中華民國第 62 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030410

多邊形之邊長依等比例切割之面積比值探討

學校名稱：桃園市立建國國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳柏睿	許俊中
國二 葉惟中	

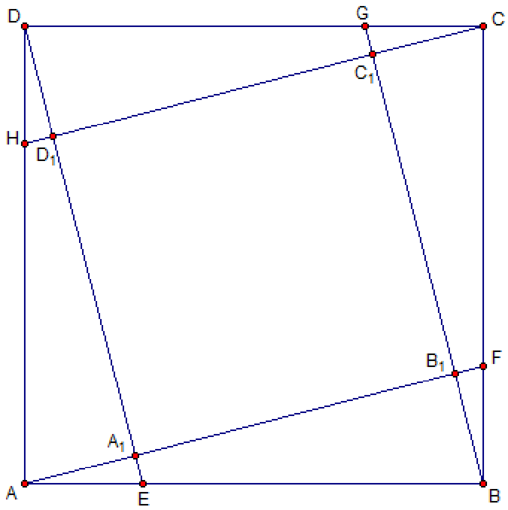
關鍵詞：母子多邊形、解析幾何、行列式

摘要

本研究先利用「直角坐標、畢氏定理、全等、相似、三角函數」等基本概念，探討正多邊形之邊長依逆時針方向等比例 m:n 切割之面積比值(以下均簡稱為母子多邊形之面積比值)。我們依序研究母子正三角形、正方形、正五邊形及正六邊形之面積比值，接著透過母子正多邊形之切割線，推導出任意母子正多邊形之面積比值均為定值(此值只與 m，n，θ相關)。最後，我們為了探討更多元廣泛的凸多邊形議題，於是運用「解析幾何、海龍公式、行列式、測量員(surveyor)面積公式、單位向量、線性轉換」等概念，順利推導出母子任意三角形、任意四邊形之面積比值均為定值，而此值只需用 m、n 表示。以上研究結果均已透過 GSP 繪圖軟體、Excel 軟體獲得相關檢驗，正確無誤。

壹、研究動機

某天，數學老師補充了一道練習題，內容如下:「如圖(一)，有一正方形 ABCD，若由四個頂點依逆時針方向將其邊長按照 1:3 等比例切割，使得$\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{BF}:\overline{FC}=\overline{CG}:\overline{GD}=\overline{DH}:\overline{HA}=1:3$，則求四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 與 ABCD 之面積比值為何?」。因為我們都對數學問題倍感興趣，於是就開始研究此類題型的規律性與延展性，並希望將此研究方法與精神，繼續拓展延伸至任意切割比例(m:n)以及探討任意正多邊形、三角形、長方形、四邊形....等任意凸多邊形。



圖(一)、正方形 ABCD 之邊長依等比例 1:3 切割之示例

貳、研究目的

一、探討正多邊形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。

二、探討任意三角形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。

三、探討任意長方形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。

四、探討任意四邊形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。

參、研究設備與器材

筆記本、黑板、粉筆、電腦、GSP 繪圖軟體(THE GEOMETER'S SKETCHPAD)、Excel 統計軟體

肆、研究過程與方法

一、定義

(一)母多邊形:泛指原本的凸多邊形，形如圖(一)中多邊形 ABCD。

(二)切割點:泛指從頂點開始以逆時針將邊長以 m:n 之切割方式所產生之點，形如圖(一)中點 E、點 F、點 G、點 H。

(三)切割線:泛指將母多邊形進行切割之線段，即頂點以逆時針方向尋找第二個切割點所連接之線段，形如圖(一)中線段$\overline{AF}$、$\overline{BG}$、$\overline{CH}$、$\overline{DE}$。

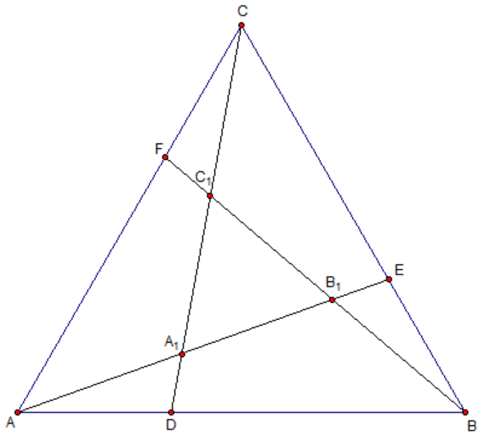
(四)子多邊形:泛指所有切割線共同圍成之多邊形區域，形如圖(一)中多邊形$A_1B_1C_1D_1$。因為凹多邊形內部無法形成子多邊形，故本研究只討論凸多邊形。

(五)母子多邊形之面積比值: 泛指(子多邊形面積)除以(母多邊形面積)之比值。

為求版面與算式簡潔，故「多邊形之邊長依等比例切割之面積比值」在「肆、研究過程與方法」中簡寫為「母子多邊形之面積比值」，其中比值為「子多邊形面積除以母多邊形面積」，以便探討各邊長經過等比例 m:n 切割後，子多邊形面積將變為母多邊形面積的幾分之幾，其結果將以 m、n 表示。

二、正多邊形之邊長依等比例切割之面積比值(母子正多邊形之面積比值)探討

(一)正三角形



圖(二)、母子正三角形 ABC 與$A_1B_1C_1$之示例

條件:在正三角形 ABC 中，$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}=m$，$\overline{DB}=\overline{EC}=\overline{FA}=n$

步驟 1:證明$\Delta A_1B_1C_1$為正三角形

在ΔACD和ΔBAE中

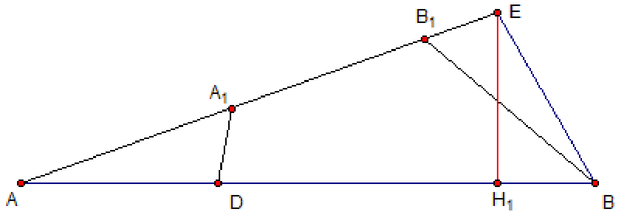
$\because$ $\overline{AC}=\overline{BA}$、$\angle DAC=\angle EBA$、$\overline{DA}=\overline{EB}$ $\therefore$ $\Delta ACD\cong\Delta BAE$(SAS 全等) $\Rightarrow$ $\angle CDA=\angle AEB$

在ΔAA_1D和ΔABE中

$\because$ $\angle A_1AD=\angle BAE$(共用角)、$\angle A_1DA=\angle BEA$ $\therefore$ $\Delta AA_1D\sim\Delta ABE$(AA 相似)

$\Rightarrow$ $\angle AA_1D=\angle ABE=60°$ $\Rightarrow$ $\angle C_1A_1B_1=60°$(對頂角)，同理可證，$\Delta A_1B_1C_1$為正三角形

步驟 2:計算$\overline{AE}$長度



圖(三)、ΔABE

做$\overline{EH_1}\perp\overline{AB}$於 H_1

$\because$ $\angle EBH_1=60°$、$\angle H_1EB=30°$ $\therefore$ $\overline{BH_1}:\overline{H_1E}:\overline{EB}=1:\sqrt{3}:2$

$\because \overline{BE}=m \therefore \overline{BH_1}=\frac{m}{2}$，$\overline{H_1E}=\frac{\sqrt{3}m}{2}$

$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{EH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}-\overline{BH_1})^2+(\frac{\sqrt{3}m}{2})^2}=\sqrt{(m+n-\frac{m}{2})^2+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{(\frac{m}{2}+n)^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{\frac{m^2}{4}+mn+n^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{m^2+mn+n^2}$

步驟 3:計算$\overline{A_1B_1}$長度

(1)證明$\Delta AA_1D\cong \Delta BB_1E$

在ΔAA_1D 和ΔBB_1E 中

$\because \overline{AD}=\overline{BE}$、$\angle ADA_1=\angle BEB_1(\because \Delta AA_1D\sim\Delta ABE)$、$\angle A_1AD=\angle B_1BE(\because \Delta BAE\cong \Delta CBF)$

$\therefore \Delta AA_1D\cong \Delta BB_1E$(ASA 全等)

(2)計算$\overline{A_1B_1}$

令$\overline{AE}=\sqrt{m^2+mn+n^2}=z$，$\overline{AA_1}=x$，$\overline{B_1E}=y \Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-x-y$

$\because \Delta AA_1D\cong \Delta BB_1E$ 且$\Delta AA_1D\sim\Delta ABE \Rightarrow \Delta AA_1D\sim\Delta ABE$、$\Delta\Delta BB_1E\sim\Delta ABE$

$\therefore x:m=(m+n):z$、$y:m=m:z \Rightarrow x=\frac{m(m+n)}{z}$、$y=\frac{m^2}{z}$

$\begin{cases} x=\frac{m(m+n)}{z} \\ y=\frac{m^2}{z} \end{cases}$ 代入$\overline{A_1B_1}=z-x-y$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2}{z}-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2-m^2-mn-m^2}{z}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

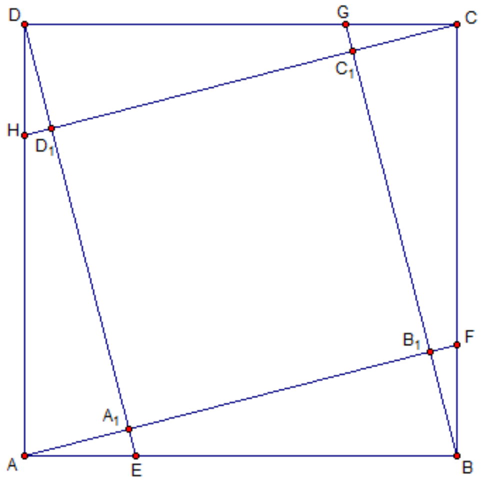
$z=\sqrt{m^2+mn+n^2}$代入$\overline{A_1B_1}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=\frac{m^2+mn+n^2-2m^2-mn}{\sqrt{m^2+mn+n^2}}=\frac{n^2-m^2}{\sqrt{m^2+mn+n^2}}$

步驟 4:計算母子正三角形之面積比值

$\frac{\Delta A_1B_1C_1}{\Delta ABC}=\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{(\frac{n^2-m^2}{\sqrt{m^2+mn+n^2}})^2}{(m+n)^2}=\frac{\frac{(n+m)^2(n-m)^2}{m^2+mn+n^2}}{(m+n)^2}=\frac{(n-m)^2}{m^2+mn+n^2}=\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

(二)正方形



圖(四)、母子正方形 ABCD 與$A_1B_1C_1D_1$之示例

條件:在正方形 ABCD 中，$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=m$，$\overline{EB}=\overline{FC}=\overline{GD}=\overline{HA}=n$

步驟 1:證明四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 為正方形

在ΔADE 和ΔBAF 中

$\because$ $\overline{AD}=\overline{BA}$、$\angle EAD=\angle FBA$、$\overline{EA}=\overline{FB}$ $\therefore$ $\Delta ADE\cong \Delta BAF$(SAS 全等) $\Rightarrow$ $\angle DEA=\angle AFB$

在ΔAA_1E 和ΔABF 中

$\because$ $\angle A_1AE=\angle BAF$(共用角)、$\angle A_1EA=\angle BFA$ $\therefore$ $\Delta AA_1E\sim\Delta ABF$(AA 相似)

$\Rightarrow$ $\angle AA_1E=\angle ABF=90°$ $\Rightarrow$ $\angle D_1A_1B_1=90°$(對頂角)，同理可證，四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 為正方形

步驟 2:計算$\overline{AF}$長度

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{(m+n)^2+m^2}=\sqrt{2m^2+2mn+n^2}$

步驟 3:計算$\overline{A_1B_1}$長度

(1)證明$\Delta AA_1E\cong \Delta BB_1F$

在ΔAA_1E 和ΔBB_1F 中

$\because$ $\overline{AE}=\overline{BF}$、$\angle AEA_1=\angle BFB_1$($\because$ $\Delta AA_1E\sim\Delta ABF$)、$\angle A_1AE=\angle B_1BF$($\because$ $\Delta BAF\cong \Delta CBG$)

$\therefore$ $\Delta AA_1E\cong \Delta BB_1F$(ASA 全等)

(2)計算$\overline{A_1B_1}$

令$\overline{AF}=\sqrt{2m^2+mn+n^2}=z$，$\overline{AA_1}=x$，$\overline{B_1F}=y$ $\Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-x-y$

$\because$ $\Delta AA_1E \cong \Delta BB_1F$ 且$\Delta AA_1E \sim \Delta ABF$ $\Rightarrow \Delta AA_1E \sim \Delta ABF$、$\Delta BB_1F \sim \Delta ABF$

$\therefore x:m=(m+n):z$、$y:m=m:z$ $\Rightarrow x=\frac{m(m+n)}{z}$、$y=\frac{m^2}{z}$

$\begin{cases} x=\frac{m(m+n)}{z} \\ y=\frac{m^2}{z} \end{cases}$ 代入$\overline{A_1B_1}=z-x-y$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2}{z}-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2-m^2-mn-m^2}{z}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

