中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030414

左閃右躲，哪裡逃！

學校名稱：基隆市立中正國民中學

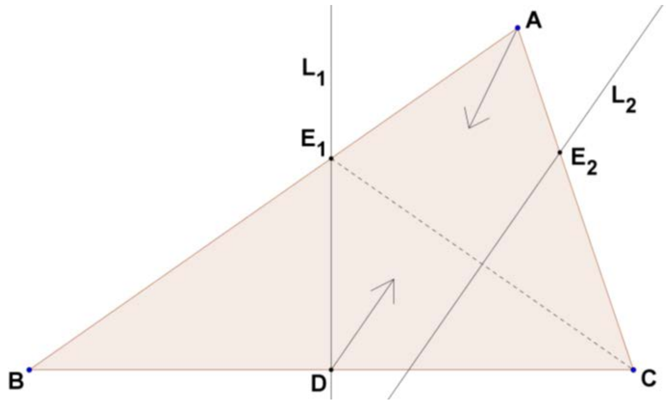
作者：	指導老師：
國二 宋以勤	張淑敏
國二 黃琪棻	吳建昀
國二 方昕宥	

關鍵詞：左閃右躲、尷尬撞擊點、塔尖形

摘要

本文旨在探討街道上面對面即將碰撞的兩行人A和D，做左右閃躲的過程。

如圖(1)，作$\overline{BC}$的中垂線交$\overline{AB}$於 E_1 得 L_1 (左閃)，連$\overline{E_1C}$，再作$\overline{E_1C}$的中垂線交$\overline{AC}$於 E_2 得 L_2 (右躲)依此規則繼續操作，得 L_1、L_2…。但不是所有Δ都可以連續作出左右閃躲的中垂線，我們找出可以連續閃躲時∠B和∠C的關係，並預測左右閃躲次數上限。也針對當中垂線 L_n 恰巧通過A點時，n值及∠B和∠C的關係進行探討；接著擴充到Δ的每一邊同時各作一輪 L_1、L_2…觀察三邊都能達到 L_n 的n值及當下的特殊幾何點。研究完中垂線後，將中垂線改成過$\overline{BC}$分點的垂線，並仿照中垂線的做法，探討∠B和∠C的範圍關係式。



圖(1)

壹、 研究動機

我們平常在街上常會有差點和對向的人相撞卻又為了閃避而不小心跨出”**同去向**”的一步的經驗，要是又撞在一起，那豈不是尷尬嗎？所以想要透過左右閃躲的方式來模擬雙方的互動閃躲過程，並希望藉由三內角的度數預判即將發生左右閃躲的尷尬次數！又想知道當三內角在何種大小的排列下可能發生最多的尷尬撞擊次數？

貳、 研究目的

一、在同時維持E_1、E_3、E_5、E_7……落在$\overline{AB}$上，且E_2、E_4、E_6、E_8……落在$\overline{AC}$上，並作連續中垂線操作，當指定了∠B角度和欲達到的E_k後，探討以∠B表示的∠C取角範圍。

二、承上，反過來探討在那允許的∠C取角中，所能達到的L_k有何不同？最大k值分佈成何種形狀？

三、在給定Δ ABC的三內角後，分別操作各邊的L_k，探討能預判三邊皆能達到的L_k之k值或無法都達到的k值

四、承三，在三邊皆能達到的L_k圖中，探討是否有如同外心之三邊的L_1共點現象，並揭示該共點的幾何性質。

五、中垂線將$\overline{BC}$分段成1：1，若擴充至a：b的任意分段比，並在分段點處作垂線L_k承上文之中垂線的概念，探討如同上文(一)到(四)的現象。

參、 研究設備與器材

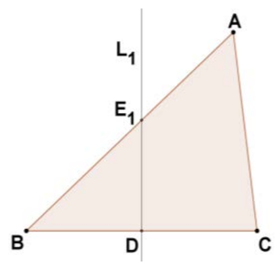
GeoGebra 繪圖軟體、Word 軟體、紙、筆

肆、 研究過程與方法

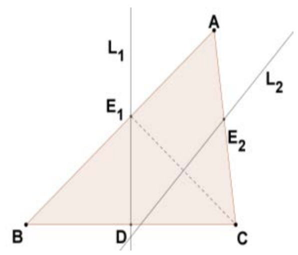
一、名詞解釋

(一) 一左：作$\overline{BC}$的中垂線L_1，L_1交$\overline{AB}$於E_1，且E_1在$\overleftrightarrow{DA}$的左邊，我們稱作一左(或左閃)，如圖(2)。

(二) 一右：承(一)，作$\overline{E_1C}$的中垂線L_2，L_2交$\overline{AC}$於E_2，且E_2在$\overleftrightarrow{DA}$的右邊，我們稱作一右(或右躲)，如圖(3)。



圖(2)



圖(3)

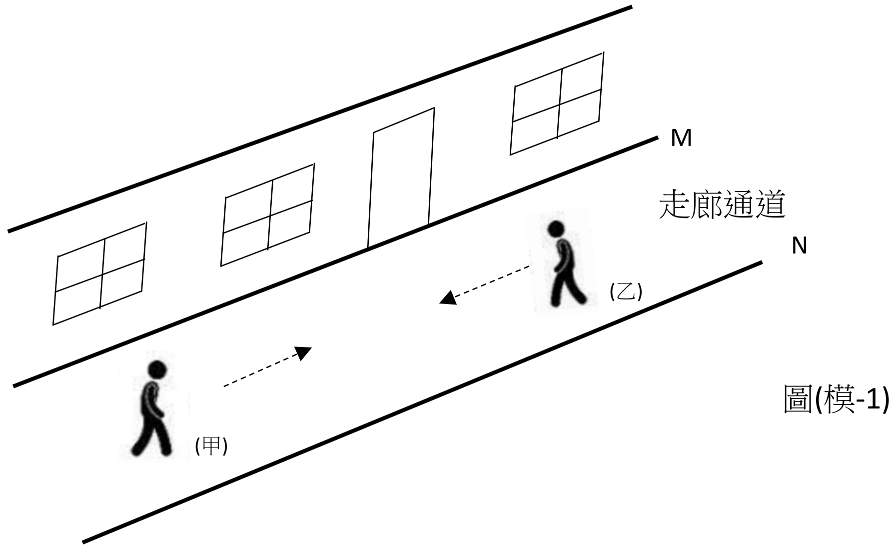
(三) $\overline{BC}L_k$：表示在△ABC中的$\overline{BC}$作連續中垂線時，所得的第k條中垂線。如$\overline{BC}L_2$即從$\overline{BC}$連續中垂線操作出的第二條中垂線，$\overline{BC}L_2$即圖(3)中的L_2。

(四) 點P($\overline{AB}L_2$，$\overline{BC}L_2$，$\overline{AC}L_1$)：表示P 點為三邊中垂線L_2、L_2、L_1的共同交點，簡記為$P_{221}^{1:1}$，再進一步簡記為P_{221}。

(五) $P_{abc}^{m:n}$是指在△ABC三邊皆以m：n的方式操作垂線，若$\overline{AB}$的L_a、$\overline{BC}$的L_b、$\overline{AC}$的L_c三條線的共點為P，則稱該點來自於$\overline{AB}L_a$、$\overline{BC}L_b$和$\overline{AC}L_c$的交點，例如$O_{111}^{1:1}$表示此點O為△ABC的三邊中垂線交點(就是△ABC的外心)。

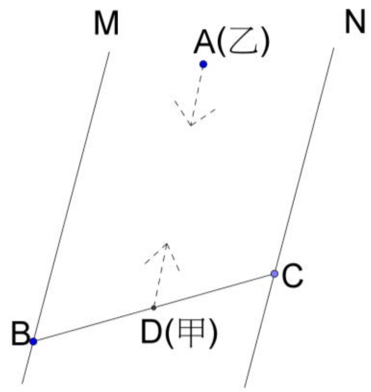
二、建立研究模型

(一) 如圖(模-1)，甲、乙兩人在走廊通道上，正相向而行，若兩人都沒注意到對方，則即將在幾秒後相撞。當即將碰撞前瞬間兩人同時驚覺對方的存在，並胡亂給了一個相同去向的閃躲，這胡亂給出的閃躲，可能會造成第二次的碰撞。其中走廊兩側直線M、直線N及甲、乙兩人連線的直線不一定要互相平行，重點是甲、乙兩人須面對面。接著將甲、乙兩人為了避開第一次的碰撞所作的反應路徑合理的設定如下

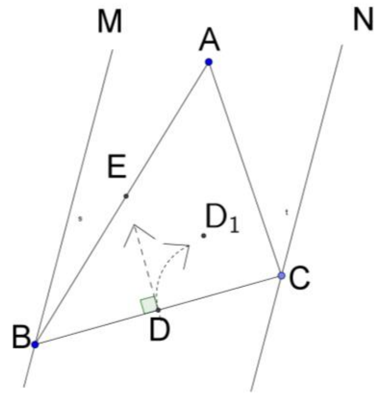


圖(模-1)

(二) 指定乙的位置在A點，甲的位置在D點，因為甲、乙兩人都是隨機轉向。正常狀態下應一次就避開了，但就是很怪異，有時竟然能出現多次閃躲，為能表達這現象，我們做了一套合理的反應路徑描述。如圖(模-2)，過D點隨意畫一條$\overleftrightarrow{BC}$，和直線M、N，分別交於B、C。假設甲(在D點)的立即轉向反應是沿著$\overline{BC}$的垂直方向前進(注意，$\overline{BC}$可以以D為軸心調整轉動，而直線M、N也可以隨意平行移動調整距離)，我們只要調整到甲從D點沿著$\overline{BC}$垂線前進且同時乙沿著$\overrightarrow{AB}$方向前進，兩人即將在$\overline{AB}$上的E點相撞(其實甲並未到達E點就做第二次路徑修正)，如圖(模-3)，以上設定都以甲為主動，乙為被動，所以我們可以合理的認為甲從D點前進修正到達$\overline{EC}$上的D_1點，並使$\overline{CD_1}:\overline{D_1E}=\overline{BD}:\overline{DC}$，即相同的分段比，並將乙被動的固定在A點，甲、乙兩人分別為在D_1和A 點做第二次的即將碰撞反應。

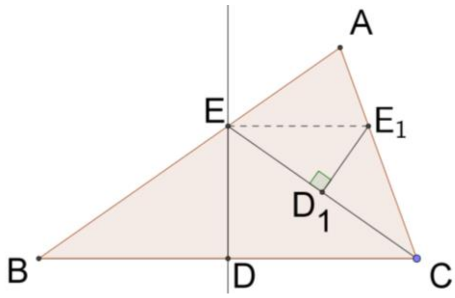


圖(模-2)



圖(模-3)

(三) 經過第一次的尷尬修正後，甲從D點走到D_1點，乙當然也有移動，我們假設乙的新位置仍為A點，新Δ AEC中，甲仍位在$\overline{EC}$的中點D_1處，E點被稱為”一左尷尬撞擊點”同時E_1點被稱為緊接著閃躲的”一右尷尬撞擊點”，如圖(模-4)。



圖(模-4)

(四) 連接$\overline{EE_1}$後，甲並未和乙在$\overline{AC}$上的E_1點碰撞而是閃躲修正路徑走到$\triangle AEE_1$的$\overline{EE_1}$的中點D_2處。

(五) 接下來在$\triangle AEE_1$中，如同前文的$\triangle ABC$，可以的話再繼續”二左”、”二右”的閃躲，一直前進到”左右閃躲輪替”失敗而結束。

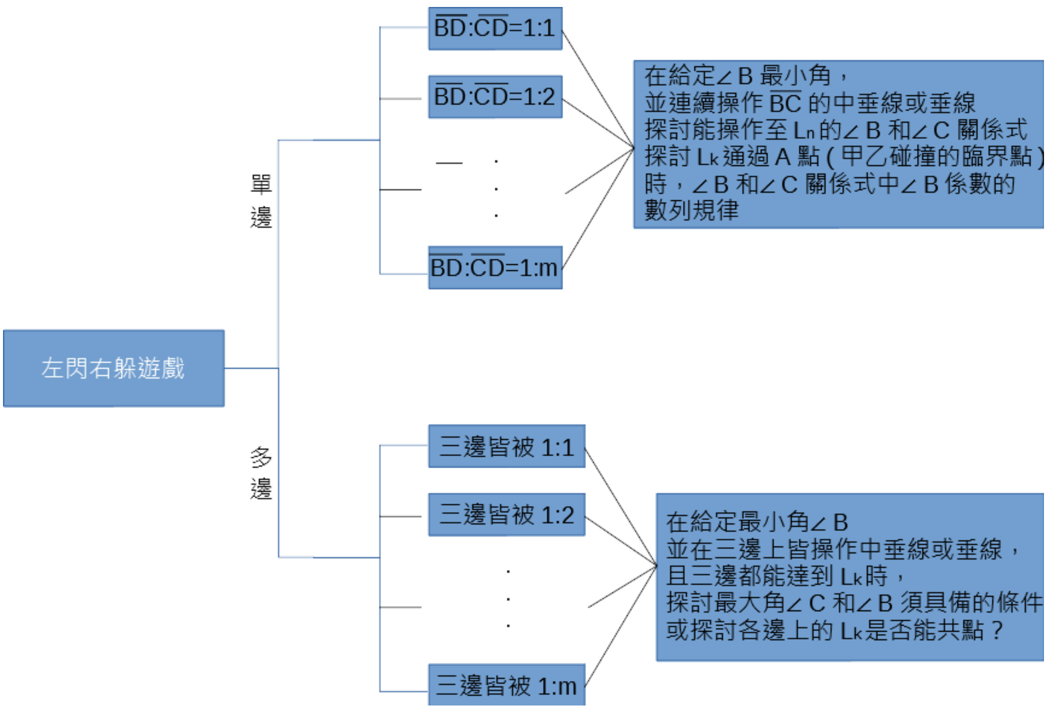
三、研究限制

(一) 在$\triangle ABC$的底邊$\overline{BC}$上操作垂線時，不失一般性，規定$\angle B < \angle C$，即每次閃躲都先往小角(例$\angle B$)方向$\overline{BA}$邊移動，而在$\triangle AEC$中，則往小角$\angle ACE$的$\overline{AC}$邊移動。

(二) 甲是主動，乙是被動，每次閃躲後都把移動後的乙，挪回A點處且$\angle A$不變。

(三) 當發生不合閃躲規則左右左右左右……或垂線通過A點或當垂線交在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，但甲或乙”倒退嚕”時，遊戲都應立即停止。倒退嚕的意思是本來甲在一左、二左、三左……的撞擊點應在$\overline{AB}$上一直往A點前進，但若發生撞擊點不進反退時就稱”倒退嚕”，遊戲停止。

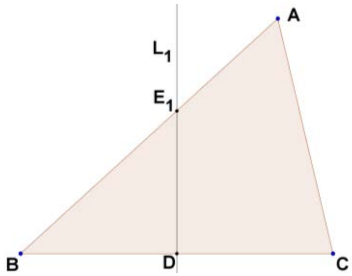
四、研究架構



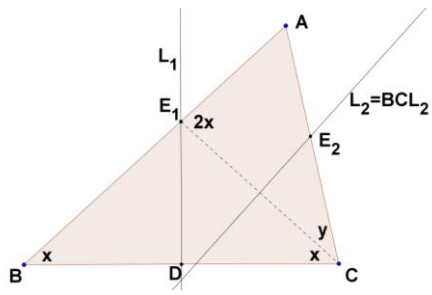
五、在$\overline{BC}$中垂線起始的左右閃躲撞擊遊戲中，找出$\angle B$、$\angle C$的條件，使得ΔABC能操作至L_1、L_2。

(一) 如圖(4)，若$\angle C > \angle B$，則必有L_1 (一左)

(二) 如圖(5)，∵在 ΔAE_1C中，若 $2x \geq y$，則有L_2 (一右，等號表示L_2通過A點，一右也算成立。)



圖(4)



圖(5)

即 $2x + x \geq x + y \Rightarrow 3x \geq x + y$ ，即 $3\angle B > \angle C$

由(一)、(二)可知 $3\angle B \geq \angle C > \angle B$

得$3\angle B \geq \angle C > \angle B$，則必有 L_1、L_2

六、找出$\angle B$、$\angle C$的條件，使得ΔABC能操作至L_1、L_2、L_3

(一) 承五、若 $3\angle B \geq \angle C > \angle B$，則必有 L_1、L_2

(二) 如圖(6)，在 ΔAE_1E_2中，若$\angle AE_2E_1 \geq \angle AE_1E_2$則有$L_3$，等號時，$L_3$通過A點。

即 $2y \geq 2x - y$

$\Rightarrow 3y \geq 2x$

$\Rightarrow 3y + 3x \geq 2x + 3x$

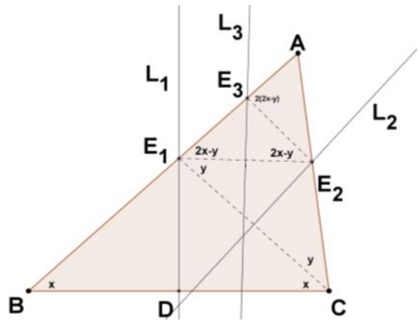
$\Rightarrow 3(y + x) \geq 5x$

$\Rightarrow 3\angle C \geq 5\angle B$

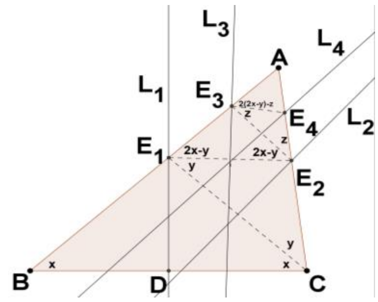
即 $\angle C \geq \frac{5}{3}\angle B$

由(一)、(二)可知$3\angle B > \angle C \geq \frac{5}{3}\angle B$

得$3\angle B > \angle C \geq \frac{5}{3}\angle B$，則必有 L_1、L_2、L_3



圖(6)



