中華民國第 62 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030404

「非西瓦」時之三角形面積分割探討

學校名稱：臺中市立清水國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳顥	王永賢
國二 陳于恩	洪嘉祥
國二 陳芊彣	

關鍵詞：面積分割、西瓦定理、孟氏定理

摘要

研究想法來自於三中線將三角形平分為 6 個面積相等的小三角形，試想如果分割線不是中線的話，分割結果會是如何？

先研究三角形三頂點與其對邊上的三等分點連線，將三角形分成 19 個區域，我們運用孟氏定理計算出這些區域的面積比及一些延伸性質。

運用上述計算技巧，研究三角形三頂點與其對邊上的任意分割點連線，當三條分割線不共點（**非西瓦**）時得分割三角形，證得此分割三角形面積與原三角形面積比公式。

推廣至當分割點在邊上或其延長線上時，研究分割三角形存在條件及圖形分類。依分割點是否在**邊的延長線**上，分為八種類型圖形，以數學軟體模擬找出所有圖形有 73 種，證明這八種類型之分割三角形存在的條件及面積比，並歸納**以一個公式表示面積比**。

壹、研究動機

從國中課程中，我們知道三角形三中線交點為重心，三中線將三角形分成六個面積相等的小三角形。一開始我們想到：如果將中線改成由每一個頂點與其對邊三等分點連線，畫出兩條面積平分線(如圖 1)，那麼，三角形被分割成 19 個區塊，包括 12 個三角形，3 個四邊形，3 個五邊形，1 個六邊形，它們的面積與原三角形的面積比會是如何？

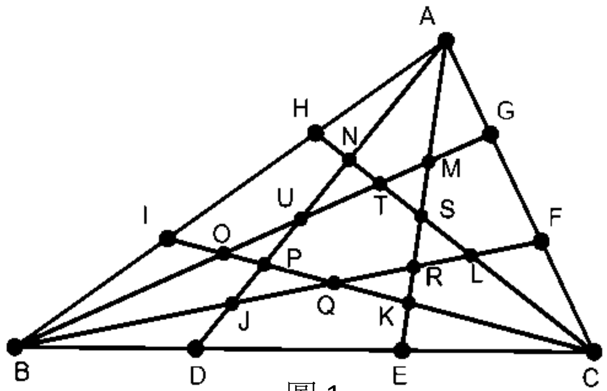


圖 1

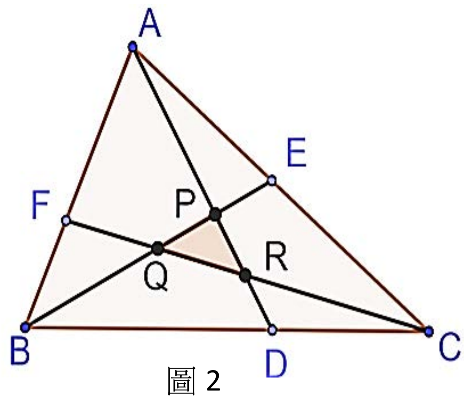


圖 2

貳、研究目的

一、 計算並推導圖 1，三角形六條三分線所分割的 19 個區域(包括 12 個三角形，3 個四邊形，3 個五邊形，1 個六邊形)，各占ΔABC 的幾分之幾？

二、 三角形 ABC 內部，如圖 2，當 D、E、F 為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上的任意分割點，若$\overline{AF}:\overline{BF}=a:b$，$\overline{BD}:\overline{CD}$＝c: d，$\overline{CE}:\overline{AE}=e:f$時，怎樣的條件下，分割線$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$可圍出$\Delta$PQR？並計算$\Delta$PQR 面積與$\Delta$ABC 面積比。

三、 進一步研究：三角形 ABC，當 D、E、F 為分割直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的任意分割點，若$\overline{AF}:\overline{BF}=a:b$，$\overline{BD}:\overline{CD}$＝c: d，$\overline{CE}:\overline{AE}=e:f$時，在怎樣的條件下，分割直線$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$可圍出ΔPQR？並討論ΔPQR 面積與ΔABC 面積比。

參、 研究設備及器材

一、紙、筆。

二、geogebra 繪圖工具。

三、GSP 數學繪圖軟體。

肆、 文獻探討

我們發現當西瓦定理不成立時，三條分割線不共點，可圍出一個三角形，我們嘗試尋過去是否有相關的研究可以參考，努力的搜尋並沒有找到任何有關「非西瓦」相關的研究報告，只找到依些關於孟氏與西瓦定理的推廣證明與研究。

孟氏定理以古希臘數學家梅涅勞斯(Menelaus of Alexandria)為名，與西瓦定理是三角形邊長比例關係的重要定理。本研究的推理計算會大量應用到這兩個定理。還會使用到三角形夾角定理及三角形面積比等性質。分別敘述證明如下：

一、孟氏定理（Menelaus' theorem）：

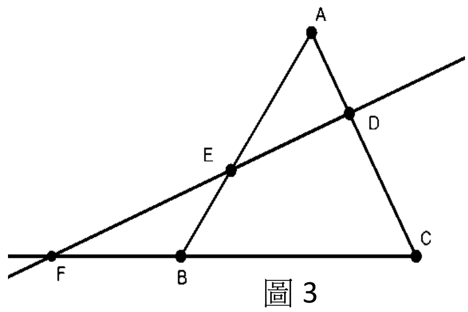


圖 3

如圖 3，我們找到的資料，它的證明方式很多，其中最簡單易懂的方式就是以面積比例來證明。

【孟氏定理】如果一直線與ΔABC 的邊 AC、AB、BC 或其延長線分別交於 D、E、F，則有：

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=1$。

【證明】連接$\overline{CE}$及$\overline{AF}$，因為 $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\Delta ACE+\Delta AFE}{\Delta CFE}$，$\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}=\frac{\Delta AFE}{\Delta AFE+\Delta ACE}$，$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=\frac{\Delta CFE}{\Delta AFE}$，

所以$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=\frac{\Delta ACE+\Delta AFE}{\Delta CFE}\times\frac{\Delta AFE}{\Delta AFE+\Delta ACE}\times\frac{\Delta CFE}{\Delta AFE}$＝1

為了之後便於計算應用，上式結果可移項，改為 $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{DA}}{\overline{CD}}$

二、西瓦定理(Ceva's theorem)：

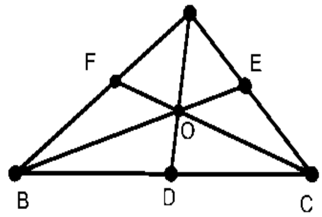


圖 4

【西瓦定理】如圖 4，如果ΔABC 的$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 通過同一點 O，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=1$。

【證明】 因為 $\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{\Delta ABO}{\Delta BCO}$，$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\Delta ACO}{\Delta ABO}$，$\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\Delta BCO}{\Delta ACO}$，

所以$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\Delta ABO}{\Delta BCO}\times\frac{\Delta ACO}{\Delta ABO}\times\frac{\Delta BCO}{\Delta ACO}=1$

三、等高三角形的面積比等於底邊比：

這是國中教材的重要內容，本研究後大量使用本性質。

若 D 為$\overline{BC}$上一點，則ΔABD 與ΔACD同高，得ΔABD：ΔACD = $\overline{BD}$：$\overline{CD}$。

四、三角形夾角定理：

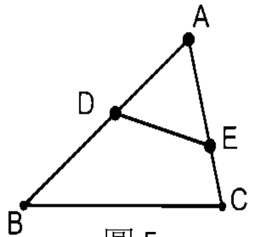


圖 5

【夾角定理】如圖 5，若$\overline{AD}$：$\overline{AB}$=a:b，$\overline{AE}$：$\overline{AC}$=c:d，

則ΔADE：ΔABC = ac：bd

【證明】根據三角形面積公式，

$\Delta ADE = \frac{1}{2}ac\cdot sinA$，$\Delta ABC = \frac{1}{2}bd\cdot sinA$，

所以ΔADE：ΔABC = $\frac{1}{2}ac\cdot sinA : \frac{1}{2}bd\cdot sinA$= ac：bd。

五、孟氏定理延伸性質：

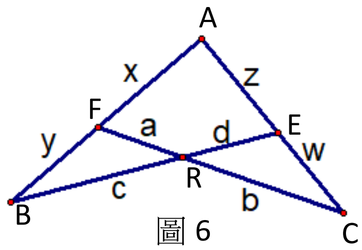


圖 6

【孟氏定理延伸性質】如圖 6，$\overline{BE}$與$\overline{CF}$交於 R 點，已知$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{x}{y}$，$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{z}{w}$，$\frac{\overline{FR}}{\overline{CR}} = \frac{a}{b}$，$\frac{\overline{BR}}{\overline{ER}} = \frac{c}{d}$，