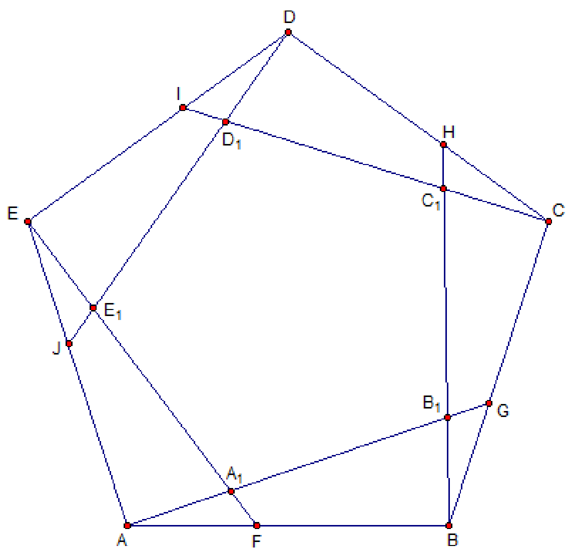
$z=\sqrt{2m^2+2mn+n^2}$代入$\overline{A_1B_1}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=\frac{2m^2+2mn+n^2-2m^2-mn}{\sqrt{2m^2+2mn+n^2}}=\frac{n(m+n)}{\sqrt{2m^2+2mn+n^2}}$

步驟 4:計算母子正方形之面積比值

$$\frac{A_1B_1C_1D_1}{ABCD}=\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\left[\frac{n(m+n)}{\sqrt{2m^2+2mn+n^2}}\right]^2}{(m+n)^2}=\frac{\frac{n^2(m+n)^2}{2m^2+2mn+n^2}}{(m+n)^2}=\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$$

(三)正五邊形



圖(五)、母子正五邊形 ABCDE 與$A_1B_1C_1D_1E_1$之示例

條件:在正五邊形 ABCDE 中，$\overline{AF}=\overline{BG}=\overline{CH}=\overline{DI}=\overline{EJ}=m$，$\overline{FB}=\overline{GC}=\overline{HD}=\overline{IE}=\overline{JA}=n$

步驟 1:證明五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 為正五邊形

在ΔAEF 和ΔBAG 中

$\because \overline{AE}=\overline{BA}$、$\angle FAE=\angle GBA$、$\overline{FA}=\overline{GB}$ $\therefore \Delta AEF\cong \Delta BAG$(SAS 全等) $\Rightarrow \angle EFA=\angle AGB$

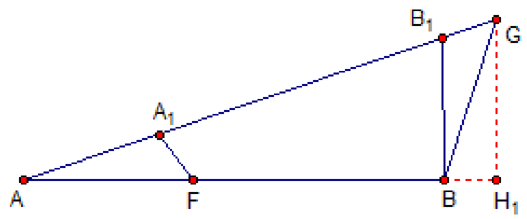
在ΔAA_1F 和ΔABG

$\because \angle A_1AF=\angle BAG$(共用角)、$\angle A_1FA=\angle BGA$ $\therefore \Delta AA_1F\sim\Delta ABG$(AA 相似)

$\Rightarrow \angle AA_1F=\angle ABG=108°$ $\Rightarrow \angle E_1A_1B_1=108°$(對頂角)，

同理可證，五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 為正五邊形

步驟 2:計算$\overline{AG}$長度



圖(六)、ΔAGH_1

做$\overline{BH_1}\perp\overline{GH_1}$於 H_1

$\because \angle GBH_1=72°$ $\therefore \overline{BH_1}=\overline{BG}\times\cos 72°$，$\overline{GH_1}=\overline{BG}\times\sin 72°$

$\because \overline{BG}=m$ $\therefore \overline{BH_1}=m\cos 72°$，$\overline{GH_1}=m\sin 72°$

$$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{GH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}+\overline{BH_1})^2+(m\sin 72°)^2}=\sqrt{(m+n+m\cos 72°)^2+m^2\sin^2 72°}$$

$$=\sqrt{m^2+n^2+m^2\cos^2 72°+2mn+2mn\cos 72°+2m^2\cos 72°+m^2\sin^2 72°}$$

$$=\sqrt{(m^2+2mn+n^2)+(m^2\cos^2 72°+m^2\sin^2 72°)+(2m^2\cos 72°+2mn\cos 72°)}$$

$$=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}$$

步驟 3:計算$\overline{A_1B_1}$長度

(1)證明$\Delta AA_1F\cong \Delta BB_1G$

在ΔAA_1F 和ΔBB_1G 中

∵ $\overline{AF}=\overline{BG}$、$\angle AFA_1=\angle BGB_1$(∵ $\Delta AA_1F\sim\Delta ABG$)、$\angle A_1AF=\angle B_1BG$(∵ $\Delta BAG\cong\Delta CBH$)

∴ $\Delta AA_1F\cong\Delta BB_1G$(ASA 全等)

(2)計算$\overline{A_1B_1}$

令$\overline{AG}=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}=z$，$\overline{AA_1}=x$，$\overline{B_1G}=y \Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-x-y$

∵ $\Delta AA_1F\cong\Delta BB_1G$ 且$\Delta AA_1F\sim\Delta ABG \Rightarrow \Delta AA_1F\sim\Delta ABG$、$\Delta BB_1G\sim\Delta ABG$

∴$x:m=(m+n):z$、$y:m=m:z \Rightarrow x=\frac{m(m+n)}{z}$、$y=\frac{m^2}{z}$

$\begin{cases} x=\frac{m(m+n)}{z} \\ y=\frac{m^2}{z} \end{cases}$ 代入$\overline{A_1B_1}=z-x-y$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2}{z}-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2-m^2-mn-m^2}{z}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

$z=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}$代入$\overline{A_1B_1}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=\frac{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°-2m^2-mn}{\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}}=\frac{m^2+2mn+n^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°-2m^2-mn}{\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}}$

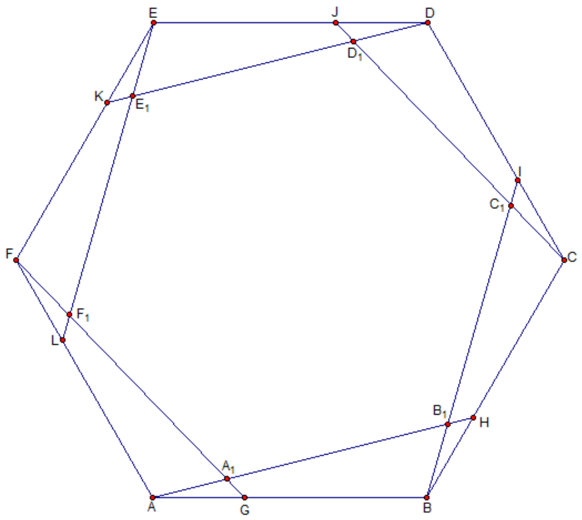
$=\frac{mn+n^2+(m+n)2m\cos 72°}{\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}}$

步驟 4:計算母子正五邊形之面積比值

$\frac{A_1B_1C_1D_1E_1}{ABCDE}=\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\left[\frac{mn+n^2+(m+n)2m\cos 72°}{\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}}\right]^2}{(m+n)^2}=\frac{\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos 72°]^2}{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}}{(m+n)^2}=$

$=\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos 72°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°]}$

(四)正六邊形



圖(七)、母子正六邊形 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 之示例

條件:在正六邊形 ABCDEF 中，$\overline{AG}=\overline{BH}=\overline{CI}=\overline{DJ}=\overline{EK}=\overline{FL}=m$，$\overline{GB}=\overline{HC}=\overline{ID}=\overline{JE}=\overline{KF}=\overline{LA}=n$

步驟 1:證明六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為正六邊形

在ΔAFG 和ΔBAH 中

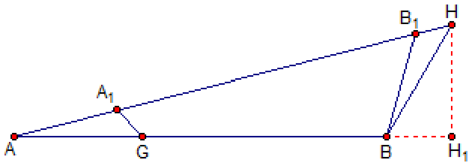
$\because \overline{AF}=\overline{BA}$、$\angle GAF=\angle HBA$、$\overline{GA}=\overline{HB}$ $\therefore \Delta AFG\cong \Delta BAH$(SAS 全等) $\Rightarrow \angle FGA=\angle AHB$

在ΔAA_1G 和ΔABH

$\because \angle A_1AG=\angle BAH$(共用角)、$\angle A_1GA=\angle BHA$ $\therefore \Delta AA_1G\sim\Delta ABH$(AA 相似)

$\Rightarrow \angle AA_1G=\angle ABH=120°$ $\Rightarrow \angle F_1A_1B_1=120°$(對頂角)，同理可證，六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為正六邊形

步驟 2:計算$\overline{AH}$



圖(八)、ΔAHH_1

做$\overline{BH_1}\perp\overline{HH_1}$於 H_1

$\because \angle ABH=120°$ $\therefore \angle HBH_1=60°$、$\angle BHH_1=30°$ $\therefore \overline{BH_1}:\overline{H_1H}:\overline{HB}=1:\sqrt{3}:2$

$\because \overline{BH}=m \ \therefore \overline{BH_1}=\frac{m}{2}$、$\overline{H_1H}=\frac{\sqrt{3}m}{2}$

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{HH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}+\overline{BH_1})^2+(\frac{\sqrt{3}m}{2})^2}=\sqrt{(m+n+\frac{m}{2})^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{(\frac{3m}{2}+n)^2+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{\frac{9m^2}{4}+3mn+n^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{3m^2+3mn+n^2}$

步驟 3:計算$\overline{A_1B_1}$

(1)證明$\Delta AA_1G \cong \Delta BB_1H$

在ΔAA_1G 和ΔBB_1H 中

$\because \overline{AG}=\overline{BH}$、$\angle AGA_1=\angle BHB_1(\because \Delta AA_1G \sim \Delta ABH)$、$\angle A_1AG=\angle B_1BH(\because \Delta BAH \cong \Delta CBI)$

$\therefore \Delta AA_1G \cong \Delta BB_1H$(ASA 全等)

(2)計算$\overline{A_1B_1}$

令$\overline{AH}=\sqrt{3m^2+3mn+n^2}=z$，$\overline{AA_1}=x$，$\overline{B_1H}=y \Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-x-y$

$\because \Delta AA_1G \cong \Delta BB_1H$ 且$\Delta AA_1G \sim \Delta ABH \Rightarrow \Delta AA_1D \sim \Delta ABH$、$\Delta BB_1E \sim \Delta ABH$

$\therefore x:m=(m+n):z$、$y:m=m:z \Rightarrow x=\frac{m(m+n)}{z}$、$y=\frac{m^2}{z}$

$\begin{cases} x=\frac{m(m+n)}{z} \\ y=\frac{m^2}{z} \end{cases}$ 代入$\overline{A_1B_1}=z-x-y$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=z-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2}{z}-\frac{m(m+n)}{z}-\frac{m^2}{z}=\frac{z^2-m^2-mn-m^2}{z}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

$z=\sqrt{3m^2+3mn+n^2}$代入$\overline{A_1B_1}=\frac{z^2-2m^2-mn}{z}$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1}=\frac{3m^2+3mn+n^2-2m^2-mn}{\sqrt{3m^2+3mn+n^2}}=\frac{m^2+2mn+n^2}{\sqrt{3m^2+3mn+n^2}}=\frac{(m+n)^2}{\sqrt{3m^2+3mn+n^2}}$

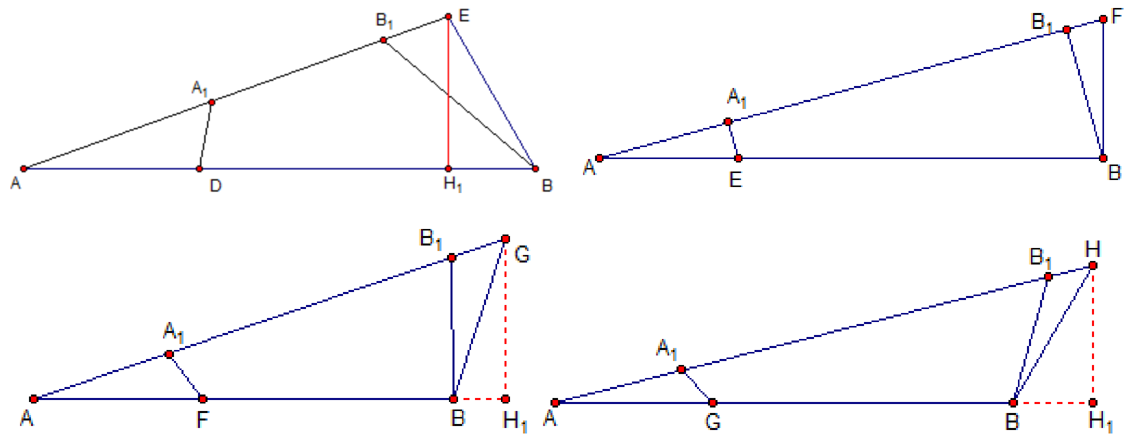
步驟 4:計算母子正六邊形之面積比值

$\frac{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}{ABCDEF}=\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{[\frac{(m+n)^2}{\sqrt{3m^2+3mn+n^2}}]^2}{(m+n)^2}=\frac{\frac{(m+n)^4}{3m^2+3mn+n^2}}{(m+n)^2}=\frac{(m+n)^4}{(m+n)^2 3m^2+3mn+n^2}=\frac{(m+n)^2}{3m^2+3mn+n^2}$