圖(7)

七、找出$\angle B$、$\angle C$的條件，使得Δ ABC能操作至L_1、L_2、L_3、L_4

(一) 承六，若 $3\angle B > \angle C \geq \frac{5}{3}\angle B$，則必有$L_1$、$L_2$、$L_3$

(二) 如圖(7)，在Δ AE_2E_3中，若$\angle AE_3E_2 \geq \angle AE_2E_3$則有$L_4$，

即$2(2x-y) \geq z$

$\Rightarrow 2(2x-y) \geq 2y-(2x-y)$

$\Rightarrow 3(2x-y) \geq 2y$

$\Rightarrow 6x \geq 5y$

$\Rightarrow 11x \geq 5(y+x)$

$\Rightarrow 11\angle B \geq 5\angle C$

即 $\frac{11}{5}\angle B \geq \angle C$

由(一)、(二)可知$\frac{11}{5}\angle B \geq \angle C > \frac{5}{3}\angle B$

得$\frac{11}{5}\angle \mathbf{B} \geq \angle \mathbf{C} \geq \frac{5}{3}\angle \mathbf{B}$，則必有$\mathbf{L_1}$、$\mathbf{L_2}$、$\mathbf{L_3}$、$\mathbf{L_4}$

八、找出$\angle B$、$\angle C$的條件，使得Δ ABC能操作至L_1、L_2、L_3、L_4、L_5

(一) 承七，若 $\frac{11}{5}\angle B \geq \angle C > \frac{5}{3}\angle B$，則必有$L_1$、$L_2$、$L_3$、$L_4$

(二) 如圖(8)，Δ AE_3E_4中，若令 $\angle AE_4E_3 \geq \angle AE_3E_4$則有$L_5$

即 $2z \geq 2(2x-y)-z$

$\Rightarrow 3[2y-(2x-y)] \geq 2(2x-y)$

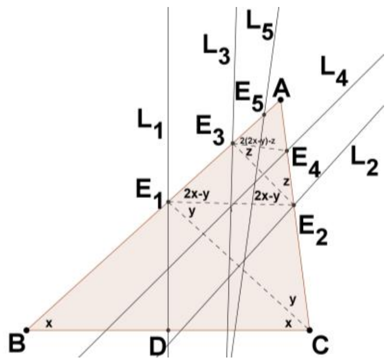
$\Rightarrow y \geq 5(2x-y)$

$\Rightarrow 11y \geq 10x \rightarrow 11y+21x$

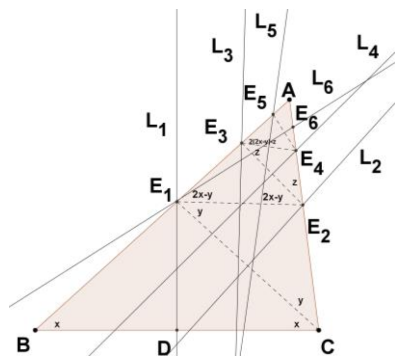
即 $11\angle C \geq 21\angle B \Rightarrow \angle C \geq \frac{21}{11}\angle B$

由(一)、(二)可知 $\frac{11}{5}\angle B > \angle C \geq \frac{21}{11}\angle B$

得 $\frac{11}{5}\angle B > \angle C \geq \frac{21}{11}\angle B$，則必有 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5



圖(8)



圖(9)

九、找出∠B、∠C的條件，使得△ABC能操作至L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6

(一) 承八，若 $\frac{11}{5}\angle B \geq \angle C \geq \frac{21}{11}\angle B$，則必有 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5

(二) 如圖(9)，在 $\triangle AE_4E_5$中，若要存在 L_6，則需 $\angle AE_5E_4 > \angle AE_4E_5$

即 $2(6x-5y) \geq (11y-10x)$

$\Rightarrow 12x-10y \geq 11y-10x$

$\Rightarrow 22x \geq 21y$

$\Rightarrow 22x+21x \geq 21y+21x$

$\Rightarrow 43x \geq 21(x+y)$

$\Rightarrow 43\angle B \geq 21\angle C$

$\Rightarrow \frac{43}{21}\angle B \geq \angle C$

由(一)、(二)可知 $\frac{43}{21}\angle B \geq \angle C > \frac{21}{11}\angle B$

得 $\frac{43}{21}\angle B \geq \angle C > \frac{21}{11}\angle B$，則必有 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6

上文五到九所討論的在給定∠B後，欲操作出L_1、L_2、L_3……到L_{2n-1}、L_{2n}時，應配合取到的∠C範圍，歸納成下面性質。

性質一：

在左閃右躲的遊戲模型中，設 n=2、3、4、……k 等自然數

(一) **因模型限定$\angle C > \angle B$，所以在給定$\angle B$後，只要取$\angle C$落在**

$180° - \angle B > \angle C > \angle B$**範圍內即可得到$L_1$。(當然$\angle C = \angle B$時，也有$L_1$，通過A點，表示兩人一開始就直接撞上，沒做什麼閃躲就結束，不好玩)**

(二) **欲達到L_{2n-1}，則在給定$\angle B$後，取$\angle C$落在**

$\frac{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\cdots-4^{n-k}}{4^{n-2}+4^{n-3}+\cdots+4^{n-k}}\angle B > \angle C \geq \frac{4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+4^{n-k}}{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\cdots 4^{n-k}}\angle B$**的範圍內即可達成。**

(三) **欲達到L_{2n}，則在給定$\angle B$後，取$\angle C$落在**

$\frac{4^{n}-4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\cdots-4^{n-k}}{4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\cdots+4^{n-k}}\angle B \geq \angle C > \frac{4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\cdots+4^{n-k}}{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\cdots-4^{n-k}}\angle B$**的範圍內即可達成。**

十、利用數學歸納法證明性質一，並舉例說明

(一) **證明：利用數學歸納法**

1. L_1、L_2、L_3、L_4之證明，如前文五、六、七、八已成立，驗證如下：

$\underset{\text{無意義}}{\frac{4^{1-1}}{}}\angle B > \angle C > \frac{4^{1-1}}{4^{1-1}}\angle B$，即僅得右式$\angle C > \angle B$和當初建立模型的條件吻合

(L_{2n-1}的左式為$\frac{4^{n}-4^{n-1}-\cdots-4^{0}}{4^{n-2}+4^{n-3}+\cdots+4^{0}}\angle B \geq \angle C$，若要到達$L_1$，

$2n-1=1$，$n=1$，$n-2<0$，此式分母最大次方小於最小次方，故無意義)

$\frac{4^{1}-4^{1-1}}{4^{1-1}}\angle B \geq \angle C > \frac{4^{1-1}}{4^{1-1}}\angle B$，即$3\angle B \geq \angle C > \angle B$，依圖(5)之證明，知成立

令$2n-1=3$，得$k=n=2$

$\angle C$的範圍為

$\frac{4^{2-1}-4^{2-2}}{4^{2-2}}\angle B > \angle C \geq \frac{4^{2-1}+4^{2-2}}{4^{2-1}-4^{2-2}}\angle B$，即 $\frac{3}{1}\angle B > \angle C \geq \frac{5}{3}\angle B$ 依圖(6)之證明，知成立

令$2n=4$，得$k=n=2$

$\angle C$的範圍為

$\frac{4^{2}-4^{2-1}-4^{2-2}}{4^{2-1}+4^{2-2}}\angle B \geq \angle C \geq \frac{4^{2-1}+4^{2-2}}{4^{2-1}-4^{2-2}}\angle B$，即 $\frac{11}{5}\angle B \geq \angle C > \frac{5}{3}\angle B$ 依圖(7)之證明，

知成立

2. 假設L_{2p-2}、L_{2p-1}及L_{2p}皆成立

即∠C的範圍為

L_{2p-2}範圍 ：$\frac{4^{p-1}-4^{p-1-1}-\cdots-4^0}{4^{p-1-1}+4^{p-1-2}\ldots+4^0}\angle B \geq \angle C > \frac{4^{p-1-1}+4^{p-1-2}+\cdots+4^0}{4^{p-1-1}-4^{p-1-2}-\cdots-4^0}\angle B$

L_{2p-1}範圍 ：$\frac{4^{p-1}-4^{p-2}-\cdots-4^0}{4^{p-2}+4^{p-3}+\cdots+4^0}\angle B > \angle C \geq \frac{4^{p-1}+4^{p-2}+4^{p-3}+\cdots+4^0}{4^{p-1}-4^{p-2}-4^{p-3}-\cdots-4^0}\angle B$

L_{2p}範圍 ：$\frac{4^{p}-4^{p-1}-4^{p-2}-\cdots-4^0}{4^{p-1}+4^{p-2}+\cdots+4^0}\angle B \geq \angle C > \frac{4^{p-1}+4^{p-2}+4^{p-3}+\cdots+4^0}{4^{p-1}-4^{p-2}-4^{p-3}-\cdots4^0}\angle B$

3. 推得L_{2p+1}及L_{2p+2}亦能成立，如圖(10)

觀察L_{2p-1}所在的$\Delta\ II_1J_1$的∠C範圍的不等式的左式和L_{2p-2}左式一致，故L_{2p-1}的右式應和L_{2p}的右式一致，因此L_{2p+1}的右式應和L_{2p}的左式一致，

即 $\frac{4^{p}-4^{p-1}-4^{p-2}-\cdots-4^0}{4^{p-1}+4^{p-2}+\cdots+4^0}\angle B > \angle C$……①

又當L_{2p}的左式和L_{2p+1}的左式一致時，必L_{2p+2}的右式和L_{2p+1}的右式一致，
而L_{2p+1}的右式分子和左式的分母相同，
故分子為$4^{p-1}+4^{p-2}+\cdots+4^0$，顯然的觀察前述的所有右式可得$L_{2p+1}$的右式
分母為$4^{p-1}-4^{p-2}-4^{p-3}-\cdots-4^0$，

故推得L_{2p+1}的右式不等式為$\angle C \geq \frac{4^{p-1}+4^{p-2}+\cdots+4^0}{4^{p-1}-4^{p-2}-\cdots-4^0}\angle B$……②

由①和②得存在L_{2p+1}的條件下，∠C範圍為

$\frac{4^{p}-4^{p-1}-4^{p-2}-\cdots4^0}{4^{p-1}+4^{p-2}+\cdots+4^0}\angle B > \angle C \geq \frac{4^{p}+4^{p-1}+\cdots+4^0}{4^{p}-4^{p-1}-\cdots-4^0}\angle B$，我們也可根據圖(4)、圖(6)、圖(8)的推理概念推出此式。

同理L_{2p+2}的右式和L_{2p+1}的右式一致，故得

$\angle C > \frac{4^{p-1}+4^{p-2}+\cdots+4^0}{4^{p-1}-4^{p-2}-\cdots-4^0}\angle B$ ……③

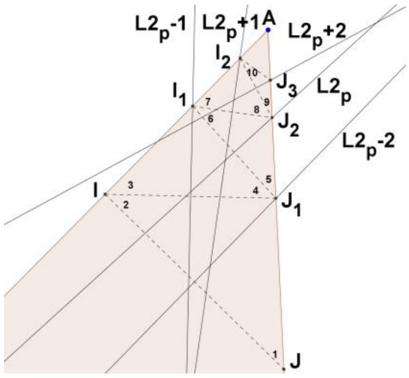
又L_{2p+2}的左式分母和L_{2p+1}右式分子一致，故得
L_{2p+2}左式分母為$4^{p}+4^{p-1}+\cdots+4^0$
$\therefore L_{2p+2}$左式的分子為$4^{p+1}-4^{p}-4^{p-1}-\cdots-4^0$

$\frac{4^{p+1}-4^{p}-4^{p-1}-\cdots-4^0}{4^{p}+4^{p-1}+\cdots+4^0}\angle B \geq \angle C$ ……④

由(3)和(4)得存在L_{2p+2}的條件下，∠C範圍為

$\frac{4^{p+1}-4^{p}-4^{p-1}-\cdots-4^0}{4^{p}+4^{p-1}+\cdots+4^0}\angle B \geq \angle C > \frac{4^{p}+4^{p-1}+\cdots+4^0}{4^{p}-4^{p-1}-\cdots-4^0}\angle B$，也可根據圖(5)、圖(7)、圖(9)的推

理概念推出此式，證畢。

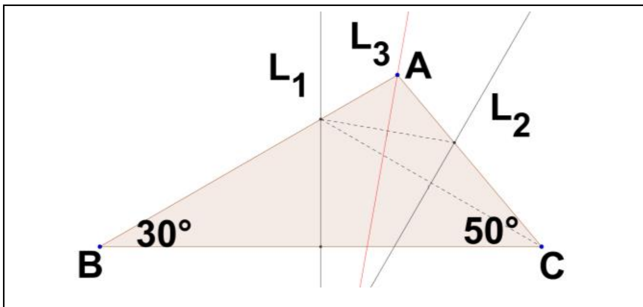
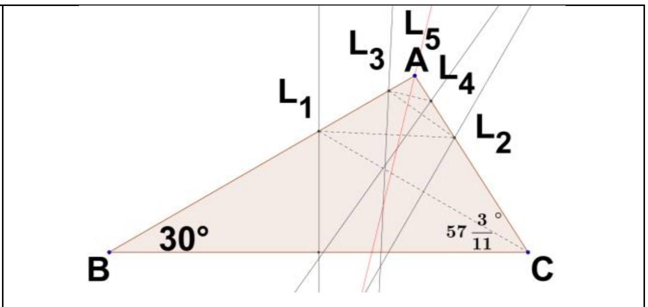
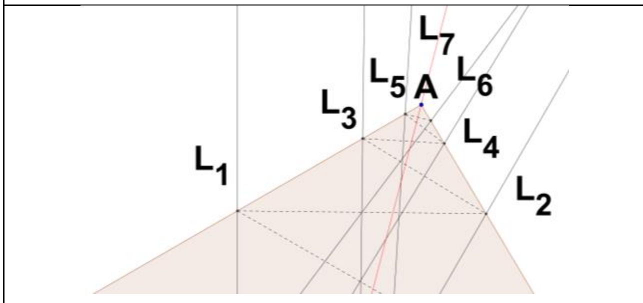
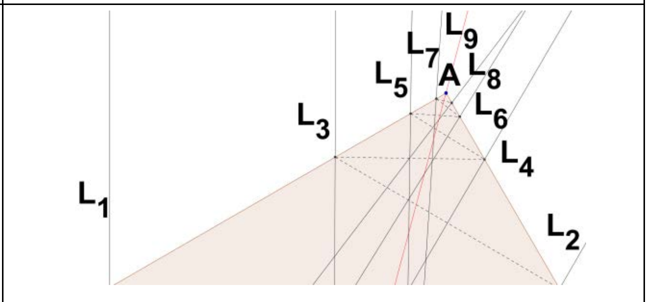


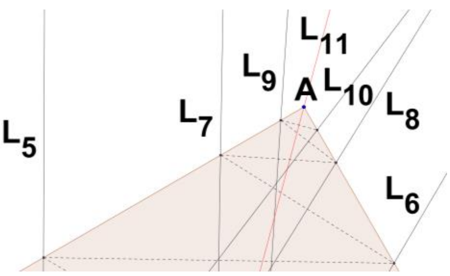
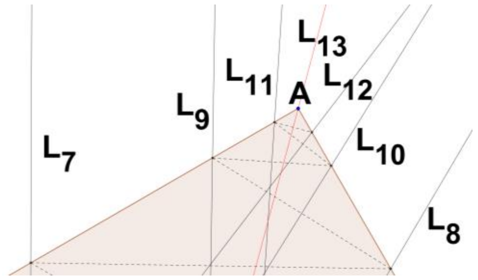
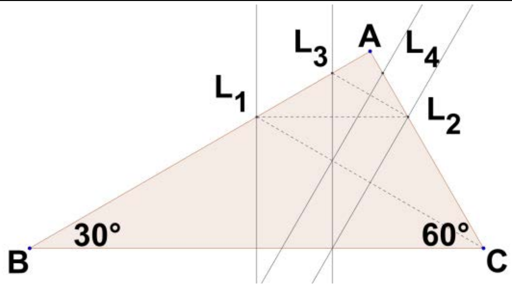
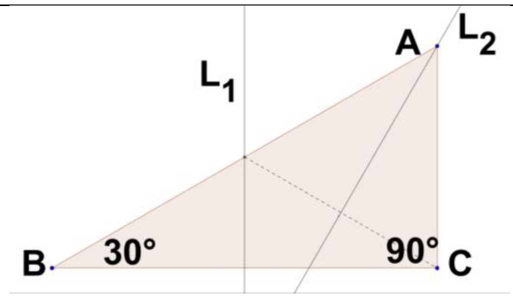
圖(10)

