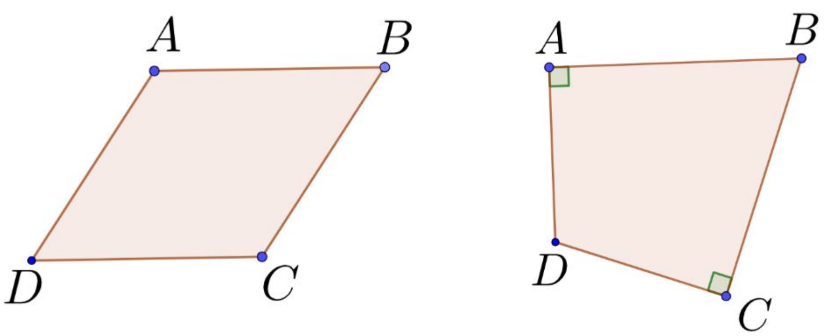


圖 26：B 型的四邊形

C 型**【兩種找法皆可找到 P 點作垂足多邊形屬於 $G(4，3)_\beta$】**：

除了 A、B 型以外的四邊形。

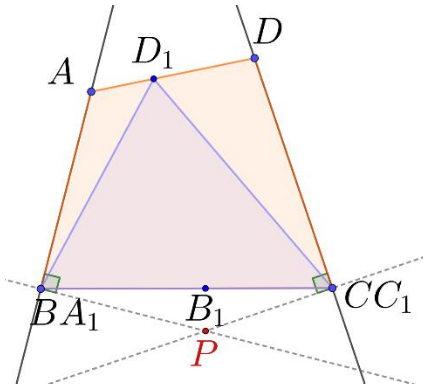
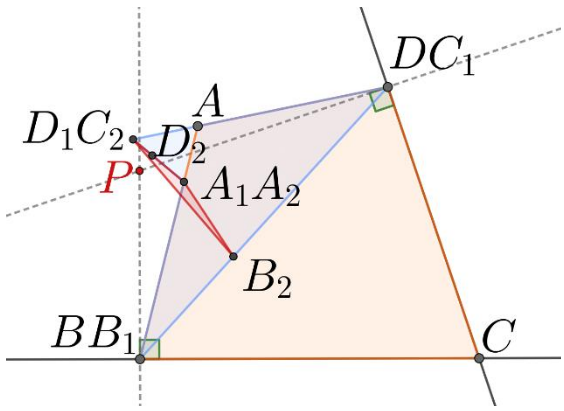
對於 A B C 三種類型的四邊形有以下關係：

次數 / 類型	能否作一次垂足多邊形屬於 $G(4,3)_\beta$	能否作兩次垂足多邊形屬於 $G(4,3)_\beta$
A 型	不能	不能
B 型	不能	可以
C 型	可以	可以

此外，不存在四邊形找得到 P 點對不相鄰的兩邊作垂足落在相鄰的兩點，卻找不到 P 點對相鄰的兩邊作垂足落在不相鄰的兩點。換句話說，不存在四邊形可以找到點對其作一次垂足多邊形屬於 $G(4,3)_\beta$，但作兩次不屬於 $G(4,3)_\beta$。

對於以上四邊形的分類，我們特別詳述 C 型的四邊形的情形。

對於 C 型的四邊形以下兩點成立

<table>
<tr><td>一</td><td>二</td></tr>
<tr><td>存在 P 點作四次垂足多邊形會與自己相似且其中第一垂足多邊形為 $\beta\ type$ 的四邊形。</td><td>存在 P 點作四次垂足多邊形會與自己相似且其中第二垂足多邊形為 $\beta\ type$ 的四邊形。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

有以上兩點的幫助，我們可以找到點列使 C 型的四邊形 $ABCD$ 變成 C 型的四邊形 $EFGH$

接下來我們要對如何找到這樣的點列以及 A、B、C 型的四邊形之間的轉換來進行討論。

從 C 型的四邊形 $ABCD$ 到 C 型的四邊形 $EFGH$

利用定理，四邊形 $ABCD$ (C_1)以不相鄰的兩邊 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 對相鄰之 B、C 兩點各作垂線之交點為 P_2，點 P_2 對四邊形 C_1 的第一垂足多邊形會是 β $type$ 的四邊形，稱為 $ABCD_\beta(\beta_1)$；之後開始利用四邊形 $EFGH$ 來推出需要的 α $type$ 的四邊形，四邊形 $EFGH$ (C_2)以不相鄰的兩點 E、G 分別對 $\overleftrightarrow{HE}$、$\overleftrightarrow{GH}$ 兩邊作垂線之交點為 P_1。

以點 P_1 對四邊形 C_2 做複數次的垂足多邊形，其結果如下：

點 P_1 對四邊形 C_2 的第一垂足多邊形是四邊形 $\boldsymbol{C_{2(1)}}$；

點 P_1 對四邊形 C_2 的第二垂足多邊形是 β $type$ 的四邊形$(\boldsymbol{\beta_2})$；

點 P_1 對四邊形 C_2 的第三垂足多邊形為 α $type$ 的四邊形，稱為 $EFGH_\alpha(\boldsymbol{\alpha_2})$。

點 P_1 對四邊形 C_2 的第四垂足多邊形會相似於四邊形 C_2。

藉由定理 **1.4**，存在點 P_3 使得 $ABCD_\beta$ 對其作一次垂足多邊形後得到的多邊形 Ω 會相似於 $EFGH_\alpha$，再以四邊形 $EFGH_\alpha$ 跟點 P_1 的相對位置對多邊形 Ω 找到一點 P_4，點 P_4 對 Ω 作一次垂足多邊形後會相似於四邊形 $EFGH$。

得到點列$\{\boldsymbol{P_2}$、$\boldsymbol{P_3}$、$\boldsymbol{P_4}\}$對 $\boldsymbol{ABCD}$ 做垂足多邊形會相似於 $\boldsymbol{EFGH}$，需要的點列數量為 3。

亦即 $[ABCD，P_2、P_3、P_4]_\perp \sim EFGH$。流程如圖 27。

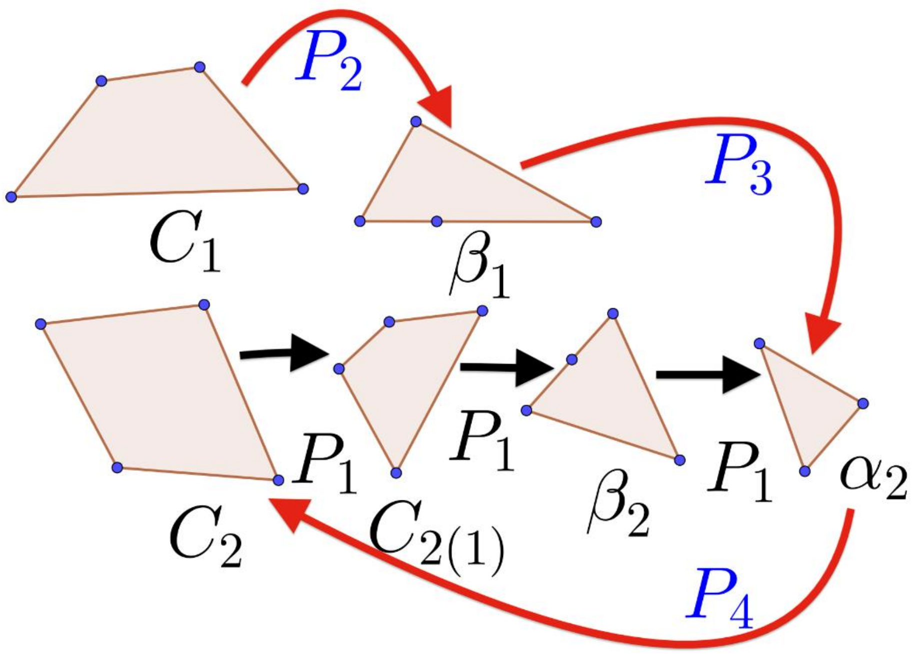


圖 27：C 型四邊形到 C 型四邊形之流程

在這個過程中我們發現，為了找到數量最少的點列，亦即作最少次垂足多邊形後能相似，

使用的方式是藉由找到點對四邊形 C_1 做一次垂足多邊形後變成 β *type* 的四邊形；

然後找到可以存在點對其做一次垂足多邊形後相似於四邊形 C_2 的 α *type* 的四邊形，

再利用**定理 1.4**，就可以在三步內讓兩個四邊形相似。

綜合上面得到的條件，我們發現為了要讓四邊形 $ABCD$ 跟四邊形 $EFGH$ 的相似垂足中心點列的數量越少越好，理想上就是讓四邊形 $ABCD$ 盡快變成 β *type* 的四邊形，然後找到能夠盡快變成四邊形 $EFGH$ 的 α *type* 的四邊形。