(五)推導母子正多邊形之面積比值之一般式

從計算母子正五邊形之面積比值時，我們發現計算過程中幾乎都是以三角函數下去做計算。因此我們將在計算母子正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形之面積比值時當中的一些數值拿來比較，並嘗試得出規律且推出一般式。

步驟 1.比較正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形之$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AG}$、$\overline{AH}$(切割線)



圖(九)、ΔABE(正三角形、左上)/ΔABF(正方形、右上)/

ΔAH_1G(正五邊形、左下)/ΔAH_1H(正六邊形、右下)

(1)$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{EH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}-\overline{BH_1})^2+(\frac{\sqrt{3}m}{2})^2}=\sqrt{(m+n-\frac{m}{2})^2+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{(\frac{m}{2}+n)^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{\frac{m^2}{4}+mn+n^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{m^2+mn+n^2}$

(2)$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BF}^2}\ =\sqrt{(m+n)^2+m^2}\ =\sqrt{2m^2+2mn+n^2}$

(3)$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{GH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}+\overline{BH_1})^2+(m\sin 72°)^2}=\sqrt{(m+n+m\cos 72°)^2+m^2\sin^2 72°}$

$=\sqrt{m^2+n^2+m^2\cos^2 72°+2mn+2mn\cos 72°+2m^2\cos 72°+m^2\sin^2 72°}$

$=\sqrt{(m^2+2mn+n^2)+(m^2\cos^2 72°+m^2\sin^2 72°)+(2m^2\cos 72°+2mn\cos 72°)}$

$=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°}$

(4)$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{HH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}+\overline{BH_1})^2+(\frac{\sqrt{3}m}{2})^2}=\sqrt{(m+n+\frac{m}{2})^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{(\frac{3m}{2}+n)^2+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{\frac{9m^2}{4}+3mn+n^2+\frac{3m^2}{4}}=\sqrt{3m^2+3mn+n^2}$

首先，從$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{EH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}-\overline{BH_1})^2+(\frac{\sqrt{3}m}{2})^2}$中，我們發現$\overline{BH_1}$可以寫成$m\cos 60°$($\because$正三角形內角為60°)，又因為$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$且$\overline{AB}$=m+n，所以

$\overline{AH}=\sqrt{(m+n+m\cos 120°)^2+(\frac{\sqrt{3}m}{2})^2}$

$=\sqrt{m^2+n^2+m^2\cos^2 120°+2mn+2mn\cos 120°+2m^2\cos^2 120°+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{(m+n)^2+m^2(-\frac{1}{2})^2+(m+n)2m\cos 120°+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 120°}$

我們發現，正三角形之切割線與正五邊形之切割線長度相似，只差在餘弦函數後的數字罷了。

接著繼續驗證正方形與正六邊形之切割線。

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{(m+n)^2+m^2}=\sqrt{2m^2+2mn+n^2}$

$\because \cos 90°=0 \ \therefore \overline{AF}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 90°}$

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AH_1}^2+\overline{HH_1}^2}=\sqrt{(\overline{AB}+\overline{BH_1})^2+(\frac{\sqrt{3}m}{2})^2}=\sqrt{(m+n+m\cos 60°)^2+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{m^2+n^2+m^2\cos^2 60°+2mn+2m^2\cos 60°+2mn\cos 60°+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{(m+n)^2+m^2(\frac{1}{2})^2+(m+n)2m\cos 60°+\frac{3m^2}{4}}$

$=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 60°}$

我們發現，正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形之切割線皆可以寫成

$\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°}$(θ為正多邊形之一外角之值)

並且正五邊形、正六邊形、正七邊形等邊數大於四的正多邊形，其切割線都可寫成

$\sqrt{(m+n+m\cos\theta°)^2+(m\sin\theta°)^2}$(θ為正多邊形之一外角之值)，因為邊數大於四的正多邊形

之外角皆小於 90 度。而此算式展開會變成$\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°}$，與我們從正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形得出的結論相同，因此我們可以得出一個結論:

任意正多邊形之切割線之值為$\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°}$(其中，θ為該正多邊形之一外角之數值)

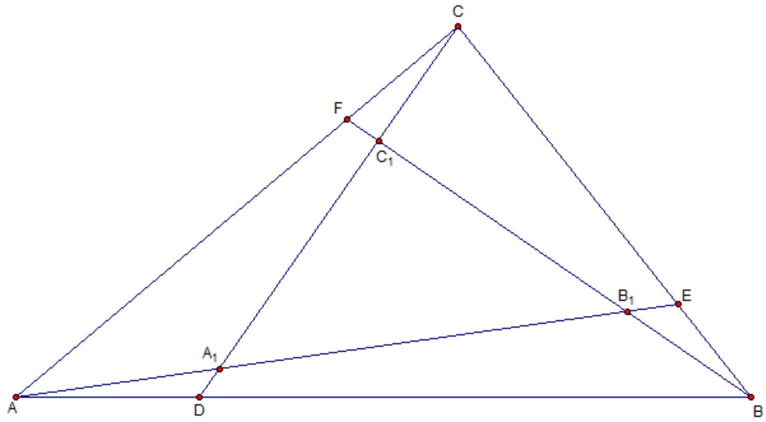
步驟 2.推導母子正多邊形之面積比值之一般式

我們得出切割線後，可以計算子正多邊形之邊長。由於以我們計算子正多邊形之邊長之方式在每個正多邊形上皆相同，因此只要將母子正五邊形之面積比值中，餘弦函數後之數值更改為某正多邊形之一外角之值便可得到某母子正多邊形之面積比值。所以我們推論後的結論，得到:

母子正多邊形之面積比值為$\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos\theta°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°]}$

(其中，θ為該正多邊形之一外角之數值)

三、任意三角形之邊長依等比例切割之面積比值(母子任意三角形之面積比值)探討

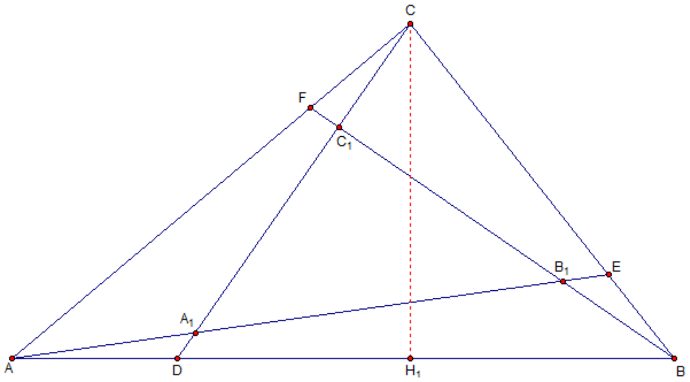


圖(十)、母子三角形 ABC 與$A_1B_1C_1$之示意

條件:在三角形 ABC 中，$\overline{AD}$: $\overline{DB}$=$\overline{BE}$: $\overline{EC}$=$\overline{CF}$: $\overline{FA}$=m:n

步驟 1:定義坐標-解析幾何

(1)定義 x 軸與 y 軸之正向



圖(十一)、做$\overline{CH_1} \perp \overline{AB}$於 H_1

做$\overline{CH_1} \perp \overline{AB}$於 H_1

令點 A 為原點，$\overrightarrow{AB}$為 x 軸之正向、$\overrightarrow{H_1C}$為 y 軸之正向，$\angle CAB<90°$，點 C 之 x 坐標介於點 A 和點 B 之 x 坐標，$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$、$\overline{AB}=c$

(2)定義坐標

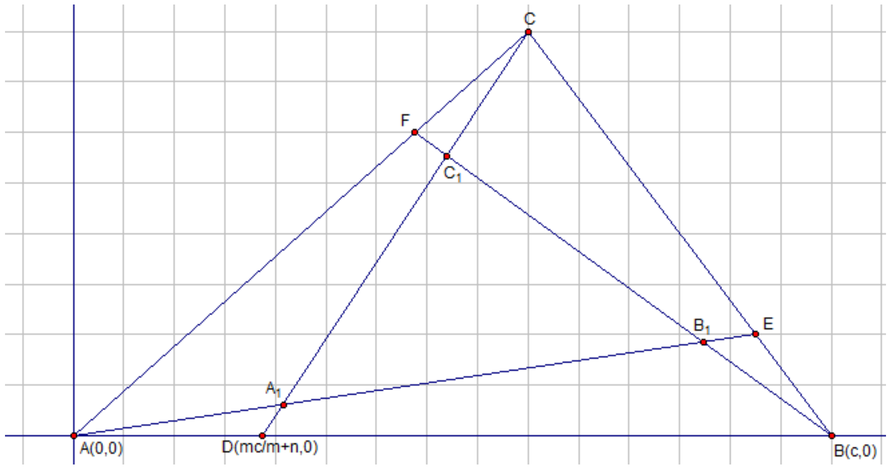
根據上述資訊，點 A 之坐標為(0,0)、點 B 之坐標為(c,0)、

點 C 之坐標為$\left(\sqrt{b^2-\overline{CH_1}^2}, \overline{CH_1}\right)$。

$\overline{CH_1}$可以表示為$\frac{2\times三角形面積}{c}$。根據海龍公式，三角形面積等於$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$，a、b、c 為三角形之三邊長。為了方便計算，我們令 $k= s(s-a)(s-b)(s-c)$，因此$\triangle ABC=\sqrt{k}$、$\overline{CH_1}=\frac{2\sqrt{k}}{c}$、點 C 之坐標為$\left(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}, \frac{2\sqrt{k}}{c}\right)$

$\because \overline{AD}:\overline{DB}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{CF}:\overline{FA}=m:n$，根據分點公式，點 D 之坐標為$\left(\frac{mc}{m+n},0\right)$、

點 E 的坐標為$\left(\frac{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}{m+n}, \frac{\frac{2m\sqrt{k}}{c}}{m+n}\right)$、點 F 的坐標為$\left(\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}, \frac{\frac{2n\sqrt{k}}{c}}{m+n}\right)$



圖(十二)、母子三角形 ABC 與$A_1B_1C_1$之各點坐標之示意(其中，點 C、E、F 之坐標在 GSP 軟體上較難呈現因此未打上，詳見步驟 1.之(2)定義坐標)

步驟 2:求直線方程式

令$\overleftrightarrow{AE}=L_1$、$\overleftrightarrow{BF}=L_2$、$\overleftrightarrow{CD}=L_3$

(1) L_1 直線方程式

令 L_1 為 $y=\alpha x$(過原點無常數)

$\left(\frac{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}{m+n},\frac{\frac{2m\sqrt{k}}{c}}{m+n}\right)$代入 $y=\alpha x$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2m\sqrt{k}}{c}}{m+n}=\alpha\times\frac{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}{m+n}\Rightarrow\frac{2m\sqrt{k}}{c}=\alpha\times\left(m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\frac{2m\sqrt{k}}{c}}{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}\Rightarrow\alpha=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}$$

$$\therefore L_1:y=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}x$$

(2) L_2 直線方程式

令 L_2 為$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$(兩點式)

$(c,0)$ $\left(\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n},\frac{\frac{2n\sqrt{k}}{c}}{m+n}\right)$代入$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

$$\Rightarrow\frac{0-\frac{\frac{2n\sqrt{k}}{c}}{m+n}}{c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}}=\frac{y-0}{x-c}\Rightarrow-\frac{\frac{2n\sqrt{k}}{c}}{m+n}x+\frac{\frac{2n\sqrt{k}}{c}}{m+n}\times c=\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)y\Rightarrow\frac{\frac{2n\sqrt{k}}{c}}{m+n}x+\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)y=\frac{\frac{2n\sqrt{k}}{c}}{m+n}\times c$$

$$\Rightarrow\frac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x+\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)y=\frac{2n\sqrt{k}}{m+n}$$

$\therefore L_2$: $\frac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x+(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n})y=\frac{2n\sqrt{k}}{m+n}$

(3) L_3 直線方程式

令 L_3 為$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$(兩點式)

$(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}},\frac{2\sqrt{k}}{c})$ $(\frac{mc}{m+n},0)$代入$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2\sqrt{k}}{c}-0}{\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n}}=\frac{y-0}{x-\frac{mc}{m+n}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{k}}{c}x-\frac{2\sqrt{k}}{c}\times\frac{mc}{m+n}=(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n})y$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{k}}{c}x-(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n})y=\frac{2\sqrt{k}}{c}\times\frac{mc}{m+n} \Rightarrow \frac{2\sqrt{k}}{c}x-(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n})y=\frac{2m\sqrt{k}}{m+n}$$

$\therefore L_3$: $\frac{2\sqrt{k}}{c}x-(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n})y=\frac{2m\sqrt{k}}{m+n}$

步驟 3:求交點之坐標

(1)求 L_1 和 L_3 之交點(A_1)坐標

$$\begin{cases} y=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}x & \dots(1) \\ \frac{2\sqrt{k}}{c}x-(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n})y=\frac{2m\sqrt{k}}{m+n} & \dots(2) \end{cases}$$