(二) 舉例驗證：以$\angle B = 30°$為例，為讓$\overline{BC}$的中垂線一左一右有序的輪替且至少能達到L_3時，依之前的證明當下$\angle C$的範圍涵蓋$3\angle B > \angle C \geq \frac{5}{3}\angle B$，即$90° > \angle C \geq 50°$。

我們接下來想要探討$\angle B = 30°$時，該$\angle C$範圍內的所有內角大約分布的狀況，並列舉一些例子作表如下：

表(一)

	
$\angle C = 50°$時，L_3通過A點	$\angle C = 57\frac{3}{11}°$時，$L_5$通過A點
	
$\angle C = 59\frac{13}{43}°$時，$L_7$通過A點	$\angle C = 59\frac{47}{57}°$時，$L_9$通過A點

	
$\angle C = 59\frac{653}{683}$°時，$L_{11}$通過A點	$\angle C = 59\frac{2701}{2731}$°時，$L_{13}$通過A點
	
$\angle C = 60°(2\angle B)$時，可作圖到$L_\infty$	$\angle C = 90°$時，L_2通過A點

更詳細的結果整理成表(二)

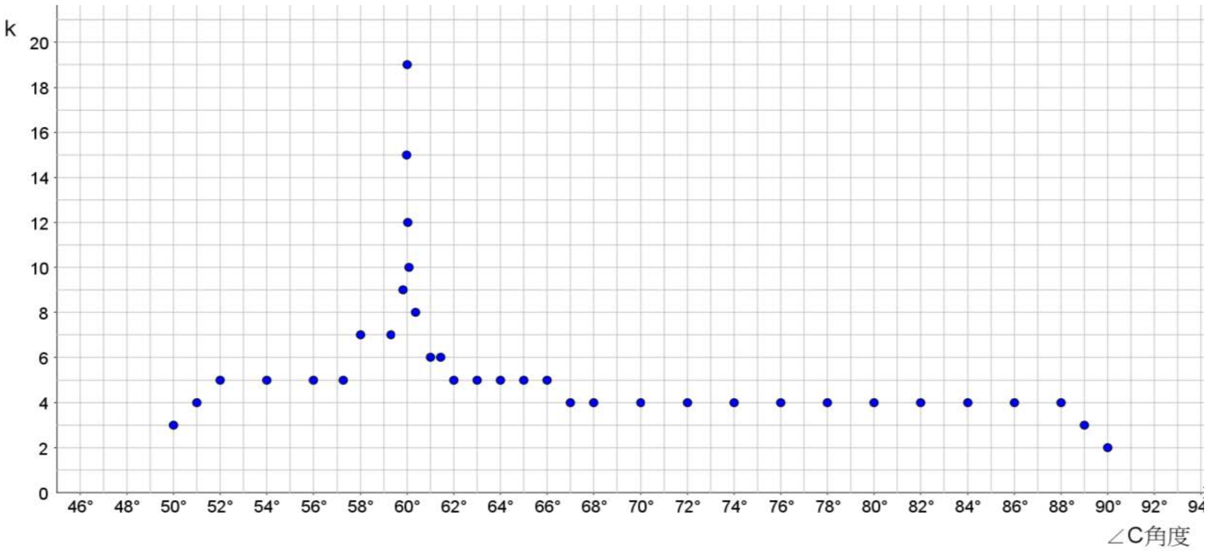
表(二)

$\angle B = 30°$					
$\angle C$度數	最多可達L_k	特性	$\angle C$度數	最多可達L_k	特性
$50°$	L_3	L_3通過A點	⋯	⋯	⋯
$52°$	L_5		$60\frac{2}{91}°$	L_{12}	L_{12}通過A點
$56°$	L_5		$60\frac{30}{341}°$	L_{10}	L_{10}通過A點
$57\frac{3}{11}°$	L_5	L_5通過A點	$60\frac{6}{17}°$	L_8	L_8通過A點
$58°$	L_7		$60\frac{3}{7}°$	L_6	L_6通過A點
$59\frac{13}{43}°$	L_7	L_7通過A點	$66°$	L_4	L_4通過A點
$59\frac{47}{57}°$	L_9	L_9通過A點	$90°$	L_2	L_2通過A點

$59\frac{2701}{2731}°$	L_{11}	L_{11}通過A點			
$59\frac{10864}{10923}°$	L_{13}	L_{13}通過A點			
…	…	…			
60°	L_{∞}	不存在任何 L 通過 A 點			

接著我們歸納出以下幾點特色：

1. 當$\angle B = 30°$，且$\angle C > \angle B$，並依中垂線連續作圖至少得到L_3以上時，則$\angle C$的範圍為$90° > \angle C \geq 50°$。
2. 承上，在$\angle C = 2\angle B$時(即$\angle C = 60°$)，L_k的k值可達無限大。
3. 承上，當$\angle C$從50°逐漸增加並逼近60°時，k值越來越大。
4. 承上，當$\angle C$從60°逐漸增加並逼近90°時，k值越來越小。
5. 畫出$\angle C$角度和所能達到最多的k值的分佈圖呈如下的”塔尖形”。



最小角$\angle B = 30°$，底邊1：1分段比之L_k分佈圖

6. 針對最小角$\angle B = 30°$的Δ ABC的底邊$\overline{BC}$，以其中垂線做左閃右躲遊戲的k 值塔尖形分佈圖，用白話文解釋如下：
   (1) 當取$\angle C = 2\angle B = 60°$時，出現了$L_{\infty}$，甲乙兩人一直左右閃躲，沒完沒了，此狀況就如本作品題目所說的“左閃右躲哪裡逃”。
   (2) 當取$\angle C$在50°到 60°之間時，隨著$\angle C$角度增大，發生閃躲之次數越多。
   (3) 當取$\angle C$在60°到 90°之間時，隨著$\angle C$角度增大，發生閃躲之次數越少。

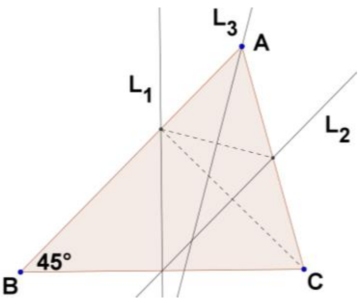
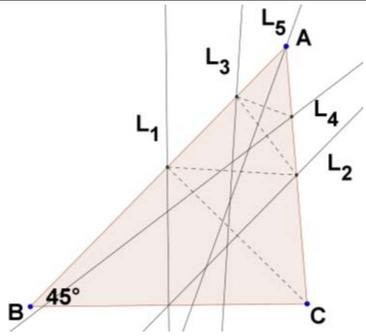
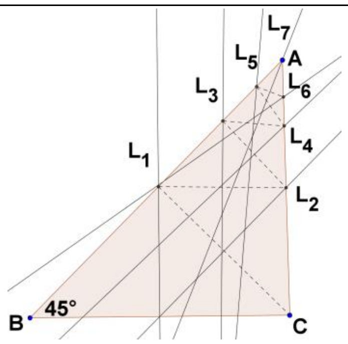
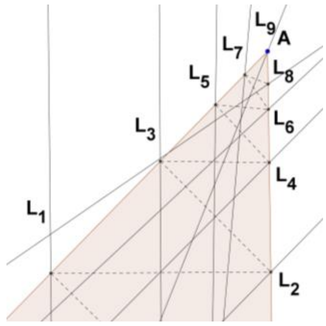
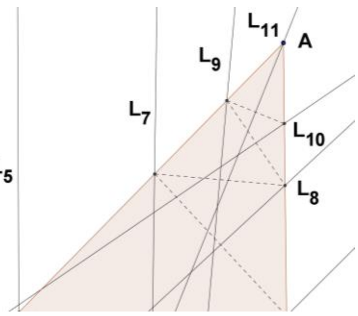
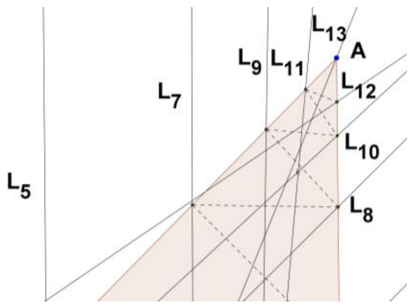
(三) 再舉$\angle B = 45°$為例，同樣的為讓$\overline{BC}$的中垂線能達到L_3時，經性質一計算得$\angle C$範圍

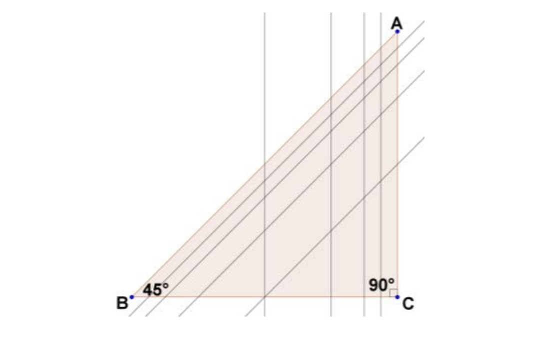
為$\frac{4^{2-1}-4^{2-2}}{4^{2-2}}\angle B > \angle C \geq \frac{4^{2-1}+4^{2-2}}{4^{2-1}-4^{2-2}}\angle B$，得$\frac{3}{1}\times 45° > \angle C \geq \frac{5}{3}\times 45°$，

化簡得$135° > \angle C \geq 75°$，也就是說當$\angle B = 45°$，配合前文範圍內的$\angle C$角度，必可作圖得到至少L_3(含L_3以上中垂線)。接下來仿照$\angle B = 30°$的作法，

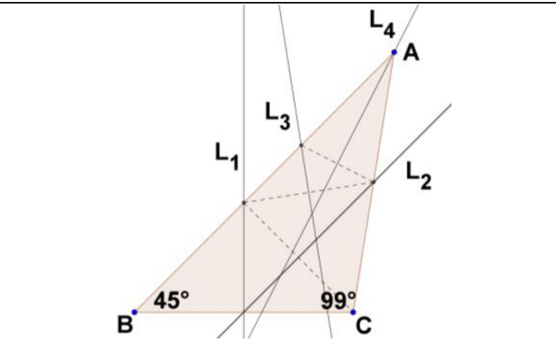
依序做出表(三)、表(四)及$\angle B = 45°$的分佈圖，結果如下：

表(三)

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\angle C = 75°$時，L_3通過A點</td><td>$\angle C = 85\frac{10}{11}°$時，$L_5$通過A點</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\angle C = 88\frac{41}{43}°$時，$L_7$通過A點</td><td>$\angle C = 89\frac{42}{57}°$時，$L_9$通過A點</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\angle C = 89\frac{638}{683}°$時，$L_{11}$通過A點</td><td>$\angle C = 89\frac{2686}{2731}°$時，$L_{13}$通過A點</td></tr>
</table>



$\angle C = 90°(2\angle B)$時，可作圖到$L_\infty$

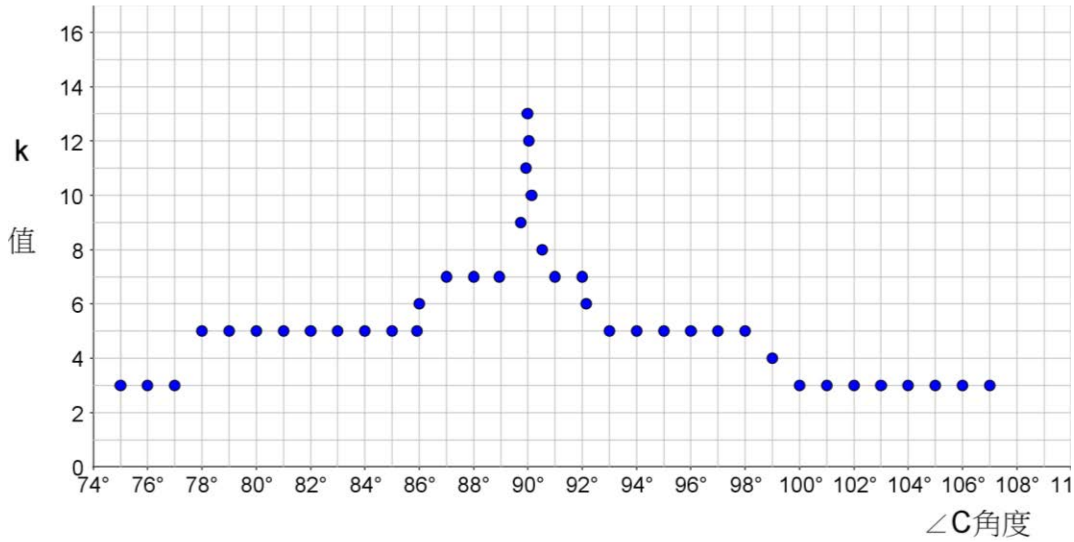


$\angle C = 99°$時，L_4通過A點

更詳細的結果整理成表(四)

表(四)

$\angle B = 45°$					
$\angle C$度數	最多可達L_k	特性	$\angle C$度數	最多可達L_k	特性
$75°$	L_3	L_3通過 A 點	…	…	…
$78°$	L_5		$90\frac{3}{91}°$	L_{12}	L_{12}通過 A 點
$84°$	L_5		$90\frac{45}{341}°$	L_{10}	L_{10}通過 A 點
$85\frac{10}{11}°$	L_5	L_5通過 A 點	$90\frac{9}{17}°$	L_8	L_8通過 A 點
$87°$	L_7		$92\frac{1}{7}°$	L_6	L_6通過 A 點
$88\frac{41}{43}°$	L_7	L_7通過 A 點	$99°$	L_4	L_4通過 A 點
$89\frac{42}{57}°$	L_9	L_9通過 A 點	$135°$		不存在此三角形
$89\frac{638}{683}°$	L_{11}	L_{11}通過 A 點			
$89\frac{2686}{2731}°$	L_{13}	L_{13}通過 A 點			
…	…	…			
$90°$	L_∞	不存在任何 L 通過 A 點			



$\angle B = 45°$的k值分佈圖

說明：比較$\angle B = 30°$和$\angle B = 45°$的圖表內容，得

1. 當$\angle C$越靠近$2\angle B$時，k 值會越大。

2. 在$3\angle B \geq \angle C \geq \frac{5}{3}\angle B$之間時，所取的$\angle C$越接近$3\angle B$ 或$\frac{5}{3}\angle B$時，k值會越小。

3. 兩者的k值分佈圖都呈塔尖形，在$\angle C = 2\angle B$時，兩人左閃右躲沒完沒了。

十一、擴充觀察三角形一邊至三邊上的L_k。

接下來將研究方向擴充至同時觀察Δ各邊上的中垂線在左閃右躲的概念下的數量分佈、限制或共點幾何現象……等。

在給例子做圖說明以前，先聲明在三邊上做閃躲時，是無法同時要求先左再右的，只能要求左右輪替或右左輪替即可。又若遇到等腰Δ時，底邊上的第一條中垂線立即撞到頂點，一次閃躲都沒有，所以我們盡量不討論等腰Δ的狀況。

(一) 先給一個Δ，三內角各為$35° - 70° - 75°$為例，同樣的$\angle B$為最小角，依操作觀察

1. 在$\overline{BC}$上，$\because \angle B = 35°$，$\angle C = 70°$，$\angle C = 2\angle B$，依據性質一，可做中垂線至L_∞，我們以$\overline{BC}L_\infty$表示。

2. 在$\overline{AB}$上，$\because \angle B = 35°$，$\angle A = 75°$，$\frac{11}{5}\angle B > \angle C \geq \frac{21}{11}\angle B$，$\frac{11}{5}\angle B > \angle A \geq \frac{21}{11}\angle B$，

   $77° > 75° \geq 66\frac{9}{11}°$，$\therefore$由性質一判定僅可達$L_5$。

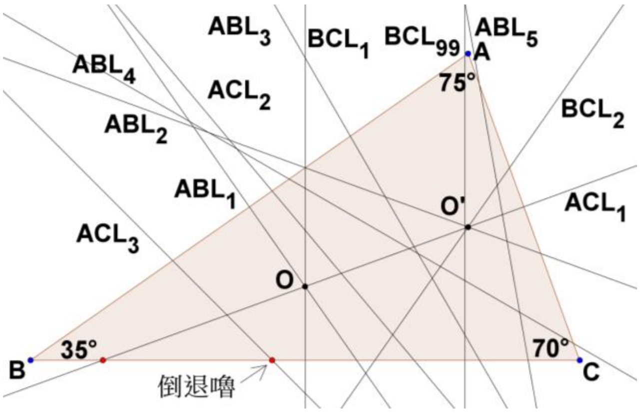
3. 在$\overline{AC}$上，$\because \angle C = 70$，$\angle A > \angle C$，$\therefore$依性質一，必有L_1，接著
   若欲達L_2，則由性質一計算得$3 \times 70^\circ > \angle A \geq 1 \times 70^\circ$，即$210^\circ > \angle A \geq 70^\circ$(合)，

   若欲達L_3，則$3 \times 70° > \angle A \geq \frac{5}{3} \times 70°$，即$210° > \angle A \geq 116\frac{2}{3}°$