根據孟氏定理，可得以下關係式：

(1) $\frac{a}{a+b} = \frac{yz}{yz+w(x+y)}$　　(2) $\frac{x}{x+y} = \frac{bz-aw}{bz}$

(3) $\frac{a}{a+b} = \frac{cz}{(c+d)(z+w)}$　　(4) $\frac{x}{x+y} = \frac{d(z+w)}{dz+w(c+d)} = \frac{d(w+z)}{cw+d(w+z)}$

(5) $\frac{a}{a+b} = \frac{cx-dy}{x(c+d)}$　　(6) $\frac{x}{x+y} = \frac{d(a+b)}{b(c+d)}$。

【證明】根據孟氏定理，可列出聯立方程式$\begin{cases} \frac{x}{y}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{w}{(w+z)} = 1 \\ \frac{(x+y)}{y}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{w}{z} = 1 \end{cases}$，

由②$\frac{a}{b} = \frac{yz}{w(x+y)}$，$\frac{a}{a+b} = \frac{yz}{yz+w(x+y)}$ ……(1)得證，

由① $\frac{x}{y} = \frac{d(w+z)}{cw}$，$\frac{x}{x+y} = \frac{d(w+z)}{cw+d(w+z)} = \frac{d(w+z)}{w(c+d)+dz}$ ……(4)得證，

由②$\frac{y}{x+y} = \frac{aw}{bz}$，$\frac{x}{x+y} = \frac{bz-aw}{bz}$ ……(2)得證，

由(4)可得 $\frac{y}{x+y} = \frac{cw}{w(c+d)+dz}$代入② $\frac{a}{b} = \frac{z}{w}\cdot\frac{y}{x+y} = \frac{z}{w}\cdot\frac{cw}{w(c+d)+dz} = \frac{cz}{w(c+d)+dz}$，

所以$\frac{a}{a+b} = \frac{cz}{cz+w(c+d)+dz} = \frac{cz}{(c+d)(z+w)}$ ……(3)得證，

由①$\frac{z}{w} = \frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y} - 1$，代入②$\frac{a}{b} = \frac{z}{w}\cdot\frac{y}{x+y} = (\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y} - 1)\cdot\frac{y}{x+y} = \frac{cx-dy}{d(x+y)}$，

所以$\frac{a}{a+b} = \frac{cx-dy}{cx-dy+d(x+y)} = \frac{cx-dy}{x(c+d)}$ ……(5)得證

由①$\frac{z}{w} = \frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y} - 1$代入② $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{x}{y} + 1\right) = \frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y} - 1$，

$\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)\cdot\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + 1$，$\frac{x}{y} = \frac{(a+b)}{b}\cdot\frac{bd}{(bc-ad)} = \frac{d(a+b)}{bc-ad}$，

所以$\frac{x}{x+y} = \frac{d(a+b)}{b(c+d)}$ ……(6)得證。

伍、研究過程

一、 三角形面積三分線線段比：

（一）如**圖 7**，ΔABC 中，D、E 為$\overline{BC}$的三等分點，F、G 為$\overline{AC}$的三等分點，$\overline{AD}$、$\overline{AE}$為過 A 點的面積分割線(面積三分線)，$\overline{BF}$、$\overline{BG}$為過 B 點的面積分割線，利用孟氏定理計算分割線段比 $\overline{BJ}:\overline{JR}:\overline{RF}$，及$\overline{BU}:\overline{UM}:\overline{MG}$。

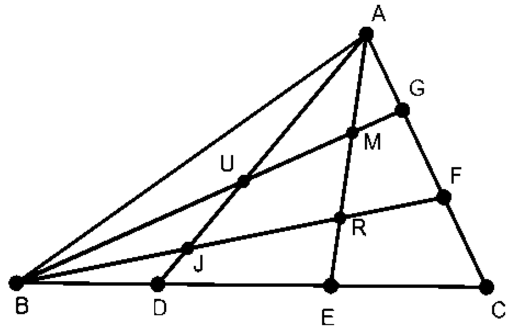


圖 7

因為 $\frac{\overline{BJ}}{\overline{JF}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=1$，$\frac{\overline{BJ}}{\overline{JF}}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}=1$，所以$\frac{\overline{BJ}}{\overline{JF}}=\frac{3}{4}$，

同理 $\frac{\overline{BR}}{\overline{RF}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=1$，$\frac{\overline{BR}}{\overline{RF}}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=1$，所以$\frac{\overline{BR}}{\overline{RF}}=\frac{3}{1}$，

令$\overline{BJ}:\overline{JR}:\overline{RF}=x:y:z$，

$\begin{cases}x:(y+z)=3:4\\(x+y):z=3:1\end{cases}$，

$\begin{cases}4x-3y-3z=0\\x+y-3z=0\end{cases}$，

兩式相減 3x−4y=0 ， $y=\frac{3}{4}x$，代入得 $z=\frac{7}{12}x$，

所以 $x:y:z=12:9:7$，

即$\overline{BJ}:\overline{JR}:\overline{RF}=12:9:7$。

同理，因為 $\frac{\overline{BU}}{\overline{UG}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=1$，$\frac{\overline{BU}}{\overline{UG}}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{1}=1$，所以$\frac{\overline{BU}}{\overline{UG}}=\frac{3}{2}$，

因為 $\frac{\overline{BM}}{\overline{MG}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=1$，$\frac{\overline{BM}}{\overline{MG}}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=1$，所以$\frac{\overline{BM}}{\overline{MG}}=\frac{6}{1}$，

令$\overline{BU}:\overline{UM}:\overline{MG}=x:y:z$，

$\begin{cases}x:(y+z)=3:2\\(x+y):z=6:1\end{cases}$，

$\begin{cases}2x-3y-3z=0\\x+y-6z=0\end{cases}$，

得 $x:y:z=21:9:5$，

即$\overline{BU}:\overline{UM}:\overline{MG}=21:9:5$。

若將所有面積三分線都畫出來，如**圖 8**，同理可得
$\overline{BO}:\overline{OT}:\overline{TG}=12:9:7$ ，$\overline{BQ}:\overline{QL}:\overline{LF}=21:9:5$。

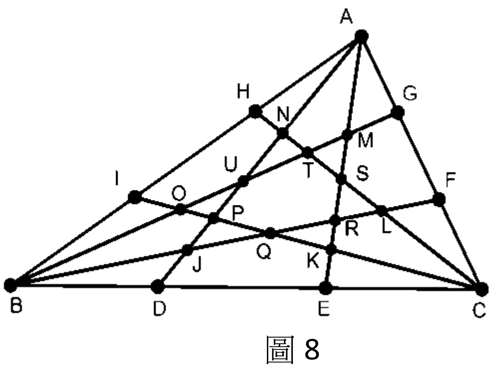


圖 8

整理上述性質如下：

1. $\overline{BJ}:\overline{JR}:\overline{RF}=12:9:7$，$\overline{BU}:\overline{UM}:\overline{MG}=21:9:5$，
   $\overline{BO}:\overline{OT}:\overline{TG}=12:9:7$, $\overline{BQ}:\overline{QL}:\overline{LF}=21:9:5$。
2. 再由三角形的輪換性可知：
   $\overline{AM}:\overline{MR}:\overline{RE}=12:9:7$，$\overline{AN}:\overline{NP}:\overline{PD}=12:9:7$，

$\overline{AS}:\overline{SK}:\overline{KE}=21:9:5$ ，$\overline{AU}:\overline{UJ}:\overline{JD}=21:9:5$，
$\overline{CK}:\overline{KP}:\overline{PI}=12:9:7$，$\overline{CL}:\overline{LT}:\overline{TH}=12:9:7$，
$\overline{CQ}:\overline{QO}:\overline{OI}=21:9:5$，$\overline{CS}:\overline{SN}:\overline{NH}=21:9:5$。

