中華民國第62屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030405

相切六芒星

學校名稱：臺北市立龍山國民中學

作者：	指導老師：
國二 徐子宸	許家源 薛圳宏

關鍵詞：相切六芒星、共切圓三角形、切線段定理

摘要

在數學上，六芒星是指由兩個正三角形顛倒疊在一起而成的圖形，且以交點為頂點形成正六邊形。本文先給定一三角形(此稱原三角形)，其三頂點與內心連線交內切圓之三點為切點，過此三切點作切線所形成的三角形(此稱共切圓三角形)，由原三角形與共切圓三角形所形成圖形稱為相切六芒星。

本研究主要探討相切六芒星中的原三角形、共切圓三角形及尖角三角形的幾何性質，首先利用尺規作圖建構相切六芒星時，推導出共切圓三角形的角度性質。進一步探討共切圓三角形的邊截線段恆等式及鏢形面積等性質，也探討尖角三角形中的所有內切圓半徑恆等式及相切六芒星中的共線(點)性質。最後將相切六芒星推廣至(非)相切 $2n$ 芒星，也推導出一些有趣的性質。

壹、前言

上專題課時，老師談到「**任意三角形皆有內切圓且此內切圓的圓心稱為內心**」。當時就聯想：給定一個 $\Delta A_1A_2A_3$ (我們稱 $\Delta A_1A_2A_3$ 為**原三角形**)，則與 $\Delta A_1A_2A_3$ 有共同內切圓的三角形會有無限多個，如圖 1 中 $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta D_1D_2D_3$。在這些三角形中，只有一個與圓的三個切點恰為連接 $\overline{A_1I}$ 、 $\overline{A_2I}$ 、 $\overline{A_3I}$ 與圓 I 的交點，如圖 2 中 $\Delta B_1B_2B_3$。

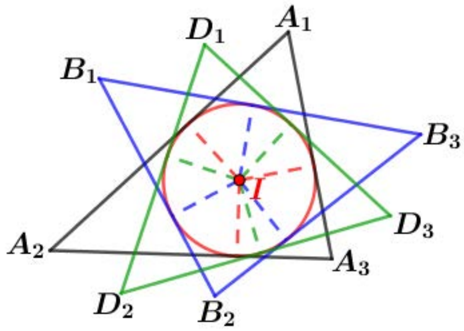


圖 1：共同內切圓的三角形

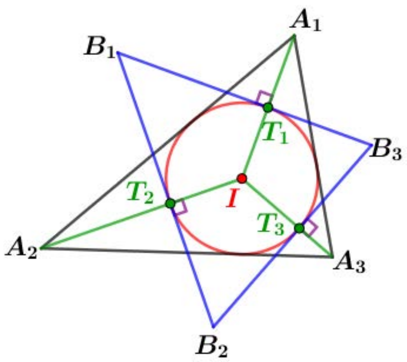


圖 2：相切六芒星

本研究感興趣於探討相切六芒星會有什麼幾何性質呢？於是提出三個研究問題是：**「如何由共切圓三角形找出原三角形呢？」**、**「相切六芒星有哪些幾何性質呢？」**、**「推廣至（非）相切$2n$芒星又有哪些幾何性質呢？」**因此便探索這其中的奧妙。

本作品的研究目的有五項：

一、利用尺規作圖建構相切六芒星並探討作圖的充要條件。

二、探討共切圓三角形中的幾何性質包含邊截線段、邊截線段恆等式及鏢形的面積。

三、探討原三角形與尖角三角形的內切圓半徑間的幾何性質。

四、探討相切六芒星中的共線與共點性質。

五、推廣相切六芒星至（非）相切$2n$芒星的幾何性質。

貳、研究架構

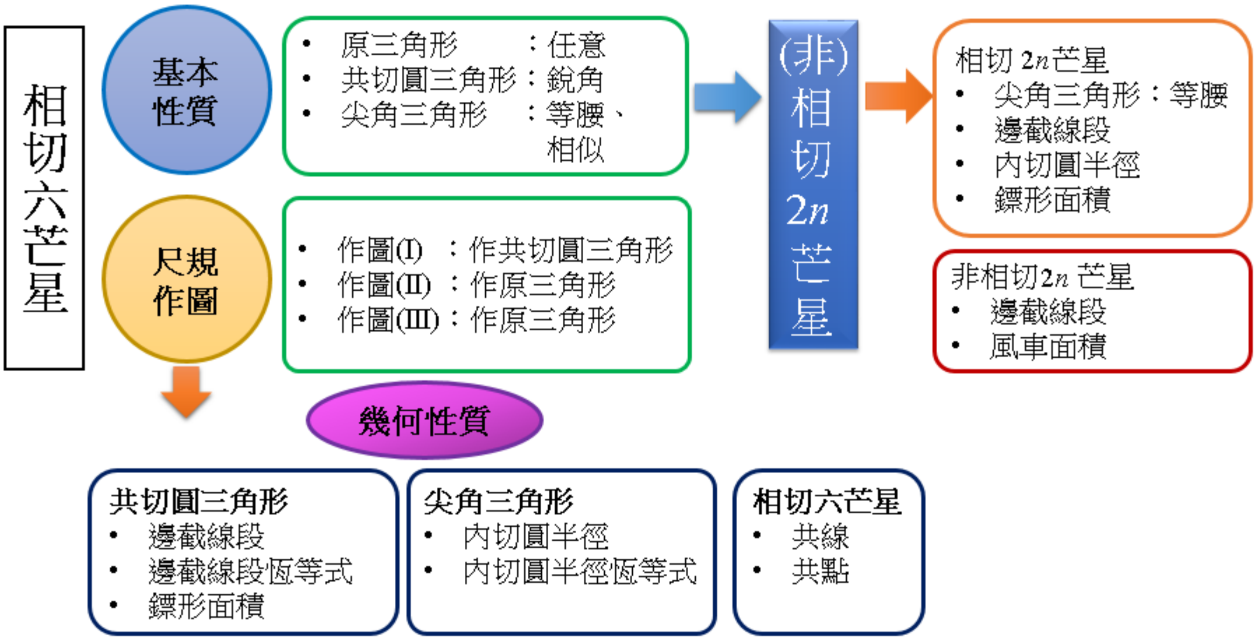


圖 3：研究架構

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦與程式 GeoGebra。

肆、研究方法與過程

一、名詞定義與預備定理

(一)名詞定義

【定義 1】(相切六芒星與共切圓三角形)

給定$\Delta A_1A_2A_3$及其內切圓I，設$\overline{A_1I}$、$\overline{A_2I}$、$\overline{A_3I}$交圓I於T_1,T_2,T_3，若分別過T_1,T_2,T_3作切線，其三條切線兩兩相交於B_1,B_2,B_3，得到$\Delta B_1B_2B_3$，如圖 4。另外設$\Delta A_1A_2A_3$與圓I切於U_1、U_2、U_3，則此$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta B_1B_2B_3$所構成之圖形稱為**相切六芒星**，同時稱$\Delta B_1B_2B_3$是$\Delta A_1A_2A_3$的**共切圓三角形**。

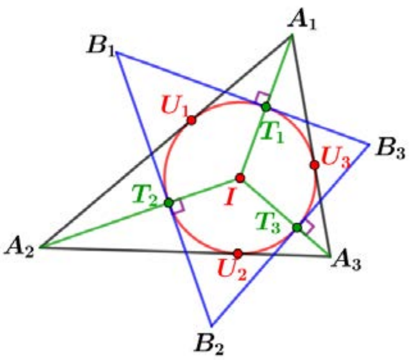


圖 4：相切六芒星

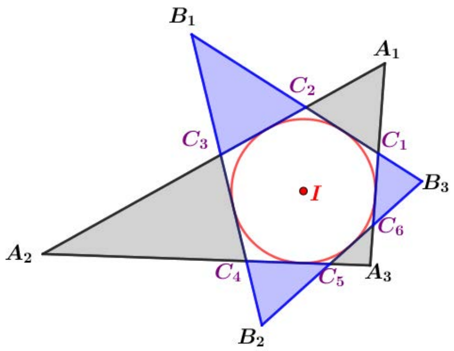


圖 5：尖角三角形

【定義 2】(相切六芒星中尖角三角形)

若$\Delta B_1B_2B_3$是$\Delta A_1A_2A_3$的**共切圓三角形**，且兩三角形的三邊交點分別為C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、C_6，則$\Delta A_1C_1C_2$、$\Delta A_2C_3C_4$、$\Delta A_3C_5C_6$、$\Delta B_1C_2C_3$、$\Delta B_2C_4C_5$及$\Delta B_3C_1C_6$稱為此相切六芒星的六個**尖角三角形**，如圖 5。

【定義 3】(相切$2n$ $(n\geq 3)$芒星)

設n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$ $(n\geq 3)$有內切圓，圓心為I，若$\overline{A_iI}$ $(i=1,\ldots,n)$交圓I於T_i，分別過T_i作n條切線形成n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$，如圖 6，則n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$與n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$所構成之圖形稱為**相切$2n$芒星**，且稱n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$為n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的**共切圓n邊形**。

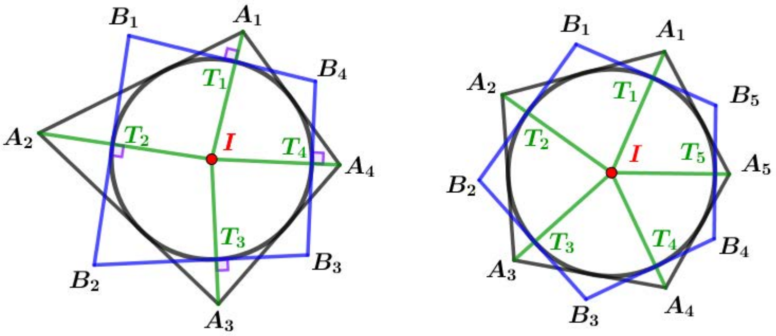


圖 6：相切 $2n$ 芒星中 $n=4,5$ 的情形

另外，當 $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 有共同的內切圓，且彼此互不為共切圓三角形，則此圖形稱為**非相切六芒星**，如圖 7，其中 $S_1,S_2,\cdots,S_6$ 為非相切六芒星與圓 I 的切點。若 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 與 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 有共同的內切圓，且彼此互不為共切圓 n 邊形，則此圖形稱為**非相切 $2n(n\geq 3)$ 芒星**。

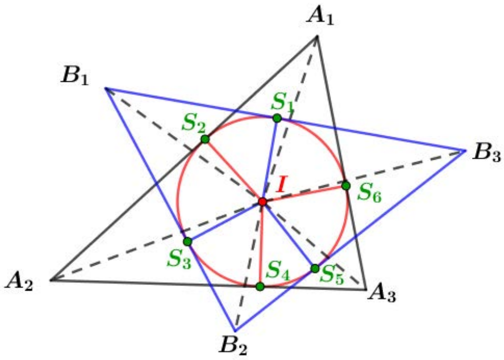


圖 7：非相切六芒星

(二)預備定理

【預備定理 1】(切線段定理，洪有情 [1])

若從圓外一點 P 引圓 I 的兩切線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 、 $\overleftrightarrow{PH_2}$ ，則 $\overline{PH_1}=\overline{PH_2}$ 且 $\overline{PI}$ 平分 $\angle H_1PH_2$ 和 $\angle H_1IH_2$ ，如圖 8。

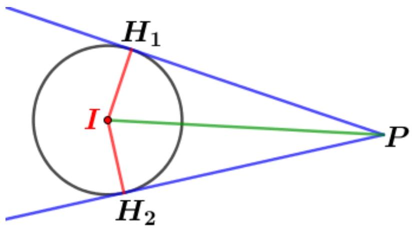


圖 8：切線段定理

【**預備定理 2**】(**孟氏定理**，笹部貞市郎 [3])

設一直線與$\Delta A_1A_2A_3$的$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$、$\overline{A_1A_2}$或其延長線分別交於M_1、M_2、M_3，如圖 9，則

$$\frac{\overline{A_1M_3}}{\overline{M_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2M_1}}{\overline{M_1A_3}}\times\frac{\overline{A_3M_2}}{\overline{M_2A_1}}=1$$ 。

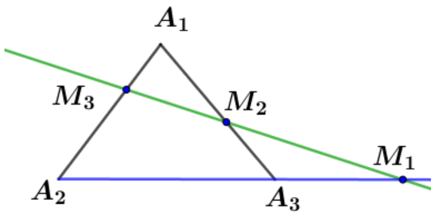


圖 9：孟氏定理

反之若M_1、M_2、M_3分別在$\Delta A_1A_2A_3$的$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$、$\overline{A_1A_2}$或其延長線上且滿足

$\frac{\overline{A_1M_3}}{\overline{M_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2M_1}}{\overline{M_1A_3}}\times\frac{\overline{A_3M_2}}{\overline{M_2A_1}}=1$，則$M_1$、$M_2$、$M_3$三點共線，即孟氏逆定理也成立。

二、利用尺規作圖建構相切六芒星及探討作圖的充要條件

(一)共切圓三角形性質

根據相切六芒星的定義下，共切圓三角形必為銳角三角形，參見**性質 1**。

【**性質 1**】(**共切圓三角形必為銳角三角形**)

設$\Delta B_1B_2B_3$是$\Delta A_1A_2A_3$的共切圓三角形，如圖 10，則$\Delta B_1B_2B_3$必是銳角三角形。

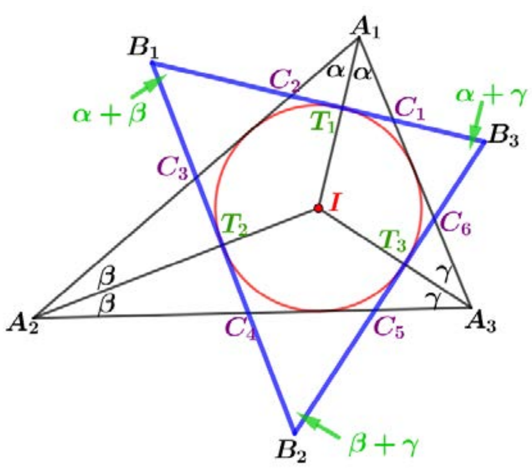


圖 10：共切圓三角形必為銳角三角形

《證明》設$\angle A_1=2\alpha$，$\angle A_2=2\beta$，$\angle A_3=2\gamma$，在ΔA_1IA_2中，$\angle A_1IA_2=180^\circ-\alpha-\beta$，在四邊形$B_1T_1IT_2$中，$\angle B_1=180^\circ-\angle A_1IA_2=180^\circ-(180^\circ-\alpha-\beta)=\alpha+\beta$，同理可得$\angle B_2=\beta+\gamma$，$\angle B_3=\alpha+\gamma$。$\because \alpha+\beta+\gamma=90^\circ$，得$\alpha+\beta=90^\circ-\gamma$，又$\gamma>0$，所以$\alpha+\beta<90^\circ$同理可得$\beta+\gamma<90^\circ$，$\alpha+\gamma<90^\circ$，故得證。

由上證明，可知：$\angle B_1<\angle B_2<\angle B_3$的充要條件為$\beta<\alpha<\gamma$。 ■

(二)尺規作圖(I)與作圖(II)-角度性質

現在要利用尺規作圖建構相切六芒星。若給定$\Delta A_1A_2A_3$，則作圖**共切圓三角形**為$\Delta B_1B_2B_3$是容易的，作圖如下：

【作圖 1】(給定$\Delta A_1A_2A_3$，建構$\Delta B_1B_2B_3$)

已知：$\Delta A_1A_2A_3$與內切圓I，如圖 11。

求作：$\Delta B_1B_2B_3$，使得$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$共切圓三角形。

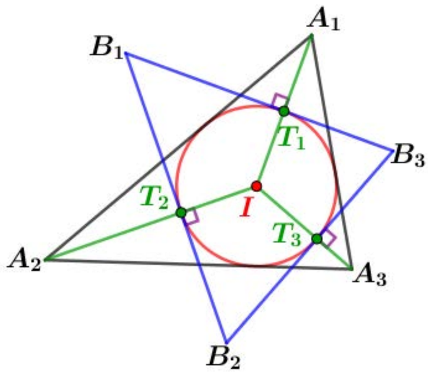


圖 11：建構$\Delta B_1B_2B_3$

《作法》步驟 1：分別連接$\overline{A_1I}$、$\overline{A_2I}$、$\overline{A_3I}$與圓I交於T_1,T_2,T_3。

步驟 2：過T_1,T_2,T_3三點作$\overline{A_1I}$、$\overline{A_2I}$、$\overline{A_3I}$的垂直線，三線兩兩交於B_1,B_2,B_3。