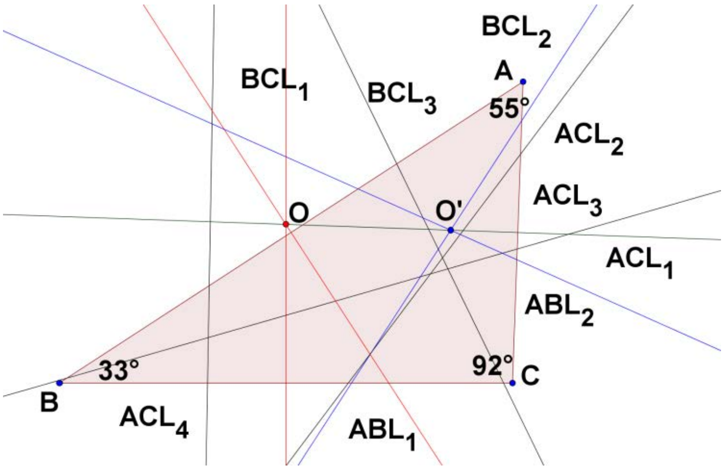
(但$\angle A = 75°$不合，如圖L_3雖然有交在$\overline{BC}$上，卻倒退嚕)，

綜合上述，在$\overline{AC}$上，最多可做出L_2，我們以$\overline{AC}L_2$表示。

4. 除了各邊之L_1共點O外，如下圖，也發現三邊的左閃右躲中垂線中似乎存在其它的共點，如O'點，是湊巧的嗎？



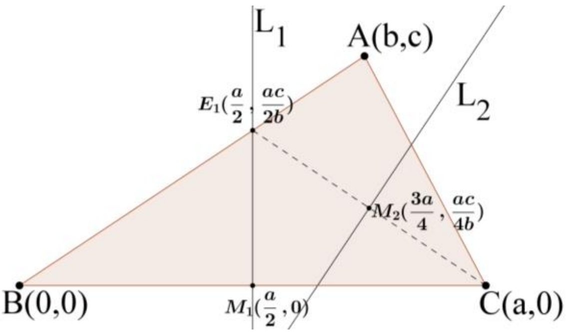
(二) 再給一個△，$\angle A = 55°$、$\angle B = 33°$、$\angle C = 92°$，如下圖。



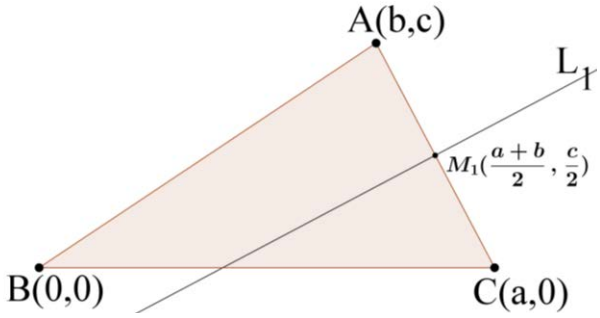
1. 在$\overline{BC}$上，能做到$\overline{BC}L_4$。
2. 在$\overline{AC}$上，能做到$\overline{AC}L_4$。
3. 在$\overline{AB}$上，能做到$\overline{AB}L_2$(L_3通過C點)。
4. 我們也發現，除了各邊上的L_1共點外，$\overline{BC}L_2$、$\overline{AC}L_1$、$\overline{AB}L_2$亦共點於O'

性質二：

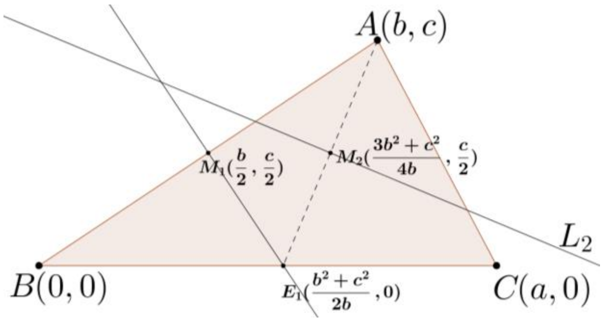
若△ ABC的三邊依前文連續中垂線的方法及三內角大小條件操作，則發現$\overline{BC}$的L_2、$\overline{AB}$的L_2和$\overline{AC}$的L_1三線必共點。令此共點為P，其中$\angle C > \angle B$、$\angle A > \angle B$。如圖(11)到圖(13)



圖(11)



圖(12)



圖(13)

證明：

(一)　令$\triangle ABC$三頂點座標分別為

$A(b,c)$、$B(0,0)$、$C(a,0)$

又$\angle C>\angle B$、$\angle A>\angle B$

得$E_1(\frac{a}{2},\frac{ac}{2b})$

$\because \overleftrightarrow{E_1C}$的斜率為$-\frac{c}{b}$

將$M_2(\frac{3a}{4},\frac{ac}{4b})$代入$L_2$，求得

$$k=\frac{ac^2-3ab^2}{4bc}$$

則L_2：$y=\frac{b}{c}x+\frac{ac^2-3ab^2}{4bc}$

即BCL_2的方程式為

$$y=\frac{b}{c}x+\frac{ac^2-3ab^2}{4bc}$$

$\therefore$設L_1：$y=\frac{a-b}{c}x+k$

將$M_3\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$代入$L_1$

求得$k=\frac{c^2-a^2+b^2}{2}$

則L_1：$y=\frac{a-b}{c}x+\frac{c^2-a^2+b^2}{2}$

(二) $\because \overleftrightarrow{AB}$的斜率為$\frac{c}{b}$

$\therefore$設L_1：$y=-\frac{b}{c}x+k$

將$M_4(\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ 代入

求得$k=\frac{b^2+c^2}{2c}$

則L_1：$y=-\frac{b}{c}x+\frac{b^2+c^2}{2c}$

得$E_1(\frac{b^2+c^2}{2b},0)$

$\therefore$ 設L_2：$y=\frac{c^2-b^2}{2bc}x+k$

將$M_2(\frac{3b^2+c^2}{4b},\frac{c}{2})$代入$L_2$

得$k=\frac{2b^2c^2+3b^4-c^4}{8b^2c}$

則L_2：$y=\frac{c^2-b^2}{2bc}x+\frac{2b^2c^2+3b^4-c^4}{8b^2c}$

即ABL_2的方程式為

$$y=\frac{c^2-b^2}{2bc}x+\frac{2b^2c^2+3b^4-c^4}{8b^2c}$$

(三) 求BCL_2、ACL_1的交點P

$$\begin{cases} y=\frac{b}{c}x+\frac{ac^2-3ab^2}{4bc}\cdots ① \\ y=\frac{a-b}{c}x+\frac{c^2-a^2+b^2}{2c}\cdots ② \end{cases}$$

①-②

$$0=\frac{2b-a}{c}x+\frac{ac^2-3ab^2-2bc^2+2ba^2-2b^3}{4bc}$$

$\therefore x=\frac{ac^2-3ab^2-2bc^2+2ba^2-2b^3}{4b(a-2b)}$，將 x 代入①式求 y

$$y=\frac{b}{c}\left(\frac{ac^2-3ab^2-2bc^2+2ba^2-2b^3}{4b(a-2b)}\right)+\frac{ac^2-3ab^2}{4bc}$$

$$=\frac{b(ac^2-3ab^2-2bc^2+2ba^2-2b^3)}{4cb(a-2b)}+\frac{(ac^2-3ab^2)(a-2b)}{4bc(a-2b)}$$

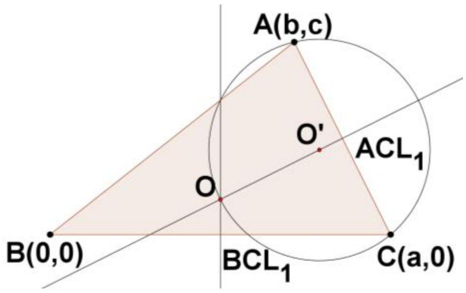
$$=\frac{abc^2-3ab^3-2b^2c^2+2b^2a^2-2b^4+a^2c^2-2abc^2-3a^2b^2+6ab^3}{4bc(a-2b)}$$

$$=\frac{-abc^2+3ab^3-2b^2c^2-a^2b^2+a^2c^2-2b^4}{4bc(a-2b)}$$

(四) 將其交點P座標代入ABL_2的方程式驗證，得知P點亦在ABL_2上，故得證。

性質三：

承性質二，設O′點即為$\overline{ABL_2}$、$\overline{BCL_2}$和$\overline{ACL_1}$的交點，O點為$\overline{ABL_1}$、$\overline{BCL_1}$和$\overline{ACL_1}$的交點，則$\overline{O'A}=\overline{O'C}=\overline{O'O}$，如圖(14)。



圖(14)

證明：

$\because$ BCL_1的方程式$x=\frac{a}{2}\cdots$①

ACL_1的方程式

$y=\frac{a-b}{c}x+\frac{c^2-a^2+b^2}{2c}\cdots$②

由①代入②

解得$y=\frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

$\therefore\triangle ABC$的外心$O(\frac{a}{2},\frac{b^2+c^2-ab}{2c})$

由前文已知BCL_2、ABL_2、ACL_1的交點P座標為

$(\frac{ac^2-3ab^2-2bc^2+2a^2b-2b^3}{4b(a-2b)},\frac{-abc^2+3ab^3-2b^2c^2-a^2b^2+a^2c^2-2b^4}{4bc(a-2b)})$

經驗證得知

$\overline{O'A}=\overline{O'C}=\overline{O'O}$，故$O'$點為A、O、C三點共圓的圓心。

十二、 哪些$\triangle$的各邊閃躲次數能同時達到L_2或L_3或L_4或更高？請看接下來我們的發現！

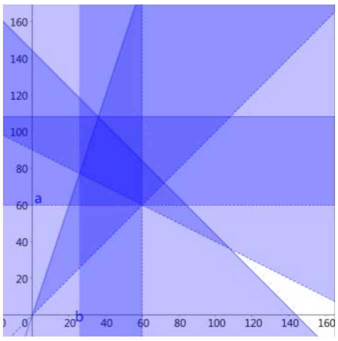
在上文之性質二及性質三中，關於$\triangle ABC$之三內角大小，僅須知道$\angle B$是最小角即可，但為了尋找更高階的O'點，例如三邊上的L_3、L_4、L_2是否會共點，我們就須要把三內角的大、中、小都確定，因此接下來我們規定$\angle B$最小且C最大，

即$\angle C>\angle A>\angle B$。

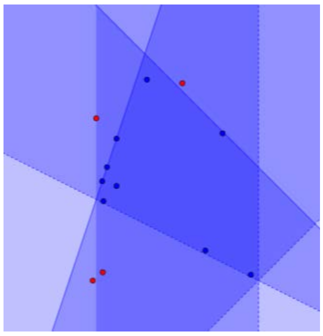
性質四：

若令$\triangle ABC$的最大角為$\angle C$，最小角為$\angle B$，其中$\angle B=b°$，$\angle C=c°$，其三邊依前文連續閃躲操作中垂線的方法操作且欲使三邊都能達到L_2以上，則$\angle B$和$\angle C$要同時滿足下列不等式，$60>b\geq\frac{180}{7}$、$108\geq c>60$、$144\geq b+c$、$c>\frac{180-b}{2}$及$3b\geq c>b$。又將滿足這些

不等式的解作圖如下，設 x 軸表示$\angle B$的數值，y 軸表示$\angle C$的數值，而圖(15)中，最深色部分為上述不等式的解，是塊四邊形，如圖(15)放大。這表示在這塊最深色的四邊形中的所有點(b, c)都能使$\triangle ABC$三邊同時達到L_2以上。



圖(15)



圖(15-1)，圖(15)的放大

證明：

令$\angle C > \angle A > \angle B$，由性質一可知，若要有$L_2$，則角度範圍如下

$$\begin{cases} 3\angle B \geq \angle C > \angle B \ldots ① \\ 3\angle A \geq \angle C > \angle A \ldots ② \\ 3\angle B \geq \angle A > \angle B \ldots ③ \end{cases}$$

①+③

$= 6\angle B \geq \angle A + \angle C > 2\angle B$

$\Rightarrow 6\angle B \geq 180 - \angle B \rightarrow 2\angle B$

$\Rightarrow 60 > \angle B \geq \frac{180}{7}$

①+②

$= 3(\angle A + \angle B) \geq 2\angle C > \angle A + \angle B$

$\Rightarrow 3(180 - \angle C) \geq 2\angle C > 180 - \angle C$

$\Rightarrow 108 \geq \angle C > 60 \ldots ④$

④代入②

$= 3\angle A \geq 2\angle C$

$\Rightarrow 180 - 36 \geq 180 - \angle A$

$\Rightarrow 144 \geq \angle B + \angle C$　得證

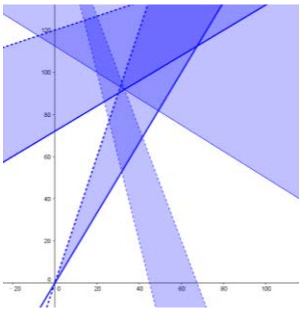
發現：

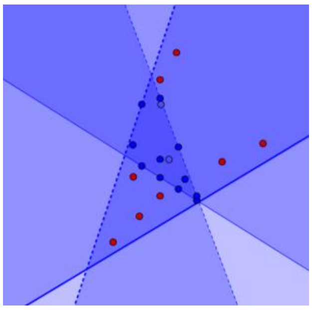
我們發現除了$\overline{AB}L_1$、$\overline{BC}L_1$、$\overline{AC}L_1$共點外，另外有$\overline{AB}L_2$、$\overline{BC}L_2$、$\overline{AC}L_1$三線亦共點。

性質五：

在$\triangle ABC$中，取最大角為$\angle C$，最小角為$\angle B$，其三邊依前文連續操作中垂線的方法操作，若欲使其三邊能達到L_3以上，則只要同時滿足下列三條不等式，$c \geq \frac{900-b}{8}$、$3b > c > \frac{5}{3}b$

及$-4b+180<c\leq\frac{-8}{3}b+180$即可。如同性質四將同時滿足這三條不等式的解$(b,c)$繪出，如圖(16)，是塊深色的三角形，將它放大在圖(16-1)中，其中最深色的三角形內的所有點都能使三邊至少達到L_3以上。





圖(16)　　圖(16-1)，圖(16)的放大

證明：

$$\begin{cases}3\angle B>\angle C\geq\frac{5}{3}\angle B\\3\angle B>\angle A\geq\frac{5}{3}\angle B\\3\angle A>\angle C\geq\frac{5}{3}\angle A\end{cases}$$

(一)　$\angle C\geq\frac{5}{3}\angle A$

$\angle C+\frac{5}{3}\angle B+\frac{5}{3}\angle C\geq180\times\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}\angle B+\frac{8}{3}\angle C\geq300$

$5\angle B+8\angle C\geq900$

$\angle C\geq\frac{900-5\angle B}{8}$

(二)　$3\angle B>\angle A\geq\frac{5}{3}\angle B$

$3\angle B>180-(\angle B+\angle C)\geq\frac{5}{3}\angle B$

$-3\angle B<\angle B+\angle C-180\leq\frac{-5}{3}\angle B$

$-4\angle B+180<\angle C\leq\frac{-8}{3}\angle B+180$

(三)　$3\angle B>\angle C\geq\frac{5}{3}\angle B$　得證

(四)　舉例驗證

將其中一個可三邊達到L_3的$\angle B$和$\angle C$的座標(32,93)代入上述三個不等式

1.　$\angle B=32°$、$\angle C=93°$

$93\geq\frac{900-32}{8}$

2.　$-128+180<93\leq\frac{-256}{3}+180$

$52<93\leq\frac{284}{3}$ 成立

$93 \geq 108.5$ 成立

3. $96 > 93 \geq \frac{160}{3}$ 成立

性質六：

在$\triangle ABC$中，設$\angle B$為最小角，則依中垂線閃躲作圖，必不可能出現三邊同時都操作出L_4以上(含)。

證明：假設三邊都能操作到L_4，且$\angle C > \angle B$，$\angle A > \angle B$

接著觀察$\overline{BC}$，依性質一，當要到達L_4，則必$\frac{11}{5}\angle B > \angle C > \frac{5}{3}\angle B \ldots\ldots$①

再觀察$\overline{AB}$，依性質一，因$\angle A > \angle B$，當要到達L_4，

則必$\frac{11}{5}\angle B > \angle A > \frac{5}{3}\angle B \ldots\ldots$②

將①+②得$\frac{22}{5}\angle B > \angle C + \angle A > \frac{10}{3}\angle B$

化簡得$\frac{22}{5}\angle B > 180° - \angle B > \frac{10}{3}\angle B$

再化簡得$41\frac{7}{13}° > \angle B > 33\frac{1}{3}°$，我們發現不論在這範圍內取任何度數當作$\angle B$都無法使①、②式同時成立，也就是說無法達到$L_4$，這和假設矛盾，因此得證永遠無法使三邊同時操作出$L_4$以上(含)。驗證如下：

當我們在$41\frac{7}{13}° > \angle B > 33\frac{1}{3}°$任取一數值當$\angle B$的度數，都能保證$\overline{BC}$邊和$\overline{BA}$邊都達到$L_4$以上(含)，接下來要驗證$\overline{AC}$邊是否必能達$L_4$以上？

我們任取$\angle B = 40°$分別代入①、②兩式得

$$\begin{cases} 88° > \angle C > 66\frac{2}{3}° \ldots\ldots ③ \\ 88° > \angle A > 66\frac{2}{3}° \ldots\ldots ④ \end{cases}$$