底下我們將利用類似的手法來處理其他類似四邊形之間的轉換。

從 B 型的四邊形到 C 或 B 型的四邊形

B 型無法讓垂足落在相鄰兩點上，只能讓垂足落在不相鄰的兩點，作第一次垂足多邊形無法變成 β *type* 的四邊形，需要作第二次垂足多邊形才為 β *type* 的四邊形。

也就是說在前半過程中需要多做一次垂足多邊形；然而不論要相似的是 C 或 B 型的四邊形都可以找到做一次垂足多邊形後相似於 C、B 型四邊形的 α *type* 的四邊形，不影響後半過程次數，故所需點列的數量只會比 C 到 C 型的多一個，全程共作**四次**，流程如圖 28。

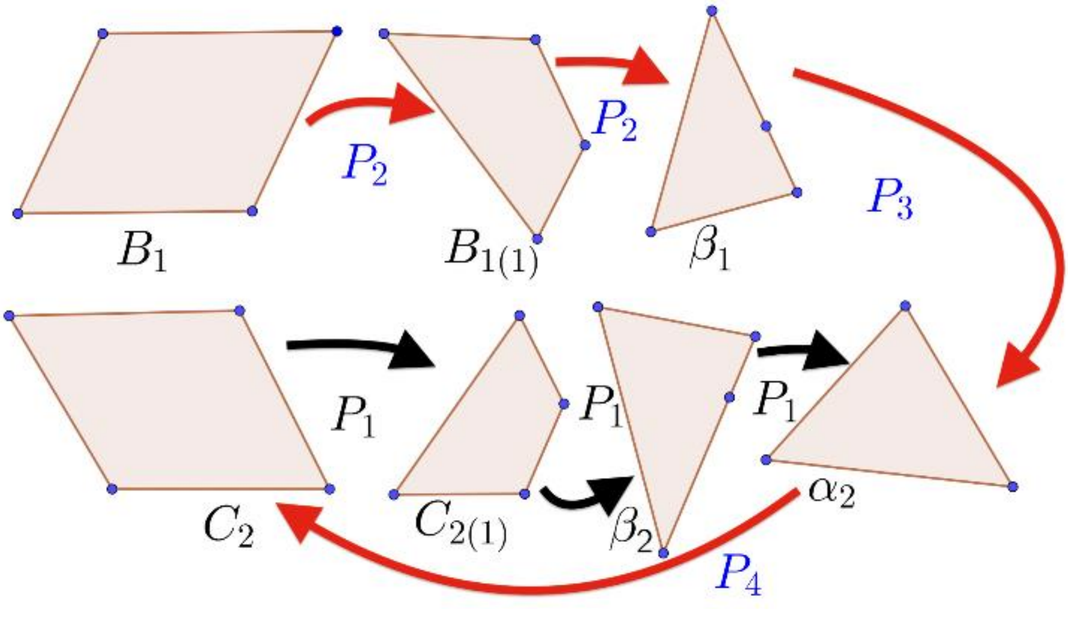


圖 28：B 型四邊形到 C 或 B 型四邊形之流程

得到點列 $\{P_2、P_2、P_3、P_4\}$ 對 B 型四邊形做垂足多邊形會相似於 C、B 型四邊形，需要的點列數量為 4。

從 A 型的四邊形到 A 型的四邊形

由於 A 型相鄰兩角為 90°，無法找到一點使 A 型的四邊形作一次或兩次垂足多邊形之後變成 $\beta\ type$ 的四邊形，所以必須先做一次垂足多邊形使其變成 C 型的四邊形，再作一次垂足多邊形才會有 $\beta\ type$ 的四邊形。A 型作成 $\beta\ type$ 的四邊形記作 β_1 最少需要兩次。

由於不存在 $\alpha\ type$ 的四邊形能找到點對其做一次垂足多邊形後相似於 A 型的四邊形，我們退而求其次，讓其能相似於定點對 A 型的四邊形做複數次垂足多邊形後得到的 C 或 B 型的四邊形，而為了減少需要的點數目，我們挑選其第三垂足多邊形。

接著再以此第三垂足多邊形再作兩次垂足多邊形變成 $\alpha\ type$ 的四邊形記作 α_2，要從這個 α_2 作成原 A 型的四邊形需要做兩次垂足多邊形流程如圖 29。

藉由**定理 1.4**，四邊形 β_1 到四邊形 α_2 需要做一次垂足多邊形。全程共作五次。

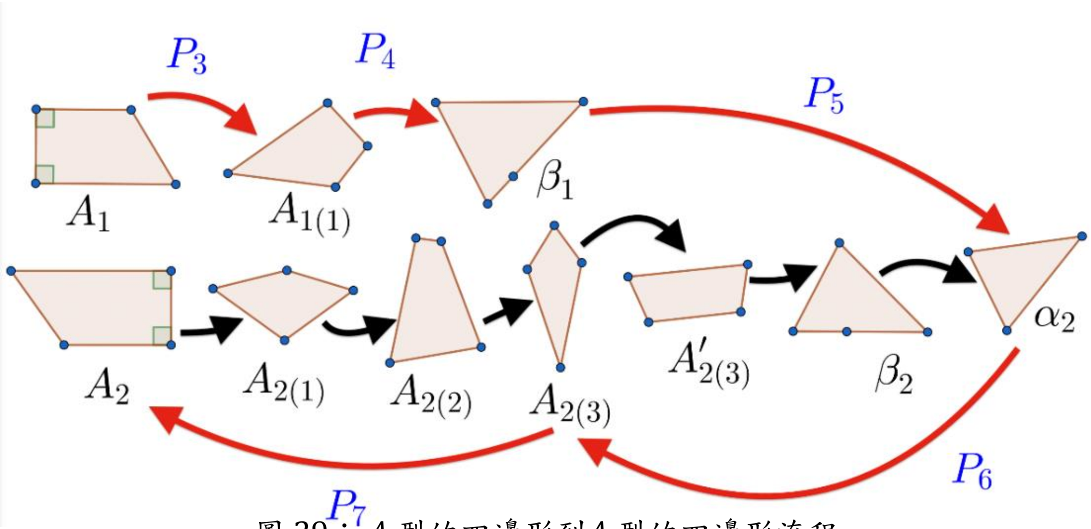


圖 29：A 型的四邊形到 A 型的四邊形流程

以兩任意四邊形最少需要做垂足多邊形三次能相似為標準，綜合上述我們得到結論如下：

A 或 B 型的四邊形作成別的四邊形所需次數加一、作成 A 的四邊形所需次數加一。

根據結論，整理出以下表格：

各類型四邊形最少需要作幾次垂足多邊形與其他四邊形相似			
From \ To	A	B	C
A	5	4	4
B	5	4	4
C	4	3	3

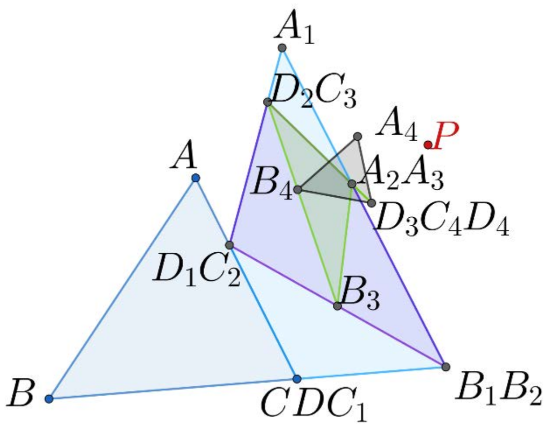
由此可知，被分類後的四邊形在退化之後可以還原為原本的狀態，並且給定兩任意的非退化四邊形，都可以在五次內做垂足多邊形使其中一個四邊形相似於另一個四邊形。綜合上面整理的非退化四邊形之間轉換的規律，得到以下定理。

定理 2.2

給定兩任意的非退化四邊形 G_1、G_2，一定存在點列 $\{P_1、\cdots\cdots、P_n\}$，使得其對 G_1 作垂足多邊形後會相似於 G_2；亦即 $[G_1, P_1、\cdots\cdots、P_n]_{\perp} \sim G_2$ 並且在要求 n 盡可能小時可以得到範圍 $3 \leq n \leq 5$