步驟 3：$\Delta B_1B_2B_3$即為所求。 ■

接著考慮給定**共切圓三角形**$\Delta B_1B_2B_3$，如何利用尺規作圖完成$\Delta A_1A_2A_3$。不失一般性，可令$\Delta B_1B_2B_3$中三內角$\angle B_1,\angle B_2,\angle B_3$滿足$\angle B_1 \le \angle B_2 \le \angle B_3$，如圖 12，我們試著利用作圖方式求得$\Delta A_1A_2A_3$，作圖過程中發現以下的角度性質，說明如下：

【定理 1】共切圓三角形的角度性質(I)

設$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的共切圓三角形，其中$\angle B_1 \le \angle B_2 \le \angle B_3 < 90^\circ$，若$\Delta A_1A_2A_3$與圓$I$切於$U_1$、$U_2$、$U_3$，如圖 12，則$\angle B_1IU_1=\frac{1}{2}(\angle B_3-\angle B_2)$、$\angle B_2IU_2=\frac{1}{2}(\angle B_3-\angle B_1)$且$\angle B_3IU_3=\frac{1}{2}(\angle B_2-\angle B_1)$。

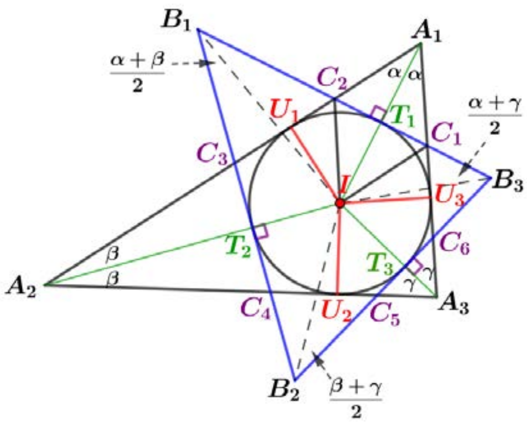


圖 12：共切圓三角形的角度性質(I)

《證明》

1.由**性質 1** 的證明，得知$\angle B_1=\alpha+\beta$，又$\overline{B_1I}$是$\angle B_1$的角平分線，可得

$\angle T_1B_1I=\frac{1}{2}\angle B_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，同理可得$\angle T_2B_2I=\frac{\beta+\gamma}{2}$，$\angle T_3B_3I=\frac{\alpha+\gamma}{2}$。

2.在ΔB_1T_1I中，因為$\angle B_1T_1I=90^\circ$且$\angle T_1B_1I=\frac{\alpha+\beta}{2}$，所以$\angle B_1IT_1=90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}$。

3.在ΔA_1U_1I中，因為$\angle A_1U_1I=90^\circ$且$\angle U_1A_1I=\alpha$，所以$\angle A_1IU_1=90^\circ-\alpha$。

4.由$\angle B_1IU_1=\angle B_1IT_1-\angle U_1IA_1=(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2})-(90^\circ-\alpha)=\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}(\angle B_3-\angle B_2)$。

5.同理可得$\angle B_2IU_2=\frac{1}{2}(\angle B_3-\angle B_1)$，$\angle B_3IU_3=\frac{1}{2}(\angle B_2-\angle B_1)$。 ■

【作圖 2】(**給定銳角** $\Delta B_1B_2B_3$ **，建構** $\Delta A_1A_2A_3$)

已知： $\Delta B_1B_2B_3$ 與內切圓 I ，且 T_1,T_2,T_3 為其切點，其中 $\angle B_1 \le \angle B_2 \le \angle B_3 < 90^\circ$ 如圖 13。

求作： $\Delta A_1A_2A_3$ ，使得 $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的共切圓三角形。

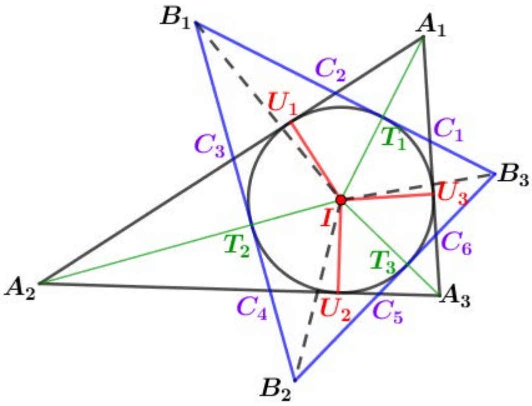


圖 13：作 $\Delta A_1A_2A_3$ 的圖形

《作法》步驟 1：以 $\overline{IB_1}$ 順時針方向在圓 I 上作 U_1 ，使得 $\angle U_1IB_1 = \frac{1}{2}(\angle B_3 - \angle B_2)$ ；

以 $\overline{IB_2}$ 逆時針方向在圓 I 上作 U_2 ，使得 $\angle U_2IB_2 = \frac{1}{2}(\angle B_3 - \angle B_1)$ ；

以 $\overline{IB_3}$ 順時針方向在圓 I 上作 U_3 ，使得 $\angle U_3IB_3 = \frac{1}{2}(\angle B_2 - \angle B_1)$ 。

步驟 2：分別過 U_1 、 U_2 、 U_3 作 $\overline{U_1I}$ 、 $\overline{U_2I}$ 、 $\overline{U_3I}$ 的垂線且分別交於 A_1 、 A_2 、 A_3 ，

則 $\Delta A_1A_2A_3$ 即為所求。 ■

《作圖 2 證明》

1. $\angle U_1IT_1 = \angle B_1IT_1 - \angle U_1IB_1 = (\frac{180^\circ - \angle B_1}{2}) - (\frac{\angle B_3 - \angle B_2}{2}) = \angle B_2$ 。

2. $\angle U_3IT_1 = \angle B_3IT_1 + \angle U_3IB_3 = (\frac{180^\circ - \angle B_3}{2}) + (\frac{\angle B_2 - \angle B_1}{2}) = \angle B_2$ 。

3.由 1.2.，得 $\angle U_1IT_1 = \angle U_3IT_1$ ，所以 $\overline{T_1I}$ 是 $\angle U_1IU_3$ 的角平分線。

又因 $\overline{U_1I} \perp \overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{U_3I} \perp \overline{A_1A_3}$ ，由**切線段定理**知 $\overline{A_1I}$ 是 $\angle U_1IU_3$ 的角平分線。

故 A_1 、 T_1 、 I 三點共線，且 $\angle U_1A_1I = \angle U_3A_1I$ 。

4.同理可得 A_2 、T_2 、I 三點共線，且 $\angle U_1A_2I=\angle U_2A_2I$ ；

A_3 、T_3 、I 三點共線，且 $\angle U_2A_3I=\angle U_3A_3I$ ，故得證。 ■

(三)尺規作圖(III) -角度及共線性質

除了上述作圖方法外，也發現在作圖過程中此相切六芒星另有角度性質，如下說明：

【定理 2】(共切圓三角形的角度性質(II))

設 $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的共切圓三角形，其中 U_1,U_2,U_3,T_1,T_2,T_3 為切點，如圖 14，則

$\angle T_1IU_1=\angle B_2$ 、$\angle T_2IU_2=\angle B_3$ 及 $\angle T_3IU_3=\angle B_1$ 。

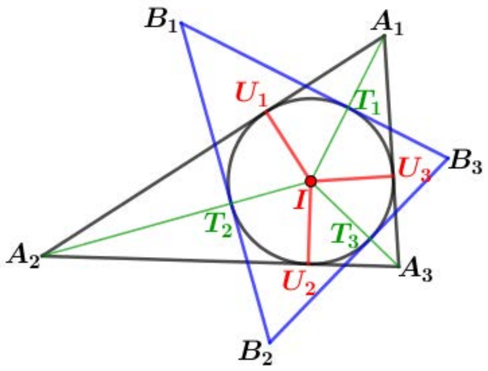


圖 14：共切圓三角形的角度性質(II)

《證明》

1.$\because U_1$ 、U_2 、U_3 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 與圓 I 的切點，$\therefore \angle T_1IU_1=\angle T_1IU_3$ 、$\angle T_2IU_1=\angle T_2IU_2$ 、

$\angle T_3IU_2=\angle T_3IU_3$ ，又 $\angle T_1IU_1+\angle T_1IU_3+\angle T_2IU_1+\angle T_2IU_2+\angle T_3IU_2+\angle T_3IU_3=360^\circ$ ，可得

$\angle T_1IU_1+\angle T_2IU_2+\angle T_3IU_2=180^\circ$ 。

2.四邊形 $B_2T_2IT_3$ 中，T_2 與 T_3 是 $\Delta B_1B_2B_3$ 與圓 I 的切點，得知 $\angle B_2+\angle T_2IT_3=180^\circ$ 。

又 $\angle T_2IT_3=\angle T_2IU_2+\angle T_3IU_2$ ，由 1.可得 $\angle T_1IU_1=\angle B_2$ 。

同理可得 $\angle T_2IU_2=\angle B_3$ 及 $\angle T_3IU_3=\angle B_1$ ，故得證。 ■

【作圖 3】(**給定銳角**$\Delta B_1B_2B_3$ **，建構**$\Delta A_1A_2A_3$)

已知：$\Delta B_1B_2B_3$ 與內切圓I ，且T_1,T_2,T_3為其切點，其中$\angle B_1 \le \angle B_2 \le \angle B_3 < 90^\circ$ ，如圖 15。

求作：$\Delta A_1A_2A_3$ ，使得$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的共切圓三角形。

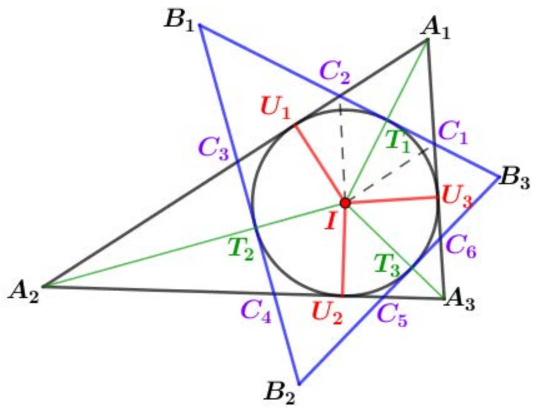


圖 15：作$\Delta A_1A_2A_3$的圖形

《作法》步驟 1：連接$\overline{T_1I}$ ，在圓I上取相異二點U_1 、U_3 ，使得$\angle T_1IU_3 = \angle T_1IU_1 = \angle B_2$ 。

步驟 2：連接$\overline{T_3I}$ ，在圓I上取異於U_3之U_2 ，使得$\angle T_3IU_2 = \angle T_3IU_3$ 。

步驟 3：分別過U_1 、U_2 、U_3作與$\overline{IU_1}$ 、$\overline{IU_2}$ 、$\overline{IU_3}$垂直之垂線且分別交於A_1 、A_2 、A_3 ，則$\Delta A_1A_2A_3$即為所求。 ■

《作圖 3 證明》

1.在ΔC_2IT_1與ΔC_1IT_1中，$\because \angle C_2T_1I = \angle C_1T_1I = 90^\circ$ 、$\overline{T_1I} = \overline{T_1I}$ 、且

$\angle T_1IC_2 = \dfrac{1}{2}\angle T_1IU_1 = \dfrac{1}{2}\angle T_1IU_3 = \angle T_1IC_1$ ，$\therefore \Delta C_2IT_1 \cong \Delta C_1IT_1$($ASA$全等性質)。可得知

$\overline{C_2T_1} = \overline{C_1T_1}$ ，又由**切線段定理**知$\overline{U_1C_2} = \overline{C_2T_1}$ 、$\overline{C_1T_1} = \overline{C_1U_3}$ ，則

$\overline{U_1C_2} = \overline{C_2T_1} = \overline{C_1T_1} = \overline{C_1U_3}$ 。

2.在$\Delta A_1C_2T_1$與$\Delta A_1C_1T_1$中，由$\overline{A_1U_1} = \overline{A_1U_3}$ ，$\overline{U_1C_2} = \overline{C_1U_3}$ ，可得知

$\overline{A_1C_2} = \overline{A_1U_1} - \overline{U_1C_2} = \overline{A_1U_3} - \overline{C_1U_3} = \overline{A_1C_1}$ ，又$\overline{C_2T_1} = \overline{C_1T_1}$且$\overline{A_1T_1} = \overline{A_1T_1}$ ，所以

$\Delta A_1C_2T_1 \cong \Delta A_1C_1T_1$($SSS$全等性質)，因此得知$\overline{A_1T_1}$為$\angle A_1$的角平分線又$\overline{A_1I}$為$\angle A_1$的角平分線，則$A_1$、$T_1$、$I$三點共線，同理可得$A_3$、$T_3$、$I$三點共線。

3.因為$\angle A_2C_3T_2 = \angle B_1C_3C_2 = 180^\circ - \angle B_1 - \angle B_1C_2C_3 = 180^\circ - \angle B_1 - \angle T_1IU_1$

$= 180^\circ - \angle B_1 - \angle B_2 = \angle B_3$，同理$\angle A_2C_4T_2 = \angle B_3$，故$\angle A_2C_3T_2 = \angle A_2C_4T_2$，且

$\overline{A_2C_3} = \overline{A_2C_4}$。

4.由**切線段定理**，得$\overline{C_3T_2} = \overline{C_3U_1} = \overline{A_2U_1} - \overline{A_2C_3} = \overline{A_2U_2} - \overline{A_2C_4} = \overline{C_4U_2} = \overline{C_4T_2}$。

5.在$\Delta A_2C_3T_2$與$\Delta A_2C_4T_2$中，$\overline{A_2T_2} = \overline{A_2T_2}$，$\overline{A_2C_3} = \overline{A_2C_4}$，又$\overline{C_3T_2} = \overline{C_4T_2}$，

所以$\Delta A_2C_3T_2 \cong \Delta A_2C_4T_2$($SSS$全等性質)，則$\overline{A_2T_2}$為$\angle A_2$的角平分線且$A_2$、$T_2$、$I$三點共線，故得證。 ■

三、探討相切六芒星中的幾何性質

常見的幾何性質不外乎就是圖形結構中的線段及面積，我們就以此來探討在相切六芒星中的邊截線段與面積有何關係。

(一)共切圓三角形的邊截線段性質

【定理 3】(共切圓三角形的邊截線段性質)

設$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的共切圓三角形，如圖 16，則$\overline{B_1C_3} + \overline{B_2C_5} + \overline{B_3C_1} = \overline{B_1C_2} + \overline{B_2C_4} + \overline{B_3C_6}$。

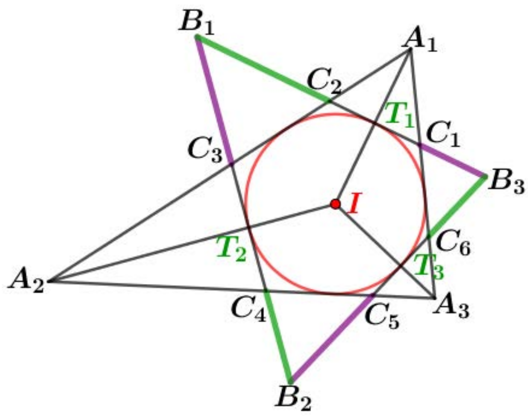


圖 16：共切圓三角形的邊截線段性質

《證明》

1.由**切線段定理**知 $\overline{B_1T_2}=\overline{B_1T_1}$ ，$\overline{B_2T_3}=\overline{B_2T_2}$ ，$\overline{B_3T_1}=\overline{B_3T_3}$ 。

2.由**作圖 3 中證明**知 $\overline{C_1T_1}=\overline{T_1C_2}$ ，$\overline{C_3T_2}=\overline{T_2C_4}$ ，$\overline{C_5T_3}=\overline{T_3C_6}$ 。

3.由 $\overline{B_1T_2}+\overline{B_2T_3}+\overline{B_3T_1}=\overline{B_1T_1}+\overline{B_2T_2}+\overline{B_3T_3}$

$\Rightarrow(\overline{B_1C_3}+\overline{C_3T_2})+(\overline{B_2C_5}+\overline{C_5T_3})+(\overline{B_3C_1}+\overline{C_1T_1})=(\overline{B_1C_2}+\overline{C_2T_1})+(\overline{B_2C_4}+\overline{C_4T_2})+(\overline{B_3C_6}+\overline{C_6T_3})$

$\Rightarrow\overline{B_1C_3}+\overline{B_2C_5}+\overline{B_3C_1}=\overline{B_1C_2}+\overline{B_2C_4}+\overline{B_3C_6}$ ，故得證。 ■