3. 接著計算$\overline{AN}:\overline{NU}:\overline{UP}:\overline{PJ}:\overline{JD}$
最小公倍數 [12+9+7，21+9+5]=[28，35]=140，
令 $\overline{AD}=140r$（$r>0$），
因為 $\overline{AN}:\overline{NP}:\overline{PD}=12:9:7$，
所以 $\overline{AN}=\frac{12}{28}\times\overline{AD}=60r$，$\overline{NP}=\frac{9}{28}\times\overline{AD}=45r$， $\overline{PD}=\frac{7}{28}\times\overline{AD}=35r$，
因為 $\overline{AU}:\overline{UJ}:\overline{JD}=21:9:5$，
所以 $\overline{AU}=\frac{21}{35}\times\overline{AD}=84r$，$\overline{UJ}=\frac{9}{35}\times\overline{AD}=36r$，$\overline{JD}=\frac{5}{35}\times\overline{AD}=20r$，
$\overline{NU}=\overline{AU}-\overline{AN}=24r$，
$\overline{UP}=\overline{NP}-\overline{NU}=45r-24r=21r$，
得 $\overline{AN}:\overline{NU}:\overline{UP}:\overline{PJ}:\overline{JD}=60r:24r:21r:15r:20r=60:24:21:15:20$。

4. 同理 $\overline{AM}:\overline{MS}:\overline{SR}:\overline{RK}:\overline{KE}=60:24:21:15:20$，

所以得到每一條面積三分線由頂點端開始，分割線段比均為60：24：21：15：20。

二、 三角形三分線線段性質：

在計算分割線段比的過程中，我們得到一些性質，分述如下。這些性質幫助我們計算分割出來的每一區塊占ΔABC 的比例。

【性質 1】如圖 9，ΔABC中，由 B、C 點畫出面積三分線，相交於 T 點及 Q 點，則：
(1)A、T、Q 共線，均在中線上，且(2)$\overline{AT}:\overline{TQ}:\overline{QV}=5:3:2$，T 點為中線$\overline{AV}$中點。

【證明】(1)連$\overline{AT}$並延長交$\overline{BC}$於 V，

因為$\frac{\overline{BV}}{\overline{VC}}\times\frac{\overline{CT}}{\overline{TH}}\times\frac{\overline{HA}}{\overline{AB}}=1$，$\frac{\overline{BV}}{\overline{VC}}\times\frac{(12+9)}{7}\times\frac{1}{3}=1$，所以$\frac{\overline{BV}}{\overline{VC}}=\frac{1}{1}$，

連$\overline{AQ}$並延長交$\overline{BC}$於 Y，

因為$\frac{\overline{BY}}{\overline{CY}}\times\frac{\overline{CQ}}{\overline{QI}}\times\frac{\overline{IA}}{\overline{AB}}=1$，$\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}\times\frac{21}{(9+5)}\times\frac{2}{3}=1$，所以$\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}=\frac{1}{1}$，

所以 V 與 Y 為同一個點，
即 A、T、Q、V 共線，且均在三角形中線$\overline{AV}$上。

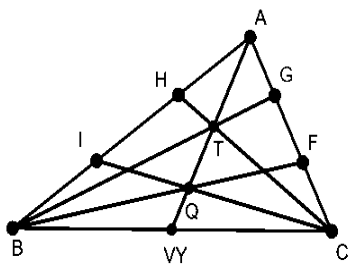


圖 9

(2)因為$\frac{\overline{AT}}{\overline{TV}}\times\frac{\overline{VC}}{\overline{CB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HA}}=1$，$\frac{\overline{AT}}{\overline{TV}}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}=1$，$\frac{\overline{AT}}{\overline{TV}}=\frac{1}{1}$，

因為$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QV}}\times\frac{\overline{QC}}{\overline{CB}}\times\frac{\overline{BI}}{\overline{IA}}=1$，$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QV}}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$，$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QV}}=\frac{4}{1}$，

令$\overline{AV}=10r$ （$r>0$），
則$\overline{AT}=5r$，$\overline{VQ}=2r$，$\overline{TQ}=10r-5r-2r=3r$，
所以 $\overline{AT}:\overline{TQ}:\overline{QV}=5:3:2$。

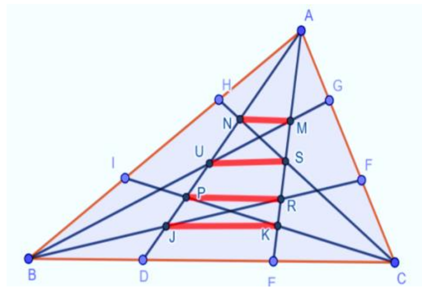


圖 10

【性質 2】ΔABC中，由 A、B、C 點畫出面積三分線，

其交點如圖 10 所示，則：

(1)$\overline{MN}//\overline{US}//\overline{PR}//\overline{JK}//\overline{BC}$。

(2)$\overline{MN}:\overline{US}:\overline{PR}:\overline{JK}:\overline{DF}=60:84:105:120:140$。

(3)$\overline{MN}=\frac{1}{7}\overline{BC}$，$\overline{US}=\frac{1}{5}\overline{BC}$，$\overline{PR}=\frac{1}{4}\overline{BC}$，$\overline{JK}=\frac{2}{7}\overline{BC}$。

【證明】ΔADF，因為$\overline{AM}:\overline{MS}:\overline{SR}:\overline{RK}:\overline{KE}=60:24:21:15:20$，

$\overline{AN}:\overline{NU}:\overline{UP}:\overline{PJ}:\overline{JD}=60:24:21:15:20$，

所以 $\overline{MN}//\overline{US}//\overline{PR}//\overline{JK}//\overline{BC}$（平行線截比例線段性質），

$\overline{MN}:\overline{US}:\overline{PR}:\overline{JK}:\overline{DF}=\overline{AN}:\overline{AU}:\overline{AP}:\overline{AJ}:\overline{AD}=60:84:105:120:140$，

因為$\overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，所以$\overline{MN}=\frac{1}{7}\overline{BC}$，$\overline{US}=\frac{1}{5}\overline{BC}$，$\overline{PR}=\frac{1}{4}\overline{BC}$，$\overline{JK}=\frac{2}{7}\overline{BC}$。

【性質 3】如圖 11，$\Delta NUT=\Delta TMS=\Delta RSL=\Delta RQK=\Delta QPJ=\Delta POU$面積均相等

【證明】根據性質 2，因為$\overline{MN}//\overline{US}$，所以四邊形 MNUS 為梯形，所以$\Delta NUT=\Delta TMS$（面積相等）

因為$\overline{PR}//\overline{JK}$，四邊形 RPJK 為梯形，

所以$\Delta RQK=\Delta QPJ$（面積相等），

同理可證，$\Delta TMS=\Delta RSL$，$\Delta OPU=\Delta PQJ$，

$\Delta RSL=\Delta RQK$，$\Delta NTU=\Delta POU$，

所以，$\Delta NUT=\Delta TMS=\Delta RSL$

$=\Delta RQK=\Delta QPJ=\Delta POU$面積均相等。

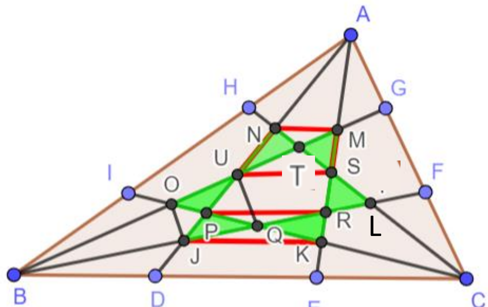


圖 11

三、 三角形三分線切割之所有區塊面積比：

(一) 根據三角形夾角定理：

ΔABD 中，$\frac{\Delta AHN}{\Delta ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{12}{28}=\frac{1}{7}$，$\Delta AHN=\frac{1}{7}\Delta ABD=\frac{1}{21}\Delta ABC$，

ΔAMG 中，$\frac{\Delta AMG}{\Delta ACE}=\frac{1}{3}\times\frac{12}{28}=\frac{1}{7}$，$\Delta AMG=\frac{1}{7}\Delta ACE=\frac{1}{21}\Delta ABC$。

(二) 所以$\Delta AHN=\Delta AMG=\Delta BDJ=\Delta BIO=\Delta CEK=\Delta CFL=\frac{1}{21}\Delta ABC$。