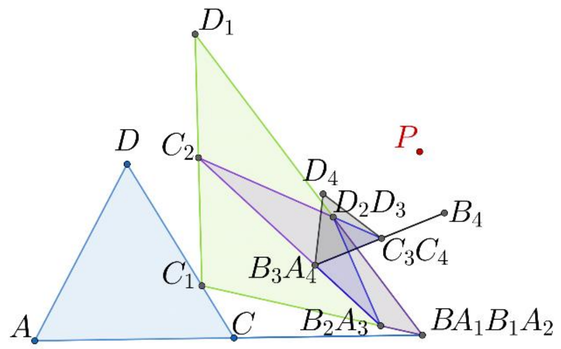
接下來針對 α $type$ 及 β $type$ 的四邊形進行討論，首先兩者皆可找到 P 點做出 C 型的四邊形，同時滿足對此 P 點的第四垂足多邊形與原圖形相似(定理 1.1、定理 1.2)，如下圖。

α $type$ 的四邊形



第一、二垂足多邊形都是 C 型的四邊形

β $type$ 的四邊形



第二、三垂足多邊形是 C 型的四邊形

有了上面的分析，我們開始 α $type$ 及 β $type$ 的四邊形之間的轉換，由定理 2.1 可知任意 β $type$ 的四邊形可以找到一點 P，做一次垂足多邊形即可與任意 α $type$ 的四邊形相似，剩下只需考慮剩下的幾種互換。

不過這裡不需要繁瑣的步驟，由於兩者皆可找到 P 點做出 C 型的四邊形，同時滿足對此 P 點的第四垂足多邊形與原圖形相似；只需要將他們都作成 C 型的四邊形，接下來就都與 C 型到 C 型的步驟相同，也就是說：

不論是凸四邊形、凹四邊形、自交四邊形、α type 的四邊形、β $type$ 的四邊形，

我們都可以藉由點列來對其中一個圖形作垂足多邊形後與另一個圖形相似。

總結一下第四點的討論內容，在最後我們可以得知，只要任意兩個(**非退化的**)四邊形，

即可將一個圖形做成 $\alpha\ type$ 的四邊形，另一個做成 $\beta\ type$ 的四邊形；利用**定理 2.1**，

可以讓任意兩個四邊形相似，也就是說藉由將四邊形**退化**的操作，

來讓需要考慮的條件減少，進而更快的得出想要的結果!

並且任意兩(**非退化的**)四邊形可以找到相似垂足中心的點列的最少數量不會超過 **5 個**。

有趣的是，在四邊形中有許多好的性質的圖形，例如矩形、平行四邊形，在垂足多邊形的

架構下，反而是比較難處理的圖形，分別被歸類到了 A、B 型；看來原先的條件太強，

反而造成之後變形上的困難。此外，由上述可知被分類後的多邊形在退化之後繼續操作，

可以還原為原本的形狀，也就意味著退化的多邊形還是有保留原多邊形的性質的。

接著我們要嘗試找到將任意的非退化多邊形「**退化**」以及特定退化多邊形還原的手法。

五、一般化如何將非退化多邊形退化以及特定退化多邊形如何還原

觀察將四邊形變成 $\beta\ type$ 的四邊形之方法，得到以下定理：

定理 3.1.1

在任意的非退化 n 邊形上 $(n \geq 4)$，選兩相異點 A_k，A_j $(k \neq j$，$n \geq j > k \geq 1)$，過 A_k 對 $\overleftrightarrow{A_kA_{k-1}}$ 做垂線 K；過 A_j 對 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 做垂線 L，若直線 K、L 交於點 P_1，則 P_1 對 n 邊形的第 $\boldsymbol{j-k}$ 垂足多邊形會屬於 $G(n，n-1)_\beta$。

證明：

給定任意非退化 n 邊形 $A_1 \dots A_{k-1}A_k \dots A_jA_{j+1} \dots A_n$，過點 A_k 對 $\overleftrightarrow{A_kA_{k-1}}$ 做垂線 K；

過點 A_j 對 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 做垂線 L。若直線 K、L 交於點 P_1，則 $\angle P_1A_{k-1}A_k = \angle P_1A_jA_{j+1} = 90°$，

P_1 點對此 n 邊形的第一垂足多邊形按照角度規律可得 $\angle PA_{k-1}^{(1)}A_k^{(1)} = \angle PA_{j-1}^{(1)}A_j^{(1)} = 90°$

(藉由**定理 1.1** 的角度關係，**逆序角的點不變，正序角的點每作一層要減 1**)

按照規律可得，作 $j-k$ 次垂足多邊形可得 $\angle PA_{k-1}^{(j-k)}A_k^{(j-k)} = \angle PA_k^{(j-k)}A_{k+1}^{(j-k)} = 90°$。

也就是說 $\angle A_{k-1}^{(j-k)}A_k^{(j-k)}A_{k+1}^{(j-k)} = 180°$ 為三點共線，由於最初的圖形不是退化多邊形，

在第一個平角出現時不需考慮共點的情況，故 P_1 點對此 n 邊形的第 $j-k$ 垂足多邊形會屬於

$G(n，n-1)_\beta$，故得證。同理可類推以下的定理：

定理 3.1.2

在任意的非退化 n 邊形上 $(n \geq 4)$，選兩相異點 A_k，A_j $(k \neq j$，$n \geq j > k \geq 1)$，過 A_k 對 $\overleftrightarrow{A_kA_{k+1}}$ 做垂線 K；過 A_j 對 $\overleftrightarrow{A_jA_{j-1}}$ 做垂線 L，若直線 K、L 交於點 P_2，則 P_2 點對 n 邊形的第 $(\boldsymbol{n-(j-k)})$ 垂足多邊形會屬於 $G(n，n-1)_\beta$

證明：

P_2 點對此 n 邊形的第一垂足多邊形得 $\angle PA_k^{(1)}A_{k-1}^{(1)} = \angle PA_j^{(1)}A_{j-1}^{(1)} = 90°$，

作$(\boldsymbol{n-(j-k)})$次垂足多邊形可得 $\angle P_1A_j^{(n-(j-k))}A_{j+1}^{(n-(j-k))} = \angle PA_j^{(n-(j-k))}A_{j-1}^{(n-(j-k))} = 90°$，

故 P_2 點對 n 邊形的第 $(\boldsymbol{n-(j-k)})$ 垂足多邊形會屬於 $G(n，n-1)_\beta$，故得證。

由於過程中會保持垂足多邊形的角度關係，所以不論是 P_1 點還是 P_2 點，他們對多邊形的第 n 垂足多邊形也會與原多邊形相似。

要注意的是，在非退化 n 邊形上任意選兩點之後不一定能找到 P_1、P_2 點，比如 A_k、A_j 點是相鄰點時會找不到點 P_2 (因對相同邊的相異點作垂線，沒有交點)，這也解釋了四邊形找 β *type* 的四邊形之方法。

接下來開始討論特定退化多邊形如何還原成非退化多邊形。

因為任意點對β、γ *type* 的多邊形做一次垂足多邊形後會變成 α *type* 的多邊形，所以這邊我們只需要討論 α *type* 的多邊形如何還原成非退化的多邊形即可。

定理 3.2

存在點列對屬於 $G(n,k)_\alpha$ 的 n 邊形做複數次垂足多邊形後是非退化多邊形

證明：

根據 α *type* 的多邊形的定義 (**定義2.3**)，如果多邊形 G_1 屬於 $G(n,k)_\alpha$ 那麼 G_1 至少會有一個點沒有共點的情況，不妨令其為點 A_n。觀察之後發現，只要給定的 P 點只要不滿足**定理 3.1** 的情形，藉由不斷更換作垂足多邊形的點，便能逐步還原成非退化 n 邊形。

其中的原理也很單純，是利用**定理 1.1** 的角度關係；藉由正序角的點會變動，逆序角的點會固定，做一次垂足多邊形後可以將原本合為 180° 的平角減少(共點或共線)，不斷交換點來作垂足多邊形之後便能達到還原的目的。