(二)共切圓三角形的邊截線段恆等式

【定理 4】(共切圓三角形的邊截線段恆等式)

設 $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的共切圓三角形，如圖 17，則

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1C_4}}\times\frac{\overline{B_2C_3}}{\overline{B_2C_6}}\times\frac{\overline{B_3C_5}}{\overline{B_3C_2}}\times\frac{\overline{B_1C_2}}{\overline{B_1C_3}}\times\frac{\overline{B_2C_4}}{\overline{B_2C_5}}\times\frac{\overline{B_3C_6}}{\overline{B_3C_1}}=1\text{ 。}$$

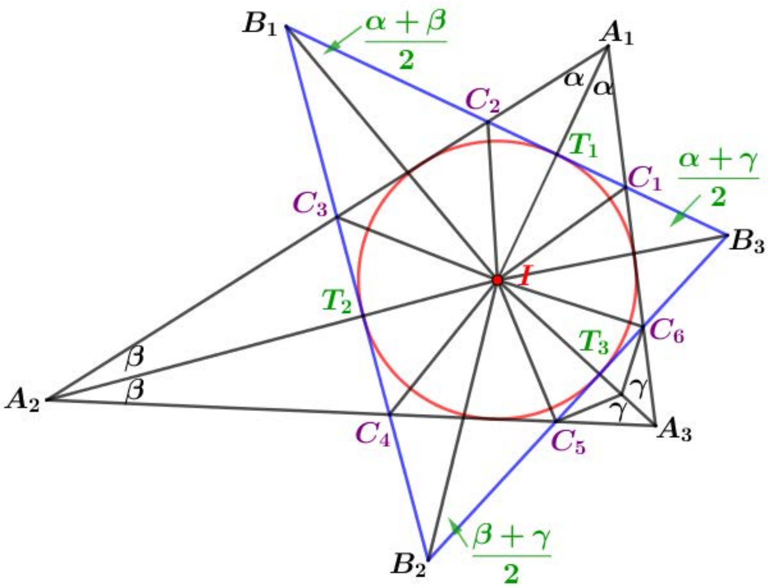


圖 17：共切圓三角形的邊截線段恆等式

《證明》

1.設內切圓半徑為 r ，$\angle C_1A_1I=\alpha$ ，$\angle C_3A_2I=\beta$ ，$\angle C_5A_3I=\gamma$ ，則可得

$\angle C_2IT_1=45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$ 、$\angle T_1B_1I=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{90^\circ-\gamma}{2}=45^\circ-\dfrac{\gamma}{2}$ 。

2.由ΔC_2T_1I 中，知 $\tan(45^\circ-\frac{\alpha}{2})=\frac{\overline{C_2T_1}}{\overline{IT_1}}=\frac{\overline{C_2T_1}}{r}$ ，得 $\overline{C_2T_1}=r\tan(45^\circ-\frac{\alpha}{2})$ 。

由ΔB_1T_1I 中，知 $\tan(45^\circ-\frac{\gamma}{2})=\frac{\overline{IT_1}}{\overline{B_1T_1}}=\frac{r}{\overline{B_1T_1}}$ ，得 $\overline{B_1T_1}=\frac{r}{\tan(45^\circ-\frac{\gamma}{2})}$ 。

3.為方便計算，令 $\tan\frac{\alpha}{2}=x$ ，$\tan\frac{\beta}{2}=y$ ，$\tan\frac{\gamma}{2}=z$ ，則 $\tan(45^\circ-\frac{\alpha}{2})=\frac{1-x}{1+x}$ ，

$\tan(45^\circ-\frac{\beta}{2})=\frac{1-y}{1+y}$ ，$\tan(45^\circ-\frac{\gamma}{2})=\frac{1-z}{1+z}$ 。

4. $\overline{B_1C_2}\times\overline{B_1C_1}=(\overline{B_1T_1}-\overline{C_2T_1})(\overline{B_1T_1}+\overline{C_2T_1})=\overline{B_1T_1}^2-\overline{C_2T_1}^2=\left[\frac{r}{\tan(45^\circ-\frac{\gamma}{2})}\right]^2-\left[r\tan(45^\circ-\frac{\alpha}{2})\right]^2$

$$=r^2\left[\left(\frac{1+\tan(\frac{\gamma}{2})}{1-\tan(\frac{\gamma}{2})}\right)^2-\left(\frac{1-\tan(\frac{\alpha}{2})}{1+\tan(\frac{\alpha}{2})}\right)^2\right]=r^2\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]$$ 。

5.同理可得 $\overline{B_2C_4}\times\overline{B_2C_3}=r^2\left[\left(\frac{1+\tan(\frac{\alpha}{2})}{1-\tan(\frac{\alpha}{2})}\right)^2-\left(\frac{1-\tan(\frac{\beta}{2})}{1+\tan(\frac{\beta}{2})}\right)^2\right]=r^2\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2-\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2\right]$ ；

$$\overline{B_3C_6}\times\overline{B_3C_5}=r^2\left[\left(\frac{1+\tan(\frac{\beta}{2})}{1-\tan(\frac{\beta}{2})}\right)^2-\left(\frac{1-\tan(\frac{\gamma}{2})}{1+\tan(\frac{\gamma}{2})}\right)^2\right]=r^2\left[\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2\right];$$

$$\overline{B_1C_3}\times\overline{B_1C_4}=r^2\left[\left(\frac{1+\tan(\frac{\gamma}{2})}{1-\tan(\frac{\gamma}{2})}\right)^2-\left(\frac{1-\tan(\frac{\beta}{2})}{1+\tan(\frac{\beta}{2})}\right)^2\right]=r^2\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2\right];$$

$$\overline{B_2C_5}\times\overline{B_2C_6}=r^2\left[\left(\frac{1+\tan(\frac{\alpha}{2})}{1-\tan(\frac{\alpha}{2})}\right)^2-\left(\frac{1-\tan(\frac{\gamma}{2})}{1+\tan(\frac{\gamma}{2})}\right)^2\right]=r^2\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2\right];$$

$$\overline{B_3C_1}\times\overline{B_3C_2}=r^2\left[\left(\frac{1+\tan(\frac{\beta}{2})}{1-\tan(\frac{\beta}{2})}\right)^2-\left(\frac{1-\tan(\frac{\alpha}{2})}{1+\tan(\frac{\alpha}{2})}\right)^2\right]=r^2\left[\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]$$

6. $\overline{B_1C_1}\times\overline{B_1C_2}\times\overline{B_2C_3}\times\overline{B_2C_4}\times\overline{B_3C_5}\times\overline{B_3C_6}$

$$=r^6\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2-\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2\right]$$

$$=r^6\left[\frac{(2+2xz)(2x+2z)}{(1-z)^2(1+x)^2}\right]\left[\frac{(2+2yz)(2y+2z)}{(1-y)^2(1+z)^2}\right]\left[\frac{(2+2xy)(2x+2y)}{(1-x)^2(1+y)^2}\right]。$$

7. $\overline{B_1C_3}\times\overline{B_1C_4}\times\overline{B_2C_5}\times\overline{B_2C_6}\times\overline{B_3C_1}\times\overline{B_3C_2}$

$$=r^6\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]$$

$$=r^6\left[\frac{(2+2yz)(2y+2z)}{(1-z)^2(1+y)^2}\right]\left[\frac{(2+2xz)(2x+2z)}{(1-x)^2(1+z)^2}\right]\left[\frac{(2+2xy)(2x+2y)}{(1-y)^2(1+x)^2}\right]。$$

8.由 6.及 7.可得知，$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1C_4}}\times\frac{\overline{B_2C_3}}{\overline{B_2C_6}}\times\frac{\overline{B_3C_5}}{\overline{B_3C_2}}\times\frac{\overline{B_1C_2}}{\overline{B_1C_3}}\times\frac{\overline{B_2C_4}}{\overline{B_2C_5}}\times\frac{\overline{B_3C_6}}{\overline{B_3C_1}}=1$，故得證。 ■

(三)鏢形面積關係

【定理 5】(相切六芒星中的鏢形面積關係)

如圖 18，設 $\Delta B_1B_2B_3$ 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的共切圓三角形，若 R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6 分別為四邊形 $IA_1C_1B_3$、$IA_2C_3B_1$、$IA_3C_5B_2$、$IA_1C_2B_1$、$IA_2C_4B_2$ 及 $IA_3C_6B_3$ 的面積，則

$$R_1+R_2+R_3=R_4+R_5+R_6。$$

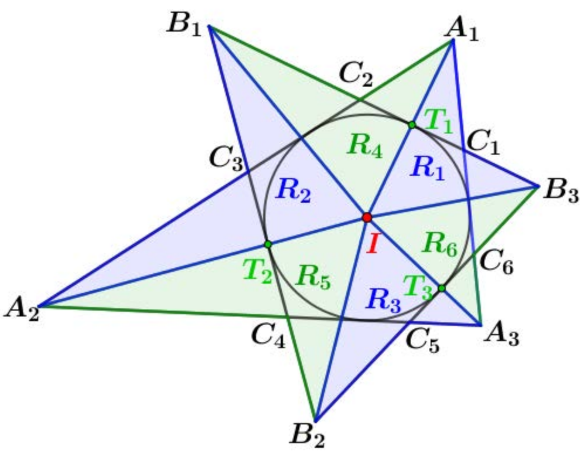


圖 18：相切六芒星中的鏢形面積性質

《證明》

1.由**作圖 3 中證明**可知$\Delta A_1C_2T_1 \cong \Delta A_1C_1T_1$、$\Delta A_2C_4T_2 \cong \Delta A_2C_3T_2$、$\Delta A_3C_6T_3 \cong \Delta A_3C_5T_3$。

2.$\because T_1,T_2,T_3$為切點，可知$\Delta B_1T_1I \cong \Delta B_1T_2I$、$\Delta B_2T_2I \cong \Delta B_2T_3I$、$\Delta B_3T_3I \cong \Delta B_3T_1I$。

3.由 1.2.可得$\Delta A_1C_1T_1 + \Delta A_2C_3T_2 + \Delta A_3C_5T_3 + \Delta B_1T_2I + \Delta B_2T_3I + \Delta B_3T_1I$

$$= \Delta A_1C_2T_1 + \Delta A_2C_4T_2 + \Delta A_3C_6T_3 + \Delta B_1T_1I + \Delta B_2T_2I + \Delta B_3T_3I$$

$$\Rightarrow\ (\Delta A_1C_1T_1 + \Delta B_3T_1I) + (\Delta A_2C_3T_2 + \Delta B_1T_2I) + (\Delta A_3C_5T_3 + \Delta B_2T_3I)$$

$$= (\Delta A_1C_2T_1 + \Delta B_1T_1I) + (\Delta A_2C_4T_2 + \Delta B_2T_2I) + (\Delta A_3C_6T_3 + \Delta B_3T_3I)$$

即$R_1 + R_2 + R_3 = R_4 + R_5 + R_6$，故得證 ■

四、探討尖角三角形的幾何性質

在相切六芒星中有六個尖角三角形，由於本研究是以內切圓為出發點，因此針對六個尖角三角形的內切圓進行以下的幾何研究。

(一)尖角三角形性質

【性質 2】

若$\Delta B_1B_2B_3$是$\Delta A_1A_2A_3$的共切圓三角形，如圖 19，則：(1)$\Delta A_1C_1C_2$、$\Delta A_2C_3C_4$、$\Delta A_3C_5C_6$必為等腰三角形。(2)$\Delta B_1C_2C_3$、$\Delta B_2C_4C_5$、$\Delta B_3C_1C_6$與$\Delta B_1B_2B_3$為相似三角形。

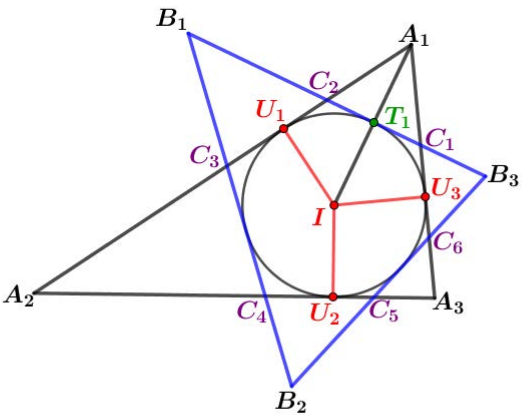


圖 19：三個尖角三角形是等腰三角形

《證明》

1.在 $\Delta A_1C_2T_1$ 與 $\Delta A_1C_1T_1$ 中，由 $\angle C_2A_1T_1=\angle C_1A_1T_1$ ，$\overline{A_1T_1}=\overline{A_1T_1}$ ，$\angle C_2T_1A_1=\angle C_1T_1A_1=90^\circ$ ，

可得知 $\Delta A_1C_2T_1\cong\Delta A_1C_1T_1(ASA$全等性質)，故 $\overline{A_1C_1}=\overline{A_1C_2}$ 。同理可得 $\overline{A_2C_3}=\overline{A_2C_4}$ ，

$\overline{A_3C_5}=\overline{A_3C_6}$ ，故 $\Delta A_1C_1C_2$ 、$\Delta A_2C_3C_4$ 、$\Delta A_3C_5C_6$ 為等腰三角形。

2. $\angle B_1C_2C_3=\angle T_1IU_1=\angle T_1IU_3=\angle B_2$ ，

$\therefore\Delta B_1C_2C_3$ 中，$\angle B_1C_3C_2=180^\circ-\angle B_1-\angle 1=180^\circ-\angle B_1-\angle B_2=\angle B_3$ ，

因此 $\Delta B_1C_2C_3$ 與 $\Delta B_1B_2B_3$ 為相似三角形。同理可證 $\Delta B_2C_4C_5$ 、$\Delta B_3C_1C_6$ 也均與 $\Delta B_1B_2B_3$ 為

相似三角形。 ■

(二)內切圓半徑性質

【定理 6】(尖角三角形的內切圓半徑性質)

設 $\Delta B_1B_2B_3$ 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的共切圓三角形，若 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6 分別為 $\Delta A_1C_1C_2$ 、$\Delta B_1C_2C_3$ 、

$\Delta A_2C_3C_4$ 、$\Delta B_2C_4C_5$ 、$\Delta A_3C_5C_6$ 及 $\Delta B_3C_1C_6$ 之內切圓的半徑，如圖 20，則

(1) $r_2^{\ 2}=r_1r_3$ ，$r_4^{\ 2}=r_3r_5$ ，$r_6^{\ 2}=r_1r_5$ ；(2) $r_1r_3r_5=r_2r_4r_6$ 。

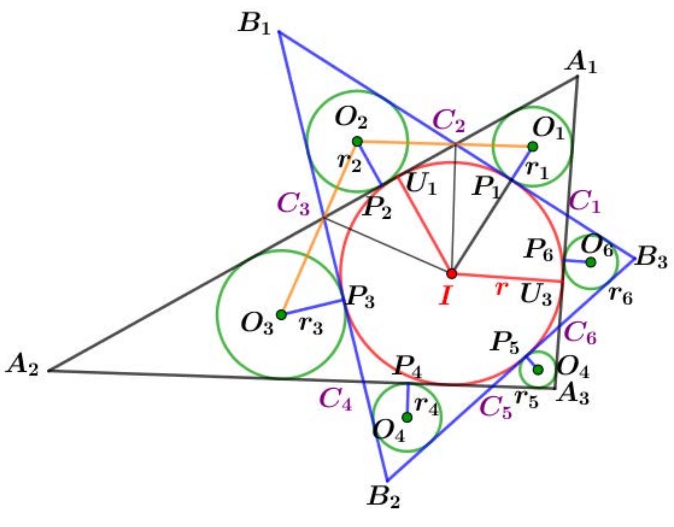


圖 20：尖角三角形的內切圓半徑性質

《證明》

1.假設圓 I 半徑為 r ，O_i 為 $\Delta A_1C_1C_2$ 、$\Delta B_1C_2C_3$ 、$\Delta A_2C_3C_4$ 、$\Delta B_2C_4C_5$ 、$\Delta A_3C_5C_6$ 及 $\Delta B_3C_1C_6$ 的內切圓，且 P_i 分別為圓 O_i 與六邊形 $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ 之切點，其中 $i=1,2,\cdots,6$ 。

2.在 ΔO_1C_2I 中，因為 $\angle O_1C_2I=90^\circ$ 且 $\overline{C_2P_1}\perp\overline{O_1I}$ ，由母子相似性質可得知 $\overline{C_2P_1}=\sqrt{r_1r}$ ，同理在 ΔO_3C_3I 得 $\overline{C_3P_3}=\sqrt{r_3r}$ 。