(三) 如圖 12，為了方便計算，

假設$\Delta NUT=\Delta TMS=\Delta RSL=\Delta RQK=\Delta QPJ=$

$\Delta POU=24k$ （$k>0$），

因為 $\overline{TN}:\overline{NH}=15:20=3:4$，

所以$\Delta NUH=32k$，

因為 $\overline{AN}:\overline{NU}=60:24=5:2$，

$\Delta ANT=60k$，四邊形 ANTM=120k，

所以三個四邊形面積皆為 120k，

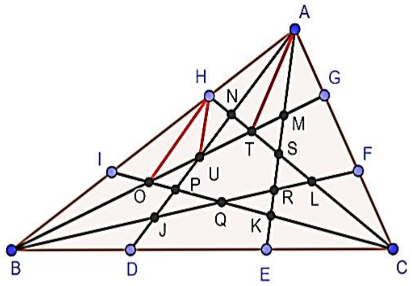


圖 12

因為 $\overline{AN}$：$\overline{NU}=60:24=5:2$，

所以$\Delta ANH=\frac{5}{2}\times\Delta NUH=\frac{5}{2}\times 32k=80k$，

因為 $\overline{OU}$：$\overline{UT}=24:21=8:7$，所以$\Delta OUH=\frac{8}{7}\times\Delta TUH=\frac{8}{7}(24k+32k)=64k$，

因為 $\overline{BI}$：$\overline{IH}=1:1$，所以$\Delta IOH=\Delta BIO=\Delta ANH=80k$，
所以五邊形 HIOUN=$\Delta NUH+\Delta OUH+\Delta IOH=32k+64k+80k=176k$，

即三個五邊形面積皆為 176k，

ΔABC=21$\times\Delta AHN=21\times 80k=1680k$，

所以六邊形 PQRSTU=$1680k-(6\times 80k+3\times 120k+3\times 176k+6\times 24k)=168k$，

即六邊形 PQRSTU 面積為ΔABC 的$\frac{1}{10}$，

因此我們得到三角形面積三分線將三角形切割成 19 個區塊,其面積比例如圖 13 所示。

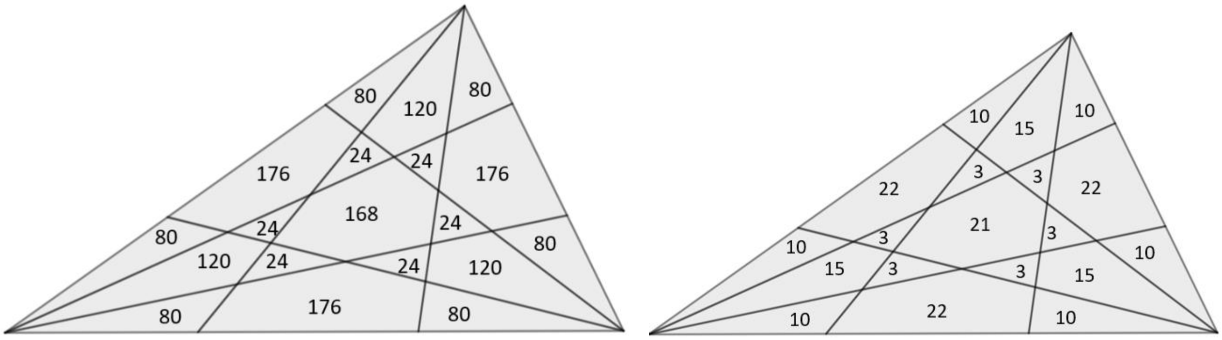


圖 13

四、 三角形面積分割線所分割的三角形面積

我們在找出面積三分線的相關性質後，試想找出更具一般性的性質，因此我們思考如果將三分線改為任意分割線時，那會有怎樣的性質？

重新設定新的研究命題：任意三角形 ABC，當 D、E、F 分別為為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上的任意分割點，若$\overline{AF}:\overline{BF}=a:b$，$\overline{BD}:\overline{CD}$＝c: d，$\overline{CE}:\overline{AE}=e:f$時，怎樣的條件下，分割線段$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$可圍出$\Delta$PQR？並計算$\Delta$PQR 與$\Delta$ABC 面積比。

因為變數太多，實在太難操作計算，於是我們假設 $\mathbf{m}=\frac{a}{b}$、$\mathbf{n}=\frac{c}{d}$、$\mathbf{s}=\frac{e}{f}$，不失一般性，把命題再修正如下。

【研究命名 1】任意三角形 ABC 中，當 D、E、F 分別為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上異於頂點的分割點，

令$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$，$\Delta$PQR為分割線$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$所圍的分割三角形，

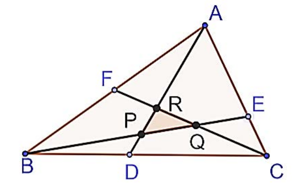
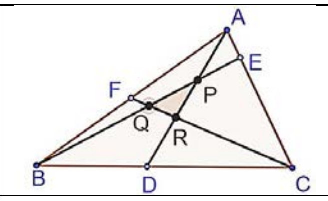
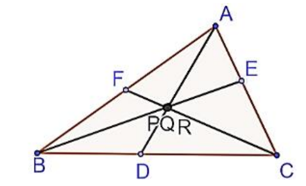
試求：(1)怎樣條件下ΔPQR存在，(2)此時ΔPQR與ΔABC的面積比。

不難發現三條分割線的相交情形有三種可能性，如下表 1:

表 1 中的圖(三)的三條分割線共點，根據西瓦定理，得$mns=1$。當$mns\neq 1$(非西瓦)時，則可圍出ΔPQR，圖形有兩種可能，即圖(一)及圖(二)。

圖(三)若固定 F、D 點，將 E 點往 C 點移動一些，可變成圖(一)，此時s會變小，所以我們猜想：圖(一)的條件為 $0 < mns < 1$；圖(二)的條件為 $mns > 1$。

表 1：三角形內部分割線相交情形分類

圖(一)	圖(二)	圖(三)
		
$0 < mns < 1$	$mns > 1$	$mns = 1$

（一）先計算分割線段的連比例：

1. 當$\boldsymbol{0 < mns < 1}$時:

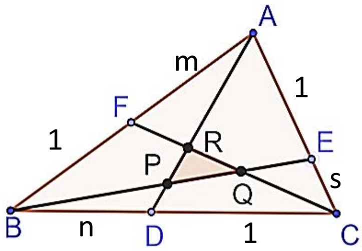


圖 14 $0 < mns < 1$ 時

如圖 14，由孟氏定理，$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n+1}{ns}$，

$\frac{\overline{AR}}{\overline{RD}} = \frac{(n+1)}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{m(n+1)}{1}$，

令$\overline{AD} = (ns+n+1)(mn+m+1)\mathrm{k}$ $(\mathrm{k} > 0)$，

則$\overline{PD} = \frac{ns}{ns+n+1}\overline{AD}$

$= \frac{ns}{ns+n+1}(ns+n+1)(mn+m+1)k = ns(mn+m+1)k$，

$\overline{AR} = \dfrac{m(n+1)}{mn+m+1}\overline{AD}$

$= \frac{m(n+1)}{mn+m+1}(ns+n+1)(mn+m+1)k = m(n+1)(ns+n+1)k$，

$\overline{PR} = \overline{AD} - \overline{AR} - \overline{PD}$

$= (ns+n+1)(mn+m+1)k - m(n+1)(ns+n+1)k - ns(mn+m+1)k$

$= (n+1)(1-mns)\mathrm{k}$，

所以 $\boldsymbol{\overline{AR}:\overline{PR}:\overline{PD} = \mathrm{m}(n+1)(ns+n+1):(n+1)(1-mns):\mathrm{ns}(mn+n+1)}$，

因為$\overline{PR} > 0$，所以$(n+1)(1-mns) > 0$，又$n+1 > 0$，所以 $0 < mns < 1$。

因此，當 $\boldsymbol{0 < mns < 1}$ 時，

$\boldsymbol{\overline{AR}:\overline{PR}:\overline{PD} = \mathrm{m}(n+1)(ns+n+1):(n+1)(1-mns):\mathrm{ns}(mn+m+1)}$。

同理，以「輪換性」，將 m 改為 n，n 改為 s，s 改為 m，就可以得到

$\boldsymbol{\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QE} = \mathrm{n}(s+1)(sm+s+1):(s+1)(1-mns):\mathrm{sm}(ns+n+1)}$ ，

$\boldsymbol{\overline{CQ}:\overline{QR}:\overline{RF} = \mathrm{s}(m+1)(mn+m+1):(m+1)(1-mns):\mathrm{mn}(sm+s+1)}$。

2. 當$\boldsymbol{mns > 1}$時：

如圖 15，由孟氏定理，$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{(n+1)\cdot 1}{n\cdot s} = \frac{n+1}{ns}$，$\frac{\overline{AR}}{\overline{RD}} = \frac{(n+1)\cdot m}{1\cdot 1} = \frac{m(n+1)}{1}$，