在$\overline{AC}$邊上檢驗時，因不知$\angle A$和$\angle C$的大小所以分成以下三種狀態驗證：

(1) $\angle A > \angle C$　(2) $\angle A < \angle C$　(3) $\angle A = \angle C$

當$\angle A > \angle C$時，依③、④式範圍取$\angle A = 71°$、$\angle C = 69°$，依性質一，欲達L_4，須$\frac{11}{5} \times 69° > \angle A > \frac{5}{3} \times 69°$，化簡得$151\frac{4}{5}° > \angle A > 115°$，這與④式矛盾不合。

當$\angle A < \angle C$時，依③、④式範圍取$\angle A = 69°$、$\angle C = 71°$，依性質一，欲達L_4，須

$\frac{11}{5}\times 69° > \angle C > \frac{5}{3}\times 69°$，化簡得$151\frac{4}{5}° > \angle C > 115°$，這也與③式矛盾不合。

當$\angle A = \angle C$時，$\overline{BA} = \overline{BC}$成等腰△，依性質一知只能做到$\overline{AC}L_1$，不合。

經過上面的分析知，不論在③、④式內取任何∠A 和∠C，永遠都無法使$\overline{AC}$邊達L_4以上(含)。結論是任何△恆無法使三邊都同時達L_4以上(含)。

性質七：

在$\angle B < \angle A < \angle C$且三邊皆能操作至$L_2$的情況下，$O'^{1:1}_{221}$和△ABC的內外位置關係如下：

$$\begin{cases}\text{當}\angle B < 45°\text{時，}O'^{1:1}_{221}\text{在△ABC內部，如圖}(17-1)\text{、圖}(17-2)\\ \text{當}\angle B = 45°\text{時，}O'^{1:1}_{221}\text{在}\overline{AC}\text{邊上中點，如圖}(17-4)\\ \text{當}\angle B > 45°\text{時，}O'^{1:1}_{221}\text{在△ABC外部，如圖}(17-3)\end{cases}$$

證明：

由性質三知：

$\because \overline{O'A} = \overline{O'C} = \overline{O'O}$

$\therefore O'$點為△OAC的外心，依外心和∠AOC的角度關係知

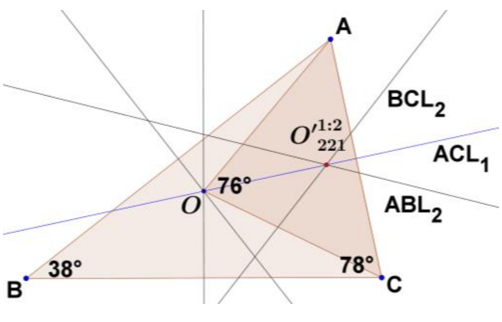
(1)當$\angle AOC = 90°$時，外心O'位在$\overline{AC}$上。

(2)當$\angle AOC < 90°$時，外心位在$\overline{AC}$內側，又$\because$ O在$\overline{AC}L_1$上 $\therefore \overline{OA} = \overline{OC}$，即△AOC必為銳角△，$\therefore O'$點必在△AOC內部，也就是說$O'$點必在△ABC的內部。

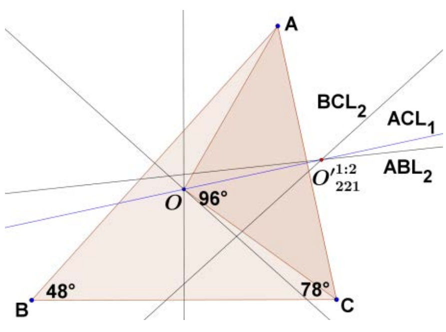
(3)當$\angle AOC > 90°$時，O'點位在$\overline{AC}$的外側，即O'點位在△ABC的外側。

又由O點是△ABC的外心知：$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

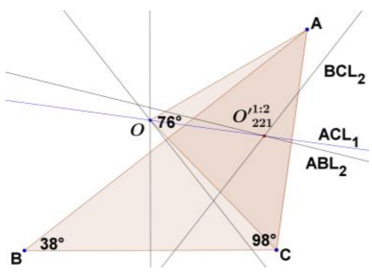
$$\text{綜合上述可推得}\begin{cases}\text{當}\angle B < 45°\text{時，}O'\text{點恆在△ABC 內部}\\ \text{當}\angle B = 45°\text{時，}O'\text{點恆在△ABC 的}\overline{AC}\text{邊上}\\ \text{當}\angle B > 45°\text{時，}O'\text{點恆在△ABC 的外部}\end{cases}$$



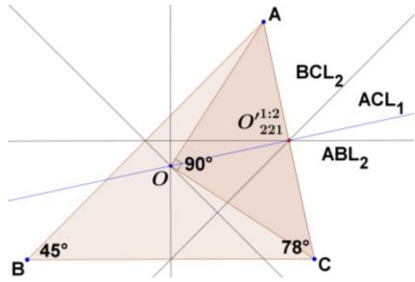
圖(17-1) $\angle B < 45°$，銳角△



圖(17-3) $\angle B > 45°$



圖(17-2) $\angle B < 45°$，鈍角Δ

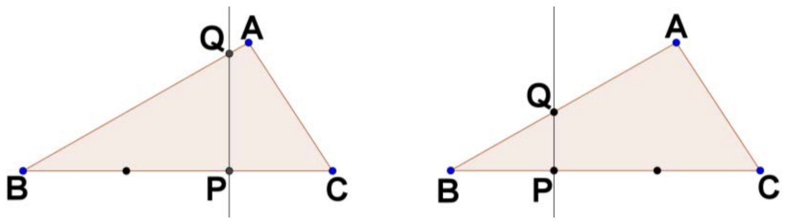


圖(17-4) $\angle B = 45°$

十三、 在單邊$1:2$分點處，作左閃右躲垂線遊戲，當給定$\angle B$後，欲達L_k時，$\angle C$的取角範圍探討。

在左閃右躲的遊戲中，設$\angle B < \angle C$，P為$\overline{BC}$的三等分點之一

$\therefore \overline{BP} : \overline{PC}$為$1:2$或$2:1$，如圖(18-1)。



圖(18-1)

若取$\overline{BP} : \overline{PC} = 2:1$時，其$\overline{BCL_1}$可能通過A點或左閃及右躲，情況較複雜，以後再討論。

若取$\overline{BP} : \overline{PC} = 1:2$時，其$\overline{BCL_1}$較易左閃，和$\overline{AB}$相交於Q，Q 在 A、B之間，因此我們先探討$1:2$這部分。其餘另兩種可能，留待以後探討。接下來開始探討如何達到$\overline{BCL_1}$、$\overline{BCL_2}$、……等的條件。

(一) Δ ABC中$\angle B < \angle C$，$\overline{BP} : \overline{PC} = 1:2$，$\overline{PQ} \perp \overline{BC}$，則必有$\overline{BCL_1}$，

即$180° - \angle B > \angle C > \angle B$。

(二) 在$\overline{BP} : \overline{PC} = 1:2$，$\overline{PQ} \perp \overline{BC}$，在給定$\angle B$後，找出$\angle B$和$\angle C$的相關範圍，使$\overline{BCL_k}$能達到$L_1$、$L_2$。

性質八：

$1:2$垂線一左一右夾擊時，在給定$\angle B$後，可操作至$\overline{BCL_1}$、$\overline{BCL_2}$時，$\angle C$的取角範圍為：

$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) < \angle C < \tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)$$

證明:

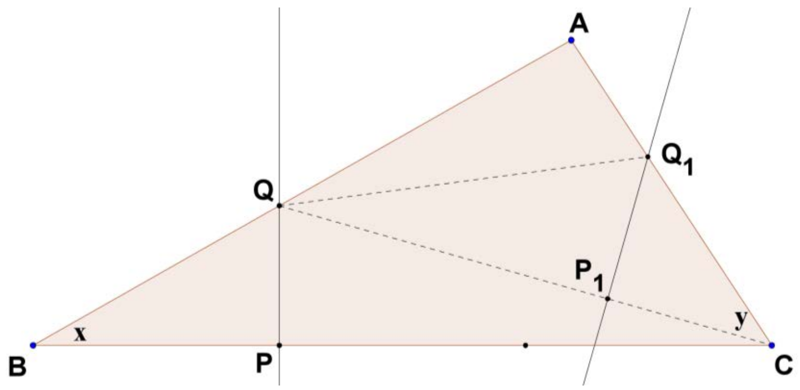
1. 設$\angle B = x$，$\angle ACQ = y$，如圖(18-2)，為了讓Q點介於 A、B 之間(左閃)，明顯的要使$\angle QCB < \angle ACB \cdots ①$

2. $\because \begin{cases} \overline{PQ} = \overline{BP} \times \tan x \\ \overline{PQ} = \overline{CP} \times \tan(\angle QCP) = 2\overline{BP} \times \tan(\angle QCP) \end{cases}$

$\therefore \tan(\angle QCP) = \frac{1}{2}\tan x$

$\therefore \angle QCP = \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)$

代回①得$\angle C > \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)$ … …可達L_1



圖(18-2)

3. 在$\triangle AQC$中，
作$\overline{CP_1}:\overline{P_1Q} = 1:2$
作$\overline{P_1Q_1} \perp \overline{QC}$交$\overline{AC}$於$Q_1$(右躲)
連$\overline{QQ_1}$，如圖(18-3)
在$\triangle Q_1QC$中

$\because \begin{cases} \overline{P_1Q_1} = \overline{P_1C} \times \tan y \\ \overline{P_1Q_1} = \overline{P_1Q} \times \tan(\angle Q_1QC) = 2\overline{P_1C} \times \tan(Q_1QC) \end{cases}$

$\therefore \tan(\angle Q_1QC) = \frac{1}{2}\tan y$

$\angle Q_1QC = \tan^{-1}(\frac{\tan y}{2})$，$\therefore \angle AQQ_1 = \tan^{-1}(\frac{\tan y}{2}) + y$

$\angle AQ_1Q = \tan^{-1}(\frac{\tan x}{2}) - \tan^{-1}\left(\frac{\tan y}{2}\right) + x$

4. 欲達到$\overline{BC}L_2$需$\angle Q_1QC < \angle AQC$，即須$\tan^{-1}\left(\frac{\tan y}{2}\right) < x + \tan^{-1}(\frac{\tan x}{2})$ … …②

設$\tan\alpha = \frac{\tan x}{2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{\tan x}{2}$代回②

得$\tan^{-1}\left(\frac{\tan y}{2}\right) < x + \alpha$

左右加上tan 函數後

得$\frac{\tan y}{2} < \tan(x+\alpha)$

$\Rightarrow \frac{\tan y}{2} < \frac{\tan x+\tan\alpha}{1-\tan x\times\tan\alpha}$

$\Rightarrow \frac{\tan y}{2} < \frac{\tan x+\frac{\tan x}{2}}{1-\tan x\times\frac{\tan x}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\tan y}{2} < \frac{\frac{3}{2}\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}$

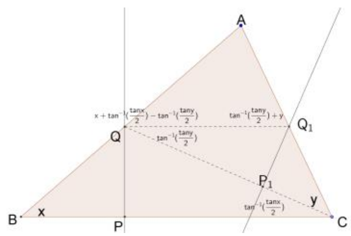
$\Rightarrow \tan y < \frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}$

$\Rightarrow y < \tan^{-1}(\frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x})$

$\Rightarrow y+\tan^{-1}(\frac{\tan x}{2}) < \tan^{-1}(\frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x})+\tan^{-1}(\frac{\tan x}{2})$

$\Rightarrow \angle C < \frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}+\tan^{-1}(\frac{\tan x}{2})$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{2}\right) < \angle C \leq \frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}+\tan^{-1}(\frac{\tan x}{2})$，(等號表示剛好通過A點，也算達到$L_2$)



圖(18-3)

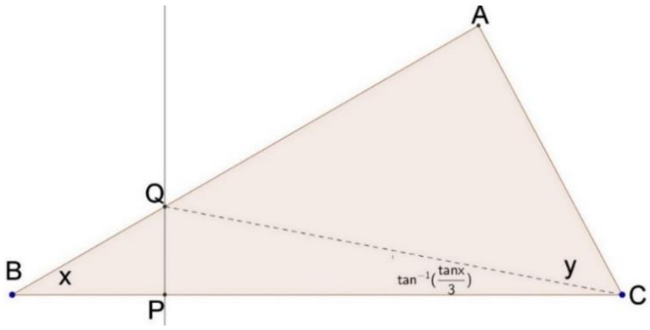
十四、 在單邊1：3分點處，做左閃右躲遊戲，當給定$\angle B$後，欲達到L_k時，$\angle C$的取角範圍探討。

如同前文做單邊1：2的分段比，令$\angle B$為最小角且$\angle B = x$，$\angle ACQ = y$，其中$\overline{BC}$的第一條垂線$\overleftrightarrow{PQ}$交$\overline{BC}$於P，交$\overline{BA}$於Q，連$\overline{CQ}$，接著再在$\overline{CQ}$上做分段比1：3，分點為P_1，過P_1，使$\overline{Q_1P_1}$交$\overline{AC}$於Q_1，$\overleftrightarrow{P_1Q_1}$即為$L_2$，依此法繼續左閃右躲，會得到$\overline{BC}L_3$、$\overline{BC}L_4$、$\overline{BC}L_5$、⋯等。

性質九：

1：3垂線一左一右夾擊時，在給定$\angle B$後，欲達到$\overline{BC}L_1$及$\overline{BC}L_2$時，$\angle C$的取角範圍為：

$$\tan^{-1}\left(\frac{4\tan x}{1-\frac{1}{3}\tan^2 x}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right) \geq \angle C > \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right)$$



圖(19)

證明：

(一) 如圖(19)令$\angle ABC = x°$、$\angle ACQ = y°$

$\because \overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 3$

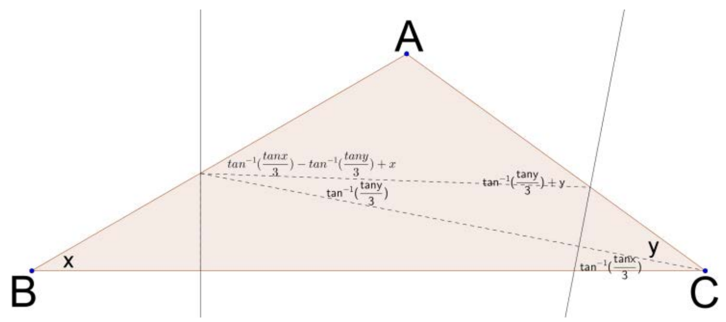
$\therefore \tan x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}}$

$\tan \angle QCP = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PQ}}{3\overline{PB}}$

$= \frac{1}{3} \times \tan x = \frac{\tan x}{3}$

$\therefore \angle QCP = \tan^{-1}(\frac{\tan x}{3})$

則L_1條件:$\angle C > \tan^{-1}(\frac{\tan x}{3})$



圖(20)

(二) 如圖(20)

$\because \angle AQC = \angle ABC + \angle QCP$

$= x + \tan^{-1}(\frac{\tan x}{3}) \ldots\ldots$①

又$\because$ 欲達L_2，$\therefore$ 須$\angle AQC > \angle Q_1QC$

即$\angle AQC > \tan^{-1}(\frac{\tan y}{3}) \ldots\ldots$②

①代入②

$\therefore \tan^{-1}(\frac{\tan x}{3}) + x > \tan^{-1}(\frac{\tan y}{3})$

設$\tan\alpha = \frac{\tan x}{3}$

$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\frac{\tan x}{3})$　代回上式

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\tan y}{3} < \alpha + x$

$\Rightarrow \frac{\tan y}{3} < \tan(\alpha + x)$

$\Rightarrow \frac{\tan y}{3} < \frac{\tan\alpha + \tan x}{1 - \tan\alpha\tan x}$

$\Rightarrow \frac{\tan y}{3} < \frac{\frac{4}{3}\tan x}{1 - \frac{1}{3}\tan^2 x}$

$\Rightarrow \tan y < \frac{4\tan x}{1 - \frac{1}{3}\tan^2 x}$

$\Rightarrow y < \tan^{-1}(\frac{4\tan x}{1 - \frac{1}{3}\tan^2 x})$

則推得L_2條件 如下：

$\angle \mathbf{C} \leq \tan^{-1}(\frac{4\tan x}{1 - \frac{1}{3}\tan^2 x}) + \tan^{-1}(\frac{\tan x}{3})$，(等號表示剛好通過A點，也算達到$L_2$)

伍、結論

一、在左閃右躲的模型中，$\overline{AB} > \overline{AC}$，甲位在$\overline{BC}$中點D點，乙位在$\Delta$的頂點A，令左閃右躲所作出中垂線依次為$L_1$、$L_2$、$L_3 \ldots\ldots L_k$，則在給定$\angle B$後，一所要求達到的$L_k$分成k是奇數或是偶數，確定$\angle C$的取角範圍。

(一) 因模型限定$\angle C > \angle B$，所以在給定$\angle B$後，只要取$\angle C$落在$180° - \angle B > \angle C > \angle B$範圍內即可得到$L_1$。

(二) 欲達到L_{2n-1}，$n \geq 2$，則在給定$\angle B$後，取$\angle C$落在

$\frac{4^{n-1} - 4^{n-2} - 4^{n-3} - \ldots - 4^{n-k}}{4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4^{n-k}} \angle B > \angle C \geq \frac{4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4^{n-k}}{4^{n-1} - 4^{n-2} - 4^{n-3} - \ldots 4^{n-k}} \angle B$**的範圍內即可達成。**