3.因為 $\Delta O_1C_2P_1\sim\Delta O_2C_2P_2$ ，則 $\dfrac{\overline{O_1P_1}}{\overline{C_2P_1}}=\dfrac{\overline{O_2P_2}}{\overline{P_2C_2}}$ ，即 $\dfrac{r_1}{\sqrt{r_1r}}=\dfrac{r_2}{\overline{P_2C_2}}$ ，可得 $\overline{P_2C_2}=\dfrac{r_2\sqrt{r_1r}}{r_1}$ 。

4.因為 $\Delta O_3C_3P_3\sim\Delta O_2C_3P_2$ ，則 $\dfrac{\overline{O_3P_3}}{\overline{C_3P_3}}=\dfrac{\overline{O_2P_2}}{\overline{P_2C_3}}$ ，即 $\dfrac{r_3}{\sqrt{r_3r}}=\dfrac{r_2}{\overline{P_2C_3}}$ ，可得 $\overline{P_2C_3}=\dfrac{r_2\sqrt{r_3r}}{r_3}$ 。

5.由**切線段定理**可得 $\overline{U_1C_2}=\overline{C_2P_1}=\sqrt{r_1r}$ 、$\overline{U_1C_3}=\overline{C_3P_3}=\sqrt{r_3r}$ 。

6.因為 $\overline{P_2C_2}+\overline{P_2C_3}=\overline{U_1C_3}+\overline{U_1C_2}$ ，可得 $\dfrac{r_2\sqrt{r_1r}}{r_1}+\dfrac{r_2\sqrt{r_3r}}{r_3}=\sqrt{r_3r}+\sqrt{r_1r}$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{r_2}{\sqrt{r_3}}=\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1} \quad \Rightarrow r_2\left(\frac{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}}\right)=\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}$$

$\Rightarrow r_2=\sqrt{r_1r_3}\quad\Rightarrow r_2{}^2=r_1r_3$ ，同理可證得 $r_4{}^2=r_3r_5$ ，$r_6{}^2=r_1r_5$ 。

得到 $r_2{}^2\times r_4{}^2\times r_6{}^2=r_1r_3\times r_3r_5\times r_1r_5=r_1{}^2\times r_3{}^2\times r_5{}^2$ ，因此 $r_2r_4r_6=r_1r_3r_5$ ，故得證。 ■

(三)內切圓半徑的恆等式

【定理 7】(原三角形與尖角三角形中的內切圓半徑之恆等式)

設 $\Delta B_1B_2B_3$ 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的共切圓三角形，若 $r,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6$ 分別為 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta A_1C_1C_2$ 、$\Delta B_1C_2C_3$ 、$\Delta A_2C_3C_4$ 、$\Delta B_2C_4C_5$ 、$\Delta A_3C_5C_6$ 及 $\Delta B_3C_1C_6$ 之內切圓圓 I 、$O_1,\cdots,O_6$ 的半徑，如圖 21，則 (1) $r_2+r_4+r_6=r$ ；(2) $\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_3r_5}+\sqrt{r_5r_1}=r$ 。

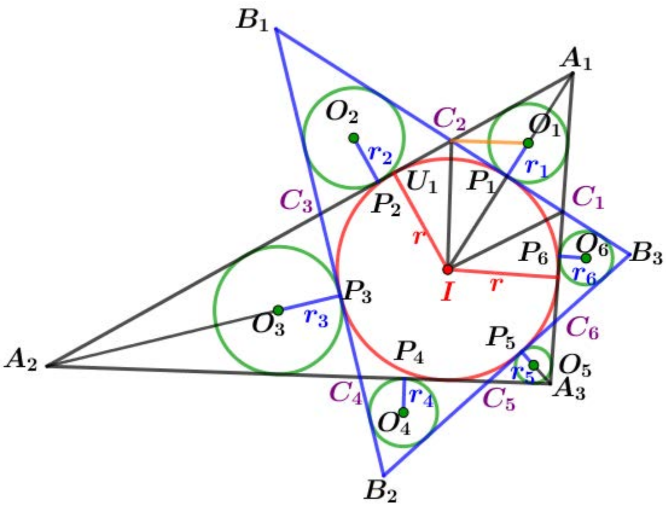


圖 21：原三角形與尖角三角形中的內切圓半徑之恆等式

《證明》

1.設 $\angle C_1A_1I=\alpha$ ，$\angle C_3A_2I=\beta$ ，$\angle C_5A_3I=\gamma$ ，可得 $\angle C_2IT_1=45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$ 。

2.在 ΔC_2P_1I 中，由 $\tan\angle C_2IP_1=\dfrac{\overline{C_2P_1}}{\overline{IP_1}}$ ，得 $\overline{C_2P_1}=r\tan(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2})$ 。

3.$\because\ \Delta C_2P_1I\sim\Delta O_1P_1C_2$ ，$\therefore\ r_1r=\overline{C_2P_1}^2=r^2\tan^2(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2})$ ，

$\Rightarrow\ \ r_1=r\tan^2(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2})$ ，同理可得 $r_3=r\tan^2(45^\circ-\dfrac{\beta}{2})$ ；$r_5=r\tan^2(45^\circ-\dfrac{\gamma}{2})$ 。

4.由**定理 6** 知 $r_2=\sqrt{r_1r_3}=\sqrt{r\tan^2(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2})\times r\tan^2(45^\circ-\dfrac{\beta}{2})}$ ，

推得 $r_2=r\tan(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2})\tan(45^\circ-\dfrac{\beta}{2})$ ，同理可得

$r_4=r\tan(45^\circ-\dfrac{\beta}{2})\tan(45^\circ-\dfrac{\gamma}{2})$ ，$r_6=r\tan(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2})\tan(45^\circ-\dfrac{\gamma}{2})$ 。

5.令 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=x$ ，$\tan\dfrac{\beta}{2}=y$ ，由和差公式

$\tan(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2})=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan 45^\circ\tan\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-x}{1+x}$ ，$\tan(45^\circ-\dfrac{\beta}{2})=\dfrac{1-\tan\dfrac{\beta}{2}}{1+\tan\dfrac{\beta}{2}}=\dfrac{1-y}{1+y}$ ，且

$$\tan(45^\circ-\frac{\gamma}{2})=\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{x+y}{1-xy}\ 。$$

6.由 $r_2+r_4+r_6$

$$=r\tan(45^\circ-\frac{\alpha}{2})\tan(45^\circ-\frac{\beta}{2})+r\tan(45^\circ-\frac{\beta}{2})\tan(45^\circ-\frac{\gamma}{2})+r\tan(45^\circ-\frac{\alpha}{2})\tan(45^\circ-\frac{\gamma}{2})$$

$$=r\left(\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}+\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{x+y}{1-xy}+\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

$$=r\left[\frac{1-y}{1+y}\left(\frac{1-x}{1+x}+\frac{x+y}{1-xy}\right)+\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x+y}{1-xy}\right]$$

$$=r\left[\frac{1-y}{1+y}\left(\frac{(1-xy-x+x^2y)+(x+y+x^2+xy)}{1-xy+x-x^2y}\right)+\frac{x+y-x^2-xy}{1-xy+x-x^2y}\right]$$

$$=r\left[\frac{1-y}{1+y}\left(\frac{1+x^2y+y+x^2}{1-xy+x-x^2y}\right)+\frac{x+y-x^2-xy}{1-xy+x-x^2y}\right]$$

$$=\frac{r}{1-xy+x-x^2y}\left[\frac{(1-y)(1+x^2y+y+x^2)}{1+y}+x+y-x^2-xy\right]$$

$$=\frac{r}{1-xy+x-x^2y}\left[\frac{1-x^2y^2-x^2y+x+y-xy^2}{1+y}\right]$$

$=r\left[\dfrac{1-x^2y^2-x^2y+x+y-xy^2}{1-x^2y^2-x^2y+x+y-xy^2}\right]=r$ ，又由**定理 6** 可得 $r_2=\sqrt{r_1r_3}$ 、 $r_4=\sqrt{r_3r_5}$ 、

$r_6=\sqrt{r_1r_5}$ ，即 $\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_3r_5}+\sqrt{r_5r_1}=r$ ，故得證。 ■

五、探討相切六芒星中的共線共點性質

(一)共線性質

【定理 8】(共切圓三角形的共線性質)

設 $\Delta B_1B_2B_3$ 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的共切圓三角形，且 $\Delta A_1A_2A_3$ 為非等腰三角形，如圖 22。若 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{B_2B_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{B_1B_3}$ 分別交於 X 、 Y 、 Z ，則 X 、 Y 、 Z 三點共線。

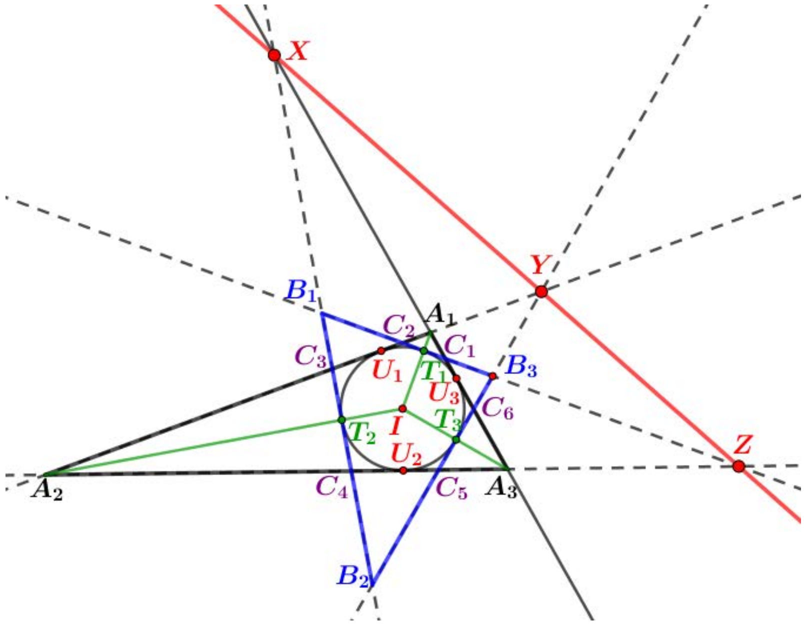


圖 22：共切圓三角形的共線共點性質

《證明》

1.在 $\Delta B_1B_2B_3$ 中，$\overleftrightarrow{A_3X}$ 為截線，由**孟氏定理**得知，$\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1B_3}}\times\dfrac{\overline{B_3C_6}}{\overline{C_6B_2}}\times\dfrac{\overline{B_2X}}{\overline{XB_1}}=1\cdots\cdots$①。

在 $\Delta B_1B_2B_3$ 中，$\overleftrightarrow{A_2Y}$ 為截線，由**孟氏定理**得知，$\dfrac{\overline{B_1C_2}}{\overline{C_2B_3}}\times\dfrac{\overline{B_3Y}}{\overline{YB_2}}\times\dfrac{\overline{B_2C_3}}{\overline{C_3B_1}}=1\cdots\cdots$②。

在 $\Delta B_1B_2B_3$ 中，$\overleftrightarrow{A_2Z}$ 為截線，由**孟氏定理**得知，$\dfrac{\overline{B_1Z}}{\overline{ZB_3}}\times\dfrac{\overline{B_3C_5}}{\overline{C_5B_2}}\times\dfrac{\overline{B_2C_4}}{\overline{C_4B_1}}=1\cdots\cdots$③。

2.將①×②×③得 $\dfrac{\overline{B_2X}}{\overline{XB_1}}\times\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1B_3}}\times\dfrac{\overline{B_3C_6}}{\overline{C_6B_2}}\times\dfrac{\overline{B_2C_4}}{\overline{C_4B_1}}\times\dfrac{\overline{B_1Z}}{\overline{ZB_3}}\times\dfrac{\overline{B_3C_5}}{\overline{C_5B_2}}\times\dfrac{\overline{B_2C_3}}{\overline{C_3B_1}}\times\dfrac{\overline{B_1C_2}}{\overline{C_2B_3}}\times\dfrac{\overline{B_3Y}}{\overline{YB_2}}=1$ 。

3.由**定理 4** 知 $\dfrac{\overline{B_1C_1}\times\overline{B_1C_2}\times\overline{B_2C_3}\times\overline{B_2C_4}\times\overline{B_3C_5}\times\overline{B_3C_6}}{\overline{B_1C_3}\times\overline{B_1C_4}\times\overline{B_2C_5}\times\overline{B_2C_6}\times\overline{B_3C_1}\times\overline{B_3C_2}}=1$ 代入，

得 $\dfrac{\overline{B_2X}}{\overline{XB_1}}\times\dfrac{\overline{B_1Z}}{\overline{ZB_3}}\times\dfrac{\overline{B_3Y}}{\overline{YB_2}}=1$，由**孟氏逆定理**知 X 、Y 、Z 三點共線，故得證。 ■

(二)共點及共線性質

【定理 9】(共切圓三角形的共點及共線性質)

設$\Delta B_1B_2B_3$為$\Delta A_1A_2A_3$的共切圓三角形，且$\Delta A_1A_2A_3$為非等腰三角形，如圖 23。若$\overleftrightarrow{A_1A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{B_2B_3}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{B_1B_3}$分別交於$X$、$Y$、$Z$，且$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$分別為四邊形$XT_2IU_3$、四邊形$YU_1IT_3$、四邊形$ZT_1IU_2$的外接圓，則$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$共同相交於$I$、$W$兩點，且$W$、$X$、$Y$、$Z$四點共線。

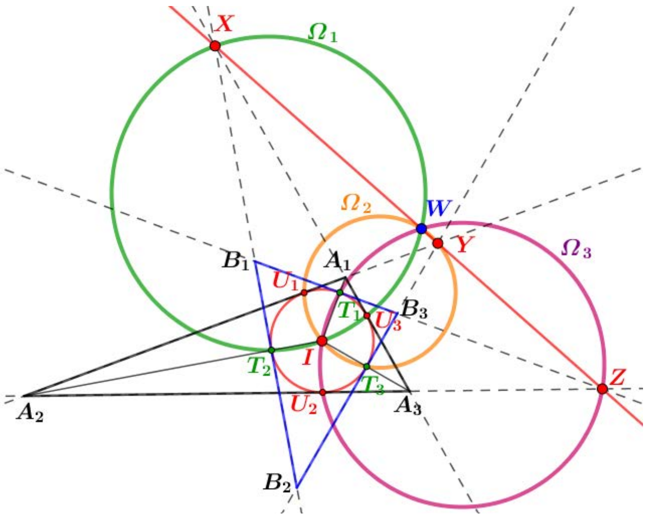


圖 23：共切圓三角形的共點及共線性質

《證明》

1.四邊形XT_2IU_3、四邊形YT_3IU_1、四邊形ZT_1IU_2共同相交於I點，故$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$亦共同相交於$I$點，除了$I$點，設$\Omega_1$、$\Omega_2$共同相交於$W$點，連接$\overline{IW}$。

2.在Ω_1中，$\angle XT_2I = 90^\circ$，所以$\overline{XI}$為直徑，因此$\angle XWI = 90^\circ$。同理在Ω_2中，$\angle YT_3I = 90^\circ$，所以$\overline{YI}$為直徑，因此$\angle YWI = 90^\circ$。

3.由 2.得知$\angle XWI + \angle YWI = 180^\circ$，則$W$、$X$、$Y$三點共線，且$\overline{IW} \perp \overline{XY}$。

4.除了I點，設Ω_2、Ω_3共同相交於W'，連接$\overline{IW'}$。在Ω_2中，$\overline{YI}$為直徑，因此$\angle YW'I = 90^\circ$，同理在Ω_3中，$\overline{ZI}$為直徑，因此$\angle ZW'I = 90^\circ$。

5.由 4 得知W'、Y、Z三點共線，且$\overline{IW'}\perp\overline{YZ}$。

6.由**定理 8** 中得知X、Y、Z三點共線，又因為$\overline{IW}\perp\overline{XY}$、$\overline{IW'}\perp\overline{YZ}$，則$W$、$W'$、$X$、$Y$、$Z$五點共線，又過線外一點作垂線只會有一交點，即$W=W'$，故得證。 ■

六、探討相切$2n(n\geq 3)$芒星

接下來、如果圖形推廣至相切$2n$芒星，那麼是否仍有相關性質及關係呢？依此我們進行探討在相切$2n$芒星時，對於等腰三角形、邊截線段、鏢形面積、尖角三角形的內切圓半徑等關係進行研究，其討論如下：

(一)等腰三角形性質

【性質 3】(相切$2n$芒星中有n個尖角三角形必為等腰三角形-性質 2 (1)的推廣)

給定一相切$2n$芒星，設n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$為n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的共切圓n邊形，如圖 24，則以$A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$為頂點的n個尖角三角形亦為等腰三角形。