將(1)式代入(2)式

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{k}}{c}x-(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n})\times\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}x=\frac{2m\sqrt{k}}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{cm}x-(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n})\times\frac{1}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}x=\frac{1}{m+n} \Rightarrow \frac{1}{cm}x-\frac{\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}x=\frac{1}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}x-\frac{\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n}}{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}x=\frac{c}{m+n} \quad \Rightarrow x=\frac{\frac{c}{m+n}}{(\frac{1}{m}-\frac{\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n}}{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc})} \Rightarrow x=\frac{\frac{c}{m+n}}{(\frac{\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+\frac{nc}{m}}{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}-\frac{\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n}}{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc})}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\frac{c}{m+n}}{\frac{\frac{nc}{m}+\frac{mc}{m+n}}{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}} \Rightarrow x=\frac{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}{(\frac{nc}{m}+\frac{mc}{m+n})(m+n)} \Rightarrow x=\frac{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}{(\frac{n}{m}+\frac{m}{m+n})(m+n)} \Rightarrow x=\frac{m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc}{\frac{n(m+n)}{m}+m}$$

$$\Rightarrow x=\frac{m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc}{m^2+mn+n^2}$$ 代入(1)

$$\Rightarrow\ y=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}\times\frac{m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc}{m^2+mn+n^2}\ \Rightarrow\ y=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}\times\frac{m^2c\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc^2}{c(m^2+mn+n^2)}$$

$$\Rightarrow\ y=2m\sqrt{k}\times\frac{m}{c(m^2+mn+n^2)}\ \Rightarrow\ y=\frac{2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}$$

$\therefore A_1:(\frac{m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc}{m^2+mn+n^2},\frac{2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)})$

(2)求 L_1 和 L_2 之交點(B_1)坐標

$$\begin{cases}y=\dfrac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}x & \dots(1)\\[2ex] \dfrac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x+(c-\dfrac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n})y=\dfrac{2n\sqrt{k}}{m+n} & \dots(2)\end{cases}$$

將(1)式代入(2)式

$$\Rightarrow\frac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x+(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n})\times\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}x=\frac{2n\sqrt{k}}{m+n}$$

$$\Rightarrow x+(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n})\times\frac{2mc(m+n)\sqrt{k}}{2n\sqrt{k}(mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2)}x=\frac{2nc(m+n)\sqrt{k}}{2n(m+n)\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow x+(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n})\times\frac{m(m+n)}{n(m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc)}x=c\ \Rightarrow x+\frac{cm(m+n)}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}x-\frac{\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\times m(m+n)}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}x=c$$

$$\Rightarrow(1+\frac{cm(m+n)}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}-\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c})x=c$$

$$\Rightarrow(\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}+\frac{cm(m+n)}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}-\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c})x=c$$

$$\Rightarrow\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c+cm(m+n)-mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}x=c\ \Rightarrow\frac{n^2c+cm(m+n)}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}x=c\ \Rightarrow\frac{c(m^2+mn+n^2)}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}x=c$$

$$\Rightarrow\frac{m^2+mn+n^2}{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}x=1\ \Rightarrow x=\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}{m^2+mn+n^2}\text{代入(1)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}\times\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}{m^2+mn+n^2}\ \Rightarrow y=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}\times\frac{n\left(m\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc\right)}{m^2+mn+n^2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{2m\sqrt{k}}{mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2}\times\frac{n(mc\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+nc^2)}{c(m^2+mn+n^2)}\ \Rightarrow y=\frac{2mn\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}$$

$\therefore B_1:\left(\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}{m^2+mn+n^2},\frac{2mn\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}\right)$

(3)求 L_2 和 L_3 之交點(C_1)坐標

$$\begin{cases}\frac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x+\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)y=\frac{2n\sqrt{k}}{m+n} & \dots(1)\\ \frac{2\sqrt{k}}{c}x-\left(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n}\right)y=\frac{2m\sqrt{k}}{m+n} & \dots(2)\end{cases}$$

將(2)式$\times\frac{n}{m+n}$

$$\Rightarrow\frac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x-\frac{n}{m+n}\left(\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mc}{m+n}\right)y=\frac{2mn\sqrt{k}}{(m+n)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x-\left(\frac{n}{m+n}\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mnc}{(m+n)^2}\right)y=\frac{2mn\sqrt{k}}{(m+n)^2}\quad\dots(3)$$

將(1)式−(3)式

$$\Rightarrow\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)y+\left(\frac{n}{m+n}\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mnc}{(m+n)^2}\right)y=\frac{2n\sqrt{k}}{m+n}-\frac{2mn\sqrt{k}}{(m+n)^2}$$

$$\Rightarrow\left(c-\frac{n}{m+n}\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+\frac{n}{m+n}\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}-\frac{mnc}{(m+n)^2}\right)y=\frac{2n(m+n)\sqrt{k}}{(m+n)^2}-\frac{2mn\sqrt{k}}{(m+n)^2}$$

$$\Rightarrow\left(c-\frac{mnc}{(m+n)^2}\right)y=\frac{2n\sqrt{k}(m+n-m)}{(m+n)^2}\Rightarrow c\left(1-\frac{mn}{(m+n)^2}\right)y=\frac{2n^2\sqrt{k}}{(m+n)^2}\Rightarrow c\left(\frac{(m+n)^2}{(m+n)^2}-\frac{mn}{(m+n)^2}\right)y=\frac{2n^2\sqrt{k}}{(m+n)^2}$$

$$\Rightarrow c[(m+n)^2-mn]y=2n^2\sqrt{k}\Rightarrow c(m^2+mn+n^2)y=2n^2\sqrt{k}\Rightarrow y=\frac{2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}\text{代入(1)}$$

$$\Rightarrow\frac{2n\sqrt{k}}{c(m+n)}x+\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)\times\frac{2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}=\frac{2n\sqrt{k}}{m+n}\Rightarrow\frac{1}{c(m+n)}x+\frac{n\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)}{c(m^2+mn+n^2)}=\frac{1}{m+n}$$

$$\Rightarrow x+\frac{cn(m+n)\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)}{c(m^2+mn+n^2)}=\frac{c(m+n)}{m+n}\Rightarrow x+\frac{n(m+n)\left(c-\frac{n\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m+n}\right)}{m^2+mn+n^2}=c\Rightarrow x+\frac{cmn+cn^2-n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m^2+mn+n^2}=c$$

$$\Rightarrow x=c-\frac{cmn+cn^2-n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m^2+mn+n^2}\Rightarrow x=\frac{c(m^2+mn+n^2)}{m^2+mn+n^2}-\frac{cmn+cn^2-n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m^2+mn+n^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{cm^2+cmn+cn^2-cmn-cn^2+n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}}{m^2+mn+n^2}\Rightarrow x=\frac{n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+m^2c}{m^2+mn+n^2}$$

$\therefore C_1:\left(\frac{n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+m^2c}{m^2+mn+n^2},\frac{2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}\right)$

步驟 4:求$\frac{\Delta A_1B_1C_1}{\Delta ABC}$之值

$$\Delta A_1B_1C_1=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc}{m^2+mn+n^2} & \frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}{m^2+mn+n^2} & \frac{n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+m^2c}{m^2+mn+n^2} & \frac{m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc}{m^2+mn+n^2} \\ \frac{2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)} & \frac{2mn\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)} & \frac{2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)} & \frac{2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)} \end{matrix}\right\|$$

$=$

$$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc}{m^2+mn+n^2}\times\frac{2mn\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}+\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}{m^2+mn+n^2}\times\frac{2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}+\frac{n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+m^2c}{m^2+mn+n^2}\times\frac{2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}\right)-\right.$$

$$\left.\left(\frac{mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c}{m^2+mn+n^2}\times\frac{2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}+\frac{n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+m^2c}{m^2+mn+n^2}\times\frac{2mn\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}+\frac{m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc}{m^2+mn+n^2}\times\frac{2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\left(m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc\right)2mn\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}+\frac{\left(mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c\right)2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}+\frac{\left(n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+m^2c\right)2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}\right)-\right.$$

$$\left.\left(\frac{\left(mn\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+n^2c\right)2m^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}+\frac{\left(n^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+m^2c\right)2mn\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}+\frac{\left(m^2\sqrt{b^2-\frac{4k}{c^2}}+mnc\right)2n^2\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2m^3n\sqrt{k(b^2-\frac{4k}{c^2})}+2m^2n^2c\sqrt{k}+2mn^3\sqrt{k(b^2-\frac{4k}{c^2})}+2n^4c\sqrt{k}+2m^2n^2\sqrt{k(b^2-\frac{4k}{c^2})}+2m^4c\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}-\right.$$

$$\left.\frac{2m^3n\sqrt{k(b^2-\frac{4k}{c^2})}+2m^2n^2c\sqrt{k}+2mn^3\sqrt{k(b^2-\frac{4k}{c^2})}+2m^3nc\sqrt{k}+2m^2n^2\sqrt{k(b^2-\frac{4k}{c^2})}+2mn^3c\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}\right|$$

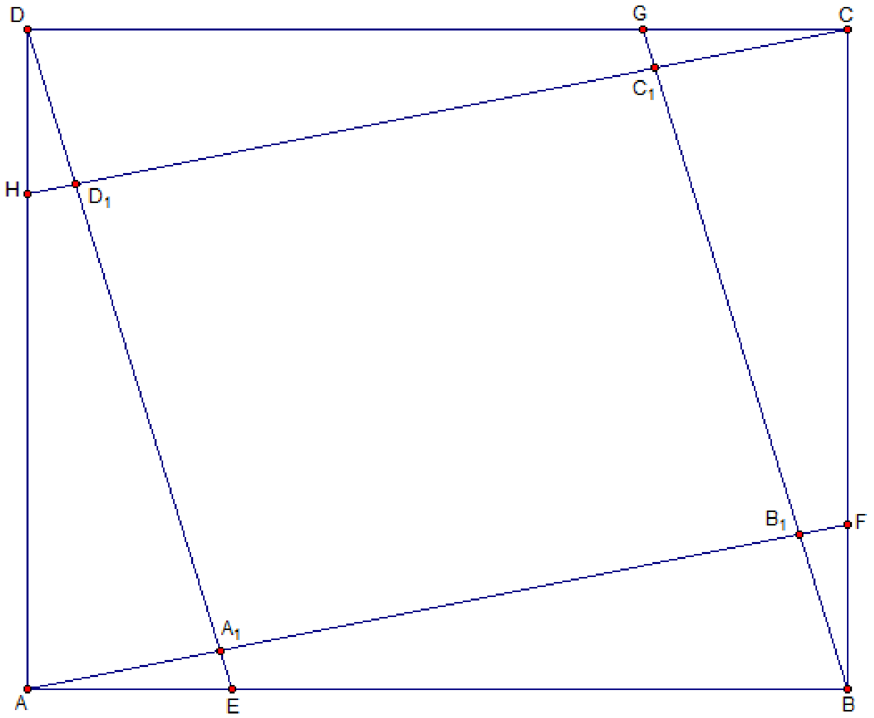
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2n^4c\sqrt{k}+2m^4c\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}-\frac{2m^3nc\sqrt{k}+2mn^3c\sqrt{k}}{c(m^2+mn+n^2)^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{2n^4\sqrt{k}+2m^4\sqrt{k}-2m^3n\sqrt{k}-2mn^3\sqrt{k}}{(m^2+mn+n^2)^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{2\sqrt{k}(m^4-m^3n-mn^3+n^4)}{(m^2+mn+n^2)^2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2\sqrt{k}(m-n)^2(m^2+mn+n^2)}{(m^2+mn+n^2)^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{2(m-n)^2\sqrt{k}}{m^2+mn+n^2}\right|$$

$\because m,n,k$ 必皆>0 $\therefore \frac{1}{2}\left|\frac{2(m-n)^2\sqrt{k}}{m^2+mn+n^2}\right|=\frac{1}{2}\times\frac{2(m-n)^2\sqrt{k}}{m^2+mn+n^2}=\frac{(m-n)^2\sqrt{k}}{m^2+mn+n^2}$ ，其中$\Delta ABC=\sqrt{k}$

故母子任意三角形之面積比值$\frac{\Delta A_1B_1C_1}{\Delta ABC}=\frac{\frac{(m-n)^2\sqrt{k}}{m^2+mn+n^2}}{\sqrt{k}}=\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}=\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

四、任意長方形之邊長依等比例切割之面積比值(母子任意長方形之面積比值)探討



圖(十三)、母子長方形 ABCD 與$A_1B_1C_1D_1$之示意

條件:在長方形 ABCD 中，$\overline{AE}$: $\overline{EB}$=$\overline{BF}$: $\overline{FC}$=$\overline{CG}$: $\overline{GD}$=$\overline{DH}$: $\overline{HA}$=m:n

步驟 1:定義坐標-解析幾何

令點 A 為原點，$\overrightarrow{AB}$為 x 軸之正向、$\overrightarrow{AD}$為 y 軸之正向，$\overline{AB}$=a、$\overline{AD}$=b