令$\overline{AD} = (ns+n+1)(mn+m+1)\mathrm{k}$ $(\mathrm{k} > 0)$，

則 $\overline{RD} = \frac{1}{mn+m+1}\overline{AD}$

$$=\frac{1}{mn+m+1}(ns+n+1)(mn+m+1)k$$
$$=(ns+n+1)k \quad ,$$

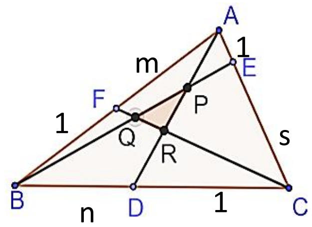


圖 15 $mns>1$

$\overline{AP}=\frac{n+1}{ns+n+1}\,\overline{AD}=\frac{n+1}{ns+n+1}\,(ns+n+1)(mn+m+1)\mathrm{k}$

$=(n+1)(mn+m+1)k$ ，

$\overline{PR}=\overline{AD}-\overline{AP}-\overline{RD}$

$=(ns+n+1)(mn+m+1)\mathrm{k}-(n+1)(mn+m+1)k-(ns+n+1)k$

$=(n+1)(mns-1)\mathrm{k}$，

所以$\boldsymbol{\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD}}=(n+1)(mn+m+1):\boldsymbol{(n+1)(mns-1)}:(ns+n+1)$。

因為$\overline{PR}>0$，所以$(n+1)(mns-1)>0$，又$n+1>0$，所以 $mns>1$。

因此，當 $mns>1$時，我們得到公式:

$\boldsymbol{\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD}=(n+1)(mn+m+1):(n+1)(mns-1):(ns+n+1)}$；

$\boldsymbol{\overline{BQ}:\overline{QP}:\overline{PE}=(s+1)(ns+n+1):(s+1)(mns-1):(sm+s+1)}$；

$\boldsymbol{\overline{CR}:\overline{RQ}:\overline{QF}=(m+1)(sm+s+1):(m+1)(mns-1):(mn+m+1)}$ 。

3.將兩個圖形合起來討論：

當 $\boldsymbol{0<mns<1}$時，由圖 14 我們計算

$\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD}=(\overline{AR}+\overline{PR}):\overline{PR}:(\overline{PD}+\overline{PR})$

$=(n+1)(mn+m+1):(n+1)(1-mns):(ns+n+1)$;

與 $\boldsymbol{mns>1}$**時，圖 15 的**$\boldsymbol{\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD}=(n+1)(mn+m+1):(n+1)(mns-1):(ns+n+1)}$ **，只要將**$(1-mns)$加上絕對值就**相同了。**

也就是說，不管圖 14 或圖 15，只要在非西瓦時($mns\neq1$)時，

$\boldsymbol{\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD}=(n+1)(mn+m+1):|(n+1)(mns-1)|:(ns+n+1)}$ 。

同理，

$\boldsymbol{\overline{AR}:\overline{PR}:\overline{PD}=m(n+1)(ns+n+1):|(n+1)(mns-1)|:ns(mn+m+1)}$。

這兩個式子，以$\boldsymbol{\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD}}$**看起來比較簡單，所以同理計算得分割線段比如下：**

$\boldsymbol{\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD}=(n+1)(mn+m+1):|(n+1)(mns-1)|:(ns+n+1)}$ ，

$\boldsymbol{\overline{BQ}:\overline{QP}:\overline{PE}=(s+1)(ns+n+1):|(s+1)(mns-1)|:(sm+s+1)}$ ，

$\boldsymbol{\overline{CR}:\overline{RQ}:\overline{QF}=(m+1)(sm+s+1):|(m+1)(mns-1)|:(mn+m+1)}$。

接著利用上述連比，計算ΔPQR的三邊各占三條分割線段段長的比值。

得 $\boldsymbol{\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{|(n+1)(mns-1)|}{(mn+m+1)(ns+n+1)}}$，$\boldsymbol{\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}=\frac{|(s+1)(mns-1)|}{(ns+n+1)(sm+s+1)}}$，$\boldsymbol{\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{|(m+1)(mns-1)|}{(sm+s+1)(mn+m+1)}}$，

$\boldsymbol{\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}=\frac{|(mns-1)|}{(mn+m+1)}}$，$\boldsymbol{\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\frac{|(mns-1)|}{(ns+n+1)}}$，$\boldsymbol{\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{|(mns-1)|}{(sm+s+1)}}$。

所以得到以下定理：

【定理 1】任意三角形 ABC 中，當 D、E、F 分別為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上異於頂點的分割點，

$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$。

則：(1)當$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}\neq 1$(即$mns\neq 1$)時，分割線$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$可圍成ΔPQR。

(2) $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{|(n+1)(mns-1)|}{(mn+m+1)(ns+n+1)}$，$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}=\frac{|(s+1)(mns-1)|}{(ns+n+1)(sm+s+1)}$，$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{|(m+1)(mns-1)|}{(sm+s+1)(mn+m+1)}$，

$\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}=\frac{|(mns-1)|}{mn+m+1}$，$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\frac{|(mns-1)|}{ns+n+1}$，$\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{|(mns-1)|}{sm+s+1}$。

(二)求ΔPQR與ΔABC的面積比：

如圖 14，當$0<mns<1$時，

因為$\Delta PQR=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\times\Delta APQ=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\times\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\times\Delta ABE=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\times\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\times\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\times\Delta ABC$ ………公式①

$\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}=\frac{(1-mns)}{(mn+m+1)}$，$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}=\frac{(s+1)(1-mns)}{(sm+s+1)(ns+n+1)}$，$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{1}{s+1}$，

$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(1-mns)}{(mn+m+1)}\times\frac{(s+1)(1-mns)}{(sm+s+1)(ns+n+1)}\times\frac{1}{s+1}$，

所以 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}$。

如圖 15，當$mns>1$時，

因為 $\Delta PQR=\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}\times\Delta AQR=\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}\times\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\times\Delta ACF=\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}\times\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}\times\Delta ABC$ ………公式②

$\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}=\frac{(n+1)(mns-1)}{(n+1)(mn+m+1)+(n+1)(mns-1)}=\frac{mns-1}{m(ns+n+1)}$，

$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns-1)}{(sm+s+1)(mn+m+1)}$，$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\frac{m}{m+1}$，

所以 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{mns-1}{m(ns+n+1)}\times\frac{(m+1)(mns-1)}{(sm+s+1)(mn+m+1)}\times\frac{m}{m+1}$

$=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}$，

我們發現公式①與公式②都可以彼此套用在圖 14 或圖 15 的證明，
將公式①套用在圖 15，再代入分割線段比，則

$\mathbf{\Delta PQR=\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\times\Delta APQ=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\times\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\times\Delta ABC=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\times\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\times\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\times\Delta ABC}$，

$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns-1)}{(mn+m+1)}\right|\times\left|\frac{(s+1)(mns-1)}{(sm+s+1)(ns+n+1)}\right|\times\frac{1}{s+1}$，

一樣得到$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}$。

所以我們得到定理 2。

【定理 2】三角形 ABC 中，當 D、E、F 分別為邊$\overline{\mathrm{BC}}$、$\overline{\mathrm{AC}}$、$\overline{\mathrm{AB}}$上異於頂點的任意分割點，$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$。當$mns\neq 1$時，分割線$\overline{\mathrm{CF}}$、$\overline{\mathrm{AD}}$、$\overline{\mathrm{BE}}$所圍的ΔPQR與ΔABC的面積比 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}$。

這個結果非常漂亮，之後我們推廣到三角形外面的分割時，像這樣的情況就可以只討論其中一種證明即可。

我們舉一個例子來試算看看。

【例】三角形ΔABC 中，若$\overline{AF}:\overline{BF}=2:3$，$\overline{BD}:\overline{CD}=3:4$，$\overline{CE}:\overline{AE}=4:1$，可轉化為 $\mathrm{m}=\frac{2}{3}$，$\mathrm{n}=\frac{3}{4}$，$\mathrm{s}=\frac{4}{1}$，$\boldsymbol{mns}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}=2>1$，所以ΔPQR 存在，則根據公式

$$\frac{\boldsymbol{\Delta PQR}}{\boldsymbol{\Delta ABC}}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}-1\right)^2\div\left[\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+1\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}+\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{1}+\frac{4}{1}+1\right)\right]=\frac{72}{5681}$$