在**定理 3.1**將退化的方法一般化之後，我們就可以利用類似四邊形的方式處理五邊形。

六、任意兩個五邊形能做複數次垂足多邊形後相似

定理3.3

給定兩任意五邊形 G_1、G_2，存在點列$\{P_1$、⋯⋯、$P_n\}$，

使得其對 G_1 作垂足多邊形後會相似於 G_2；亦即$[G_1，P_1$、⋯⋯、$P_n]_{\perp} \sim G_2$

證明：

在這之前我們發現 α *type* 的五邊形有很多種，除了 $G(5，4)_\alpha$、$G(5，3)_\alpha$ 外，在 $G(5，3)_\alpha$ 的分類下又有一組共點、兩組共點等不同的圖形，但在這個定理我們只會用到 $G(5，4)_\alpha$ 和 $G(5，3)_\alpha$ 下有兩組共點的圖形。

藉由**定理 1.3.2**，我們知道存在點對 γ *type* 的 n 邊形的第五垂足多邊形會相似於原圖形，觀察這個點連續對 γ *type* 的五邊形做垂足多邊形的流程，如下圖 30。

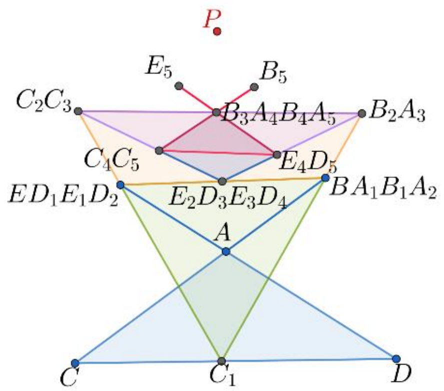


圖 30：點連續對 γ *type* 的五邊形做垂足多邊形

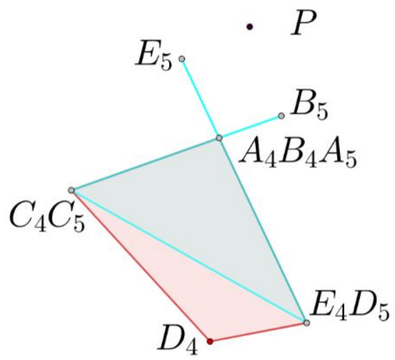
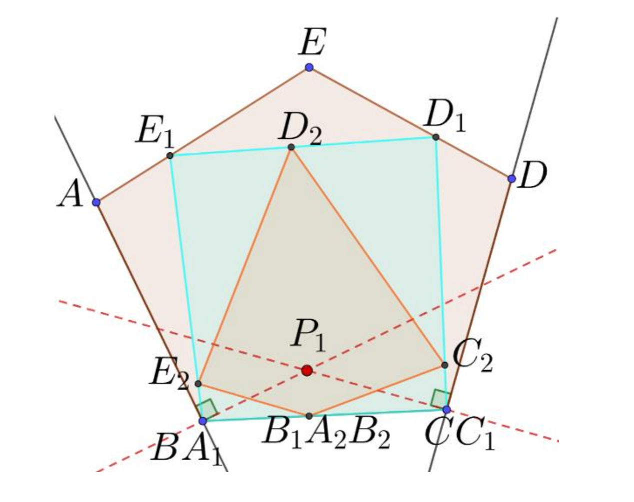
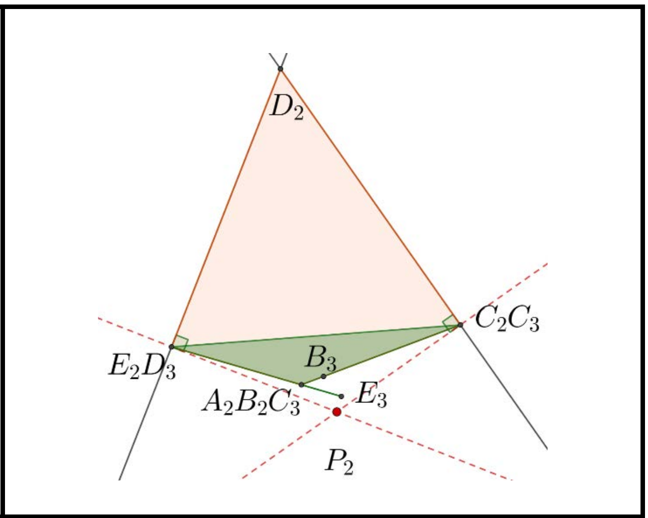


圖 31：$G(5，4)_\alpha$ 一次做成 γ *type*

發現在過程中的第四垂足多邊形屬於 $G(5，4)_\alpha$，所以我們可以得知 γ *type* 的五邊形可以做出屬於 $G(5，4)_\alpha$ 的多邊形且此類多邊形可以一次做成 γ *type* 的五邊形，如上圖 31。而用**定理 3.1** 的手法，五邊形可以做出屬於 $G(5，4)_\alpha$ 的五邊形；利用**定理 2.1** 可以類推，過 γ *type* 的五邊形可以做垂足多邊形相似於任意 $G(5，3)_\alpha$ 下有兩組共點的圖形。

綜合上面所述，假設現在有兩個五邊形分別是 G_1、G_2，我們都可以將作複數次垂足多邊形之後分別變形成 γ *type* 的五邊形（γ_1、γ_2），接著以做出 γ_2 的點再對 γ_2 做一次垂足多邊形，得到 $G(5，3)_\alpha$ 下有兩組共點的圖形(α_1)；再利用**定理 2.1** 知道存在點對 γ_1 做一次垂足多邊形後相似 α_1；藉由**定理 3.1**，由於過程中會保持垂足多邊形的角度關係，每個出現的五邊形對作出它的那個點連續作五次都會跟自己相似，利用這個性質之後只要再從 α_1 逐步還原(依照點與圖形的相對位置)，就可以得到相似 G_2 的五邊形，證明完畢。

底下為五邊形 G_2 轉換成 α_1 的手法：

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>點 P_1 對五邊形做二次垂足多邊形得到屬於 $G(5，4)_\alpha$ 的五邊形</td>
<td>點 P_2 對屬於 $G(5，4)_\alpha$ 的五邊形之第一垂足多邊形是 γ $type$ 的五邊形</td>
</tr>
</table>

但是**定理 3.1** 的手法並不是一定能找到 P 點，如果有特殊五邊形無法做出 α $type$ 的五邊形，先對圖形做垂足多邊形後得到可以做出 $G(5，4)_\alpha$ 的五邊形再繼續即可。

至此我們知道任意兩個五邊形可以藉由垂足多邊形來相似，但是需要的次數以及分類都沒有像四邊形那麼清楚，不過利用跟四邊形相同的手法，我們可以得到以下結論：

(1) 任意的非退化五邊形、α、β、γ type 的五邊形，

我們都可以藉由點列來對其中一個圖形作垂足多邊形後與另一個圖形相似。

(2) 引入的退化多邊形，不但能幫助多邊形在垂足多邊形相似，本身也有很多漂亮的性質。

伍、未來展望

1.五邊形有沒有類似四邊形 A、B、C 形的分類法來找相似所需最少次數。
2. n 邊形能不能藉由退化 n 邊形，來找到相似垂足中心點列。
3.由垂足多邊形所作出的退化多邊形的類型是不是有限制，除了我們定義的還有哪些種類。
4.立體空間上的垂足多邊形會不會有好的性質。

陸、參考資料

[1] 劉宸瑞、張祐瑋、梁芷瑄(2021)。
垂足多邊形的不變量與分類。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。
[2]林瓚平、王慈緹(2021)。
由繁化簡 ~鏡射多邊形退化之探討。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。
[3]黃靖堯、梁家瑋、李旻威(2020)那裡就是你。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會。