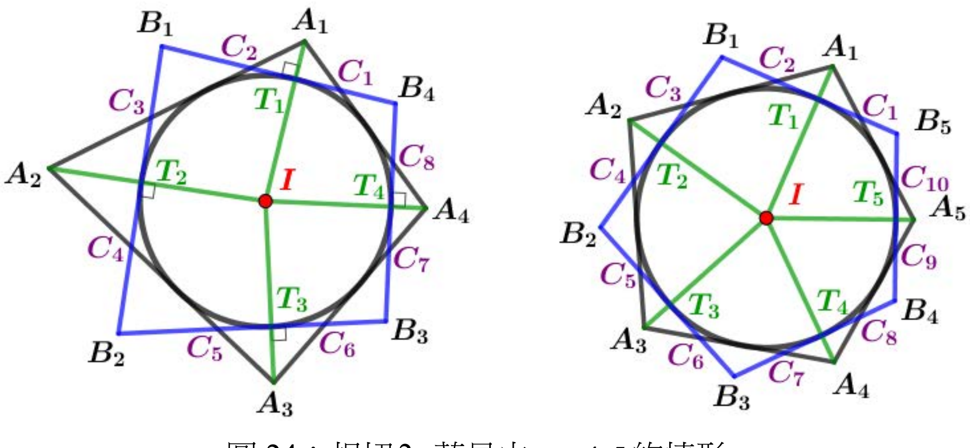


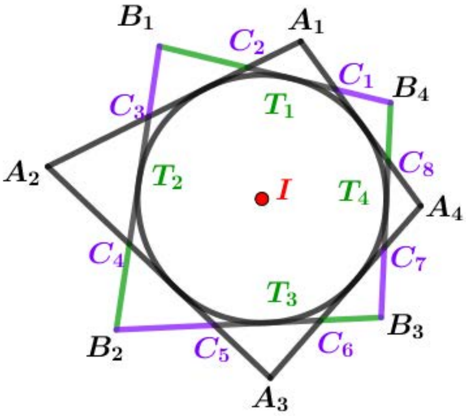
圖 24：相切$2n$芒星中$n=4,5$的情形

《證明》與**性質 2 (1)**相同證法即可得知，此n個尖角三角形亦為等腰三角形。 ■

(二)邊截線段性質

【定理 10】(相切$2n(n\geq 3)$芒星中的邊截線段性質-定理 3 之推廣)

給定一相切$2n$ 芒星，設n邊形$B_1B_2B_3\cdots B_n$為n邊形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的共切圓n邊形，且C_i為各邊的交點$(i=1,2,\cdots,2n)$，如圖 25，則$\sum_{i=1}^{n}\overline{B_iC_{2i}}=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iC_{2i+1}}\right)+\overline{B_nC_1}$。



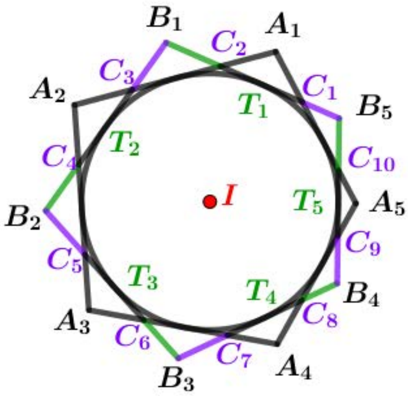


圖 25：相切 $2n$ 芒星中 $n=4,5$ 的邊截線段性質

《證明》

1.由**切線段定理**知 $\overline{B_iT_i}=\overline{B_iT_{i+1}}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 、 $\overline{B_nT_n}=\overline{B_nT_1}$ ，

所以 $\overline{B_nT_n}+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iT_i}=\overline{B_nT_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iT_{i+1}}$ 。

2.由**性質 3**，$\overline{C_{2i}T_i}=\overline{C_{2i-1}T_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\overline{C_{2i}T_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{C_{2i-1}T_i}$

3. $\overline{B_nT_n}+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iT_i}=\overline{B_nT_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iT_{i+1}}$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{B_iC_{2i}}+\overline{C_{2i}T_i}\right)=\left(\overline{B_nC_1}+\overline{C_1T_1}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\overline{B_iC_{2i+1}}+\overline{C_{2i+1}T_{i+1}}\right)$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\overline{B_iC_{2i}}+\sum_{i=1}^{n}\overline{C_{2i}T_i}=\overline{B_nC_1}+\overline{C_1T_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iC_{2i+1}}+\sum_{i=2}^{n}\overline{C_{2i-1}T_i}$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\overline{B_iC_{2i}}+\sum_{i=1}^{n}\overline{C_{2i}T_i}=\overline{B_nC_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iC_{2i+1}}+\sum_{i=1}^{n}\overline{C_{2i-1}T_i}$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\overline{B_iC_{2i}}=\overline{B_nC_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iC_{2i+1}}$ ，故得證。 ■

(三)鏢形面積關係

【定理 11】(相切 $2n$ 芒星中的鏢形面積性質-定理 5 的推廣)

設 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 是 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的共切圓 n 邊形且 C_i 為各邊的交點 $(i=1,2,\cdots,2n)$ ，若 R_1 為四邊形 $IA_1C_1B_n$ 的面積， R_i 是四邊形 $IA_iC_{2i+1}B_{i-1}\ (i=2,\cdots,n)$ 的面積且 R_{n+i} 是四邊形 $IA_iC_{2i}B_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 的面積，如圖 26，則 $\sum_{j=1}^{n}R_j=\sum_{j=1}^{n}R_{n+j}$ 。

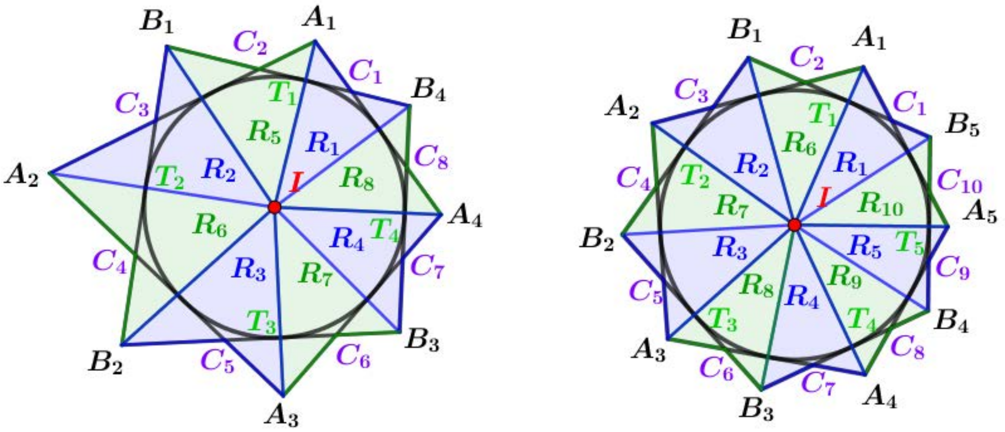


圖 26：相切$2n$芒星中的鏢形面積性質

《證明》

1.由**性質 3** 可知$\Delta A_iC_{2i-1}T_i \cong \Delta A_iC_{2i}T_i$ （$i=1,2,\cdots,n$）。

2.由**切線段定理**知$\Delta B_iT_{i+1}I \cong \Delta B_iT_iI$ （$i=1,2,\cdots,n-1$），$\Delta B_nT_1I \cong \Delta B_nT_nI$ 。

3.由 1.2.可得$\Delta B_nT_1I+\sum_{i=1}^{n}\Delta A_iC_{2i-1}T_i+\sum_{i=1}^{n-1}\Delta B_iT_{i+1}I=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_iC_{2i}T_i+\sum_{i=1}^{n}\Delta B_iT_iI$

$$\Rightarrow \Delta B_nT_1I+\Delta A_1C_1T_1+\sum_{i=2}^{n}\Delta A_iC_{2i-1}T_i+\sum_{i=2}^{n}\Delta B_{i-1}T_iI=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_iC_{2i}T_i+\sum_{i=1}^{n}\Delta B_iT_iI$$

$$\Rightarrow \left(\Delta A_1C_1T_1+\Delta B_nT_1I\right)+\sum_{i=2}^{n}\left(\Delta A_iC_{2i-1}T_i+\Delta B_{i-1}T_iI\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta A_iC_{2i}T_i+\Delta B_iT_iI\right)$$

$\Rightarrow R_1+\sum_{j=2}^{n}R_j=\sum_{j=1}^{n}R_{j+i}$ ，即$\sum_{j=1}^{n}R_j=\sum_{j=1}^{n}R_{n+j}$ ，故得證。 ■

(四)內切圓半徑性質

【定理 12】(相切$2n$芒星中尖角三角形的內切圓半徑性質-定理 6 的推廣)

設n邊形$B_1B_2\cdots B_n$是n邊形$A_1A_2\cdots A_n$的共切圓n邊形，且C_i為各邊的交點$(i=1,2,\cdots,2n)$若r_{2i-1}為尖角三角形$\Delta A_iC_{2i-1}C_{2i}(i=1,\cdots,n)$的內切圓半徑，$r_{2i}$為尖角三角形$\Delta B_iC_{2i}C_{2i+1}(i=1,\cdots,n-1)$的內切圓半徑且$r_{2n}$為為尖角三角形$\Delta B_nC_{2n}C_1$的內切圓半徑，如圖 27，則：**(1)** $r_{2i}=\sqrt{r_{2i-1}r_{2i+1}}(i=1,2,\cdots,n-1)$，$r_{2n}=\sqrt{r_1r_{2n-1}}$ **(2)** $\prod_{i=1}^{n}r_{2i-1}=\prod_{i=1}^{n}r_{2i}$ $(i=1,\cdots,n-1)$ 。

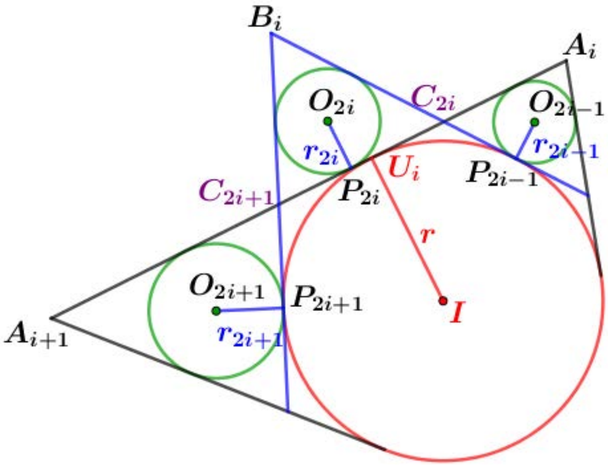


圖 27：相切$2n$芒星中的內切圓半徑關係

《證明》

1.假設圓I半徑為r，P_i為圓O_i與$2n$邊形$C_1C_2\cdots C_{2n}$之切點，$(i=1,2,\cdots,2n)$

在$\Delta O_{2i-1}C_{2i}I$ $(i=1,\cdots,n-1)$中，因為$\angle O_{2i-1}C_{2i}I=90^\circ$且$\overline{C_{2i}P_{2i-1}}\perp\overline{O_{2i-1}I}$，可得知

$\overline{C_{2i}P_{2i-1}}=\sqrt{r_{2i-1}r}$，同理在$\Delta O_{2i+1}C_{2i+1}I$得$\overline{C_{2i+1}P_{2i+1}}=\sqrt{r_{2i+1}r}$。

2.因為$\Delta O_{2i-1}C_{2i}P_{2i-1}\sim\Delta O_{2i}C_{2i}P_{2i}$，則$\dfrac{\overline{O_{2i-1}P_{2i-1}}}{\overline{C_{2i}P_{2i-1}}}=\dfrac{\overline{O_{2i}P_{2i}}}{\overline{P_{2i}C_{2i+1}}}$，即$\dfrac{r_{2i-1}}{\sqrt{r_{2i-1}r}}=\dfrac{r_{2i}}{\overline{P_{2i}C_{2i+1}}}$，可得

$\overline{P_{2i}C_{2i+1}}=\dfrac{r_{2i}}{r_{2i-1}}\sqrt{r_{2i-1}r}$。

3.因為$\Delta O_{2i+1}C_{2i+1}P_{2i+1}\sim\Delta O_{2i}C_{2i+1}P_{2i}$，則$\dfrac{\overline{O_{2i+1}P_{2i+1}}}{\overline{C_{2i+1}P_{2i+1}}}=\dfrac{\overline{O_{2i}P_{2i}}}{\overline{P_{2i}C_{2i+1}}}$，即$\dfrac{r_{2i+1}}{\sqrt{r_{2i+1}r}}=\dfrac{r_{2i}}{\overline{P_{2i}C_{2i+1}}}$，可得

$\overline{P_{2i}C_{2i+1}}=\dfrac{r_{2i}}{r_{2i+1}}\sqrt{r_{2i+1}r}$。

4.由$\Delta U_iC_{2i}I\cong\Delta P_{2i-1}C_{2i}I$，可得$\overline{U_iC_{2i}}=\overline{C_{2i}P_{2i-1}}=\sqrt{r_{2i-1}r}$，同理可得

$\overline{U_iC_{2i+1}}=\overline{C_{2i+1}P_{2i+1}}=\sqrt{r_{2i+1}r}$。

5.因為$\overline{P_{2i}C_{2i}}+\overline{P_{2i}C_{2i+1}}=\overline{C_{2i}C_{2i+1}}=\overline{U_iC_{2i+1}}+\overline{U_iC_{2i}}$，可得

$$\frac{r_{2i}}{r_{2i-1}}\sqrt{r_{2i-1}r}+\frac{r_{2i}}{r_{2i+1}}\sqrt{r_{2i+1}r}=\sqrt{r_{2i-1}r}+\sqrt{r_{2i+1}r}\Rightarrow\frac{r_{2i}}{r_{2i-1}}\sqrt{r_{2i-1}}+\frac{r_{2i}}{r_{2i+1}}\sqrt{r_{2i+1}}=\sqrt{r_{2i-1}}+\sqrt{r_{2i+1}}$$

$$\Rightarrow\frac{r_{2i}}{\sqrt{r_{2i-1}}}+\frac{r_{2i}}{\sqrt{r_{2i+1}}}=\sqrt{r_{2i-1}}+\sqrt{r_{2i+1}}\Rightarrow r_{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{r_{2i-1}}}+\frac{1}{\sqrt{r_{2i+1}}}\right)=\sqrt{r_{2i-1}}+\sqrt{r_{2i+1}}$$

$$\Rightarrow r_{2i}\left(\frac{\sqrt{r_{2i-1}}+\sqrt{r_{2i+1}}}{\sqrt{r_{2i-1}}\sqrt{r_{2i+1}}}\right)=\sqrt{r_{2i-1}}+\sqrt{r_{2i+1}} \quad \Rightarrow r_{2i}=\sqrt{r_{2i-1}r_{2i+1}}$$ ，同理可證得 $r_{2n}=\sqrt{r_1 r_{2n-1}}$ 。

6.將 $\prod_{i=1}^{n} r_{2i}=\sqrt{r_1 r_{2n-1}}\cdot\prod_{i=1}^{n}\sqrt{r_{2i-1}r_{2i+1}}$ ，則可得 $\prod_{i=1}^{n} r_{2i-1}=\prod_{i=1}^{n} r_{2i}$ ，故得證。 ■

七、非相切 $k(k\ge 5)$ 芒星

(一)非相切 $k=2n-1\,(n\ge 3)$ 芒星中的邊截線段性質

在相切 $2n$ 芒星中得知會有邊截線段性質，然而邊截線段性質是由切線段定理得到，當在非相切 $k=2n-1\,(n\ge 3)$ 芒星中仍有切線段定理，依此是否有其性質成立呢?以下便是我們的討論：

【定理 13】(非相切 $k=2n-1\,(n\ge 3)$ 芒星中的邊截線段性質-定理 3 的推廣)

給定一非相切 k 芒星，其中 $k=2n-1$ ， $n\ge 3$ ，如圖 25，則 $\left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{A_iC_{i+1}}\right)+\overline{A_kC_1}=\sum_{i=1}^{k}\overline{A_iC_i}$ 。