(三) 欲達到L_{2n}，$n \geq 1$，則在給定$\angle B$後，取$\angle C$落在

$\frac{4^{n} - 4^{n-1} - 4^{n-2} - 4^{n-3} - \ldots - 4^{n-k}}{4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4^{n-k}} \angle B > \angle C \geq \frac{4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4^{n-k}}{4^{n-1} - 4^{n-2} - 4^{n-3} - \ldots - 4^{n-k}} \angle B$**的範圍內即可達成。**

二、在性質一的條件及公式中，在給定某一個$\angle B$並指定達到的L_k後，所得到的$\angle C$範圍中，每個$\angle C$所能達到的L_k分布圖並非呈均勻狀而是呈塔尖形，例如：

(一) 當$\angle B = 30°$，依性質一中垂線連續閃躲作圖並至少欲得L_3上時，

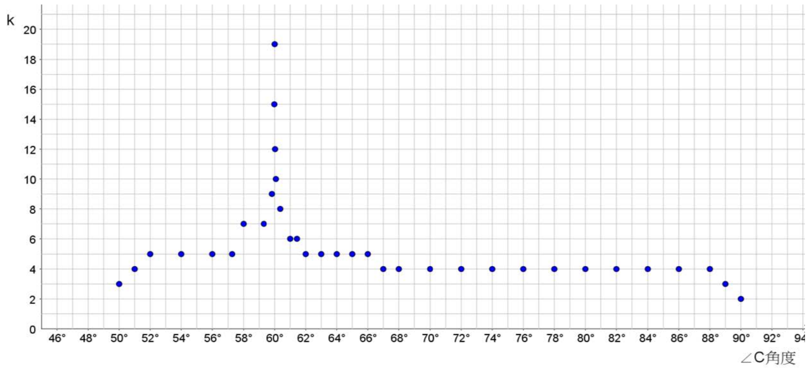
則$\angle C$的範圍為$90° > \angle C \geq 50°$。

(二) 承上，在$\angle C > 2\angle B$時(即$\angle C = 60°$)，L_k的k值可達無限大。

(三) 承上，當$\angle C$從50°逐漸增加並逼近60°時，k值越來越大。

(四) 承上，當$\angle C$從60°再逐漸增加並至90°時，k值越來越小。

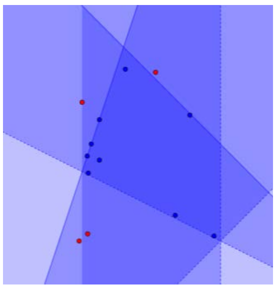
(五) 畫出$\angle C$角度和所能達到最多的k值的分佈圖呈左右低中央特別高的”塔尖形”



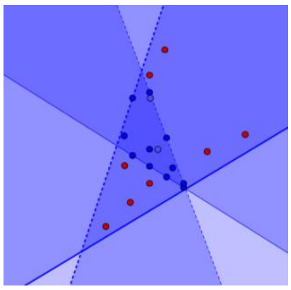
三、設$\angle B$最小，$\angle C$最大，$\triangle ABC$三邊若要同時操作至L_2，則$\angle B$和$\angle C$的關係必須同時滿足下列不等式：

$$\mathbf{60 > b \geq \frac{180}{7}、108 \geq c > 60、144 \geq b + c、c > \frac{180-5b}{2}、3b \geq c > b}$$

其$\angle B$和$\angle C$的取角範圍圖形如下圖(23)，為一個四邊形區域



圖(23)中央四邊形區域



圖(24)中央三角形區域

四、$\triangle ABC$中，$\angle B$最小，$\angle C$最大，分段比$1:1$，若要使三邊都能操作至L_3以上(含)時，$\angle B$和$\angle C$的大小應符合以下不等式關係式：

$$\mathbf{c \geq \frac{900-b}{8}、3b > c > \frac{5}{3}b - 4b + 180 < c \leq \frac{-8}{3}b + 180}$$

其$\angle B$和$\angle C$的取角範圍圖形如上圖(24)，為一個三角形區域

五、$\triangle ABC$中，$\angle B$最小，$\angle C$最大，分段比$1:1$，則三邊恆無法同時操作至L_4以上(含)

六、$\triangle ABC$中，$\angle B$最小，$\angle C$最大，分段比$1:1$，$\overline{AB}$和$\overline{BC}$能操作至L_2以上(含)，$\overline{AC}$能操作至L_1以上(含)，則除了得到原有$\triangle ABC$的外心$O^{1:1}_{111}$之外，我們還發現了另一個共點$O'^{1:1}_{221}$，且具有$\overline{O'O} = \overline{O'A} = \overline{O'C}$的性質。

七、上文中的O'點與$\triangle ABC$的位置關係分述如下：

(一) 當$\angle B < 45°$時，O'點恆在$\triangle ABC$內部

(二) 當$\angle B = 45°$時，O'點恆在$\triangle ABC$的$\overline{AC}$邊上

(三) 當$\angle B > 45°$時，O'點恆在$\triangle ABC$的外部

八、$\triangle ABC$中，$\overline{AB} > \overline{AC}$，在$\overline{BC}$的$1:2$分點處做垂線閃躲遊戲，令$\angle B = x°$，則可操作出$L_1$及$L_2$時的$\angle C$取角範圍為：

$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) < \angle C < \tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)$$

九、設$\overline{AB} > \overline{AC}$，在$\overline{BC}$的$1:3$分點處作垂線閃躲遊戲，且令$\angle B = x°$，則可操做出$L_1$、$L_2$左右夾擊時$\angle C$的取角範圍為：

$$\tan^{-1}\left(\frac{4\tan x}{1-\frac{1}{3}\tan^2 x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right) \geq \angle C > \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right)$$

陸、 參考文獻資料

一、李至傑,胡項淵(2017)*五「心」鏡射奇「跡」—三角形共線點對稱角平分線與中垂線等之共線性研究*

二、莊紹容, 楊精松, 吳榮厚(2014)。*應用線性代數*。東華

三、Ian Stewart(2013)。*改變世界的 17 個方程式*。商周出版

四、Richard Brown(2014)。*30 秒搞懂數學，函數、幾何、微積分沒你想的那麼難*。旗林文化

五、岡部恒治, 本丸諒(2021)。*3 小時讀通幾何*。世茂出版

【評語】030414

本作品探討的問題很有趣，結果也都蠻特別的，可以看得出作者們投入了許多心思完成這個作品，這一點頗值得嘉許。一個比較大的問題是，模型化後的問題似乎與真實的情境有一些出入。當兩方在接近時，假想一方都毫無作為是有點奇怪的，是不是有可能可以調整所考慮的模型，讓它更貼近真實狀況？另一方面，論述一些性質時有點含糊，這也會讓人對部分結論的正確性產生疑問。如果可以適當改寫，把過程中一些關鍵的步驟解釋的更清楚，作品會更有可讀性。作品剛開始時提及底邊 BC 的任意分段，但最後只針對 1:1 及 1:3 做探討，若將任意分段完成，則作品更有其價值。另外，作品利用三角幾何知識，並利用角度和所能達到最多的 k 值分佈圖來呈現出問題的結論是一個亮點，值得肯定。

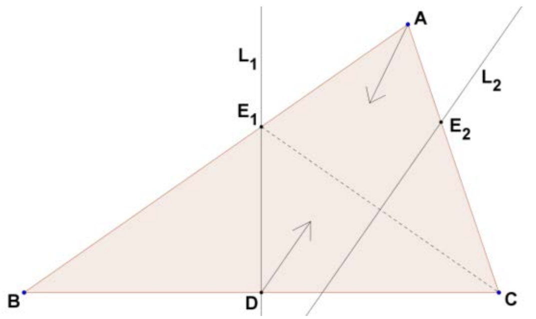
作品簡報

左閃右躲，哪裡逃！

國中組 數學科

研究動機：

我們平常在街上常會有差點和對向的人相撞卻又為了閃避而不小心跨出”**同去向**”的一步的經驗，要是又撞在一起，那豈不是尷尬嗎？所以想要透過左右閃躲的方式來模擬雙方的互動閃躲過程，並希望藉由三內角的度數預判即將發生左右閃躲的尷尬次數！又想知道當三內角在何種大小的排列下可能發生最多的尷尬撞擊次數？



圖(1)

研究目的：

(一)在同時維持E_1、E_3、E_5、E_7……落在$\overline{AB}$上，且E_2、E_4、E_6、E_8……落在$\overline{AC}$上，並作連續中垂線操作，當指定了$\angle B$角度和欲達到的E_k後，探討以$\angle B$表示的$\angle C$取角範圍。

(二)承上，反過來探討在那允許的$\angle C$取角中，所能達到的L_k有何不同？最大k值分佈成何種形狀？

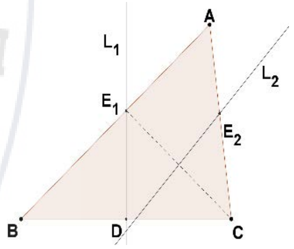
(三)在給定$\triangle ABC$的三內角後，分別操作各邊的L_k，探討能預判三邊皆能達到的L_k之k值或無法都達到的k值

(四)承三，在三邊皆能達到的L_k圖中，探討是否有如同外心之三邊的L_1共點現象，並揭示該共點的幾何性質。

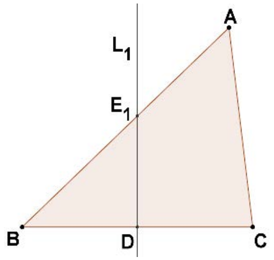
(五)中垂線將$\overline{BC}$分段成1：1，若擴充至a：b的任意分段比，並在分段點處作垂線L_k承上文之中垂線的概念，探討如同上文(一)到(四)的現象。

名詞解釋：

1. 一左：作$\overline{BC}$的中垂線L_1，L_1交$\overline{AB}$於E_1，且E_1在$\overleftrightarrow{DA}$的左邊，我們稱作一左(或左閃)，如圖(2)。
2. 一右：承(一)，作$\overline{E_1C}$的中垂線L_2，L_2交$\overline{AC}$於E_2，且E_2在$\overleftrightarrow{DA}$的右邊，我們稱作一右(或右躲)，如圖(3)。
3. $\overline{BC}L_k$：表示在$\triangle ABC$中的$\overline{BC}$作連續中垂線時，所得的第k條中垂線。如$\overline{BC}L_2$即從$\overline{BC}$連續中垂線操作出的第二條中垂線，$\overline{BC}L_2$即圖(3)中的L_2。
4. 點$P(\overline{AB}L_2，\overline{BC}L_2，\overline{AC}L_1)$：表示P點為三邊中垂線$L_2$、$L_2$、$L_1$的共同交點，簡記為$P_{221}^{1:1}$，再進一步簡記為$P_{221}$。
5. $P_{abc}^{m:n}$是指在$\triangle ABC$三邊皆以m：n的方式操作垂線，若$\overline{AB}$的L_a、$\overline{BC}$的L_b、$\overline{AC}$的L_c三條線的共點為P，則稱該點來自於$\overline{AB}L_a$、$\overline{BC}L_b$和$\overline{AC}L_c$的交點，例如$O_{111}^{1:1}$表示此點O為$\triangle ABC$的三邊中垂線交點(就是$\triangle ABC$的外心)。

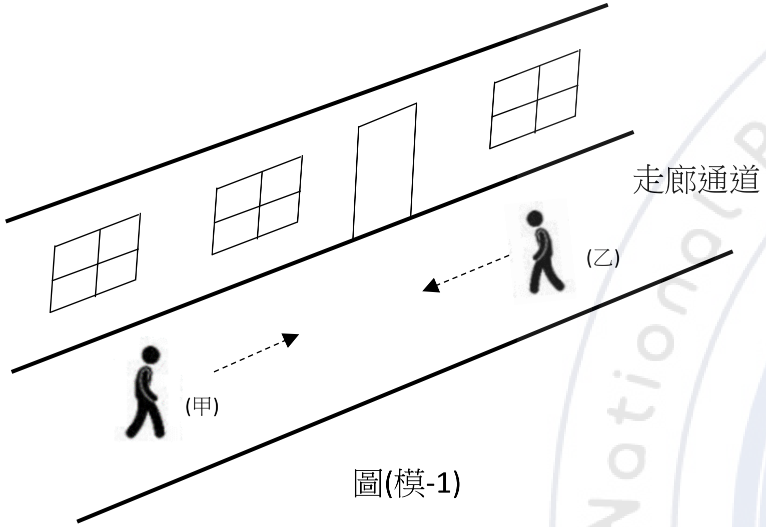


圖(2)

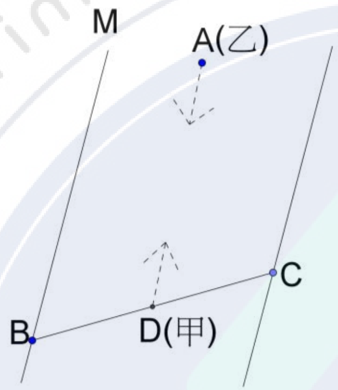


圖(3)

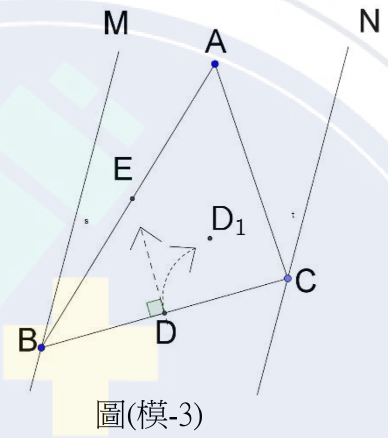
研究模型：



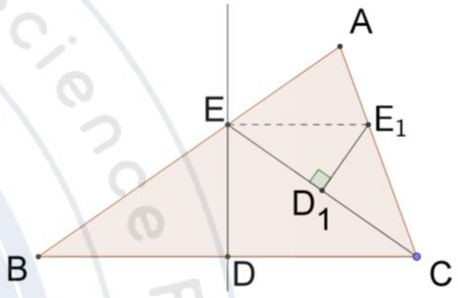
圖(模-1)



圖(模-2)



圖(模-3)



圖(模-4)

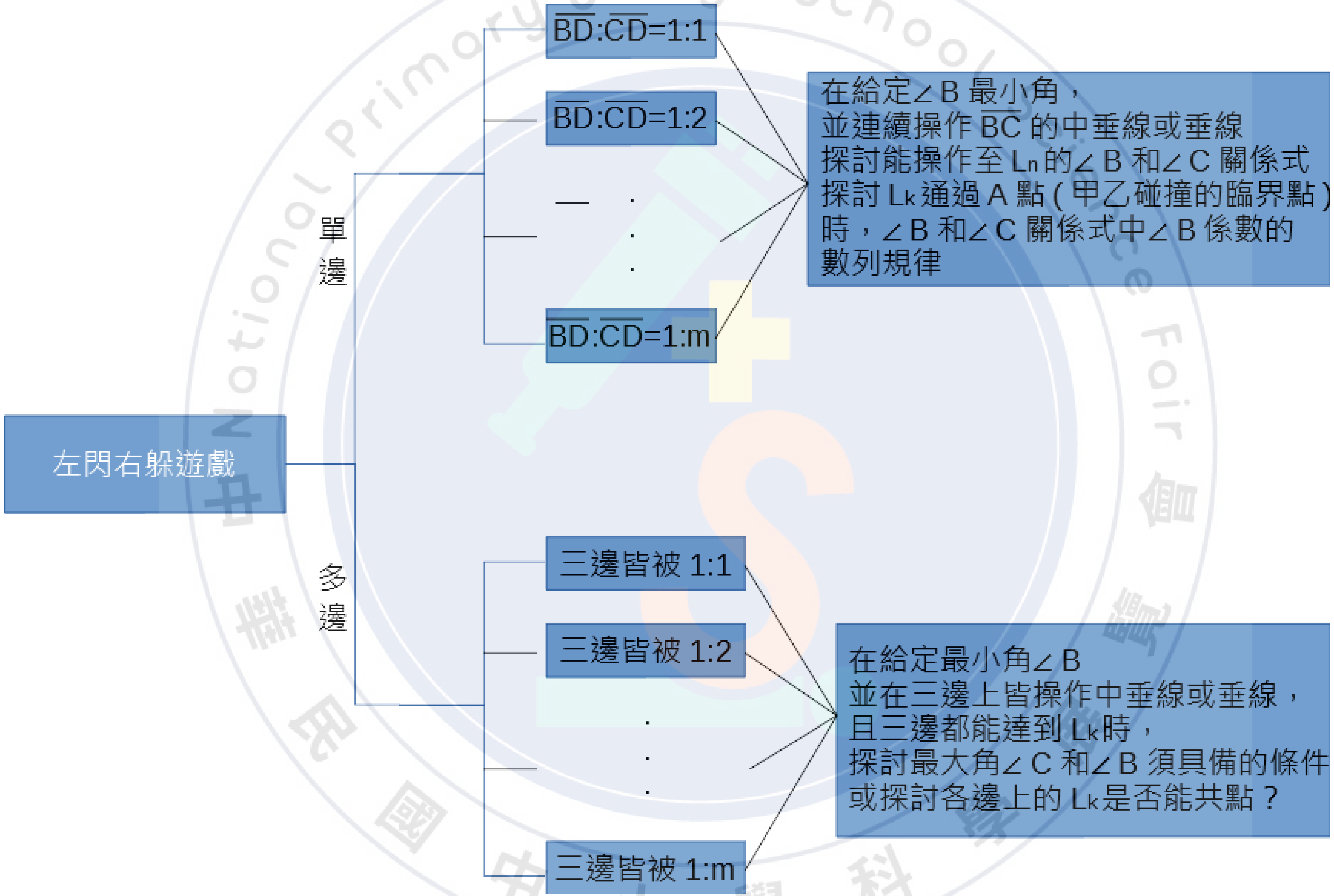
研究限制：

(一)在△ ABC的底邊$\overline{BC}$上操作垂線時，不失一般性，規定∠B < ∠C，即每次閃躲都先往小角(例∠B)方向$\overline{BA}$邊移動， 而在△ AEC中，則往小角∠ACE的$\overline{AC}$邊移動。