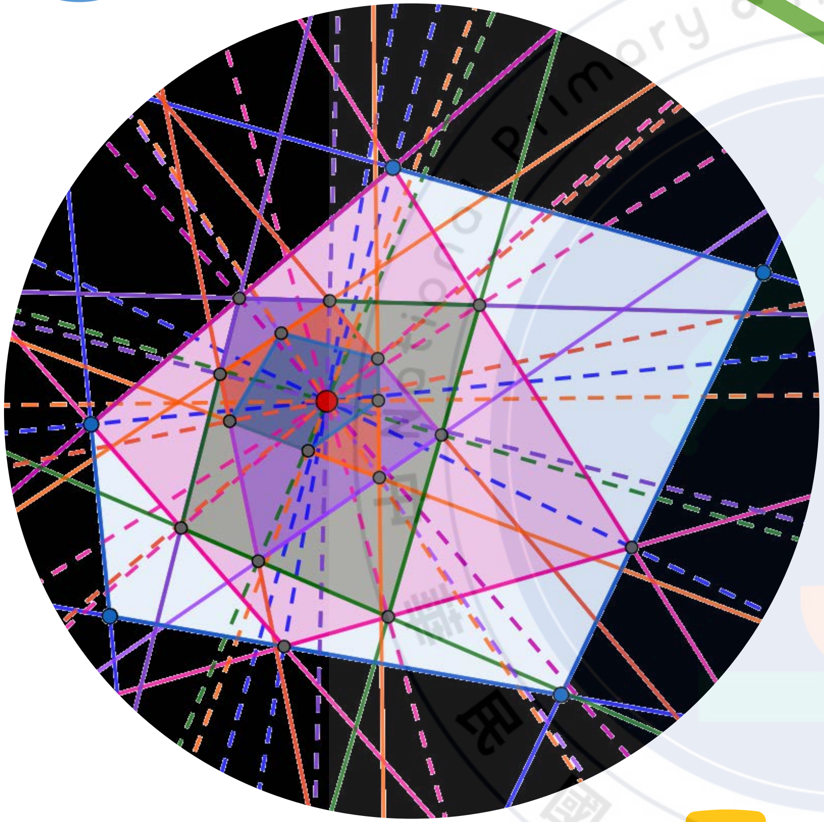
【評語】030421

平面上任意一個多邊形以及一點P,P點對多邊形各邊延長線所做垂足形成的多邊形，稱為此多邊形的垂足多邊形。本作品研究將多邊形分為共點和共線的特定形式的退化多邊形，探討對特定形式的退化多邊形作垂足多邊形與一般多邊形的垂足多邊形有哪些相異之處。本作品的題材屬於衍伸之前的作品<做有限次垂足四邊形>，之前的作品中：探討三邊以及四邊形，給出完整的成果。此次成果主要關於五邊形的垂足多邊形探討。成功地證明了兩任意的非退化四邊形，都可以在 3~5 次做垂足多邊形使其中一個四邊形相似於另一個四邊形。更重要地，探討了不好的結果<退化四邊形>，發現與非退化四邊形都可還原成非退化四邊形。

從此作品所獲得成果包含了：(1)對任意的非退化五邊形作者可以藉由點列來對其中一個圖形作垂足多邊形後與另一個圖形相。(2)所引入的退化多邊形，能幫助理解多邊形在垂足多邊形的相似進一步的性質推導。

整體而言，此作品是一個難得的研究成果。文中對於 n 邊形的一些特性若能再多予以著墨，作品更能顯現其價值性。

作品簡報



進擊的退化多邊形

國中組數學科

名詞定義--垂足多邊形

表1:一個點對多邊形做垂足多邊形

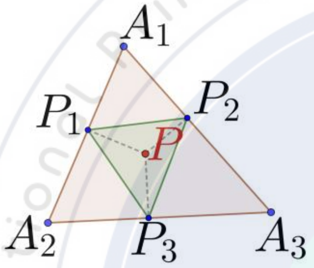
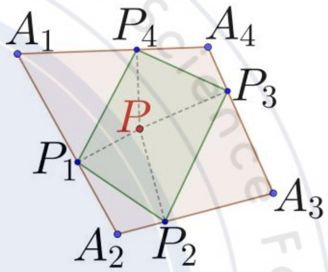
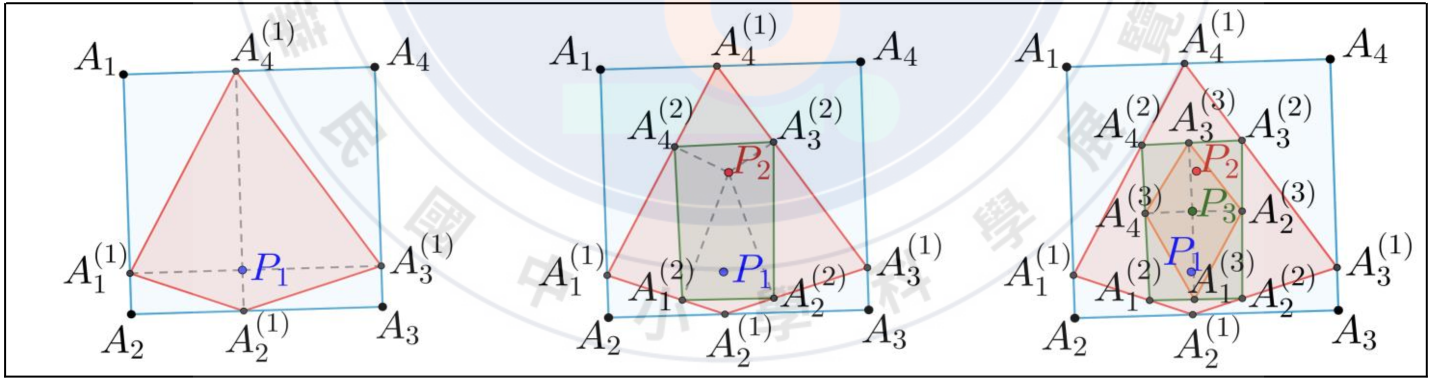
	
給定點對三角形做垂足多邊形	給定點對四邊形做垂足多邊形

圖1:點列對多邊形做垂足多邊形



退化多邊形的命名方式

當退化 n 邊形上的點能構成 k 種相異直線，則稱此退化 n 邊形屬於 $G(n，k)$，如圖2。

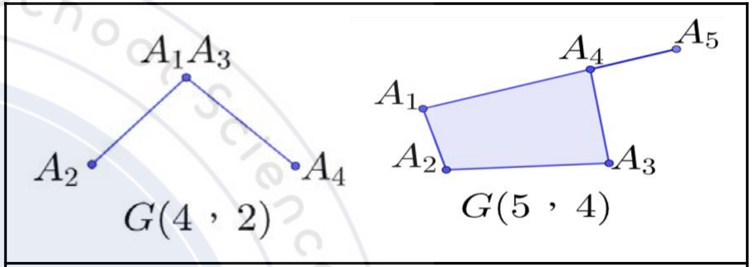


圖2：退化多邊形命名

表3：對特定三種退化多邊形命名

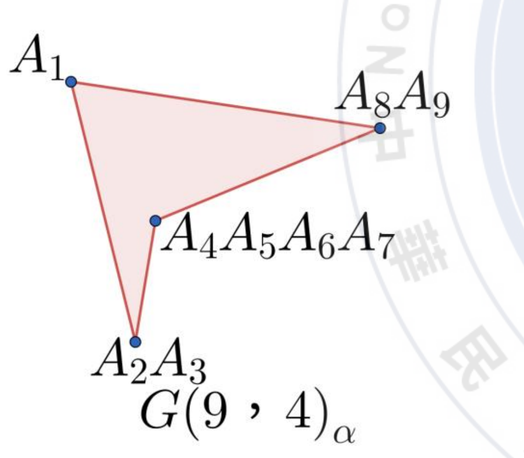
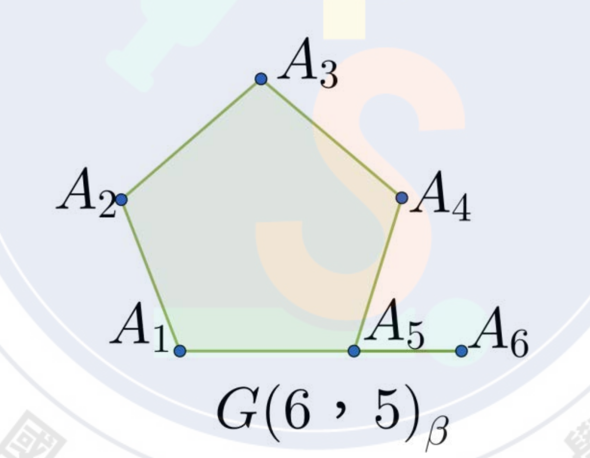
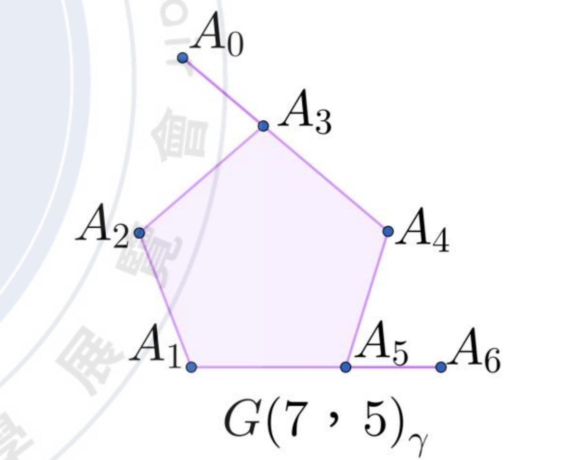
		