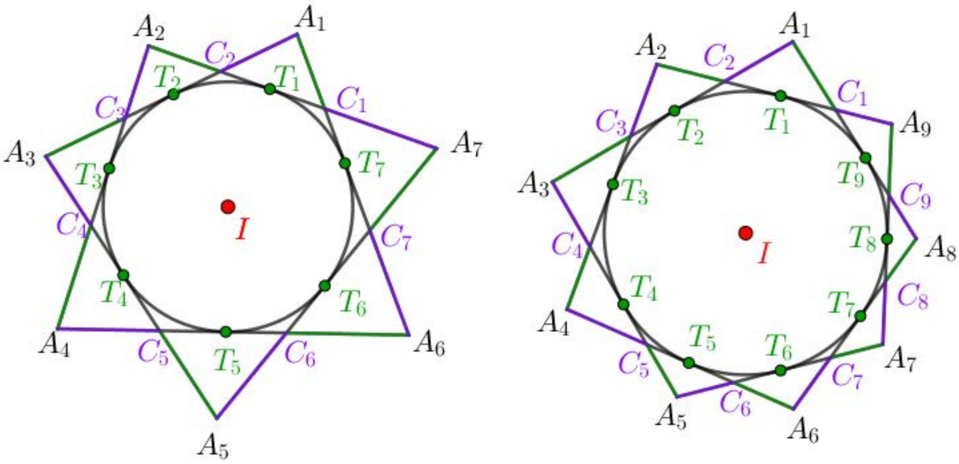


圖 28：非相切 k 芒星中 $k=7,9$ 的邊截線段性質

《證明》

1.由**切線段定理**得知： $\overline{C_1T_1}=\overline{C_1T_k}$ ，且 $\overline{C_iT_i}=\overline{C_iT_{i-1}}$ $(i=2,3,\ldots,k)$。

2.由**切線段定理**得知： $\overline{A_1T_2}=\overline{A_1T_k}$ ， $\overline{A_iT_{i+1}}=\overline{A_iT_{i-1}}$ $(i=2,3,\ldots,k-1)$且 $\overline{A_kT_1}=\overline{A_kT_{k-1}}$ 。

3.由 2.可知： $\overline{A_1T_2}+\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{A_iT_{i+1}}\right)+\overline{A_kT_1}=\overline{A_1T_k}+\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{A_iT_{i-1}}\right)+\overline{A_kT_{k-1}}$ ，

則 $(\overline{A_1C_2}+\underline{\underline{\overline{C_2T_2}}})+\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{A_iC_{i+1}}\right)+\underline{\underline{\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{C_{i+1}T_{i+1}}\right)}}+(\overline{A_kC_1}+\underline{\overline{C_1T_1}})$

$=(\overline{A_1C_1}+\underline{\overline{C_1T_k}})+\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{A_iC_i}\right)+\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{C_iT_{i-1}}\right)+(\overline{A_kC_k}+\overline{C_kT_{k-1}})$

即 $\overline{A_1C_2}+\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{A_iC_{i+1}}\right)+\underline{\underline{\left(\sum_{i=2}^{k}\overline{C_iT_i}\right)}}+\overline{A_kC_1}=\overline{A_1C_1}+\left(\sum_{i=2}^{k-1}\overline{A_iC_i}\right)+\left(\sum_{i=2}^{k}\overline{C_iT_{i-1}}\right)+\overline{A_kC_k}$

化簡可得 $\left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{A_iC_{i+1}}\right)+\overline{A_kC_1}=\sum_{i=1}^{k}\overline{A_iC_i}$ ，故得證。 ■

(二)非相切 $2n$ 芒星中的風車面積性質

在非相切 $2n$ 芒星中，由各個切點與所在的尖角三角形頂點連線可將該尖角三角形分成兩個小三角形，此時我們將所有 $4n$ **個小三角形合稱為風車圖形。**

【定理 14】(非相切 $2n$ 芒星中的風車面積性質)

設 n 邊形 $A_1A_3A_5\cdots A_{2n-1}$ 與 n 邊形 $A_2A_4\cdots A_{2n}$ 形成非相切 $2n$ 芒星，如圖 29，若 R_i 為 $\Delta A_iS_iC_i$ $(i=1,\cdots,2n)$ 的面積， R_{2n+i} 為 $\Delta A_iS_iC_{i+1}$ $(i=1,\cdots,2n-1)$ 的面積且 R_{4n} 為 $\Delta A_{2n}S_{2n}C_1$ 的面積，則 $\prod_{i=1}^{2n}R_i=\prod_{i=1}^{2n}R_{2n+i}$ 。

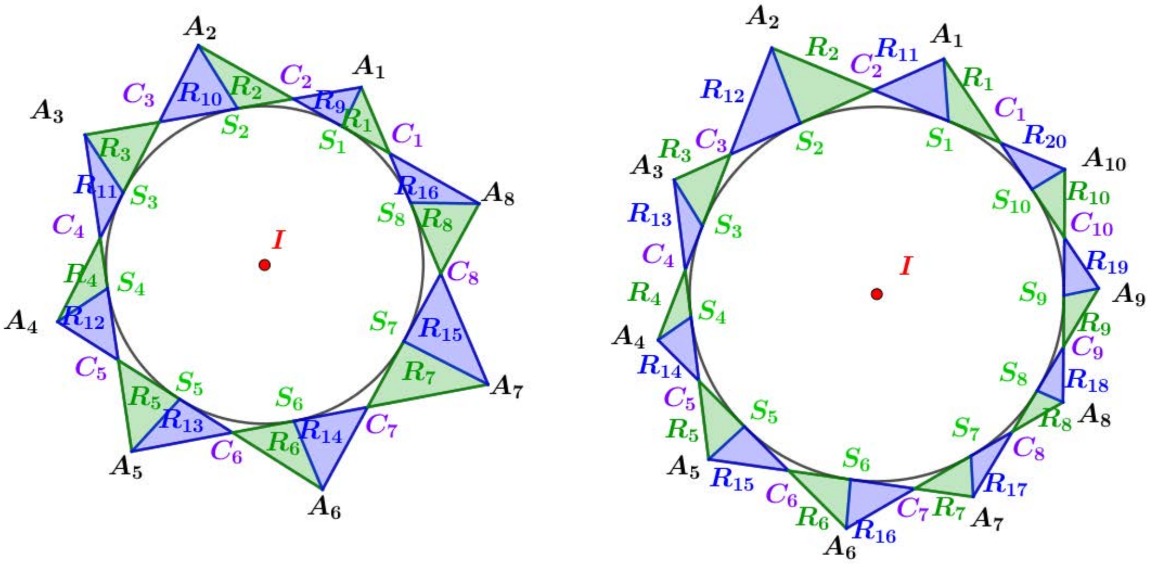


圖 29：非相切 $2n$ 芒星中 $n=4,5$ 的風車面積

《證明》

1.設 $\Delta A_iC_iC_{i+1}\ (i=1,\cdots,2n-1)$ 中，h_i 為 $\overline{C_iC_{i+1}}$ 的高且 $\Delta A_{2n}C_1C_{2n}$ 中，h_{2n} 為 $\overline{C_1C_{2n}}$ 的高。

2.由**切線段定理**得知：$\overline{C_1S_1}=\overline{S_{2n}C_1}$，$\overline{C_{i+1}S_{i+1}}=\overline{S_iC_{i+1}}\ (i=1,\cdots,2n-1)$，則可得

$\prod_{i=1}^{2n}\overline{C_iS_i}=\overline{S_{2n}C_1}\times\prod_{i=1}^{2n-1}\overline{S_iC_{i+1}}$。

3.因為 $\prod_{i=1}^{2n}R_i=\prod_{i=1}^{2n}(\frac{1}{2}\cdot\overline{S_iC_i}\cdot h_i)=(\frac{1}{2})^{2n}\cdot\prod_{i=1}^{2n}\overline{S_iC_i}\cdot\prod_{i=1}^{2n}h_i$；

且 $\prod_{i=1}^{2n}R_{2n+i}=\prod_{i=1}^{2n-1}R_{2n+i}\cdot R_{4n}=\prod_{i=1}^{2n-1}(\frac{1}{2}\cdot\overline{S_iC_{i+1}}\cdot h_i)\cdot(\frac{1}{2}\cdot\overline{S_{2n}C_1}\cdot h_{2n})=(\frac{1}{2})^{2n}\overline{S_{2n}C_1}\cdot\prod_{i=1}^{2n-1}\overline{S_iC_{i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{2n}h_i$，

又由 2.可得 $\prod_{i=1}^{2n}R_i=\prod_{i=1}^{2n}R_{2n+i}$，故得證。 ■

伍、研究結果

由以上研究，得知如何建構相切六芒星、並且討論出相切六芒星有哪些幾何性質，進一步我們將圖形推廣至（非）相切 $2n$ 芒星亦發現類似的幾何性質也成立。結果如下：

一、當圖形為相切六芒星時，會有以下性質：

(一)給定任意三角形所形成的共切圓三角形必為銳角三角形，同時存有三個尖角三角形為等腰三角形，另三個尖角三角形與共切圓三角形為相似三角形，參見**性質 1~2**。

(二)利用尺規作圖建構相切六芒星並推導作圖的充要條件-角度性質，如**作圖 1~3** 及**定理 1~2**。

(三)推導共切圓三角形中的邊截線段性質、邊截線段恆等式及鏢形面積等性質，參見**定理 3~5**。

(四)推導尖角三角形中的內切圓半徑與原三角形中的內切圓半徑恆等式等性質，參見**定理 6~7**。

(五)推導相切六芒星中的共點及共線性質，參見**定理 8~9**。

二、將圖形由相切六芒星推廣至相切 $2n$ 芒星，發現以下性質：

(一)在相切 $2n$ 芒星圖形中的 n 個尖角三角形必為等腰三角形，參見**性質 3**。

(二)推導在相切 $2n$ 芒星中存在邊截線段性質，參見**定理 10**。

(三)推導在相切$2n$芒星圖形中的鏢形面積性質，參見**定理 11**。

(四)推導在相切$2n$芒星圖形中的尖角三角形的內切圓半徑性質，參見**定理 12**。

三、對於圖形為非相切$k(k\geq 5)$芒星時，有以下性質：

(一)推導在非相切$k=2n-1$芒星中存在邊截線段性質，參見**定理 13**。

(二)推導在非相切$2n$芒星圖形中的風車面積性質，參見**定理 14**。

陸、結論與未來展望

本研究探得任意三角形所形成共切圓三角形必是銳角三角形，同時由六個尖角三角形中的三個等腰三角形，如此可推得另三個尖角三角形與共切圓三角形為相似三角形，參見**性質 1~2**。然而推廣至相切$2n(n\geq 3)$芒星時，雖然本研究得知仍有n個尖角形是等腰三角形，但除了共切圓三角形之外，其餘的共切圓n邊形皆無法使每個內角皆小於90°，因此另外n個尖角三角形必不全為銳角三角形。

本文在**定理 1** 中，雖然只談及建構相切六芒星時是利用其角度性質來完成作圖，如圖13，而在相切$2n(n\geq 3)$芒星中，此角度性質依然成立，如圖 30。

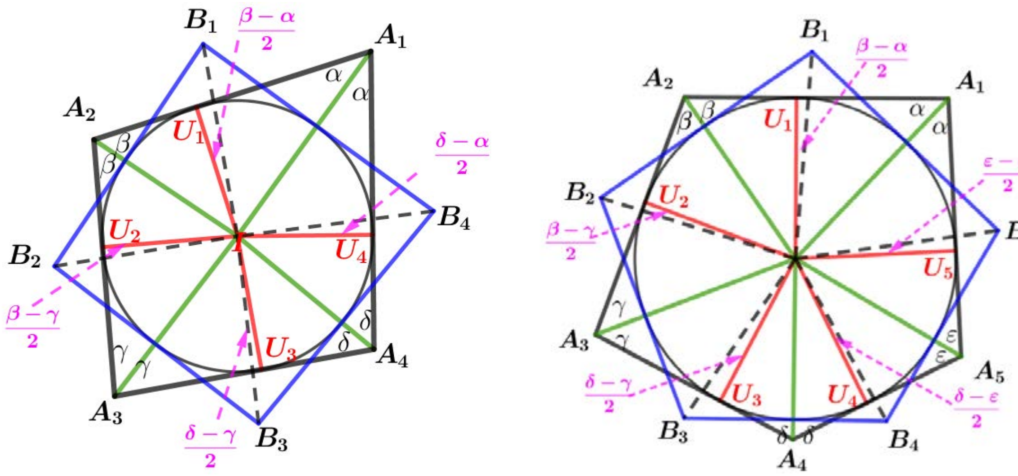


圖 30：相切$2n(n\geq 3)$芒星中$n=4,5$的角度性質

在探討尖角三角形的內切圓半徑性質時，本研究利用彼此三角形相似結構所得之比例及線段長關係來推得之，然而在相切$2n(n\geq 3)$芒星中的尖角三角形，其彼此三角形相似結構及線段長關係並未改變，如此推廣到相切$2n(n\geq 3)$芒星的結果必屬相同情況，參見**定理 6** 與**定理 12**。值得一提的是，以間隔方式將相切$2n$芒星中的鏢形面積分別加總，會產生恆等關

係，參見**定理 11**。其原因在相切$2n$芒星中有相間隔的n個尖角三角形是等腰且頂點與切點連線與底邊呈垂直關係，如此形成全等三角形。但在非相切$2n$芒星的尖角三角形並非都是等腰三角形，故非相切$2n$芒星的鏢形面積無此特性。令人驚喜的是，不論相切或非相切$2n$芒星其內切圓的各個切點與所在的尖角三角形頂點連線所形成風車圖形，若將風車圖形中兩個方向的小三角形面積分別相乘後，結果必然相等，參見**定理 14**。

除此之外，本研究中目前採兩個三角形共內切圓去進行研究，如果考慮三角形的外心與各邊中點之射線，並與外接圓交於三點，將此三點連線後會產生另一種六芒星，如圖 31，則此六芒星是否有類似的結果發生呢？未來亦可對於研究結果中的面積加總性質與乘積性質之間尋求其關連性，期盼未來能得到漂亮的結果。

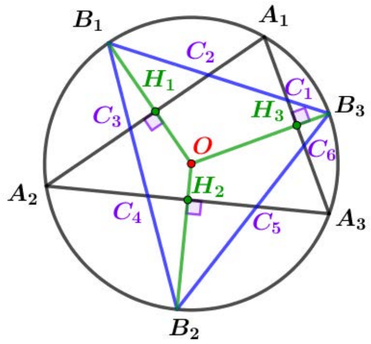


圖 31：相接六芒星

柒、參考文獻資料

[1] 洪有情(主編) (2021)。**國民中學數學課本第五冊**。康軒文教。

[2] 許志農(主編) (2021)。**高級中學數學課本第二冊**。龍騰文化。

[3] 笹部貞市郎 (2003)。**幾何學辭典**。台北市九章出版社。

【評語】030405

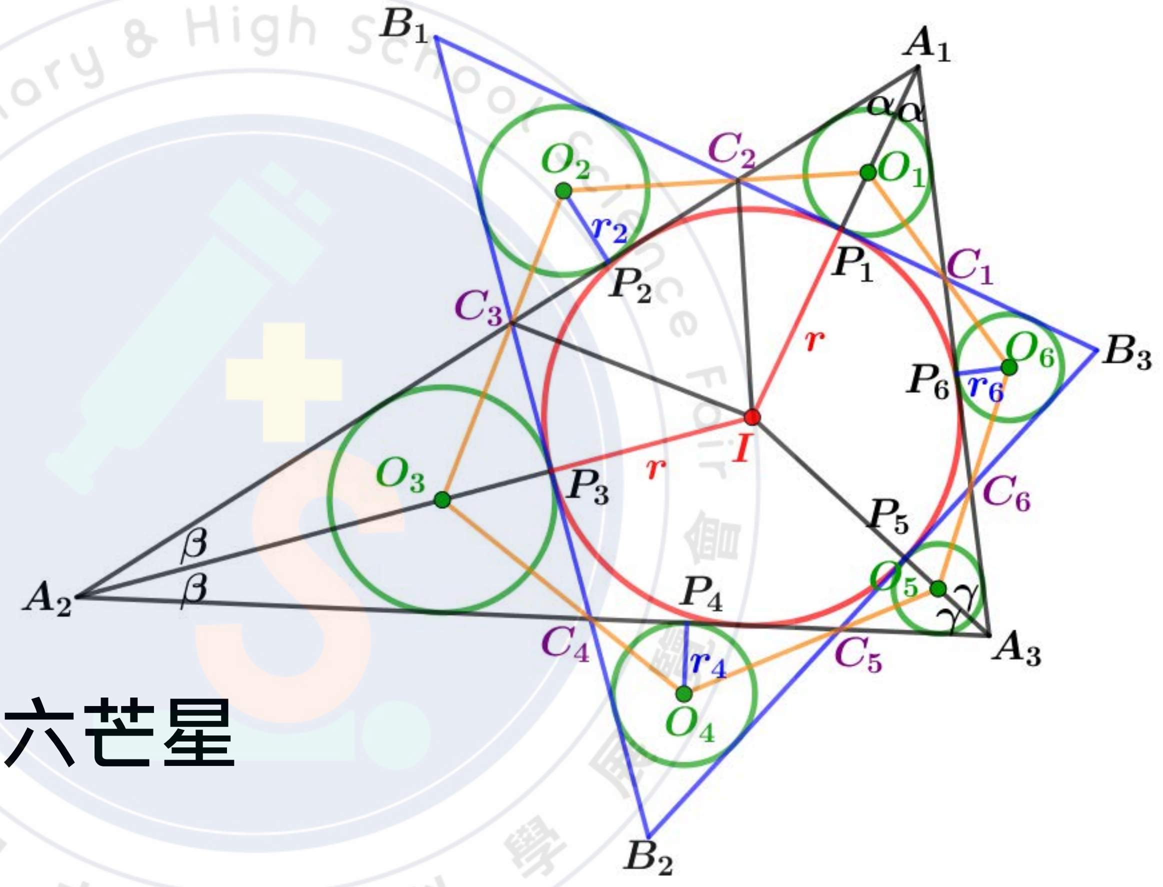
以共切圓三角形作出發點，探討其衍生的相關性質，如從所有給定的三角形有相同內切圓的三角形中選出滿足特定條件的一個三角形，發現到由這個三角形與原三角形所衍生出的小三角形具有許多有趣的性質。想法別出心裁，在論述一些性質時所使用的技巧也頗具巧思，內容上的討論及推理過程完整，值得肯定。有一些在論述過程中所得出的小結論其實是可以獨立出來變成引理的，這對於簡化後續的論述以及可能得到更多好的結果都會有所助益。