五、 推廣三角形延長線上分割線所圍的三角形之的面積關係

在「非西瓦」時三角形內部的面積分割，我們得到定理 2 的很好結果。若將三角形三邊長向外延長，當部分或全部分割點 D、E、F 在延長線上時，經過 A、B、C 的分割直線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$，也可能圍成分割三角形 PQR。我們繼續探討此時三角形 PQR 存在的條件與它與三角形 ABC 面積比。所以我們的研究命題再修正為:

【研究命題 2】三角形ΔABC，若 D、E、F 分別為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的分割點，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$稱為分割直線，P 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點，Q 為$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點，R 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點。令$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$，(1)怎樣的條件下ΔPQR存在？(2)此時$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$＝？

從分割點 D、E、F 的位置，可知其圖形可分為 8 種類型。為方便敘述說明，我們將本研究的圖形做了以下分類及定義。

【定義 1】本研究圖形可以依分割點位置，分為八種類型，定義為 G(±m, ±n, ±s)。當 F 點在$\overline{\mathrm{AB}}$延長線上時，在 m 前面加一個負號表示、當 D 點在$\overline{\mathrm{BC}}$延長線上時，在 n 前面加一個負號表示、當 E 點在$\overline{\mathrm{AC}}$延長線上時，在 s 前面加一個負號表示。即前面加負(−)號，代表分割點落在邊的延長線上。

例如：當 F 點在延長線上時，D、E 點在邊上，此時圖形表為 G(−m, n, s)；
當 D、E、F 均在延長線上時，圖形表為 G(−m, −n, −s)。

【定義 2】為之後敘述說明方便，將內角$\angle A$的對頂角區域稱為$\angle A$的角區，內角$\angle A$所涵蓋

的區域(除了Δ內部外)稱為$\angle A$的廣區，其他區域命名方式相同，如圖 16。

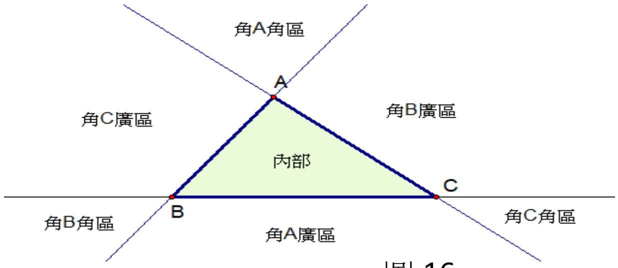


圖 16

【定義 3】因為 P 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$交點，所以 P 位置由 n, s 值決定，將只含$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的圖形定義為 P(±n, ±s)。即前面加負(−)號代表分割點落在邊的延長線上時之圖形。同理，定義 Q(±m, ±s)及 R(±m, ±n)。

例如：P(n, s)表示 D、E 點分別在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上，則$\overleftrightarrow{AD}$與$\overleftrightarrow{BE}$的交點 P 必在Δ內部；

例如：P(−n，− s)，表示 D、E 點皆在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的延長線上。這時$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$有以下可能：

1. 當 n>1，0<s<1 時，即 D、E 分別在$\overrightarrow{BC}$的 C 點端外的延長線及$\overrightarrow{AC}$的 C 點端外的延長線上時：
   (1)$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$可能平行。
   (2)若有交點，交點 P 可能在$\angle C$的角區或廣區。
2. 當 n>1，s>1 時，即 D、E 分別在$\overrightarrow{BC}$的 C 點端外的延長線及$\overrightarrow{CA}$的 A 點端外的延長線上，此時交點 P 只在$\angle C$的廣區。
3. 當 0<n<1，不管 s>1 或 0<s<1，交點 P 只在$\angle C$的廣區。

所以我們我定義這些圖形，包括：

1. P(n, s)、 P(−n, s)、P(n, −s)、P(−n, −s)。
2. Q(m, s)、Q(−m, s)、Q(m, −s)、Q(−m, −s)。
3. R(m, n)、R(−m, n)、R(m, −n)、R(−m, −n)。可再根據 m, n, s 值決定出不同的圖形。

從上述舉例 P(−n，− s)，發現：三條分割直線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的位置關係有以下情形：

1. 三條分割線共點。即$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於 1 個點。
2. 僅其中二條分割線平行。即$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$決定 2 個交點。
3. 三條分割線兩兩不平行且三線不共點，即 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$決定 3 個交點。

以下分別討論以上三種位置關係：

(一) 三條分割線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的位置關係：

1. $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於 1 點時:

從數學繪圖軟體模擬可知：

(1)G(−m, n, s)、G(m, −n, s)、G(m, n, −s)及 G(−m, −n, −s)圖形，$\boldsymbol{\overleftrightarrow{AD}}$、$\boldsymbol{\overleftrightarrow{BE}}$、$\boldsymbol{\overleftrightarrow{CF}}$不共點；

(2)G(m, n, s)、G(−m, −n, s)、G(−m, n, −s)、G(m, −n, −s)圖形，$\boldsymbol{\overleftrightarrow{AD}}$、$\boldsymbol{\overleftrightarrow{BE}}$、$\boldsymbol{\overleftrightarrow{CF}}$才可能共點。

先探討共點的條件。

(1)G(m, n, s)：即為西瓦定理，所以共點的條件為$\mathbf{mns = 1}$。

(2)以 G(m, −n, −s)為例：

如圖 17，當 0<n<1 且 s>1 時，由孟氏定理得

$\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{s-1}{1}=1$，$\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{s-1}{s}=1$，

所以$\frac{\overline{PB}}{\overline{PE}}=\frac{n}{1}\cdot\frac{s-1}{1}=\frac{1}{m}\cdot\frac{s-1}{s}$，所以得 $\text{mns}=1$。

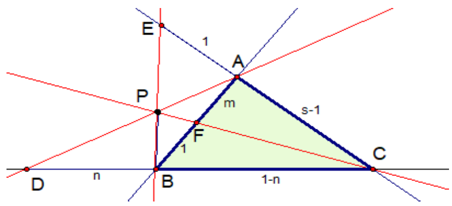


圖 17

同理，由輪換性可知，G(−m, n, −s)當 0<s<1 且 m>1 時；G(−m, −n, s)當 0<m<1 且 n>1 時，**三條分割線共點的條件也是$\text{mns}=1$。其它情況的圖形必不共點($\text{mns}\neq 1$)。**

因此**我們得到以下性質：**

【定理 3】$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$共點時，則$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=1$ (即$mns=1$)。

【定理 4】當$\text{mns}\neq 1$時，則三條分割線不共點。

2. 當$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$時，圖形有三：

(1)P(n, −s)如圖 18：此時 s>1，

因為$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$，所以$\frac{\overline{CA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$，$\frac{s-1}{1}=\frac{1}{n}$，得 $\text{ns}-\text{n}-1=0$。 ……第①式

反之，當 $\text{ns}-\text{n}-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$交點 P 在$\angle A$的角區或廣區。

(2)P(−n, s)如圖 19：此時 0< n <1，

因為 $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$，所以$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$，$\frac{s}{1}=\frac{1-n}{n}$，得 $\text{ns}+\text{n}-1=0$。 ……第②式

反之，當$\text{ns}+\text{n}-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點 P 在$\angle B$的角區或廣區。

(3)P(−n, −s)如圖 20：此時 n>1，且 0<s<1，

因為$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$，所以$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$，$\frac{1-s}{s}=\frac{1}{n-1}$，得 $\text{ns}-\text{n}+1=0$。 ……第③式

反之，當$\text{ns}-\text{n}+1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點 P 在$\angle C$的角區或廣區。

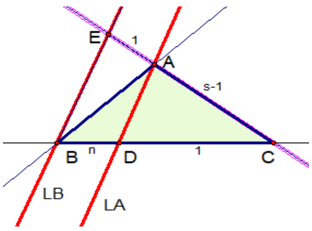


圖 18

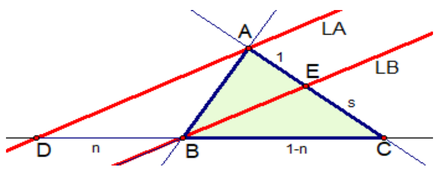


圖 19

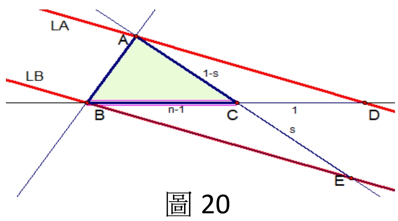


圖 20

3. 當$\overleftrightarrow{BE}//\overleftrightarrow{CF}$時，同理，圖形有三：

(1)Q(−m, s)如圖 21：此時 m>1，

因為$\overleftrightarrow{BE}//\overleftrightarrow{CF}$，所以$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$，$\frac{m-1}{1}=\frac{1}{s}$，得 $\text{sm}-\text{s}-1=0$。 ……第④式