可知點 A 之坐標為(0,0)、點 B 之坐標為(a,0)、

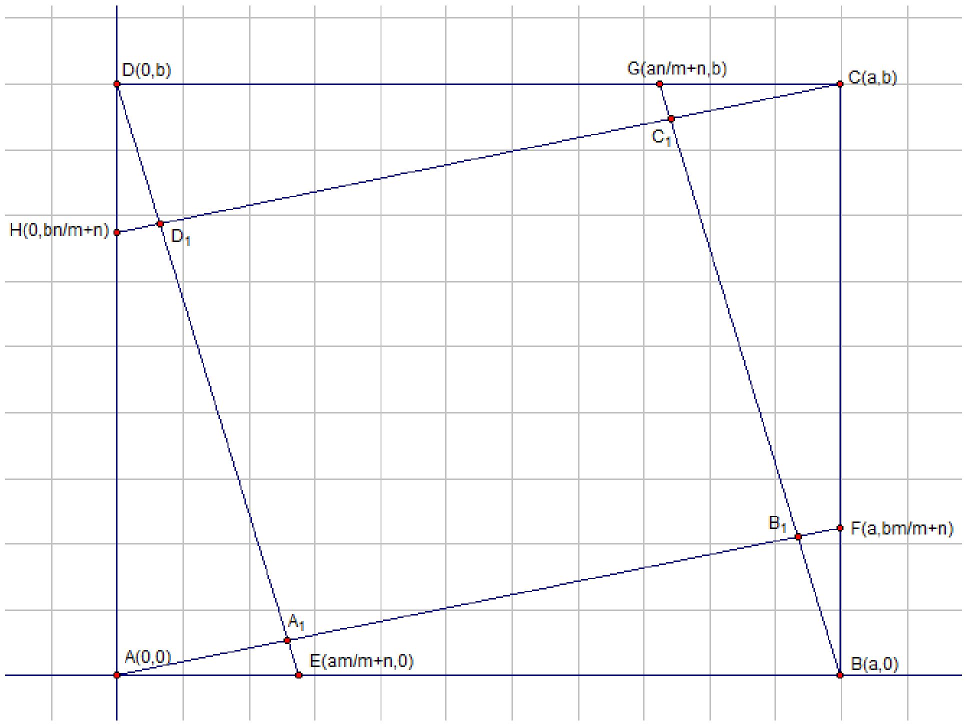
點 C 之坐標為(a,b)、點 D 之坐標為(0,b)

∵四邊形 ABCD 為長方形⇒ $\overline{AB}=\overline{CD}$、$\overline{BC}=\overline{DA}$；$\overline{AE}$: $\overline{EB}$=$\overline{BF}$: $\overline{FC}$=$\overline{CG}$: $\overline{GD}$=$\overline{DH}$: $\overline{HA}$=m:n

∴ $\overline{AE}=\overline{CG}$、$\overline{EB}=\overline{GD}$、$\overline{BF}=\overline{DH}$、$\overline{FC}=\overline{HA}$

⇒可知點 E 之坐標為$(a\times\frac{m}{m+n},0)$、點 F 之坐標為$(a,b\times\frac{m}{m+n})$、

點 G 之坐標為$(a\times\frac{n}{m+n},b)$、點 H 之坐標為$(0,b\times\frac{n}{m+n})$



圖(十四)、長方形 ABCD 之各點坐標之示意

步驟 2:求直線方程式

令$\overleftrightarrow{DE}=L_1$、$\overleftrightarrow{GB}=L_2$、$\overleftrightarrow{FA}=L_3$、$\overleftrightarrow{CH}=L_4$

其中 $L_1 // L_2$ 且 $L_3 // L_4$

$\because$ $\overline{AH}=\overline{FC}$且$\overline{AH}//\overline{FC}$ 而平行線的距離處處相等 $\therefore L_1 // L_2$，同理可證，$L_3 // L_4$

(1) L_1 直線方程式

L_1:$\frac{x}{\frac{am}{m+n}}+\frac{y}{b}=1$(截距式)

$\Rightarrow \frac{m+n}{am}x+\frac{1}{b}y=1 \Rightarrow \frac{1}{b}y=-\frac{m+n}{am}x+1 \Rightarrow y=-\frac{b(m+n)}{am}x+b$

(2) L_2 直線方程式

令 L_2 為 $y=-\frac{b(m+n)}{am}x+\beta$ ($\because L_2$ 與 L_1 平行$\Rightarrow$斜率相同)

(a,0)代入 L_2

$\Rightarrow 0=-\frac{b(m+n)}{am}\times a+\beta \Rightarrow 0=-\frac{b(m+n)}{m}+\beta \Rightarrow \beta=\frac{b(m+n)}{m}$

$\therefore L_2$:$y=-\frac{b(m+n)}{am}x+\frac{b(m+n)}{m}$

(3) L_3 直線方程式

令 L_3 為 $y=\alpha x$ (∵過原點無常數項)

$(a,\frac{bm}{m+n})$代入 L_3

$\Rightarrow \frac{bm}{m+n}=a\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{bm}{a(m+n)}$

$\therefore L_3: y=\frac{bm}{a(m+n)}x$

(4) L_4 直線方程式

令 L_4 為 $y=\frac{bm}{a(m+n)}x+\beta$(∵$L_4$ 與 L_3 平行⇒斜率相同)

$(0,\frac{bn}{m+n})$代入 L_4

$\Rightarrow \beta=\frac{bn}{m+n}$

$\therefore L_4: y=\frac{bm}{a(m+n)}x+\frac{bn}{m+n}$

步驟 3:求交點之 y 坐標

(1) 求 L_1 和 L_3 交點之 y 坐標

$$\begin{cases} y=-\frac{b(m+n)}{am}x+b \ldots (1) \\ y=\frac{bm}{a(m+n)}x \qquad\quad \ldots (2) \end{cases}$$

將(1)式代入(2)式

$\Rightarrow -\frac{b(m+n)}{am}x+b=\frac{bm}{a(m+n)}x \Rightarrow b=\frac{bm}{a(m+n)}x+\frac{b(m+n)}{am}x \Rightarrow b=\frac{bm^2}{am(m+n)}x+\frac{b(m+n)^2}{am(m+n)}x \Rightarrow b=\frac{b[m^2+(m+n)^2]}{am(m+n)}x$

$\Rightarrow 1=\frac{m^2+(m+n)^2}{am(m+n)}x \Rightarrow x=\frac{am(m+n)}{m^2+(m+n)^2}$ 代入(2)

$\Rightarrow y=\frac{bm}{a(m+n)}\times\frac{am(m+n)}{m^2+(m+n)^2} \Rightarrow y=\frac{bm^2}{m^2+(m+n)^2}$

(2) 求 L_2 和 L_3 交點之 y 坐標

$$\begin{cases} y=-\frac{b(m+n)}{am}x+\frac{b(m+n)}{m} & \dots(1) \\ y=\frac{bm}{a(m+n)}x & \dots(2) \end{cases}$$

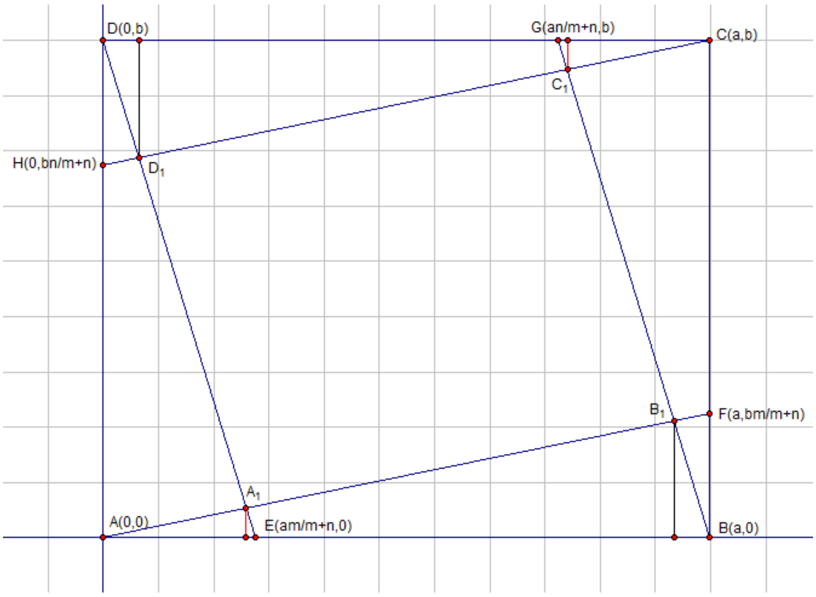
將(1)式代入(2)式

$$\Rightarrow -\frac{b(m+n)}{am}x+\frac{b(m+n)}{m}=\frac{bm}{a(m+n)}x \Rightarrow \frac{b(m+n)}{m}=\frac{bm}{a(m+n)}x+\frac{b(m+n)}{am}x \Rightarrow \frac{b(m+n)}{m}=\frac{bm^2}{am(m+n)}x+\frac{b(m+n)^2}{am(m+n)}x$$

$$\Rightarrow \frac{b(m+n)}{m}=\frac{b[m^2+(m+n)^2]}{am(m+n)}x \Rightarrow \frac{m+n}{m}=\frac{m^2+(m+n)^2}{am(m+n)}x \Rightarrow x=\frac{am(m+n)^2}{m[m^2+(m+n)^2]} \Rightarrow x=\frac{a(m+n)^2}{m^2+(m+n)^2}$$ 代入(2)

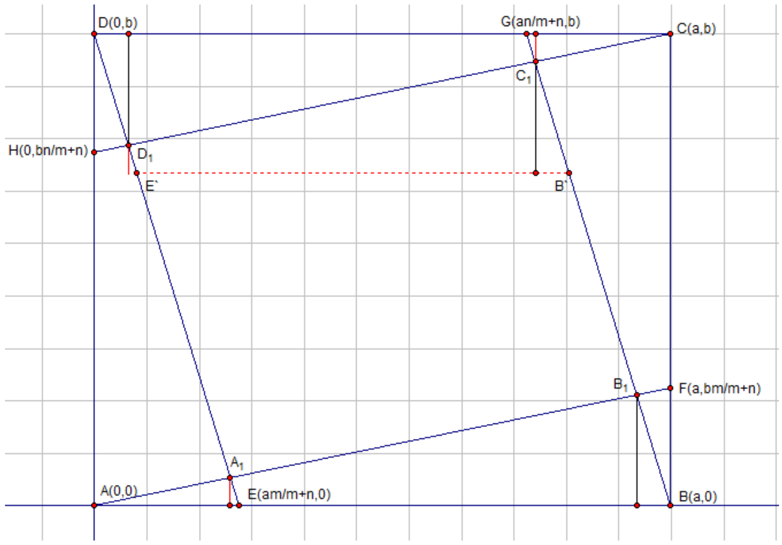
$$\Rightarrow y=\frac{bm}{a(m+n)}\times\frac{a(m+n)^2}{m^2+(m+n)^2} \Rightarrow y=\frac{bm(m+n)}{m^2+(m+n)^2}$$

步驟 4:計算母子任意長方形之面積比值



圖(十五)、母子長方形 ABCD 與 $A_1B_1C_1D_1$ 中等長線段標示之示例

在上圖中，我們可以發現圖中紅色線段(較短)及黑色線段(較長)，即為剛剛求之交點之 y 坐標之值。而因為$\Delta AA_1E\cong \Delta CC_1G$、$\Delta AB_1B\cong \Delta CD_1D$，且在全等三角形中同底必同高，故$\Delta AA_1E$與$\Delta CC_1G$ 之高相同、ΔAB_1B 與ΔCD_1D 之高相同。如果我們將四邊形 A_1B_1BE 平移至線段 C_1D_1 上，則會形成一個平行四邊形，底為線段$\overline{EB}$，高為一紅色線段和一黑色線段之長度之和。並在下方形成另一個四邊形 E`B`BE，而此平行四邊形面積與四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 相同。



圖(十六)、母子長方形 ABCD 與$A_1B_1C_1D_1$中四邊形 A_1B_1BE 平移至線段 C_1D_1 上之示例

$$\frac{A_1B_1C_1D_1}{ABCD}=\frac{\frac{an}{m+n}\times\left(b-\frac{bm^2}{m^2+(m+n)^2}+\frac{bm(m+n)}{m^2+(m+n)^2}\right)}{ab}=\frac{\frac{an}{m+n}\times\left[b-\frac{bm(2m+n)}{m^2+(m+n)^2}\right]}{ab}=\frac{\frac{abn}{m+n}-\frac{abmn(2m+n)}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}}{ab}$$

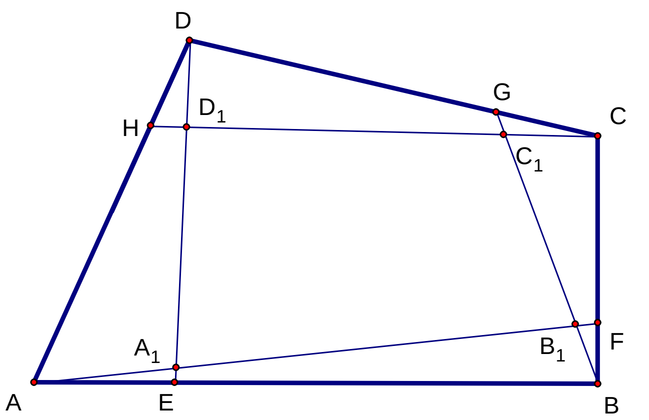
$$=\frac{n}{m+n}-\frac{mn(2m+n)}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}=\frac{n[m^2+(m+n)^2]}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}-\frac{mn(2m+n)}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}$$

$$=\frac{m^2n+m^2n+2mn^2+n^3}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}-\frac{2m^2n+mn^2}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}=\frac{mn^2+n^3}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}=\frac{n^2(m+n)}{(m+n)[m^2+(m+n)^2]}=\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$$