作品簡報

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：相切六芒星



前言

研究動機

探討相切六芒星

- 當三角形頂點與內心連線會與內切圓產生交點，以此交點為切點可形成共內切圓之三角形。
- 以上兩三角形所構成的圖形具有許多幾何性質，推廣 $2n$ 邊形仍有些幾何性質依然成立。

研究問題

1.給定共切圓三角形如何用尺規作圖作出原三角形呢？ 2.相切六芒星有哪些幾何性質呢？
3.推廣至(非)相切 $2n$ 芒星有哪些幾何性質呢？

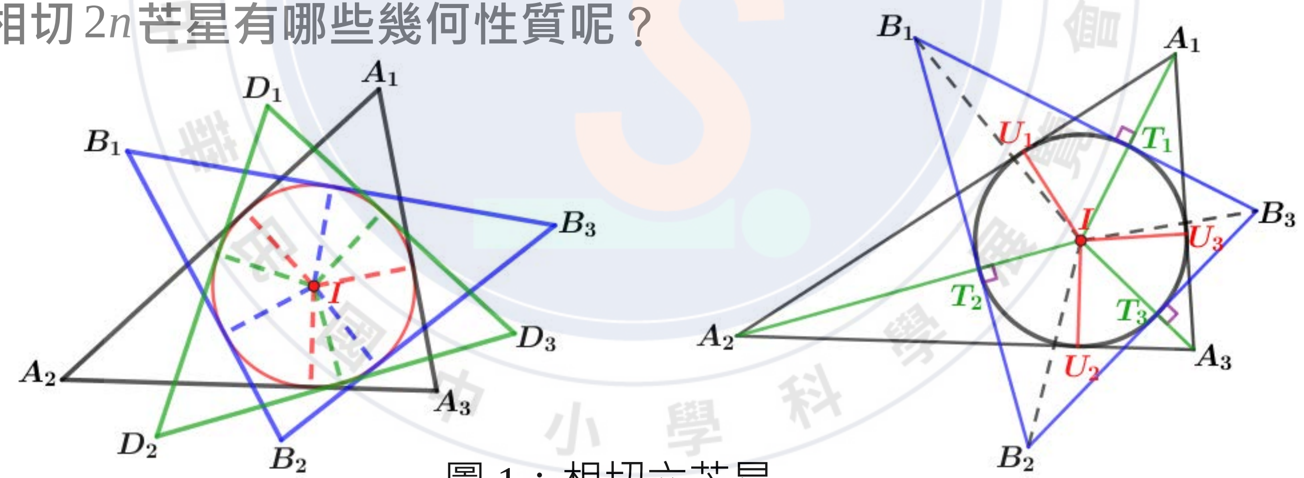


圖 1：相切六芒星

名詞定義

定義 ((非)相切 $2n\ (n \geq 3)$ 芒星與共切圓三角形、尖角三角形)

相切六芒星 → 相切 $2n$ 芒星 → 非相切 $2n$ 芒星

$\Delta A_1A_2A_3$：原三角形

$\Delta B_1B_2B_3$：共切圓三角形

$\Delta A_1C_1C_2\ \Delta A_2C_3C_4\ \Delta A_3C_5C_6$
$\Delta B_1C_2C_3\ \Delta B_2C_4C_5\ \Delta B_3C_1C_6$：尖角三角形

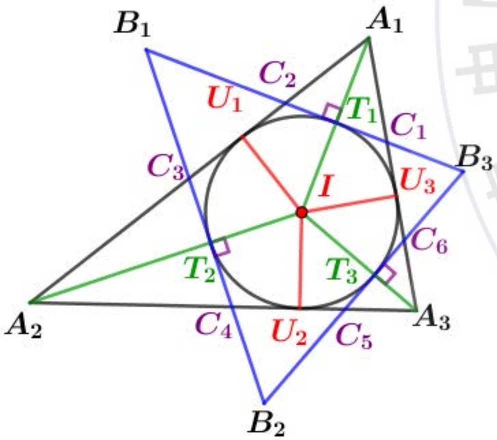


圖 2：相切六芒星

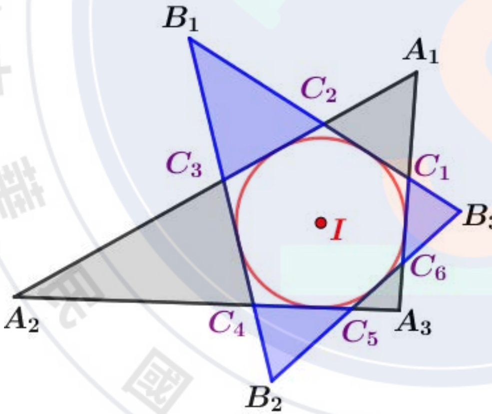


圖 3：尖角三角形

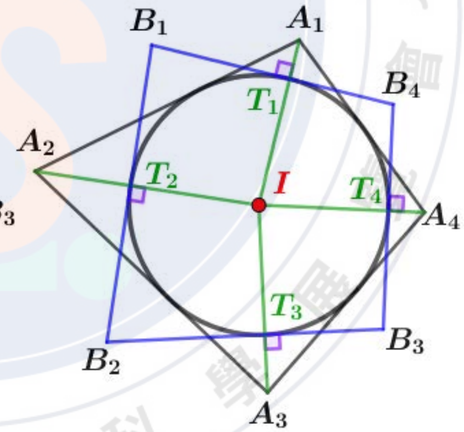


圖 4：相切八芒星

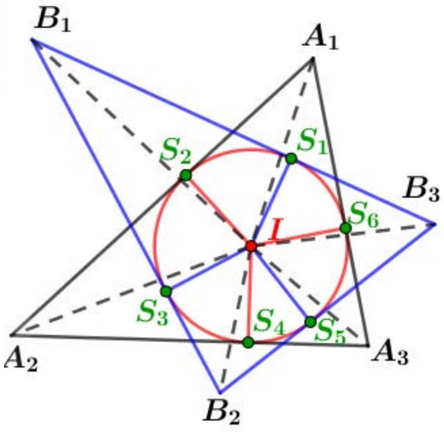


圖 5：非相切六芒星

研究架構

相切六芒星

基本性質

- 原三角形　　：任意
- 共切圓三角形：銳角
- 尖角三角形　：等腰、相似

尺規作圖

- 作圖(I)　：作共切圓三角形
- 作圖(II)　：作原三角形
- 作圖(III)：作原三角形

(非)相切 $2n$ 芒星

相切 $2n$ 芒星

- 尖角三角形
- 邊截線段
- 內切圓半徑
- 鏢形面積

非相切 $2n$ 芒星

- 邊截線段
- 風車面積

幾何性質

共切圓三角形

- 邊截線段
- 邊截線段恆等式
- 鏢形面積

尖角三角形

- 內切圓半徑
- 內切圓半徑恆等式

相切六芒星

- 共線
- 共點

預備定理

切線段定理

$\overline{PH_1}=\overline{PH_2}$

且 $\overline{PI}$ 平分 $\angle H_1PH_2$

$\angle H_1IH_2$

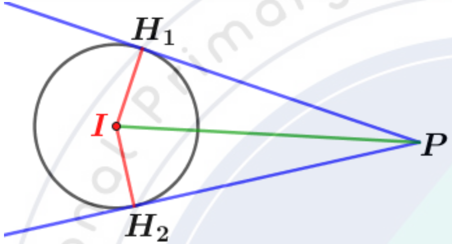


圖 6：切線段定理

孟氏定理

$$\frac{\overline{A_1M_3}}{\overline{M_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2M_1}}{\overline{M_1A_3}}\times\frac{\overline{A_3M_2}}{\overline{M_2A_1}}=1$$

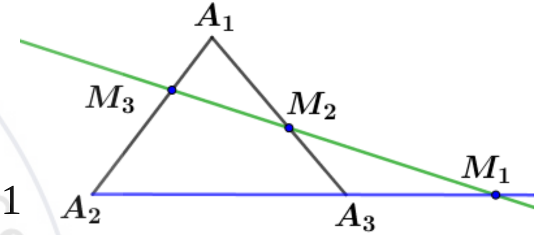


圖 7：孟氏定理

共切圓及尖角三角形的基本性質

性質 1

$\alpha+\beta<90^\circ$

$\beta+\gamma<90^\circ$

$\alpha+\gamma<90^\circ$

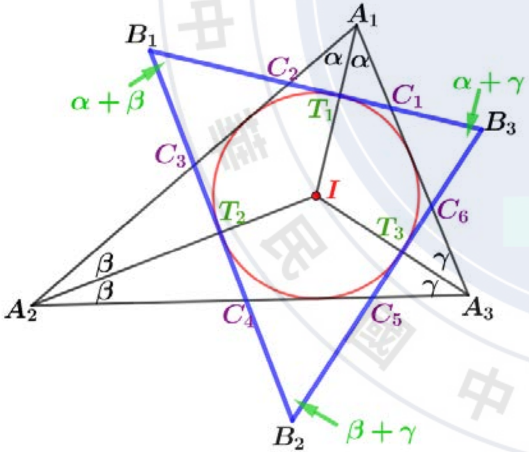


圖 8：共切圓三角形必為**銳角三角形**

性質 2

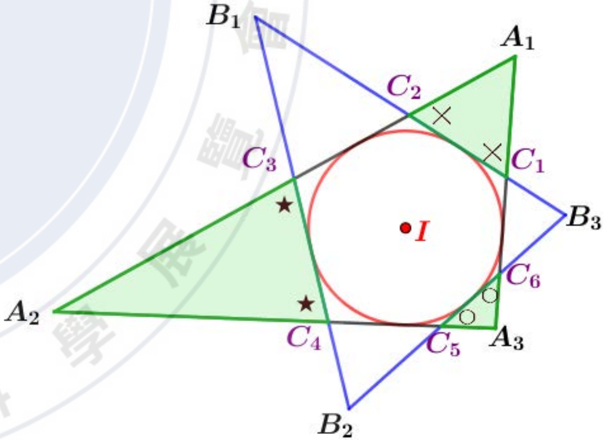


圖 9：三個尖角為**等腰三角形**

作圖充要條件的角度定理

給定共切圓三角形 → 作原三角形 → 角度定理

定理 1 (角度定理 I)

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle B_1$$
$$\angle 3 = \angle 4 = \angle B_2$$
$$\angle 5 = \angle 6 = \angle B_3$$

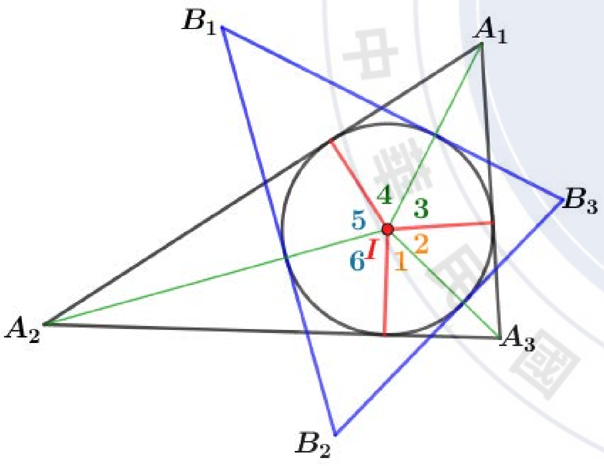


圖 10：角度定理 I

定理 2 (角度定理 II)

$$\angle U_1IB_1 = \frac{1}{2}(\angle B_3 - \angle B_2)$$
$$\angle U_2IB_2 = \frac{1}{2}(\angle B_3 - \angle B_1)$$
$$\angle U_3IB_3 = \frac{1}{2}(\angle B_2 - \angle B_1)$$

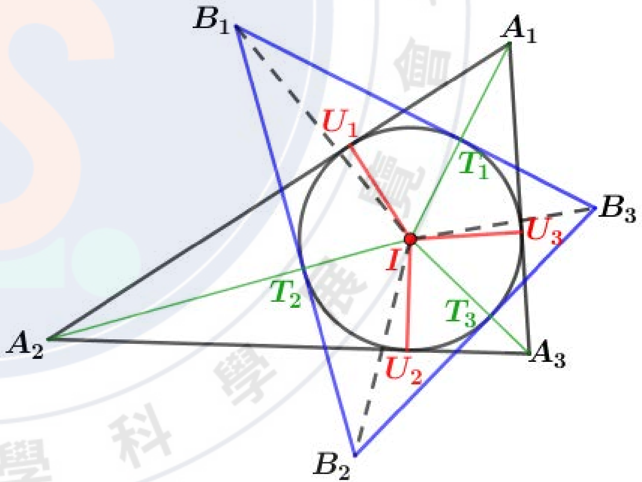


圖 11：角度定理 II

相切2n芒星的幾何性質

定理 3 (邊截線段定理)

$$\overline{B_1C_3}+\overline{B_2C_5}+\overline{B_3C_1}=\overline{B_1C_2}+\overline{B_2C_4}+\overline{B_3C_6}$$

當圖形推廣至相切2n 芒星時，

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{B_iC_{2i}}=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\overline{B_iC_{2i+1}}\right)+\overline{B_nC_1}$$

由切線段定理可得證

定理 4 (鏢形面積定理)

$$R_1+R_2+R_3=R_4+R_5+R_6$$

當圖形推廣至相切 2n 芒星時，

$$\sum_{j=1}^{n}R_j=\sum_{j=1}^{n}R_{n+j}$$

由三角形全等可得證

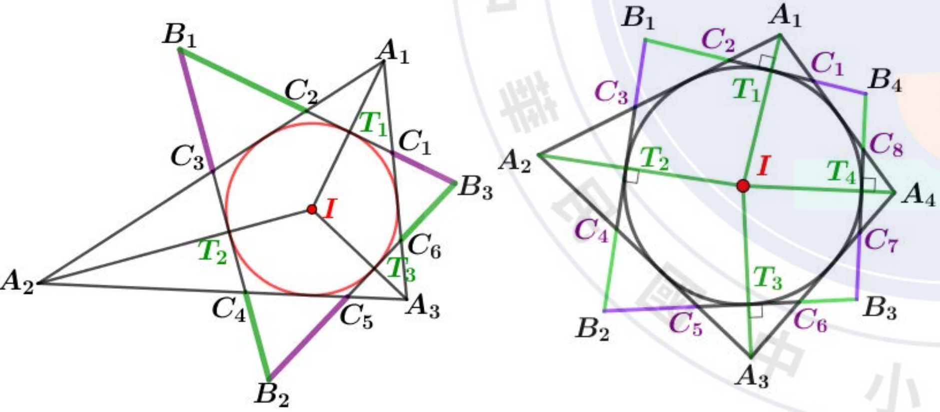


圖 12：相切六及八芒星中邊截線段定理

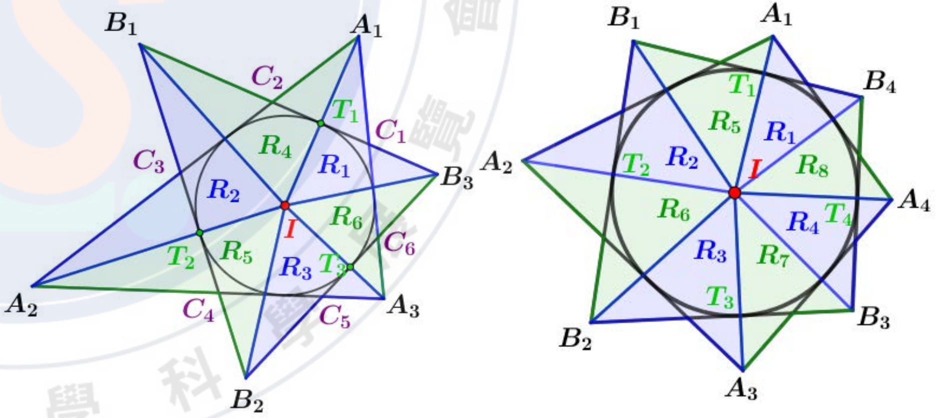


圖 13：相切六芒星中鏢形面積定理

相切六芒星的幾何性質

定理 5 (尖角三角形的相似性質)

$$\Delta B_1C_2C_3 \sim \Delta C_5B_2C_4 \sim \Delta C_6C_1B_3 \sim \Delta B_1B_2B_3$$