反之，當 $\text{sm}-\text{s}-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$不平行。$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點 Q 在$\angle B$的角區或廣區。

(2)Q(m, −s)如圖 22：此時 0<s<1，

因為$\overleftrightarrow{BE}//\overleftrightarrow{CF}$，所以$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$，$\frac{m}{1}=\frac{1-s}{s}$， 得 $\text{sm}+\text{s}-1=0$。 ……第⑤式

反之，當 $sm+s-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$不平行。$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點 Q 在$\angle C$的角區或廣區。

(3)Q(-m, -s)如圖 23：此時 s>1，且 0<m<1，

因為$\overleftrightarrow{BE}//\overleftrightarrow{CF}$，所以$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$，$\frac{1-m}{m}=\frac{1}{s-1}$，得 $sm-s+1=0$。 ……第⑥式

反之，當 $sm-s+1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$不平行。$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點 Q 在$\angle A$的角區或廣區。

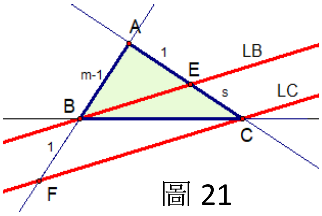


圖 21

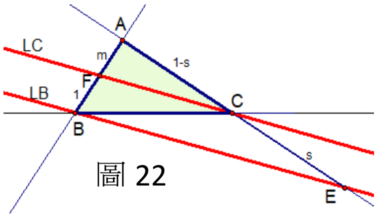


圖 22

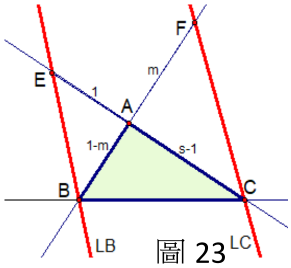


圖 23

4. 當 $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{CF}$時，同理，圖形有三：

(1)R(m, -n)如圖 24：此時 n>1，

因為 $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{CF}$，所以$\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$，$\frac{1}{m}=\frac{n-1}{1}$，得 $mn-m-1=0$。 ……第⑦式

反之，$mn-m-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點 R 在$\angle C$的角區或廣區。

(2)R(-m, n)如圖 25：此時 0<m<1，

因為$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{CF}$，所以$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$\frac{1-m}{m}=\frac{n}{1}$， 得 $mn+m-1=0$。 ……第⑧式

反之，$mn+m-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點 R 在$\angle A$的角區或廣區。

(3)R(-m, -n)如圖 26：此時 m>1，且 0<n<1，

因為$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{CF}$，所以$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$，$\frac{m-1}{1}=\frac{n}{1-n}$，得 $mn-m+1=0$。……第⑨式

反之，$mn-m+1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點 R 在$\angle B$的角區或廣區。

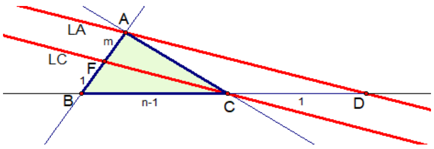


圖 24

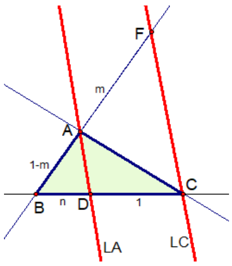


圖 25

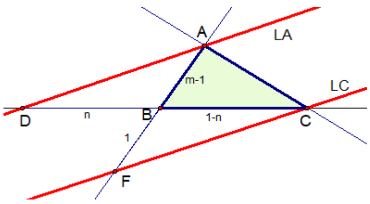


圖 26

由上述推論及定理 4 可知：

【定理 5】當三條分割線兩兩不平行時且不共點時，會有交點 P、Q、R。並歸納得 P、Q、R 落在各角區或廣區的判別條件，如圖 27。

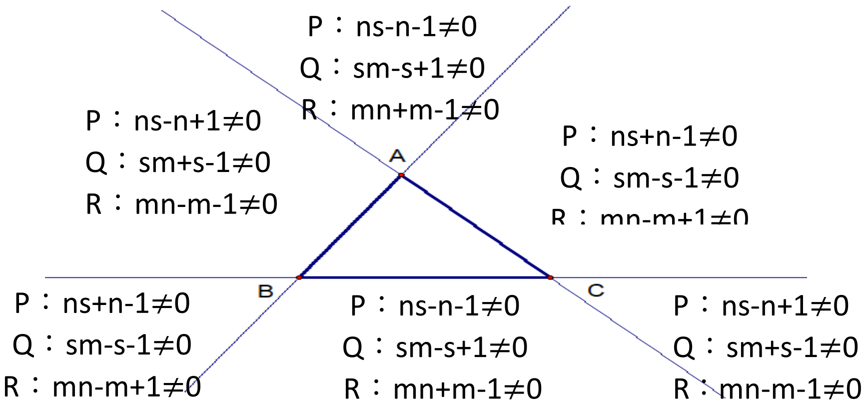


圖 27　P、Q、R 落於該區域的判別條件

(二) 分割線段比：

當三分割線兩兩不平行時，可求 P、Q、R 到三角形 ABC 頂點的距離與該分割線線段長的比。以 P(±n, ±s)為例，計算各圖形之分割線段比，即$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}$**及**$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}$以 n, s 算式表示。

1. P(n, s)：在定理 1 已證明：P 在內部，

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n+1}，\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns+n+1}。$$

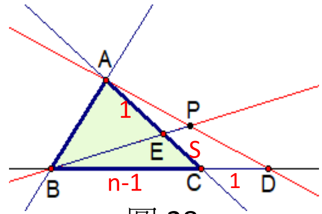


圖 28

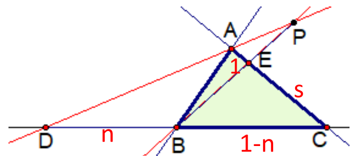


圖 29

2. P(−n, s)：

圖 28～30 為 P(−n, s)的所有圖形，**當 n>1，D 點在 C 點外**$\overline{BC}$**延長線上；當 0<n<1，D 點在 B 點外**$\overline{BC}$**延長線上。**

(1)當 n>1 時，P 只在∠*B*的廣區：

如圖 28，由孟氏定理延伸性質(3)(4)，可得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}，\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns+n-1}，此時 ns+n-1>0。$$

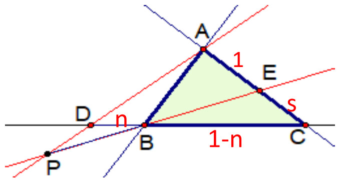


圖 30

(2)當 0<n<1，P 在∠*B*的廣區時：

如圖 29，由孟氏定理延伸性質(2)(5)，可得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}，\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns+n-1}，此時 ns+n-1>0。$$

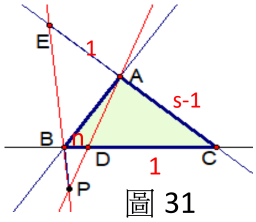


圖 31

(3)當 0<n<1，P 在∠*B*的角區時：

如圖 30，由孟氏定理延伸性質(2)(5)，可得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{-(ns+n-1)}，\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{-(ns+n-1)}，此時 ns+n-1<0。$$

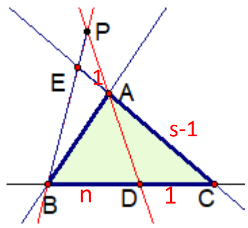


圖 32

3. P(n, −s)：

當 s>1 時，P 可能在∠*A*的廣區或角區。

(1)當 s>1 時，P 在∠*A*的廣區：

如圖 31，由孟氏定理延伸性質(2)(5)，可得

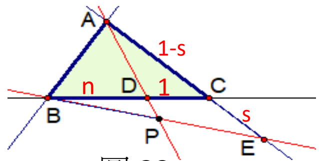


圖 33

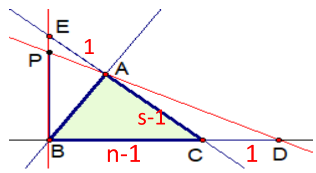


圖 34

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$，此時$ns-n-1<0$。

(2)**當 s>1，P 在$\angle A$的角區：**

如圖 32，由孟氏定理延伸性質(2)(5)，可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns-n-1}$，此時$ns-n-1>0$。