步驟 5:推導母子任意長方形之面積比值之一般式

根據上述結果，我們可以推導母子任意長方形之面積比值$\frac{A_1B_1C_1D_1}{ABCD}$之一般式為$\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

五、任意四邊形之邊長依等比例切割之面積比值(母子任意四邊形之面積比值)探討

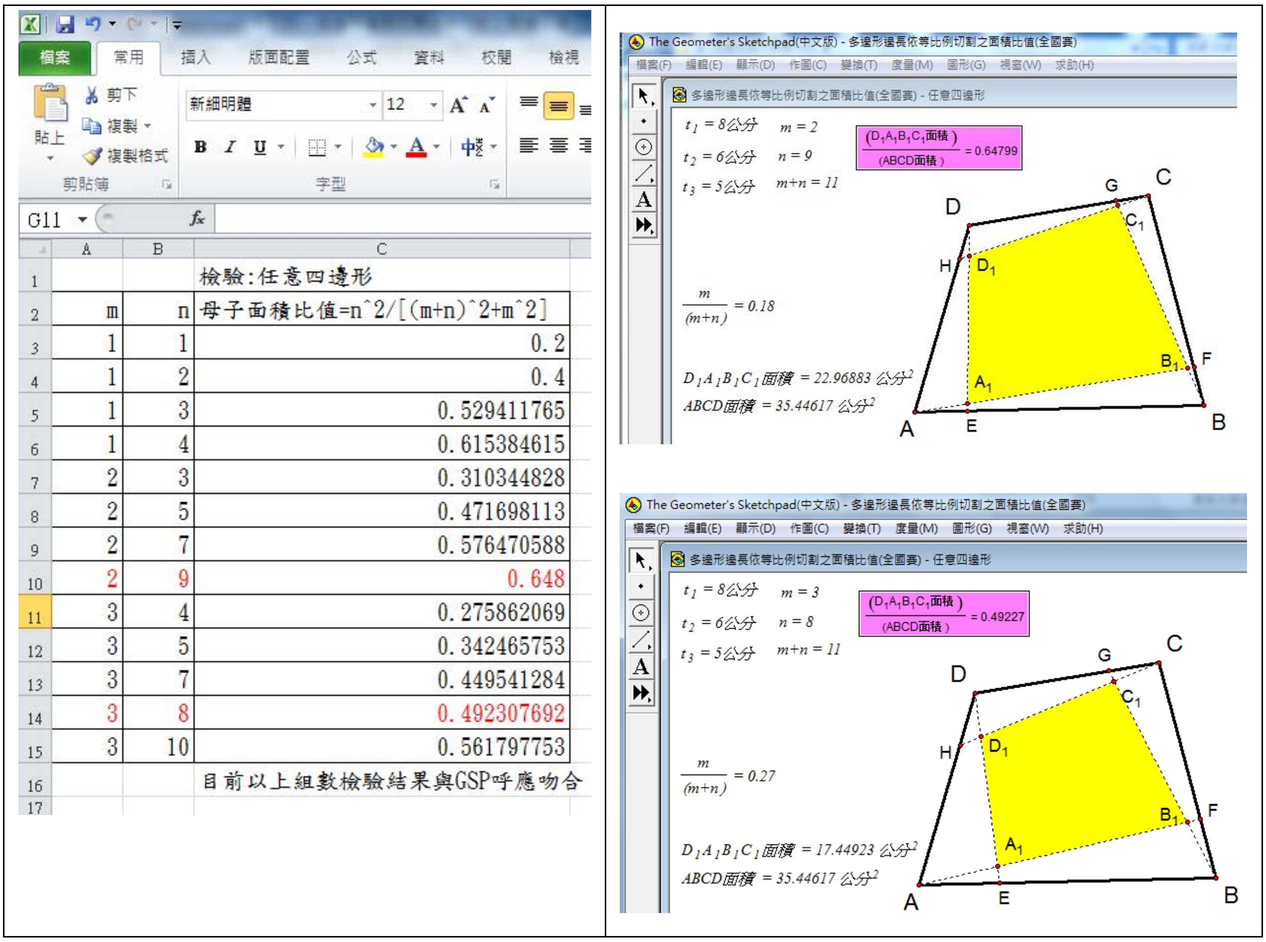


圖(十七)、母子任意四邊形 ABCD 與$A_1B_1C_1D_1$之示意

條件:在任意四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}$: $\overline{EB}$=$\overline{BF}$: $\overline{FC}$=$\overline{CG}$: $\overline{GD}$=$\overline{DH}$: $\overline{HA}$=m:n

步驟 1. 操作 GSP 繪圖軟體、Excel 軟體進行觀察

有了正三角形與任意三角形的成功經驗後，我們大膽假設母子任意四邊形將與任意長方形之面積比值之一般式均為$\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$，於是再度使用 GSP、Excel 進行觀察與驗證，赫然發現任意四邊形的一般式也成立，如圖(十八)。因此，我們開始進行紙筆計算與嚴謹的推理證明。



		檢驗:任意四邊形
m	n	母子面積比值=n^2/[(m+n)^2+m^2]
1	1	0.2
1	2	0.4
1	3	0.529411765
1	4	0.615384615
2	3	0.310344828
2	5	0.471698113
2	7	0.576470588
2	9	0.648
3	4	0.275862069
3	5	0.342465753
3	7	0.449541284
3	8	0.492307692
3	10	0.561797753
		目前以上組數檢驗結果與GSP呼應吻合

圖(十八)、操作 GSP、Excel 觀察與驗證之示意(註:GSP 計算機只能處理到小數點後第五位值)

步驟 2:定義直角坐標平面-解析幾何

令四邊形 ABCD 的坐標分別為 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，則透過分點公式算出切割點 E、F、G、H 的坐標，並依序計算出$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CH}$、$\overleftrightarrow{DE}$這四條切割的直線方程式如下:

$$\overleftrightarrow{AF}: y=\left[\frac{m(y_3-y_1)+n(y_2-y_1)}{m(x_3-x_1)+n(x_2-x_1)}\right](x-x_1)+y_1，\overleftrightarrow{BG}: y=\left[\frac{m(y_4-y_2)+n(y_3-y_2)}{m(x_4-x_2)+n(x_3-x_2)}\right](x-x_2)+y_2，$$

$$\overleftrightarrow{CH}: y=\left[\frac{m(y_1-y_3)+n(y_4-y_3)}{m(x_1-x_3)+n(x_4-x_3)}\right](x-x_3)+y_3，\overleftrightarrow{DE}: y=\left[\frac{m(y_2-y_4)+n(y_1-y_4)}{m(x_2-x_4)+n(x_1-x_4)}\right](x-x_4)+y_4$$

接著我們計算出四條切割線交點A_1、B_1、C_1、D_1的坐標。但因為它是不規律的任意子四邊形，於是我們嘗試行列式測量員面積公式，試圖計算任意子四邊形面積。然而，A_1、B_1、C_1、D_1的坐標夾雜了太多的未知數 m, n, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1,y_2,y_3, y_4，導致計算過程受到阻礙停滯不前。翻閱了很多參考文獻後，我們決定融入單位向量與線性轉換，以求將算式化簡並將面積比值獲得解決。

步驟 3:母多邊形坐標與面積進行線性轉換(原四邊形轉換成新四邊形)

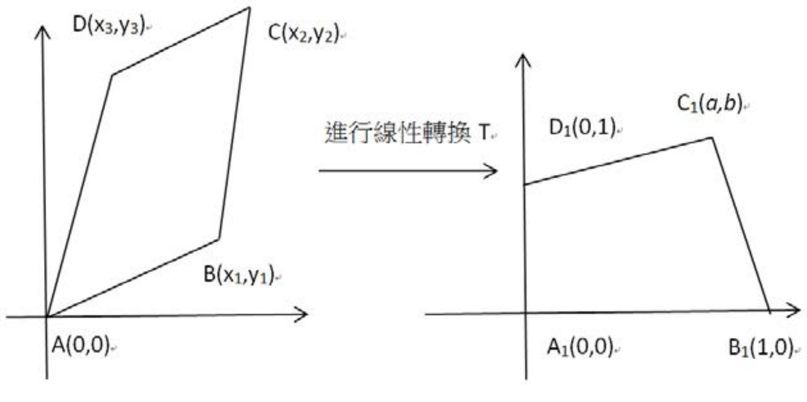
為了不失一般性，我們可以把 A 平移到原點，於是其任意四邊形的四個頂點座標假設為 A(0,0)，B(x_1,y_1)、C(x_2,y_2)、D(x_3,y_3)，經過線性轉換後，重新定義各點坐標分別為 A_1(0,0)、B_1(1,0)、D_1(0,1)

因此，我們定義線性轉換 T:$R^2 \rightarrow R^2$，藉著下列(1)~(3)條件:

(1)T(0,0)=(0,0)　(2)T(x_1,y_1)=(1,0)　(3) T(x_3,y_3)=(0,1)

則 $T(x,y)=\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{x_1y_3-x_3y_1}\begin{bmatrix} y_3 & -x_3 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，其中(x,y)∈ R^2

根據上述定義，可假設 C 點經過轉換後的新坐標 C_1 為 T(x_2 ,y_2)定義為(a,b) 。其中，$b > -a+1$，即A_1、C_1在$\overleftrightarrow{B_1D_1}$的兩側，$A_1B_1C_1D_1$為凸四邊形。所以經過 T 轉換後，四邊形 ABCD 整個區域會 1 對 1 映成到四邊形$A_1B_1C_1D_1$整個區域，如圖(十九)所示。



圖(十九)、原母四邊形 ABCD 與新母四邊形$A_1B_1C_1D_1$之線性轉換示意

根據文獻資料(六)內頁 P3.3-11~12 所述：若將原圖形△ABC 的各點座標進行平面線性變換 f(x,y)=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，則原圖形經過 f 轉換過，其新圖形$\triangle A_1B_1C_1$之面積=原圖形△ABC 面積✕$\left\|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right\|$。而任一區域可想像由無數多個小三角形合併而成，因此任一區域 R 及轉換R'之面積關係為新圖形R'之面積=原圖形 R 面積✕$\left\|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right\|$。

故由上述文獻可知$A_1B_1C_1D_1$面積=ABCD 面積✕$\left\|\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\right\|$。後續為方便書寫說明，我們簡記為: 新母多邊形面積=原母多邊形面積✕△，其中△=$\left\|\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\right\|$。

步驟 4:子多邊形坐標與面積進行線性轉換

同理，仿製步驟 2.3.的方法，我們計算得到轉換後的新子四邊形坐標為(x_{A_2},y_{A_2})、(x_{B_2},y_{B_2})、(x_{C_2},y_{C_2})、(x_{D_2},y_{D_2})分別如下:

$$\boldsymbol{A_2\left(\frac{m(am+n)}{(a+b)m^2+(a+1)mn+n^2},\frac{bm^2}{(a+b)m^2+(a+1)mn+n^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{B_2\left(\frac{(m+bn)(am+n)}{(a+b)m^2+(b+1)mn+bn^2},\frac{bm(m+bn)}{(a+b)m^2+(b+1)mn+bn^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{C_2\left(\frac{-an(m-an-n)+a(m+n)(m+bn)}{a(m+bn)(m+n)+(m-an+n)(bm+bn-n)},\frac{(m+bn)(an+bm+bn-n)}{a(m+bn)(m+n)+(m-an+n)(bm+bn-n)}\right)}$$

$$\boldsymbol{D_2\left(\frac{am^2}{a(m+n)^2+m(bm-n+bn)},\frac{ab(m+n)^2-(am+an-m)(bm-n+bn)}{a(m+n)^2+m(bm-n+bn)}\right)}$$

綜上所述，我們將上述四個交點坐標依逆時針方向代入行列式測量員面積公式:

n 邊形面積=$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots\ldots x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \ldots\ldots y_n & y_1 \end{matrix}\right\|}$，並求得母子任意四邊形面積如下:

(1)新母四邊形$\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1}$面積=$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}(a+b)}$ =原母四邊形面積╳△

(2)新子四邊形$\boldsymbol{A_2B_2C_2D_2}$面積=$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_{A_2} & x_{B_2} & x_{C_2} & x_{D_2} & x_{A_2} \\ y_{A_2} & y_{B_2} & y_{C_2} & y_{D_2} & y_{A_2} \end{matrix}\right\|}$

$\boldsymbol{=\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}}$ =原子四邊形面積╳△，而△=$\boldsymbol{\left\|\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\right\|}$

其中，子四邊形面積的行列式計算量非常繁複，但是各坐標的分子、分母具備規律性，經過鍥而不捨的計算過程後，發現冗長的行列式展開時，許多前項、後項彼此消去並可化簡。

最後由上述(1)(2)計算得 $\frac{\text{新子四邊形}}{\text{新母四邊形}}$**面積比值** $= \frac{\text{原子四邊形}\times\triangle}{\text{原母四邊形}\times\triangle} = \frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