由性質 2可得證

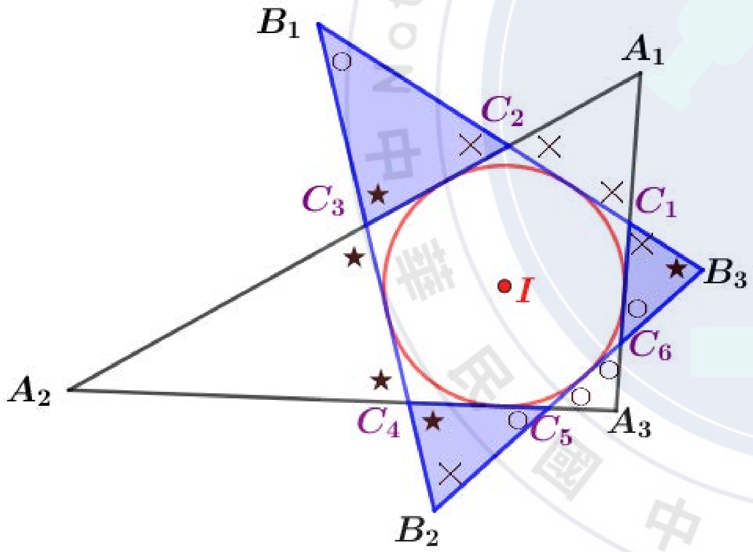


圖 14：三個尖角是相似三角形

定理 6 (邊截線段恆等式)

(1) $\overline{B_1C_2} \times \overline{B_2C_4} \times \overline{B_3C_6} = \overline{B_1C_3} \times \overline{B_2C_5} \times \overline{B_3C_1}$

(2) $\overline{B_1C_1} \times \overline{B_2C_3} \times \overline{B_3C_5} = \overline{B_1C_4} \times \overline{B_2C_6} \times \overline{B_3C_2}$

由定理 5可得證

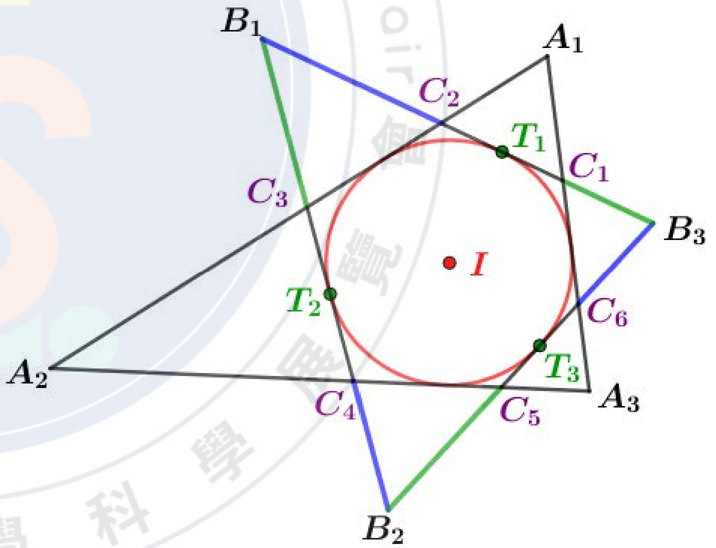


圖 15：邊截線段恆等式

相切六芒星的共線(共點)性質

定理 7 (三點共線定理)

X、Y、Z 三點共線

由孟氏定理與定理6可得證

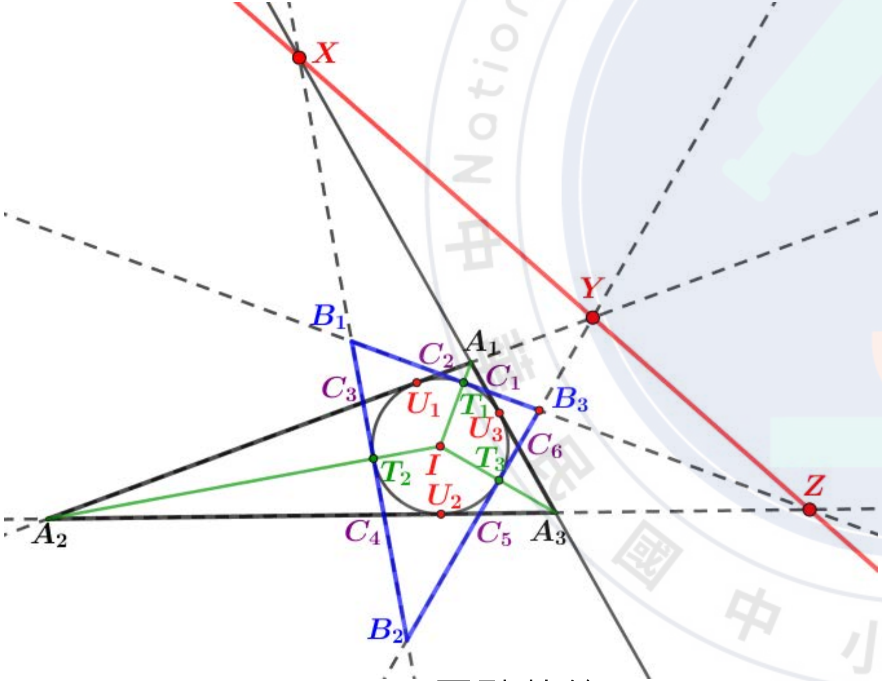


圖 16：三點共線

定理 8 (三圓共點及四點共線)

Ω_1、Ω_2、Ω_3三圓共交於兩點

X、Y、Z、W 四點共線

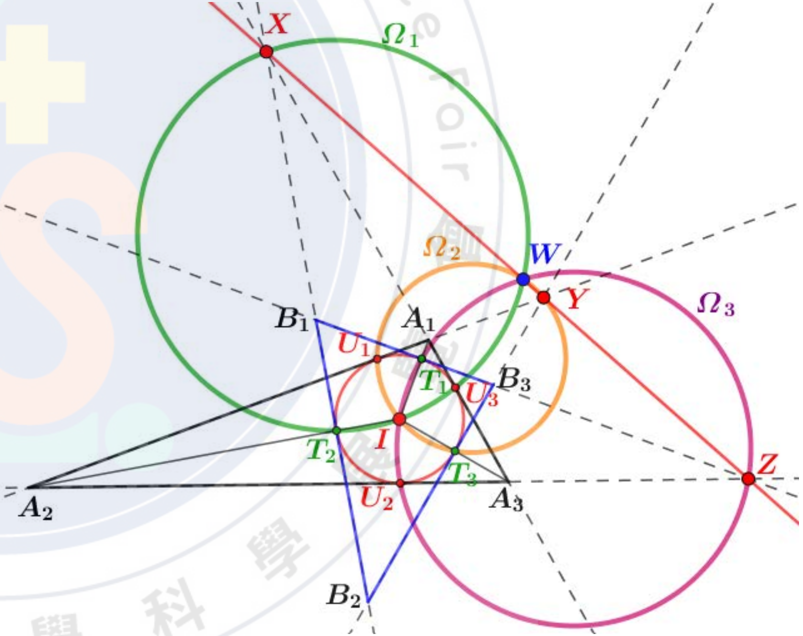


圖 17：三圓共點與四點共線

尖角三角形中的幾何性質

定理 9 (半徑幾何平均定理)

(1) $r_2{}^2 = r_1 r_3,\ r_4{}^2 = r_3 r_5,\ r_6{}^2 = r_1 r_5$

(2) $r_1 r_3 r_5 = r_2 r_4 r_6$

當圖形推廣至相切$2n$芒星時，

(1) $r_{2n} = \sqrt{r_1 r_{2n-1}},\ r_{2i} = \sqrt{r_{2i-1} r_{2i+1}}\,(i = 1, 2, \cdots, n-1)$

(2) $\prod_{i=1}^{n} r_{2i-1} = \prod_{i=1}^{n} r_{2i}$

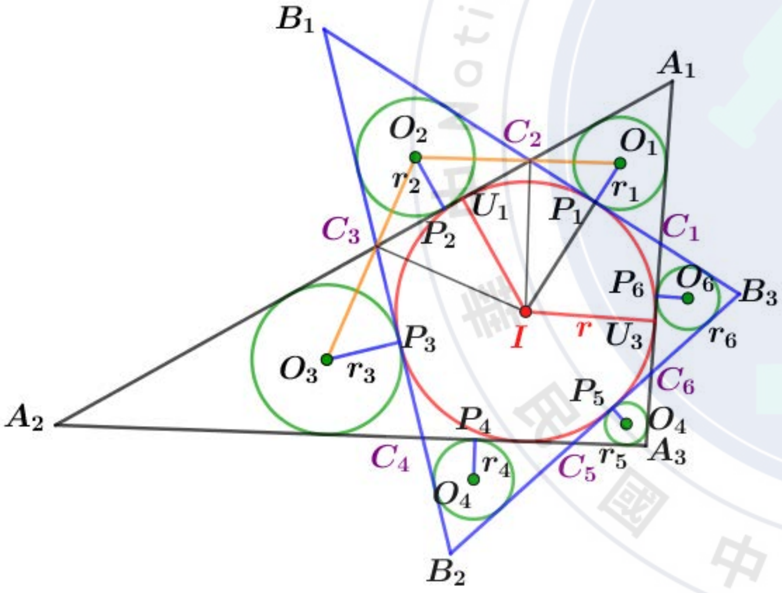


圖 18：內切圓半徑幾何平均定理

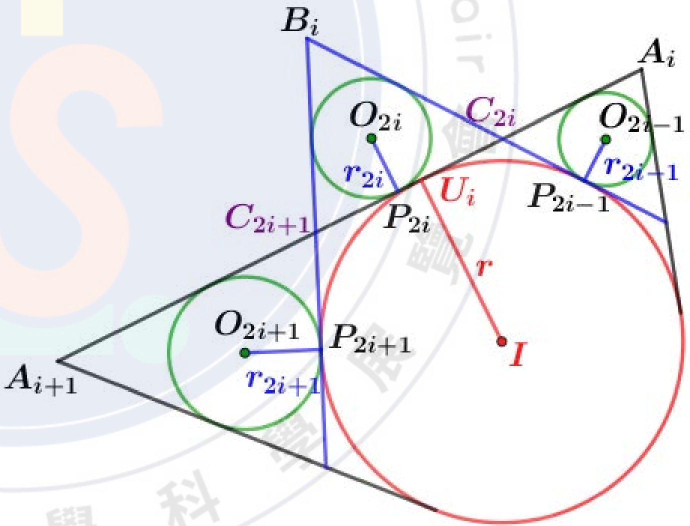


圖 19：相切$2n$芒星的半徑幾何平均定理

尖角三角形中的幾何性質

定理 10 (內切圓半徑恆等式)

(1) $r_2+r_4+r_6=r$ **(2)** $\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_3r_5}+\sqrt{r_5r_1}=r$

利用定理 9 可得證

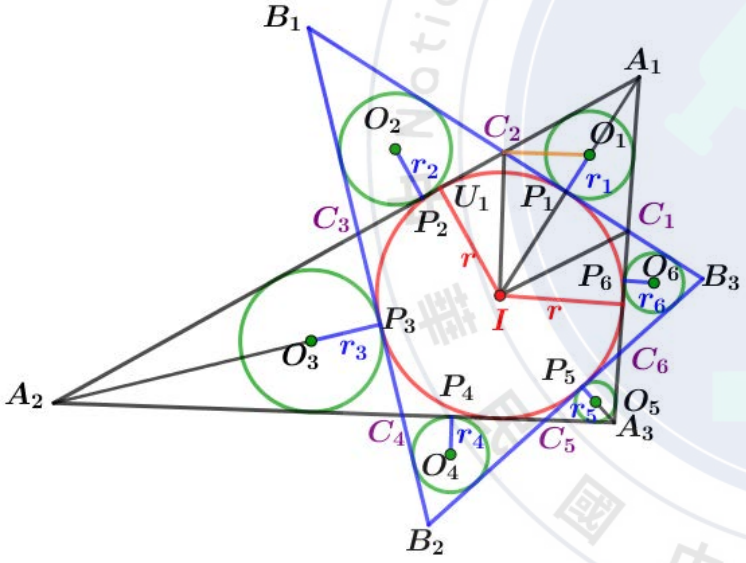


圖 20：內切圓半徑恆等式

定理 11 (風車面積恆等式)

$$\prod_{i=1}^{2n} R_i=\prod_{i=1}^{2n} R_{2n+i}$$

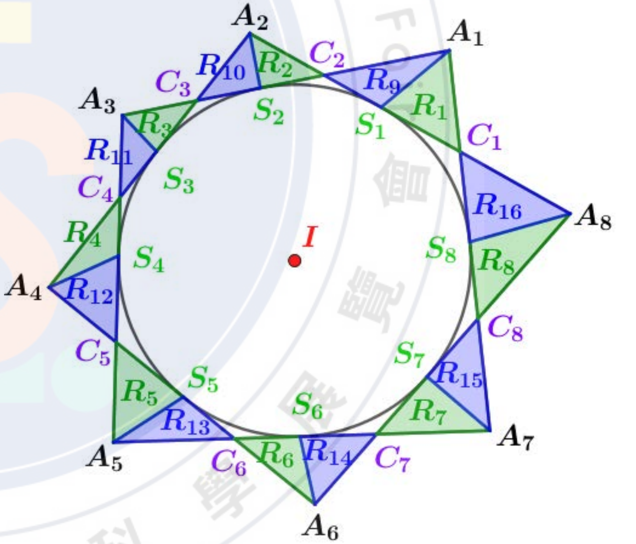


圖 21：非相切八芒星中的風車面積

結論及未來展望

- ✓ 相切$2n$芒星存在角度定理，利用此定理可完成相切六芒星之作圖。
- ✓ 共切圓三角形必為銳角三角形，同時存有三個尖角三角形為等腰三角形，另三個尖角三角形與共切圓三角形為相似三角形。
- ✓ 由尖角三角形相似關係可得截線段恆等式，進一步推得三點共線。
- ✓ 邊截線段定理、鏢形面積定理、半徑幾何平均定理等在相切$2n$芒星中亦成立。
- ✓ 風車面積恆等式在非相切$2n$芒星（包含相切$2n$芒星）亦成立。
- ◻ 未來若圖形延伸為相接$2n$芒星，探討其有何幾何性質。

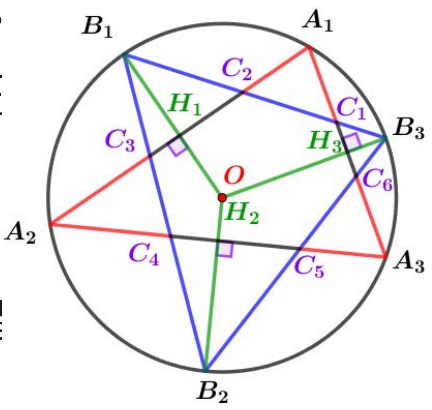


圖 22：相接六芒星

參考文獻

[1] 洪有情(主編) (2021)。**國民中學數學課本第五冊**。臺北市：康軒文教。

[2] 許志農(主編) (2021)。**高級中學數學課本第二冊**。新北市：龍騰文化。

[3] 笹部貞市郎 (2003)。**幾何學辭典**。臺北市：九章出版社。