(二)甲是主動，乙是被動，每次閃躲後都把移動後的乙，挪回A點處且∠A不變。

(三)當發生不合閃躲規則左右左右左右……或垂線通過A點或當垂線交在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，但甲或乙”倒退嚕”時，遊戲都應立即停止。倒退嚕的意思是本來甲在一左、二左、 三左……的撞擊點應在$\overline{AB}$上一直往A點前進，但若發生撞擊點不進反退時就稱”倒退嚕” ，遊戲停止。

研究架構：



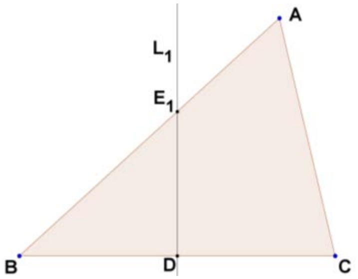
左閃右躲遊戲
單邊
$\overline{BD}:\overline{CD}=1:1$
$\overline{BD}:\overline{CD}=1:2$
$\overline{BD}:\overline{CD}=1:m$
在給定∠B 最小角，
並連續操作 $\overline{BC}$ 的中垂線或垂線
探討能操作至 L_n 的∠B 和∠C 關係式
探討 L_k 通過 A 點 (甲乙碰撞的臨界點) 時，∠B 和∠C 關係式中∠B 係數的數列規律
多邊
三邊皆被 1:1
三邊皆被 1:2
三邊皆被 1:m
在給定最小角∠B
並在三邊上皆操作中垂線或垂線，
且三邊都能達到 L_k 時，
探討最大角∠C 和∠B 須具備的條件
或探討各邊上的 L_k 是否能共點？

研究過程：

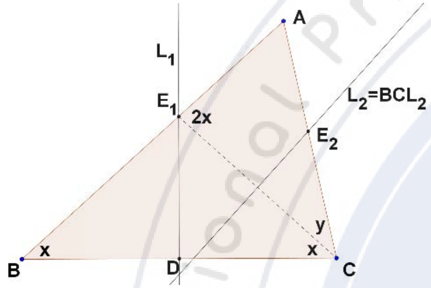
在$\overline{BC}$中垂線起始的左右閃躲撞擊遊戲中，
找出$\angle B$、$\angle C$的條件，使得$\triangle ABC$能操作至L_1、L_2。

發現一、如圖(4)，若 $\angle C > \angle B$，則必有L_1

發現二、如圖(5)，若 $3\angle B \ge \angle C > \angle B$，則必有 L_1、L_2



圖(4)

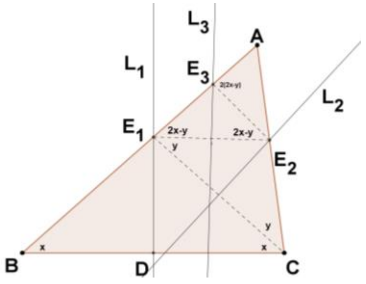


圖(5)

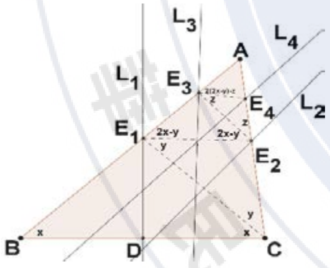
找出$\angle B$、$\angle C$的條件，使得$\triangle ABC$能操作至L_1、L_2、L_3、L_4。

發現三、如圖(6)，若$3\angle B > \angle C \ge \frac{5}{3}\angle B$，則必有 L_1、L_2、L_3

發現四、如圖(7)，若$\frac{11}{5}\angle B \ge \angle C > \frac{5}{3}\angle B$，則必有$L_1$、$L_2$、$L_3$、$L_4$



圖(6)



圖(7)

性質一：

在左閃右躲的遊戲模型中，設n=2、3、4、……k等自然數

(一) 因模型限定$\angle C > \angle B$，所以在給定$\angle B$後，只要取$\angle C$落在

$180° - \angle B > \angle C > \angle B$範圍內即可得到$L_1$。

(當然$\angle C = \angle B$時，也有L_1，通過A點，表示兩人一開始就直接撞上，沒做什麼閃躲就結束，不好玩)

(二) 欲達到L_{2n-1}，則在給定$\angle B$後，取$\angle C$落在

$$\frac{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots-4^{n-k}}{4^{n-2}+4^{n-3}+\dots+4^{n-k}}\angle B > \angle C \ge \frac{4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4^{n-k}}{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots-4^{n-k}}\angle B$$

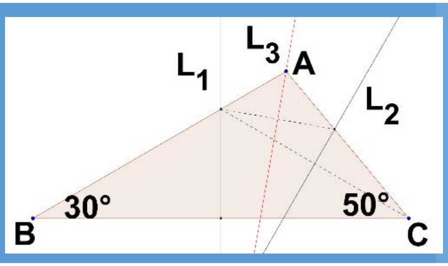
(三) 欲達到L_{2n}，則在給定$\angle B$後，取$\angle C$落在

$$\frac{4^{n}-4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots-4^{n-k}}{4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\dots+4^{n-k}}\angle B \ge \angle C > \frac{4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\dots+4^{n-k}}{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots-4^{n-k}}\angle B$$

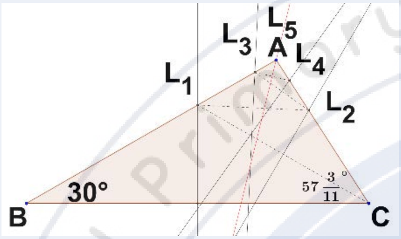
舉例驗證：

以$\angle B = 30°$為例，為讓$\overline{BC}$的中垂線一左一右有序的輪替且至少能達到L_3時，依之前的證明當下$\angle C$的範圍涵蓋$3\angle B > \angle C \ge \frac{5}{3}\angle B$，即$90° > \angle C \ge 50°$。我們接下來想要探討$\angle B = 30°$時，該$\angle C$範圍內的所有內角大約分布的狀況，並列舉一些例子作表如下頁：

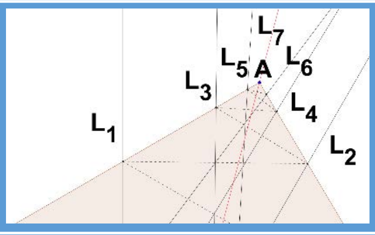
表(一)



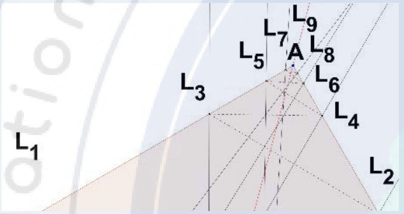
$\angle C = 50°$時，L_3通過A點



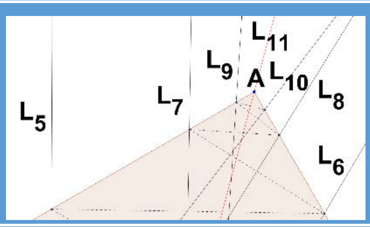
$\angle C = 57\frac{3}{11}°$時，$L_5$通過A點



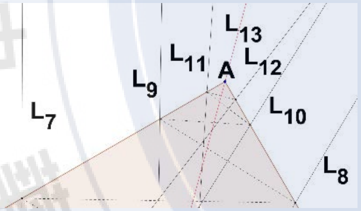
$\angle C = 59\frac{13}{43}°$時，$L_7$通過A點



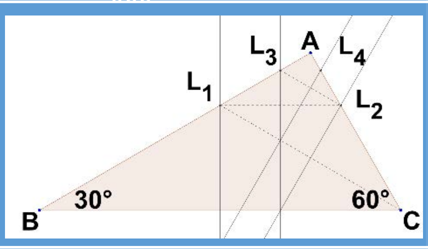
$\angle C = 59\frac{47}{57}°$時，$L_9$通過A點



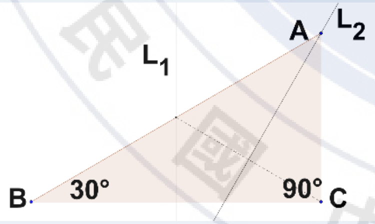
$\angle C = 59\frac{653}{683}°$時，$L_{11}$通過A點



$\angle C = 59\frac{2701}{2731}°$時，$L_{13}$通過A點



$\angle C = 60°(2\angle B)$時，可作圖到$L_\infty$

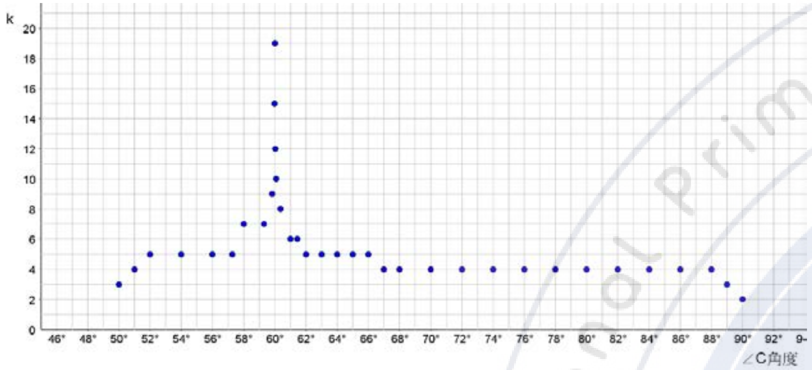


$\angle C = 90°$時，L_2通過A點

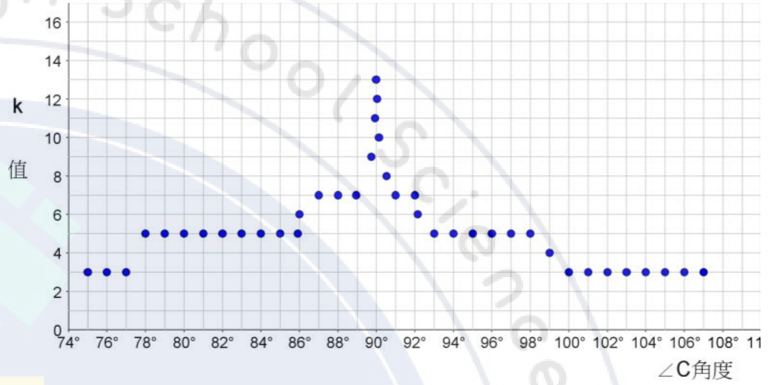
表(二)

$\angle B = 30°$					
∠C度數	最多可達L_k	特性	∠C度數	最多可達L_k	特性
$50°$	L_3	L_3通過A點	…	…	…
$52°$	L_5		$60\frac{2}{91}°$	L_{12}	L_{12}通過A點
$56°$	L_5		$60\frac{30}{341}°$	L_{10}	L_{10}通過A點
$57\frac{3}{11}°$	L_5	L_5通過A點	$60\frac{6}{17}°$	L_8	L_8通過A點
$58°$	L_7		$60\frac{3}{7}°$	L_6	L_6通過A點
$59\frac{13}{43}°$	L_7	L_7通過A點	$66°$	L_4	L_4通過A點
$59\frac{47}{57}°$	L_9	L_9通過A點	$90°$	L_2	L_2通過A點
$59\frac{2701}{2731}°$	L_{11}	L_{11}通過A點			
$59\frac{10864}{10923}°$	L_{13}	L_{13}通過A點			
…	…	…			
$60°$	L_∞	不存在任何L通過A點			

畫出$\angle B = 30°$和所能達到最多的k值的分佈圖呈如下的”塔尖形”。



畫出$\angle B = 45°$和所能達到最多的k值的分佈圖呈如下的”塔尖形”。



從觀察三角形一邊，擴充至觀察三角形三邊上的 $\mathbf{L_k}$。

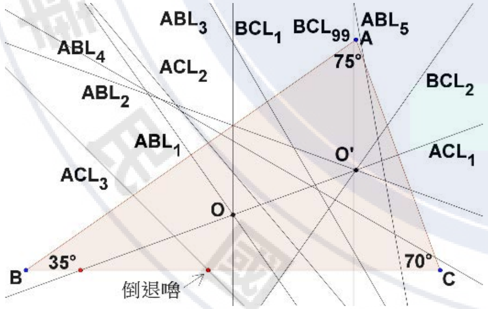
在給例子做圖說明以前，先聲明在三邊上做閃躲時，是無法同時要求先左再右的，只能要求左右輪替或右左輪替即可。又若遇到等腰△時，底邊上的第一條中垂線立即撞到頂點，一次閃躲都沒有，所以我們不討論等腰△的狀況。

例一：三內角各為$35° - 70° - 75°$

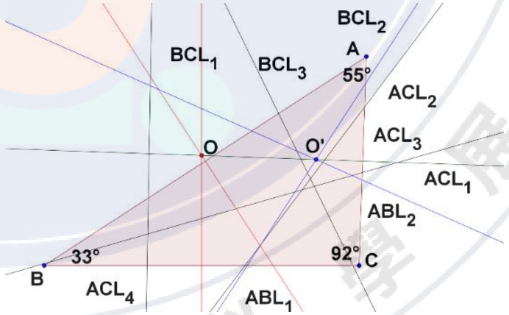
在$\overline{BC}$上，$\because \angle B = 35°$，$\angle C = 70°$，$\angle C = 2\angle B$，依據性質一，可做中垂線至L_∞，我們以$\overline{BC}L_\infty$表示。

在$\overline{AB}$上，$\because \angle B = 35°$，$\angle A = 75°$，$\frac{11}{5}\angle B > \angle C \geq \frac{21}{11}\angle B$，$\frac{11}{5}\angle B > \angle A \geq \frac{21}{11}\angle B$，$77° > 75° \geq 66\frac{9}{11}°$，$\therefore$由性質一判定僅可達$L_5$。

在$\overline{AC}$上，$\because \angle C = 70$，$\angle A > \angle C$，$\therefore$依性質一，必有L_1，接著 若欲達L_2，則由性質一計算得$3 \times 70° > \angle A \geq 1 \times 70°$，即$210° > \angle A \geq 70°$(合)，若欲達$L_3$，則$3 \times 70° > \angle A \geq \frac{5}{3} \times 70°$，即$210° > \angle A \geq 116\frac{2}{3}°$ (但$\angle A = 75°$不合，如圖L_3雖然有交在$\overline{BC}$上，卻倒退嚕)，綜合上述，在$\overline{AC}$上，最多可做出L_2，我們以$\overline{AC}L_2$表示。



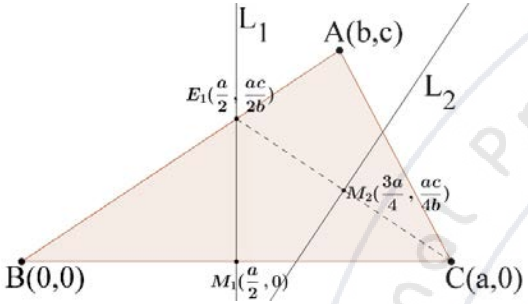
例一



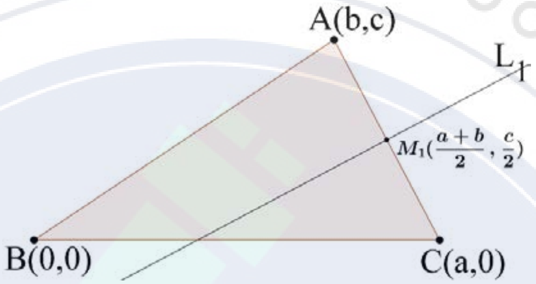
例二

發現五、如上圖，$\overline{\mathbf{AB}}\mathbf{L_2}$、$\overline{\mathbf{BC}}\mathbf{L_2}$、$\overline{\mathbf{AC}}\mathbf{L_1}$三線共O′點。

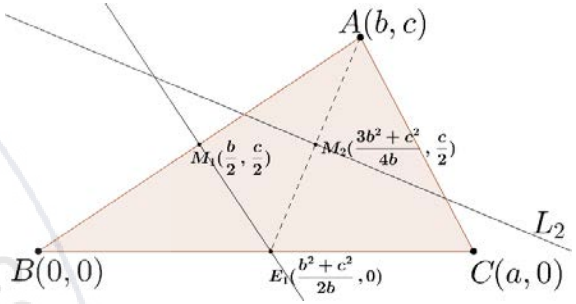
性質二：
若△ ABC的三邊依前文連續中垂線的方法及三內角大小條件操作，則發現BC的L2、AB的L2和AC的L1三線必共點。令此共點為P，其中∠C > ∠B、∠A > ∠B
如圖(8)到圖(10)



圖(8)



圖(9)