圖3: α *type* 的 n 邊形（共點）	圖4: β *type* 的 n 邊形（一邊連續三點共線）	圖5：γ *type* 的 n 邊形（兩邊連續三點共線）

點對退化多邊形作垂足多邊形的方法

亦即對有共點或連續三點共線的多邊形作垂足多邊形。

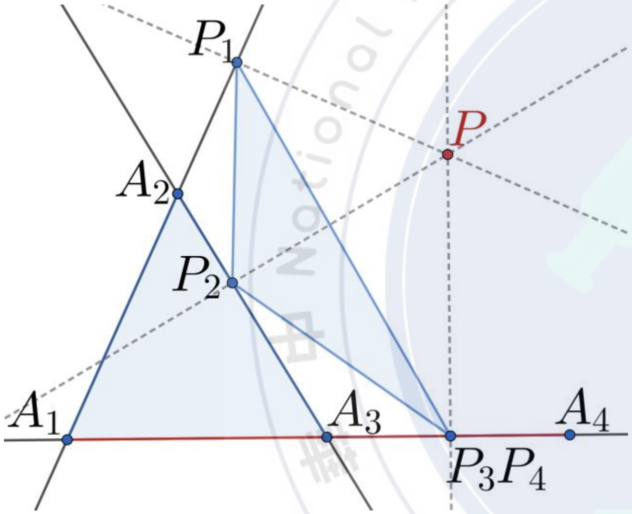


圖6：A_1 A_3 A_4三點共線

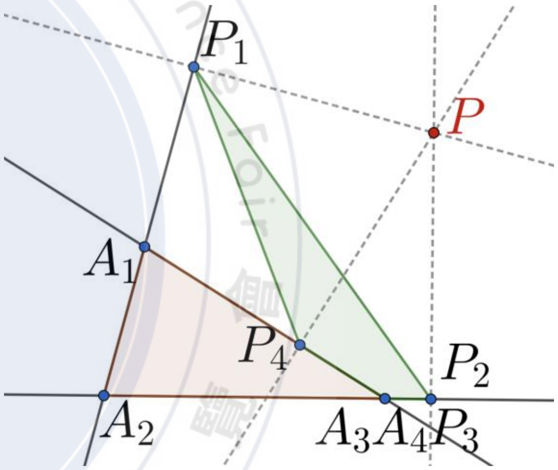


圖7：A_3、A_4為共點

此時將連續三點共線的邊視為兩邊其垂足也視為兩個點，變成共點的圖形。

其中共點邊的垂足會和他的共點重合，所做圖形點數不會減少。

點對特定退化 n 邊形作的垂足多邊形性質討論

定理 1.1	定理 1.2.1	定理 1.2.2
α 型	β 型	γ 型

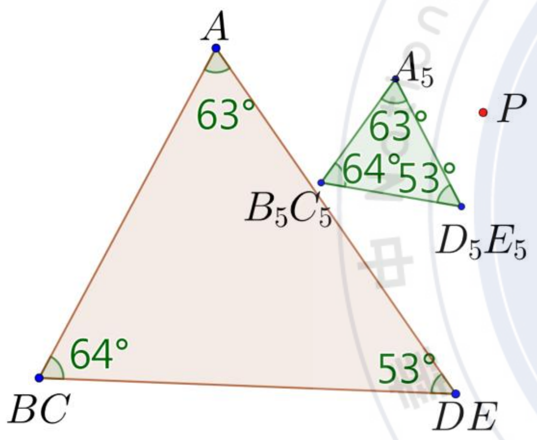


圖8

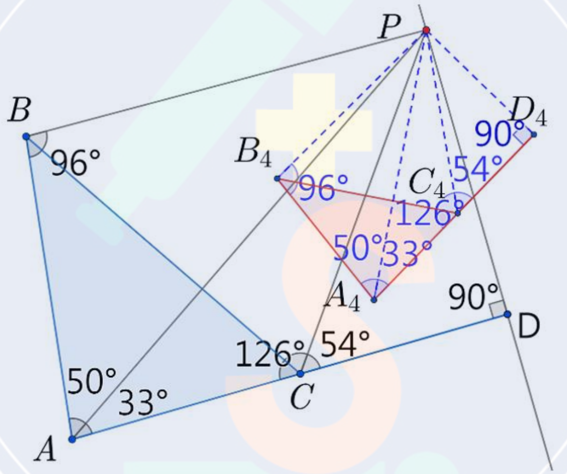


圖9

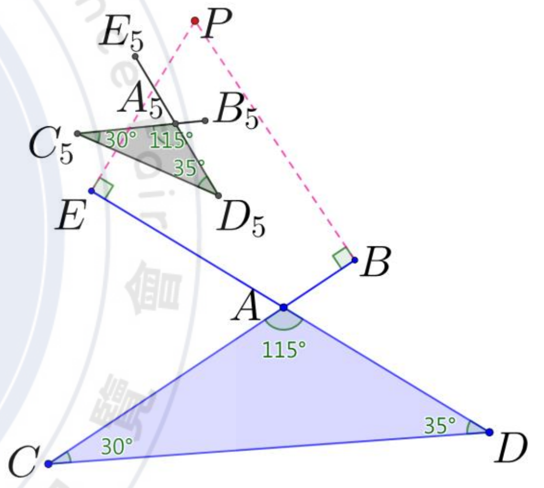


圖10

P 對特定退化 n 邊形作 n 次後會與原 n 邊形相似

定理 1.3

不管是 β *type* 或 γ *type* 的多邊形，我們都可利用 P 點的位置來調整三點共線時，點序在中間的點 (ABC 三點中的 B 點) 的相對位置。