根據上述結果，我們可以推導出:

母子任意四邊形之面積比值之一般式為$\frac{\mathbf{n^2}}{\mathbf{m^2+(m+n)^2}}$

伍、研究結果

我們藉由眾多數學概念，推論得到多邊形之邊長依逆時針方向等比例 m:n 切割後之面積比值確實均為定值，並透過 GSP 繪圖、Excel 軟體協助檢驗佐證結果如下:

一、母子正多邊形之面積比值一般式分述如下:

(一)正三角形: $\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

(二)正方形: $\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

(三)正五邊形: $\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos 72°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°]}$

(四)正六邊形: $\frac{(m+n)^2}{3m^2+3mn+n^2}$

(五)正多邊形: $\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos\theta°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°]}$ (其中，θ為此正多邊形某一外角之數值)

二、母子任意三角形之面積比值一般式: $\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

三、母子任意長方形之面積比值一般式: $\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

四、母子任意四邊形之面積比值一般式: $\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

陸、討論

一、在母子任意正方形與長方形之面積比值探討過程中，我們發現兩者之數值相同。這是因為正方形屬於長方形的一種，所以答案才會一樣。這結果讓我們後續開始嘗試探討任意四邊形，並且獲得合理的驗證，並順利得到相同的一般式。

二、我們原本猜測母子任意三角形之面積比值應該會與母子正三角形之面積比值雷同，而在前述「肆、研究過程」，我們已證實兩者確實相同，其面積比值均為定值無誤。

三、承上述第一和第二點的成功經驗，我們目前猜測任意母子 n 多邊形之面積比值將會存在一般式，這將是後續研究的目標。

柒、結論與未來展望

一、結論: 將多邊形之邊長依逆時針方向等比例 m:n 切割之母子面積比值如下:

(一)母子正多邊形之面積比值一般式為 $\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos\theta°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°]}$

(其中，θ為此正多邊形某一外角之數值)

(二)母子任意三角形之面積比值一般式為 $\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

(三)母子任意四邊形之面積比值一般式為 $\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

二、未來展望:本研究最大的限制在於處理任意四邊形的直線方程式、交點坐標與面積行列式時，其計算量過於龐大，耗時又費工。但是，我們透過 GSP 繪圖、Excel 統計軟體，輸入不同數值組合的切割比例，檢測結果發現任意母子四邊形的面積比值均為定值，這讓我們更有信心地利用「線性轉換」繼續研究探討並獲得結果。目前，我們又藉由操作 GSP 軟體發現，任意五邊形的邊長若按照相同比例(m:n)進行切割，其母子面積比值成定值。而且，任意三角形的三邊長若按照不同比例(m:n，a:b，c:d)進行切割，其母子面積比值也

成定值。這兩個重大發現將成為後續研究任意母子 n 邊形的動力。本次研究多邊形時，使用解析幾何與行列式的運算量似乎太複雜與龐大，或許未來我們可以嘗試運用中學數學課程中的三角形、四邊形、多邊形的幾何原理(如孟氏定理、西瓦定理等)，以尋求多元且簡易化的論證。

捌、參考資料及其他

一、林雅淇、簡艾蘋、張昌祐、游元璟。正多邊形母子面積比。

中華民國第 47 屆中小學科學展覽會國中組數學科

取自:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/high/030415.pdf

二、張博恩、張博淵、林家宇。層出不窮－利用無窮等比級數推算正多邊形的等分切割面積。

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會國中組數學科

取自:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/030407.pdf

三、吳映澄、吳映築、林靖軒。多邊形的等比例分割。

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會國中組數學科

取自:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-030416.pdf?468

四、洪有情等（2019）•國中數學教科書(第四冊、第五冊)•臺北市：康軒出版社。

五、許志農等（2018）•高中數學教科書(第三冊、第四冊)•臺北市：龍騰文化出版社。

六、徐清朗等（2005）•徐氏高中數學(五甲 B.矩陣、不等式)•高雄市：光朗出版社。

【評語】030410

本作品研究母子正三角形、正方形、正五邊形及正六邊形之面積比值，這是一個頗有意思的問題。作者們藉由坐標化的方式，針對這個問題，給出了完整的說明，也能夠藉助一些化簡的工具，透過計算來解決設定的一些問題，頗不容易，值得鼓勵。作者們只利用「直角坐標、畢氏定理、相似、三角函數、線性變換」等中學基本工具，並透過 GSP 繪圖 、 Excel 軟體協助檢驗佐證結果，結論完整，值得鼓勵。作品如果可以探討更廣泛的條件，應有更深的數學可以研究。在說明的過程中，作者們應該有注意到某一些結果其實是與角度無關的，這是不是表示這些結果是有可能可以避開長度的計算而得到呢？如果可以，應該可以讓作品看起來更精簡也更優美。

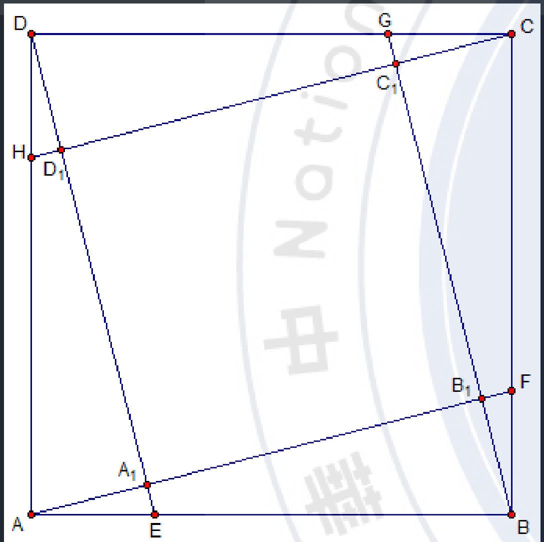
作品簡報

多邊形之邊長依等比例切割之面積比值探討

編號:030410
組別:國中組
科別:數學科

摘要

本研究旨在探討凸多邊形之邊長依逆時針方向等比例 m:n 切割之面積比值(以下均簡稱為母子多邊形之面積比值)。我們依序研究各種母子正多邊形之面積比值，並推導出任意母子正k邊形之面積比值均可用m、n、$\cos\theta$ 表示，其中 $\theta=\frac{360°}{k}$ 為正k邊形一外角。最後，我們推導出母子任意三角形、任意四邊形結果分別與正三角形、正方形之母子面積比值相同，其值均可用m、n表示。



圖(一)、正方形ABCD之邊長依等比例m:n切割之示例

運用概念

1. 直角坐標、畢氏定理、全等、相似、三角函數等
   →母子正多邊形之面積比值
2. 解析幾何、海龍公式、行列式、測量員(surveyor)面積公式、單位向量、線性轉換
   →母子任意三角形、任意四邊形之面積比值

研究動機

某天，數學老師補充了一道練習題，內容如下:「如圖(一)，有一正方形 ABCD，若由四個頂點依逆時針方向將其邊長按照1:3等比例切割，使得 $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{BF}:\overline{FC}=\overline{CG}:\overline{GD}=\overline{DH}:\overline{HA}=1:3$，則求四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 與 ABCD 之面積比值為何?」於是我們就開始研究此類題型，並拓展延伸至任意切割比例(m:n)以及探討其他任意凸多邊形之情況。

研究目的

一、探討正多邊形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。
二、探討任意三角形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。
三、探討任意長方形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。
四、探討任意四邊形之邊長依等比例切割之面積比值，並嘗試找出一般式。

研究設備與器材

筆記本、黑板、粉筆、電腦、GSP 繪圖軟體(THE GEOMETER'S SKETCHPAD)、Excel 統計軟體

研究過程與方法—定義

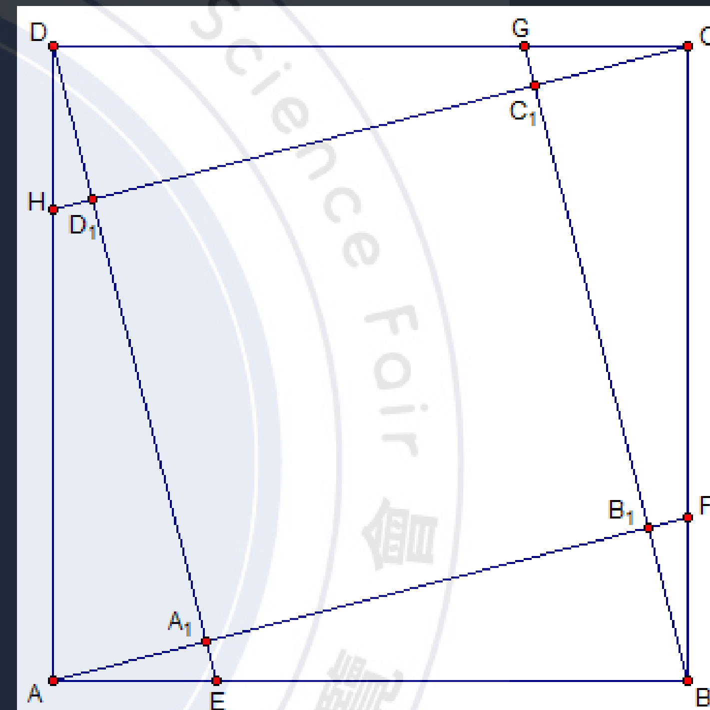
(一)**母多邊形**:泛指原本的凸多邊形，如圖(二)中多邊形ABCD。

(二)**切割點**:泛指從頂點開始以逆時針將邊長以m:n 之切割方式所產生之點，如圖(二)中，點E、點F、點G、點H。

(三)**切割線**:泛指將母多邊形進行切割之線段，即頂點以逆時針方向尋找第二個切割點所連接之線段，如圖(二)中線段$\overline{AF}$、$\overline{BG}$、$\overline{CH}$、$\overline{DE}$。

(四)**子多邊形**:泛指所有切割線共同圍成之多邊形區域，如圖(二)中多邊形$A_1B_1C_1D_1$。

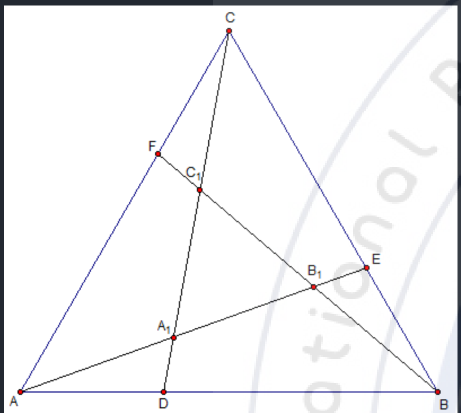
(五)**母子多邊形之面積比值**: 泛指子多邊形面積與母多邊形面積之比值。



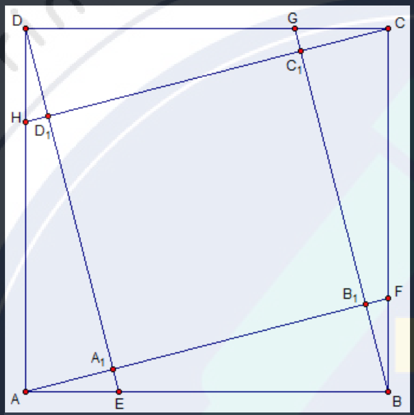
圖(二)、正方形ABCD之邊長依等比例m:n切割之示例

為求版面與算式簡潔，故「多邊形之邊長依等比例切割之面積比值」在「研究過程與方法」中簡寫為「母子多邊形之面積比值」，以便探討各邊長經過等比例 m:n 切割後，子多邊形**面積將變為母**多邊形**面積的幾分之幾**。

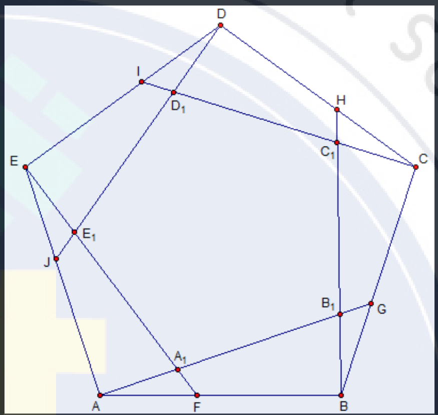
研究過程與方法—正多邊形之邊長依等比例切割之面積比值(母子正多邊形之面積比值)探討



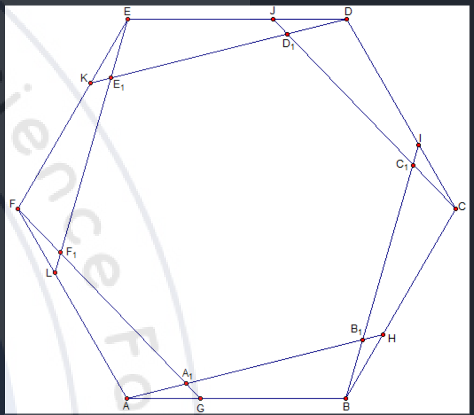
圖(三)、母子正三角形ABC與$A_1B_1C_1$之示例



圖(四)、母子正方形ABCD與$A_1B_1C_1D_1$之示例



圖(五)、母子正五邊形ABCDE與$A_1B_1C_1D_1E_1$之示例



圖(六)、母子正六邊形ABCDEF與$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$之示例

母子多邊形之面積比值:

正三角形: $\dfrac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

正方形: $\dfrac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

正五邊形: $\dfrac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos 72°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°]}$

正六邊形: $\dfrac{(m+n)^2}{3m^2+3mn+n^2}$

條件:各邊長依逆時針等比例 m:n 切割

推導步驟

(1)證明子多邊形為正多邊形
(2)計算一條切割線之長度
(3)計算子(正)多邊形之邊長
(4)計算母子多邊形之面積比值

研究過程與方法—正k邊形之邊長依等比例切割之面積比值(母子正k邊形之面積比值)探討

從計算母子正五邊形之面積比值時，我們發現計算過程中幾乎都是以三角函數下去做計算。因此我們在計算母子正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形之面積比值時，將其中的一些數值拿來比較，並嘗試找出規律且推導一般式。

正k邊形切割線長度

$=\sqrt{(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta^\circ}$(其中，$\theta=\frac{360^\circ}{k}$為該正k邊形之一外角之數值)

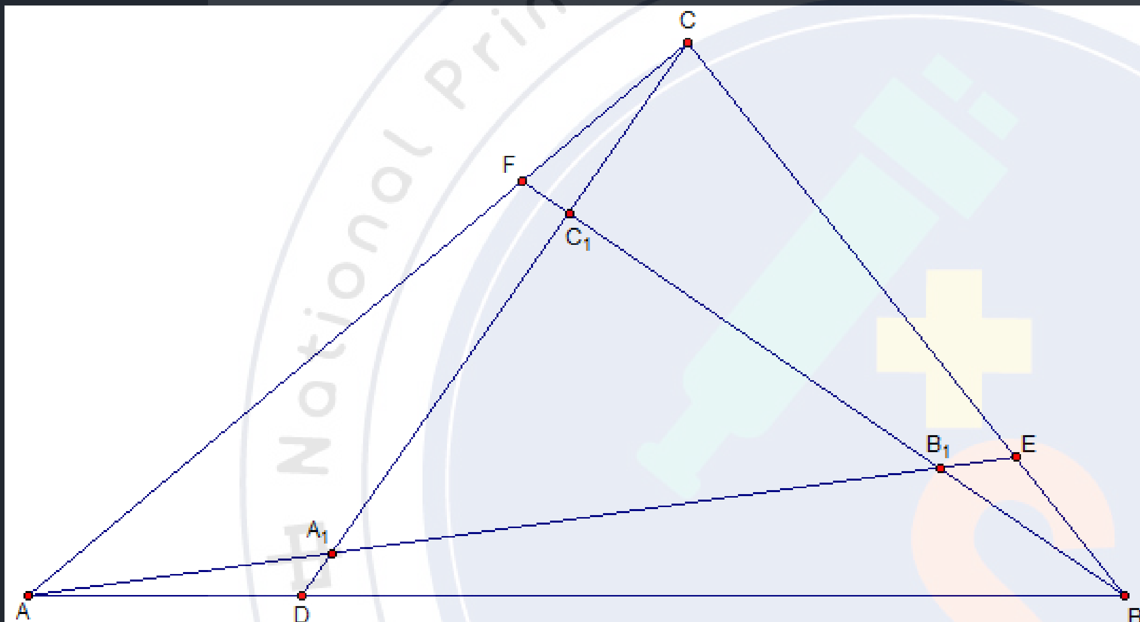
我們得出切割線長度後，即得子正k邊形之邊長。由於我們使用相同的方式去計算子正k邊形之邊長，因此只要將母子正五邊形之面積比值中的餘弦函數($\cos\theta$)，更改為所需正k邊形之一外角$\theta=\frac{360^\circ}{k}$後，便可得到某母子正k邊形之面積比值。

結論一

母子正k邊形之面積比值為$\dfrac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos\theta^\circ]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta^\circ]}$

(其中，$\theta=\frac{360^\circ}{k}$為該正多邊形之一外角之數值)

研究過程與方法—任意三角形之邊長依等比例切割之面積比值(母子任意三角形之面積比值)探討



圖(七)、母子三角形ABC與$A_1B_1C_1$之示例

母子任意三角形之面積比值:$\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

條件:邊長依逆時針等比例 m:n 切割

推導步驟

(1)定義坐標—解析幾何

a.定義x軸與y軸之正向

b.定義坐標

(2)求直線方程式

($\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CD}$)

(3)求交點坐標

(A_1、B_1、C_1)

(4)海龍、行列式

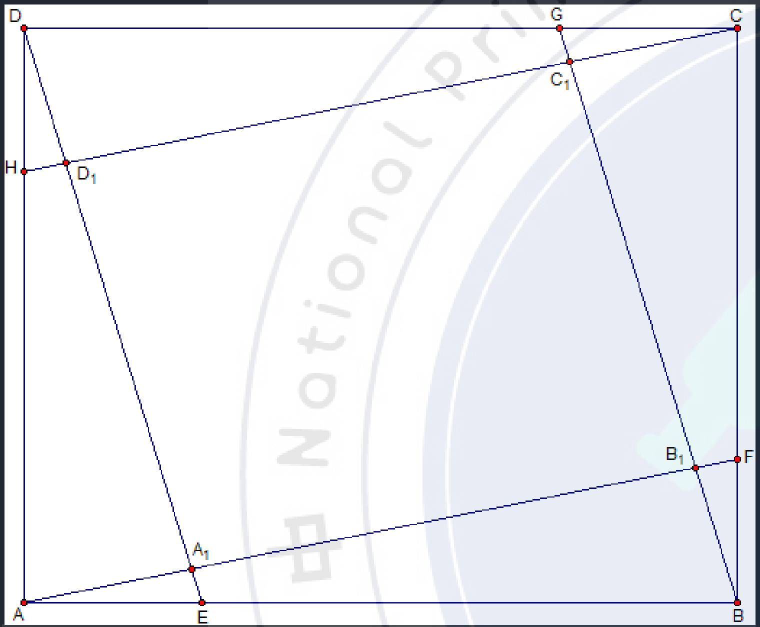
計算母子任意三角形之面積比值

結論二

母子任意三角形之面積比值為$\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

(此方法亦可適用於母子正三角形，即θ=120°代入結論一，兩者比值相同)

研究過程與方法—任意長方形之邊長依等比例切割之面積比值(母子任意長方形之面積比值)探討



圖(八)、母子長方形ABCD與$A_1B_1C_1D_1$之示意

條件:邊長依逆時針等比例 m:n 切割

推導步驟

(1)定義坐標—解析幾何

a.定義x軸與y軸之正向

b.定義坐標

(2)求直線方程式

($\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{GB}$、$\overleftrightarrow{FA}$、$\overleftrightarrow{CH}$)

(3)求交點之y坐標

a.求$\overleftrightarrow{DE}$和$\overleftrightarrow{FA}$交點之y坐標

b.求$\overleftrightarrow{GB}$和$\overleftrightarrow{FA}$交點之y坐標

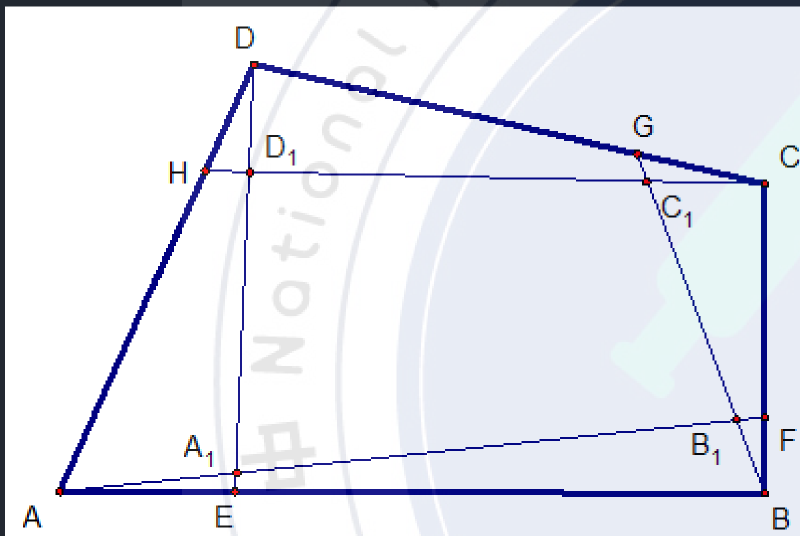
(4)計算母子任意長方形之面積比值

(四邊形A_1B_1BE平移至線段C_1D_1上)

母子任意長方形之面積比值:$\dfrac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

(以方法亦可適用於母子正方形，即θ=90°代入結論一，兩者比值相同)

研究過程與方法—任意四邊形之邊長依等比例切割之面積比值(母子任意四邊形之面積比值)探討



圖(九)、母子任意四邊形ABCD與$A_1B_1C_1D_1$之示意

條件:邊長依逆時針等比例 m:n 切割

推導步驟

(1)操作GSP繪圖軟體、Excel軟體進行觀察

(2)解析幾何、行列式計算量龐大

(3)母多邊形坐標與面積進行線性轉換(原四邊形轉換成新四邊形)

(4)子多邊形坐標與面積進行線性轉換

(5)計算母子任意四邊形之面積比值

母子任意四邊形之面積比值:$\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

結論三

母子任意四邊形之面積比值為$\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

(此方法亦可適用於母子正方形、任意長方形，驗證其面積比值相同，殊途同歸)

研究結果

一、母子正多邊形之面積比值一般式分述如下:

(一)正三角形: $\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$ (二)正方形: $\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

(三)正五邊形: $\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos 72°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos 72°]}$

(四)正六邊形: $\frac{(m+n)^2}{3m^2+3mn+n^2}$

(五)正k邊形: $\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos\theta°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°]}$

(其中，$\theta=\frac{360°}{k}$為此正k邊形某一外角之數值)

二、母子任意三角形之面積比值一般式: $\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

三、母子任意長方形之面積比值一般式: $\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

四、母子任意四邊形之面積比值一般式: $\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

討論

一、在母子正方形與任意長方形之面積比值探討過程中，我們發現兩者之數值相同。這是因為正方形本來就屬於長方形的一種，故答案相同。這結果讓我們後續開始嘗試探討任意四邊形，並得到相同的一般式。

二、我們原本猜測母子任意三角形之面積比值應該會與母子正三角形之面積比值雷同，而我們研究後已證實兩者確實會相同。

三、承上述第一和第二點的成功經驗，我們目前猜測任意母子多邊形之面積比值，將會存在一般式，這將是後續研究的目標。

結論

一、母子正k邊形之面積之一般式為

$$\frac{[mn+n^2+(m+n)2m\cos\theta°]^2}{(m+n)^2[(m+n)^2+m^2+(m+n)2m\cos\theta°]}$$

(其中，$\theta=\frac{360°}{k}$為此正k邊形某一外角之數值)

二、母子任意三角形之面積比值一般式為$\frac{(n-m)^2}{(m+n)^2-mn}$

三、母子任意四邊形之面積比值一般式為$\frac{n^2}{m^2+(m+n)^2}$

本研究最大的限制在於處理任意四邊形的直線方程式、交點坐標與面積行列式時，其計算量過於龐大，耗時又費工。但是透過GSP繪圖、Excel統計軟體，輸入不同數值組合的切割比例，檢測結果發現任意母子四邊形的面積比值均為定值，這讓我們更有信心地利用「線性轉換」繼續研究探討並終於獲得結果。目前，我們又藉由操作GSP軟體發現，任意五邊形的邊長若按照相同比例(m:n)進行切割，其母子面積比值成定值。此外，任意三角形的三邊長若按照不同比例(m:n、a:b、c:d)進行切割，其母子面積也成定值。這兩個重大發現將成為後續研究任意母子k多邊形的動力。此外，本次研究多邊形時所使用解析幾何的運算量似乎太複雜與龐大，或許未來我們可以嘗試運用中學課程中的三角形、四邊形等幾何原理(如孟氏定理、西瓦定理等)，以尋求多元且簡易化的論證。

未來展望

參考資料及其他

一、林雅淇、簡艾蘋、張昌祐、游元璟。正多邊形母子面積比。 中華民國第47屆中小學科學展覽會國中組數學科
取自:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/high/030415.pdf

二、張博恩、張博淵、林家宇。層出不窮 - 利用無窮等比級數推算正多邊形的等分切割面積。 中華民國第52屆中小學科學展覽會國中組數學科
取自:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/030407.pdf

三、吳映澄、吳映築、林靖軒。多邊形的等比例分割。 中華民國第60屆中小學科學展覽會國中組數學科
取自:https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-030416.pdf?468

四、洪有情等（2019）•國中數學教科書(第四冊、第五冊)•臺北市：康軒出版社。

五、許志農等（2018）•高中數學教科書(第三冊、第四冊)•臺北市：龍騰文化出版社。

六、徐清朗等（2005）•徐氏高中數學(五甲 B.矩陣、不等式)•高雄市：光朗出版社。