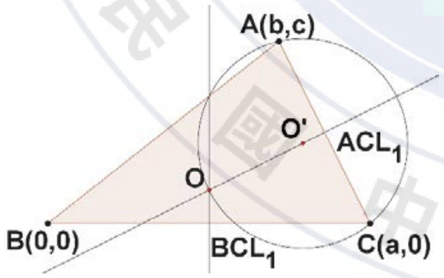


圖(10)

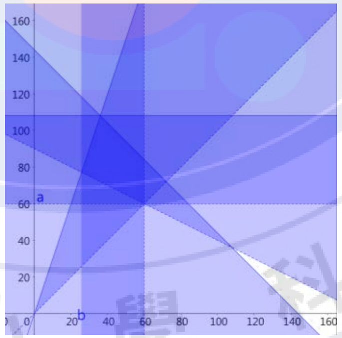
性質三：
承性質二，設$\mathbf{O'}$點即為$\overline{\mathbf{AB}}\mathbf{L_2}$、$\overline{\mathbf{BC}}\mathbf{L_2}$和$\overline{\mathbf{AC}}\mathbf{L_1}$的交點，$\mathbf{O}$點為$\overline{\mathbf{AB}}\mathbf{L_1}$、$\overline{\mathbf{BC}}\mathbf{L_1}$和$\overline{\mathbf{AC}}\mathbf{L_1}$的交點，則$\overline{\mathbf{O'A}} = \overline{\mathbf{O'C}} = \overline{\mathbf{O'O}}$，如圖(11)。

哪些△的各邊閃躲次數能同時達到L_2或L_3或L_4或更高？請看接下來我們的發現！

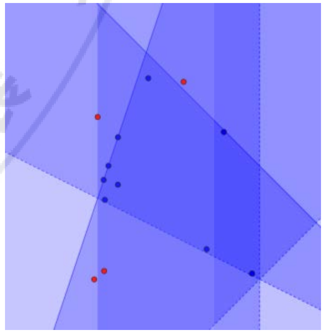
性質四：
若令△ ABC的最大角為∠C，最小角為∠B，其中$\angle\mathbf{B} = \mathbf{b}°$，$\angle\mathbf{C} = \mathbf{c}°$，其三邊依前文連續閃躲操作中垂線的方法操作且欲使三邊都能達到$\mathbf{L_2}$以上，則∠B和∠C要同時滿足下列不等式，$\mathbf{60 > b \geq \frac{180}{7}}$、$\mathbf{108 \geq c > 60}$、$\mathbf{144 \geq b + c}$、$\mathbf{c > \frac{180-b}{2}}$及$\mathbf{3b \geq c > b}$。又將滿足這些不等式的解作圖如下，設x軸表示∠B的數值，y軸表示∠C的數值，而圖(12)中，最深色部分為上述不等式的解，是塊四邊形，如圖(12-1)放大。這表示在這塊最深色的四邊形中的所有點$\mathbf{(b, c)}$都能使△ ABC三邊同時達到$\mathbf{L_2}$以上。



圖(11)

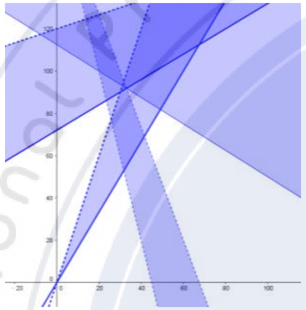


圖(12)

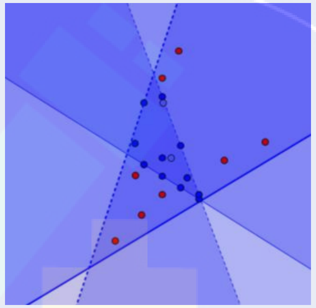

圖(12-1)，圖(12)的放大

性質五：

在△ ABC中，取最大角為∠C，最小角為∠B，其三邊依前文連續操作中垂線的方法操作，若欲使其三邊能達到L_3以上，則只要同時滿足下列三條不等式，$c \geq \frac{900-5b}{8}$、$3b > c > \frac{5}{3}b$及$-4b + 180 < c \leq \frac{-8}{3}b + 180$即可。如同性質四將同時滿足這三條不等式的解$(b, c)$繪出， 如圖(13)，是塊深色的三角形，將它放大在圖(11-1)中，其中最深色的三角形內的所有點都能使三邊至少達到L_3以上。



圖(13)



圖(13-1)，圖(13)的放大

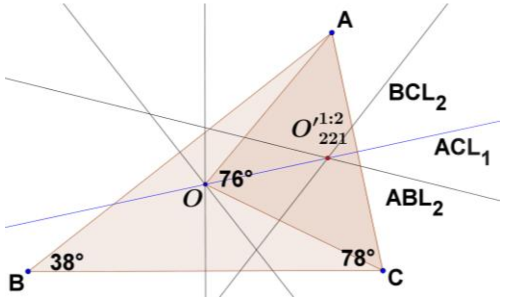
性質六：

在△ ABC中，設∠B為最小角，則依中垂線閃躲作圖，必不可能出現三邊同時都操作出L_4以上(含)。

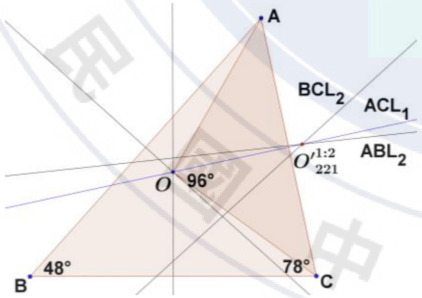
性質七：

在$\angle B < \angle A < \angle C$且三邊皆能操作至$L_2$的情況下，$O'^{1:1}_{221}$和△ ABC的內外位置關係如下：

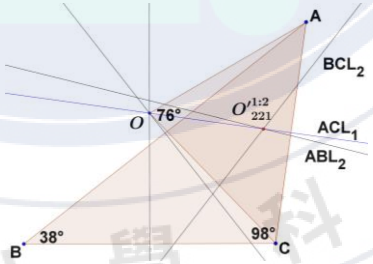
$$\begin{cases} \text{當}\angle B < 45^\circ\text{時，}O'^{1:1}_{221}\text{在}\triangle ABC\text{內部，如圖}(14-1)\text{、圖}(14-2) \\ \text{當}\angle B = 45^\circ\text{時，}O'^{1:1}_{221}\text{在}\overline{AC}\text{邊上中點，如圖}(14-4) \\ \text{當}\angle B > 45^\circ\text{時，}O'^{1:1}_{221}\text{在}\triangle ABC\text{外部，如圖}(14-3) \end{cases}$$



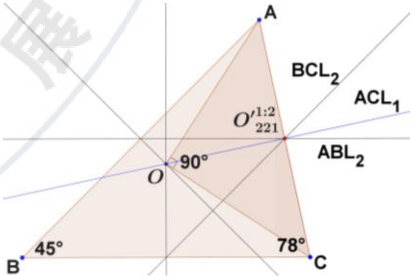
圖(14-1) ∠B < 45°，銳角△



圖(14-3) ∠B > 45°



圖(14-2) ∠B < 45°，鈍角△



圖(14-4) ∠B = 45°

在單邊1：2分點處，作左閃右躲垂線遊戲，當給定∠B後，欲達L_k時，∠C的取角範圍探討。

性質八：

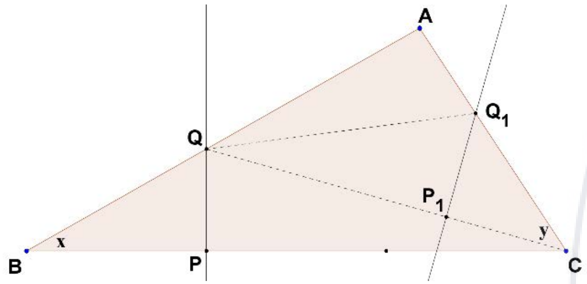
1：2垂線一左一右夾擊時，在給定∠B後，可操作至$\overline{BC}L_1$、$\overline{BC}L_2$時，∠C的取角範圍為：

$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) < \angle C < \tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)$$

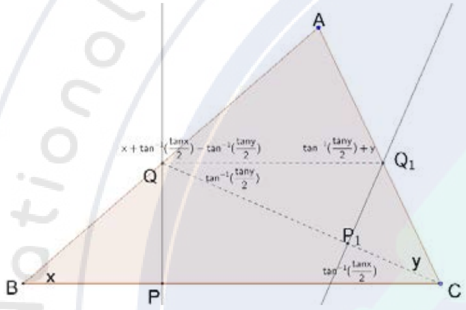
性質九：

1：3垂線一左一右夾擊時，在給定∠B後，欲達到$\overline{BC}L_1$及$\overline{BC}L_2$時，∠C的取角範圍為：

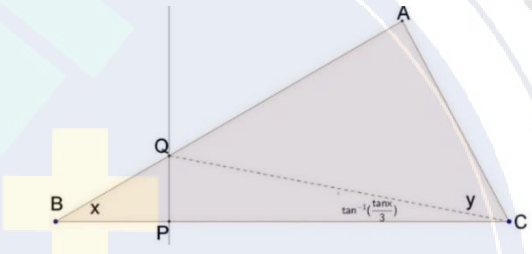
$$\tan^{-1}\left(\frac{4\tan x}{1-\frac{1}{3}\tan^2 x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right) \ge \angle C > \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right)$$



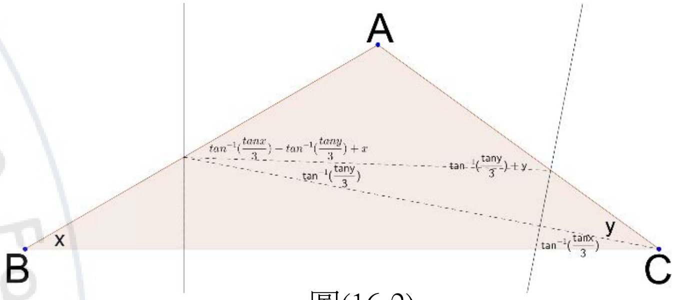
圖(15)



圖(15-2)



圖(16)



圖(16-2)

結論：

一　在左閃右躲的模型中，$\overline{AB} > \overline{AC}$，甲位在$\overline{BC}$中點D點，乙位在Δ的頂點A，令左閃右躲所作出中垂線依次為L_1、L_2、L_3……L_k，則在給定∠B後，一所要求達到的L_k分成k是奇數或是偶數，確定∠C的取角範圍。

(一) 因模型限定∠C > ∠B，所以在給定∠B後，只要取∠C落在

$180° - \angle B > \angle C > \angle B$範圍內即可得到$L_1$。

(二) 欲達到L_{2n-1}，$n \ge 2$，則在給定∠B後，取∠C落在

$$\frac{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots-4^{n-k}}{4^{n-2}+4^{n-3}+\dots+4^{n-k}}\angle B > \angle C \ge \frac{4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4^{n-k}}{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots 4^{n-k}}\angle B$$ **的範圍內即可達成。**

(三) 欲達到L_{2n}，$n \ge 1$，則在給定∠B後，取∠C落在

$$\frac{4^{n}-4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots-4^{n-k}}{4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\dots+4^{n-k}}\angle B > \angle C \ge \frac{4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\dots+4^{n-k}}{4^{n-1}-4^{n-2}-4^{n-3}-\dots-4^{n-k}}\angle B$$ **的範圍內即可達成。**

二　在性質一的條件及公式中，在給定某一個$\angle B$並指定達到的L_k後，所得到的$\angle C$範圍中，每個$\angle C$所能達到的L_k分布圖並非呈均勻狀而是呈塔尖形，例如：

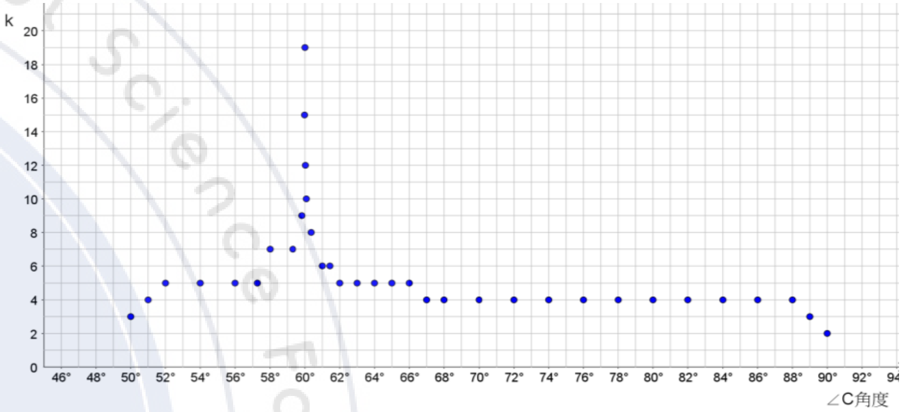
(一)當$\angle B = 30°$，依性質一中垂線連續閃躲作圖並至少欲得L_3上時，則$\angle C$的範圍為$90° > \angle C \geq 50°$。

(二)承上，在$\angle C > 2\angle B$時(即$\angle C = 60°$)，L_k的k值可達無限大。

(三)承上，當$\angle C$從50°逐漸增加並逼近60°時，k值越來越大。

(四)承上，當$\angle C$從60°再逐漸增加並至90°時，k值越來越小。

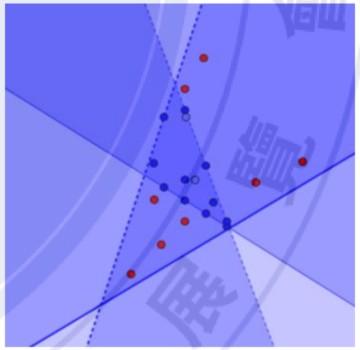
(五)畫出$\angle C$角度和所能達到最多的k值的分佈圖呈左右低中央特別高的”塔尖形”(如右圖)

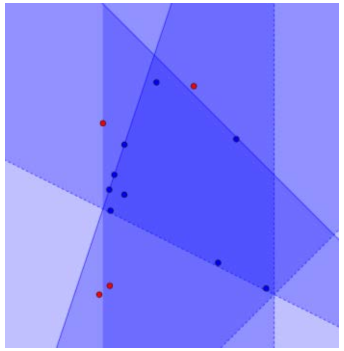


三　設$\angle B$最小，$\angle C$最大，$\triangle ABC$三邊若要同時操作至L_2，則$\angle B$和$\angle C$的關係必須同時滿足下列不等式：

$$\mathbf{60 > b \geq \frac{180}{7}、108 \geq c > 60、144 \geq b + c、c > \frac{180-5b}{2}、3b \geq c > b}$$

其$\angle B$和$\angle C$的取角範圍圖形如下圖(17)，為一個四邊形區域


圖(17)


圖(18)

四　$\triangle ABC$中，$\angle B$最小，$\angle C$最大，分段比1：1，若要使三邊都能操作至L_3以上(含)時，

$\angle B$和$\angle C$的大小應符合以下不等式關係式：

$$\mathbf{c \geq \frac{900-b}{8}、3b > c > \frac{5}{3}b - 4b + 180 < c \leq \frac{-8}{3}b + 180}$$

其$\angle B$和$\angle C$的取角範圍圖形如上圖(18)，為一個三角形區域

五　$\triangle ABC$中，$\angle B$最小，$\angle C$最大，分段比1：1，則三邊恆無法同時操作至L_4以上(含)

六　$\triangle ABC$中，$\angle B$最小，$\angle C$最大，分段比1：1，$\overline{AB}$和$\overline{BC}$能操作至L_2以上(含)，$\overline{AC}$能操作至L_1以上(含)，則除了得到原有$\triangle ABC$的外心$O_{111}^{1:1}$之外，我們還發現了另一個共點$O'^{1:1}_{221}$，且具有$\overline{O'O} = \overline{O'A} = \overline{O'C}$的性質。

七　上文中的O'點與$\triangle ABC$的位置關係分述如下：

(一) 當$\angle B < 45°$時，O'點恆在$\triangle ABC$內部 (二) 當$\angle B = 45°$時，O'點恆在$\triangle ABC$的$\overline{AC}$邊上 (三) 當$\angle B > 45°$時，O'點恆在$\triangle ABC$的外部

八　$\triangle ABC$中，$\overline{AB} > \overline{AC}$，在$\overline{BC}$的1：2分點處做垂線閃躲遊戲，令$\angle B = x°$，則可操作出$L_1$及$L_2$時的$\angle C$取角範圍為：

$$\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) < \angle C < \tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{1-\frac{1}{2}\tan^2 x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)$$

九　設$\overline{AB} > \overline{AC}$，在$\overline{BC}$的1：3分點處作垂線閃躲遊戲，且令$\angle B = x°$，則可操做出$L_1$、$L_2$左右夾擊時$\angle C$的取角範圍為：

$$\tan^{-1}\left(\frac{4\tan x}{1-\frac{1}{3}\tan^2 x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right) \geq \angle C > \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right)$$

參考文獻資料：

一　李至傑,胡項淵(2017)*五「心」鏡射奇「跡」—三角形共線點對稱角平分線與中垂線等之共線性研究*

二　莊紹容, 楊精松, 吳榮厚(2014)。*應用線性代數*。東華

三　Ian Stewart(2013)。*改變世界的17個方程式*。商周出版

四　Richard Brown(2014)。***30秒搞懂數學，函數、幾何、微積分沒你想的那麼難***。旗林文化

五　岡部恒治, 本丸諒(2021)。***3小時讀通幾何***。世茂出版