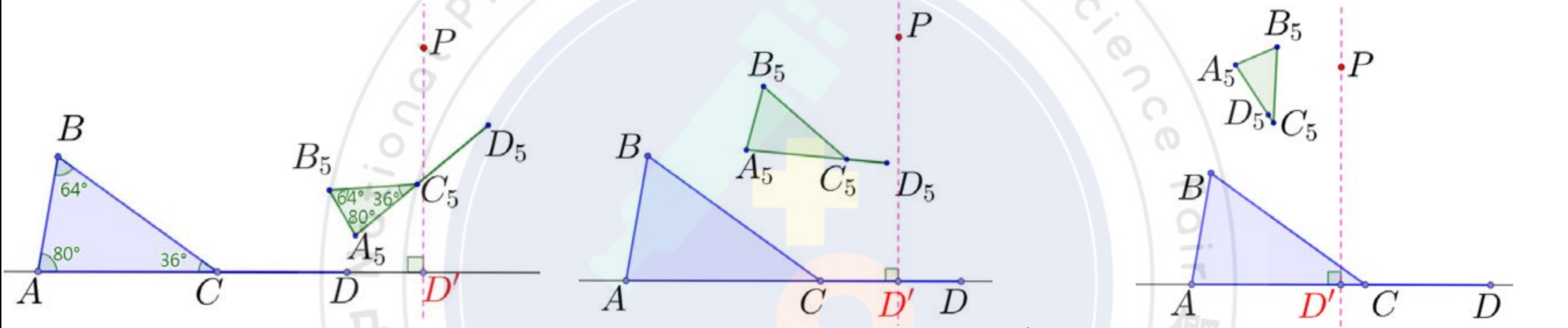


圖11 ：P 點對 β *type* 作垂足多邊形

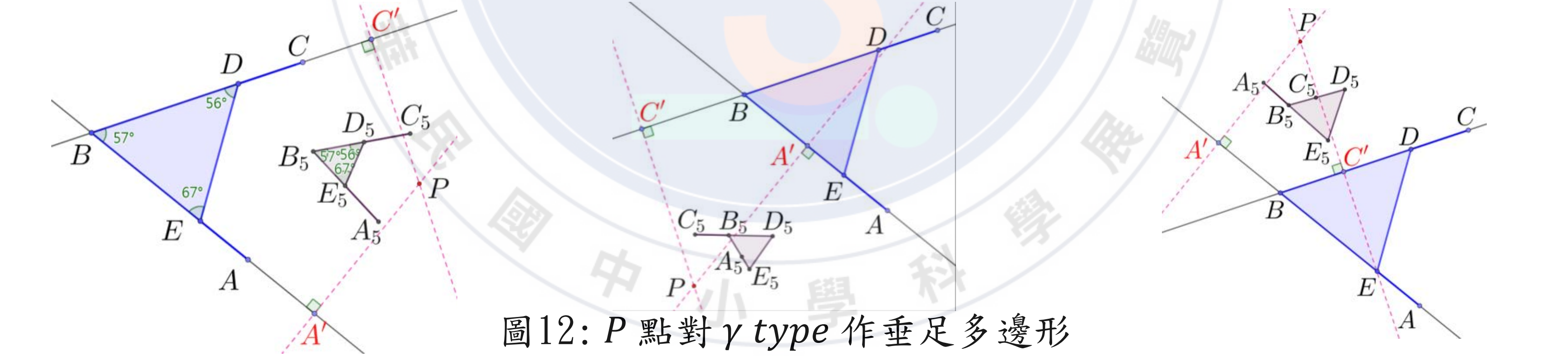


圖12: P 點對 γ *type* 作垂足多邊形

定理 2.1

對於任意的 β *type* 四邊形 $ABCD$、α type 的四邊形$EFGH$，存在 P 點對 $ABCD$ 的垂足多邊形相似於 $EFGH$ 。

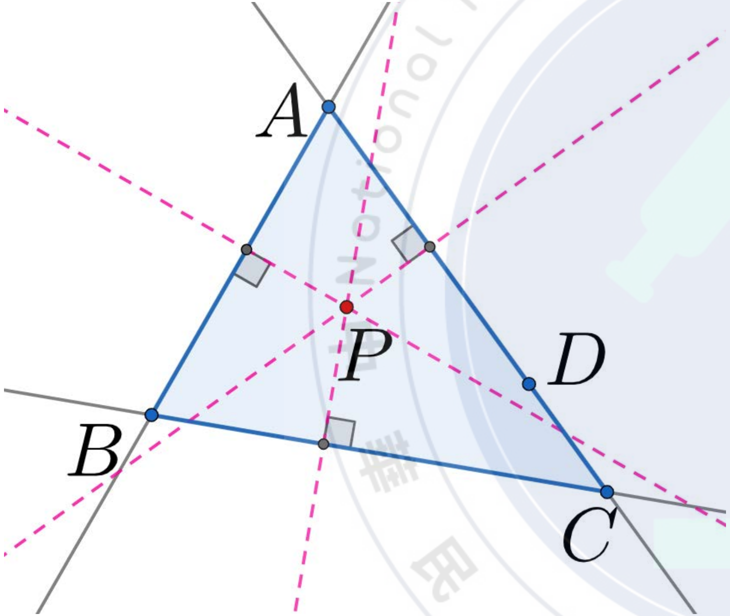


圖13：對 β *type* 作垂足多邊形相當於對三條線找垂足。

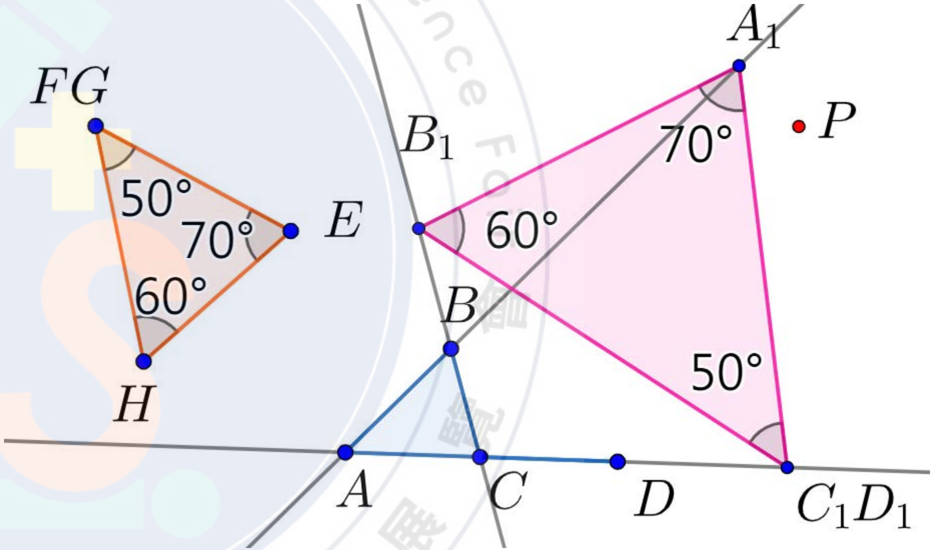


圖14：β *type* 的四邊形做一次垂足多邊形可以相似於任意 α *type* 的四邊形。

任意兩非退化四邊形相似垂足中心的點列最少數量

表4 四邊形分成三種類型

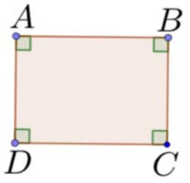
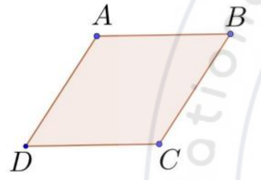
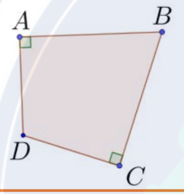
A型	B型		C型
			除AB型外

表5 不同類型轉換的點列最少數量

From \ To	A	B	C
A	5	4	4
B	4	4	5
C	4	3	3

底下舉 A 型到 A 型為例，如圖15 。

定理 2.2

四邊形相似垂足中心點列的最少數量會是3、4 或 5 個由四邊形類型決定。

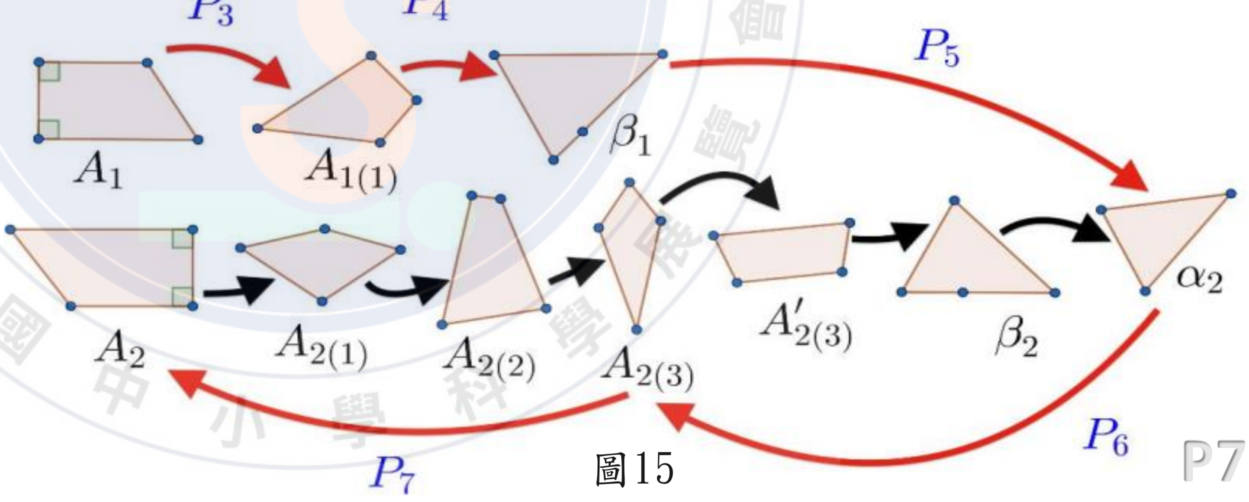


圖15

非退化四邊形及特定退化四邊形的關係

α $type$ 和 β $type$ 的四邊形皆可以做成 C 型的四邊形，如圖16、17。

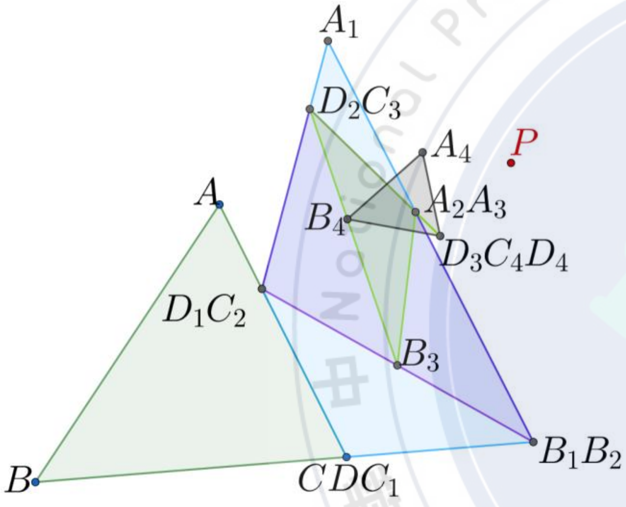


圖16

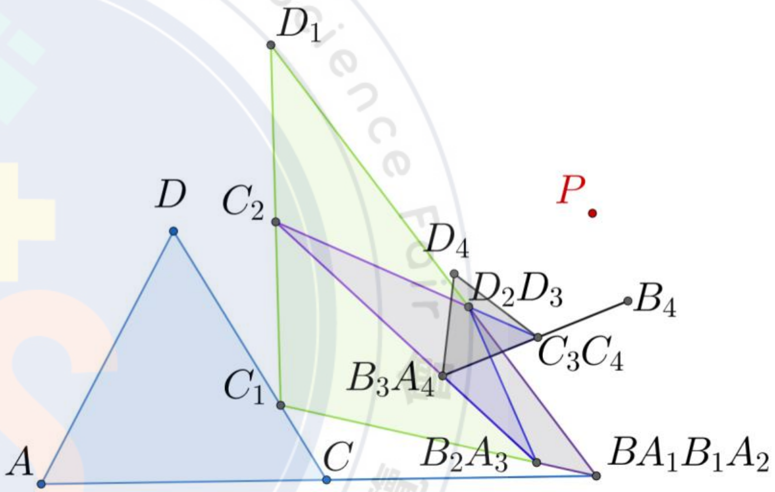


圖17

可以藉由將圖形做成 C 型的四邊形來使兩圖形做垂足多邊形後相似。

綜上所述

任意兩四邊形(退化\特定非退化)都可以作垂足多邊形之後相似。

一般化如何將非退化多邊形退化以及特定退化多邊形如何還原

定理 3.1

任意 n 邊形若可以用特定方式找到 P 點，則可以作垂足多邊形是 β $type$ 的 n 邊形。

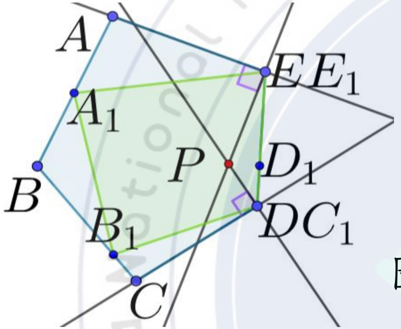


圖18

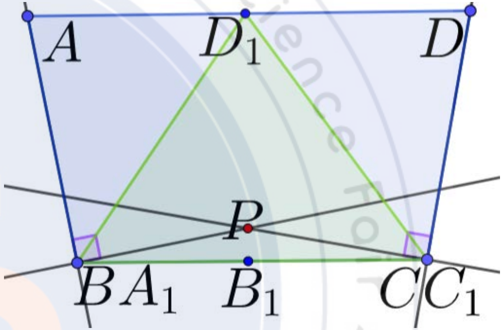


圖19

定理 3.2

存在點列對屬於 $G(n，k)_{\alpha}$ 的 n 邊形做複數次垂足多邊形後是非退化多邊形。

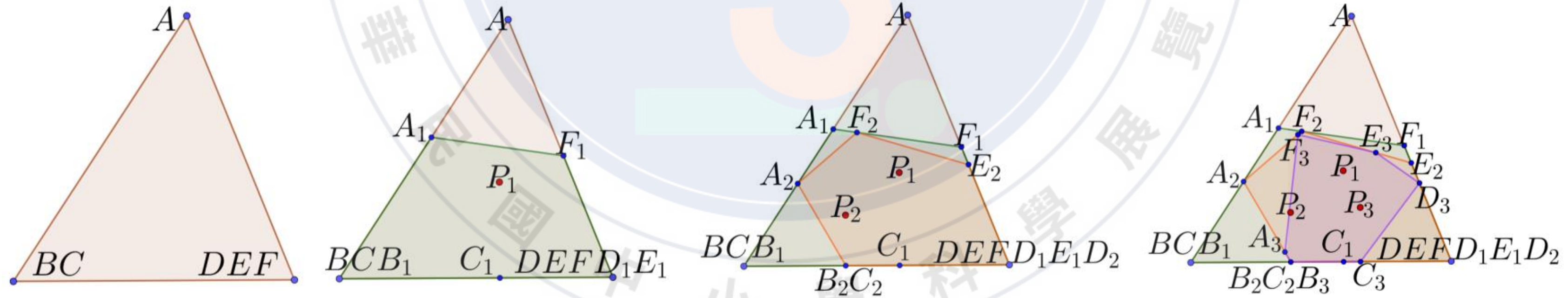


圖20：點列對 α $type$ 的六邊形作垂足多邊形

任意兩個五邊形能做複數次垂足多邊形後相似

定理 3.3

給定兩任意五邊形 G_1G_2，存在點列對 G_1 作垂足多邊形後會相似於 G_2。

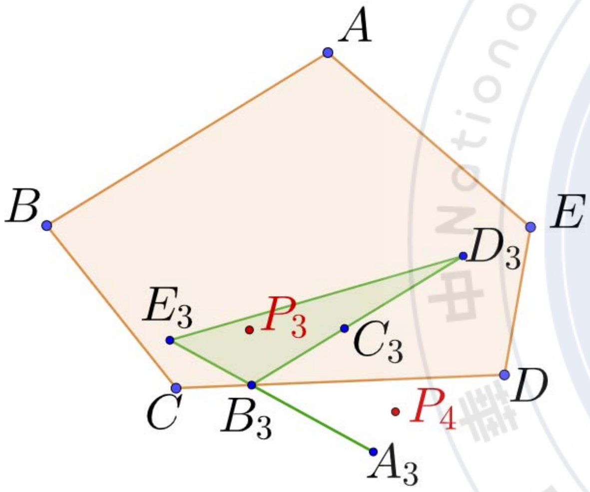


圖21:G_1 第一步驟

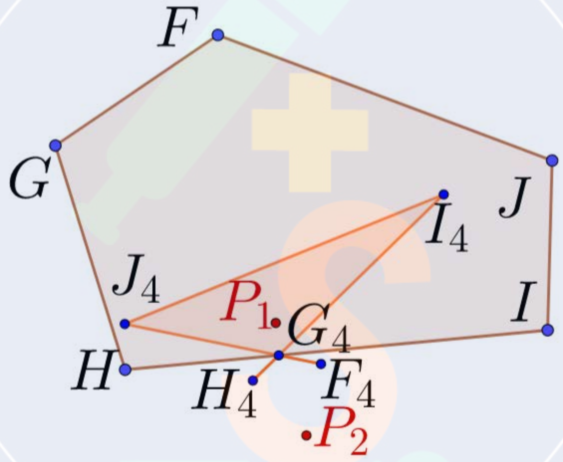


圖22:G_2 第一步驟

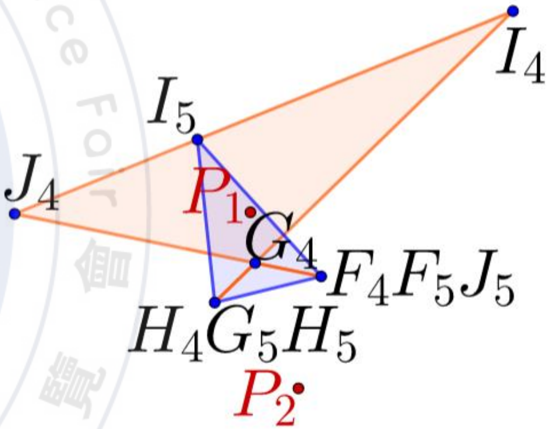


圖23：G_2 第二步驟

兩個五邊形相似的簡易流程

未來展望

1. 五邊形有沒有類似四邊形 A、B、C 型的分類法來找相似所需最少次數
2. n 邊形能不能藉由退化 n 邊形，來找到相似垂足中心點列
3. 由垂足多邊形所作出的退化多邊形類型是不是有限制，還有哪些種類
4. 立體空間上的垂足多邊形會不會有好的性質

參考資料

[1]劉宸瑞、張祐瑋、梁芷瑄(2021)。
垂足多邊形的不變量與分類。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。

[2]林瓚平、王慈綪(2021)。
由繁化簡 ~鏡射多邊形退化之探討。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。

[3]黃靖堯、梁家瑋、李旻威(2020)。
那裡就是你。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會。