(3)**當 0<s<1，P 只在$\angle A$的廣區：**

如圖 33，由孟氏定理延伸性質(3)(4)，可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$，此時$ns-n-1<0$。

4. P(-n, -s)：

(1)**當 n>1 且 s>1 時，P 只在$\angle C$的廣區：**

如圖 34，由孟氏定理延伸**性質(3)(4)**，可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$，此時$ns-n+1>0$。

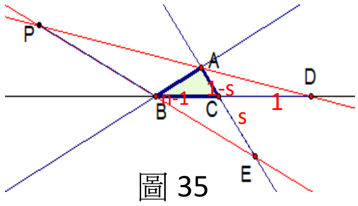


圖 35

(2)**當 n>1 且 0<s<1，P 在$\angle C$的廣區時：**

如圖 35，由孟氏定理，列出聯立方程式

$\begin{cases}\frac{\overline{\boldsymbol{BP}}}{\overline{\boldsymbol{BE}}}\cdot\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{1-s}}\cdot\frac{\overline{\boldsymbol{AD}}}{\overline{\boldsymbol{DP}}}=\mathbf{1}\\ \frac{\overline{\boldsymbol{EP}}}{\overline{\boldsymbol{BE}}}\cdot\frac{\boldsymbol{n-1}}{\mathbf{1}}\cdot\frac{\overline{\boldsymbol{AD}}}{\overline{\boldsymbol{AP}}}=\mathbf{1}\end{cases}$，又因為$\frac{\overline{EP}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}+1$，$\frac{\overline{DP}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}+1$，

由孟氏定理**延伸性質**(6)解得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$，此時$ns-n+1>0$。

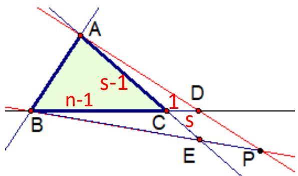


圖 36

(3)**當 n>1 且 0<s<1，P 在$\angle C$的角區時：**

如圖 36，由孟氏定理延伸性質(6)，可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n+1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$，此時$ns-n+1<0$。

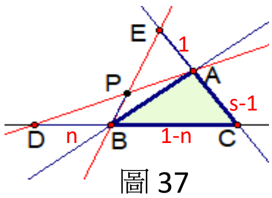


圖 37

(4)**當 0<n<1 且 s>1 時，P 只在$\angle C$的廣區：**

如圖 37，由孟氏定理延伸性質(1)，可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$，此時$ns-n+1>0$。

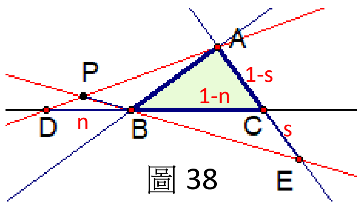


圖 38

(5)**當 0<n<1 且 0<s<1 時，P 只在$\angle C$的廣區：**

如圖 38，由孟氏定理延伸性質(3)(4)，可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$，此時$ns-n+1>0$。

同理，可由 Q(±m, ±s)、R(±m, ±n)分別計算 Q 點及 R 點所在直線上的分割線段比。

因此，當 P、Q、R 位置在延長線上時，配合 m、n、s 的值大於 1 或小於 1，在判別條件

不為 0 的時候，可分別計算「**該點到ΔABC 頂點距離與經該點之分割線段長的比**」。所有結果整理如表 2：

表 2：分割線段比

圖形類型	m、n、s 條件	P、Q、R 的位置	判別條件	分割線段比
P(n, s)	--	P 必在內部	$ns+n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns+n+1}$
Q(m, s)	--	Q 必在內部	$sm+s+1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s+1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s+1}{sm+s+1}$
R(m, n)	--	R 必在內部	$mn+m+1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$
P(−n, s)	n>1	P 只在∠$\boldsymbol{B}$的廣區	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns+n-1}$
	0<n<1	P 在∠$\boldsymbol{B}$的廣區時	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns+n-1}$
	0<n<1	P 在∠$\boldsymbol{B}$的角區時	$ns+n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{-(ns+n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{-(ns+n-1)}$
P(n, −s)	s>1	P 在∠$\boldsymbol{A}$的廣區時	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$
	s>1	P 在∠$\boldsymbol{A}$的角區時	$ns-n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns-n-1}$
	0<s<1	P 只在∠$\boldsymbol{A}$的廣區	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$
P(−n, −s)	n>1、s>1	P 只在∠$\boldsymbol{C}$的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P 在∠$\boldsymbol{C}$的廣區時	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P 在∠$\boldsymbol{C}$的角區時	$ns-n+1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n+1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$
	0<n<1、s>1	P 只在∠$\boldsymbol{C}$的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$
	0<n<1、0<s<1	P 只在∠$\boldsymbol{C}$的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$
Q(m, −s)	s>1	Q 只在∠$\boldsymbol{C}$的廣區	$sm+s-1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s-1}{sm+s-1}$
	0<s<1	Q 在∠$\boldsymbol{C}$的廣區時	$sm+s-1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{1-s}{sm+s-1}$
	0<s<1	Q 在∠$\boldsymbol{C}$的角區時	$sm+s-1<0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{-(sm+s-1)}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{1-s}{-(sm+s-1)}$
Q(−m, s)	m>1	Q 在∠$\boldsymbol{B}$的廣區時	$sm-s-1<0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{-(sm-s-1)}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s+1}{-(sm-s-1)}$
	m>1	Q 在∠**B**的角區時	$sm-s-1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s-1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s+1}{sm-s-1}$
	0<m<1	Q 只在∠$\boldsymbol{B}$的廣區	$sm-s-1<0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(1-m)}{-(sm-s-1)}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s+1}{-(sm-s-1)}$
Q(−m, −s)	s>1、m>1	Q 只在∠$\boldsymbol{A}$的廣區	$sm-s+1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s+1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s-1}{sm-s+1}$
	s>1、0<m<1	Q 在∠$\boldsymbol{A}$的廣區時	$sm-s+1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(1-m)}{sm-s+1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s-1}{sm-s+1}$
	s>1、0<m<1	Q 在∠$\boldsymbol{A}$的角區時	$sm-s+1<0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(1-m)}{-(sm-s+1)}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{s-1}{-(sm-s+1)}$
	0<s<1、m>1	Q 只在∠$\boldsymbol{A}$的廣區	$sm-s+1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s+1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{1-s}{sm-s+1}$
	0<s<1、0<m<1	Q 只在∠$\boldsymbol{A}$的廣區	$sm-s+1>0$	$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(1-m)}{sm-s+1}$，$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BE}}=\frac{1-s}{sm-s+1}$
R(−m, n)	m>1	R 只在∠$\boldsymbol{A}$的廣區	$mn+m-1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m-1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{mn+m-1}$
	0<m<1	R 在∠$\boldsymbol{A}$的廣區時	$mn+m-1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m-1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{1-m}{mn+m-1}$

	0<m<1	R 在∠A的角區時	$mn+m-1<0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{-(mn+m-1)}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{1-m}{-(mn+m-1)}$
R(m, -n)	n>1	R 在∠C的廣區時	$mn-m-1<0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{-(mn-m-1)}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$
	n>1	R 在∠C的角區時	$mn-m-1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m-1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn-m-1}$
	0<n<1	R 只在∠C的廣區	$mn-m-1<0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(1-n)}{-(mn-m-1)}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$
R(-m, -n)	m>1、n>1	R 只在∠B的廣區	$mn-m+1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m+1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{mn-m+1}$
	m>1、0<n<1	R 在∠B的廣區時	$mn-m+1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(1-n)}{mn-m+1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{mn-m+1}$
	m>1、0<n<1	R 在∠B的角區時	$mn-m+1<0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(1-n)}{-(mn-m+1)}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{-(mn-m+1)}$
	0<m<1、n>1	R 只在∠B的廣區	$mn-m+1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m+1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{1-m}{mn-m+1}$
	0<m<1、0<n<1	R 只在∠B的廣區	$mn-m+1>0$	$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(1-n)}{mn-m+1}$，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{1-m}{mn-m+1}$

（三）分割三角形存在的條件並求與三角形 ABC 的面積比：

以數學繪圖軟體模擬【研究命題 2】的所有圖形狀況，得知這八類的分割三角形 PQR 與三角形 ABC 位置關係的圖形有 73 種(請參考附錄)。圖形分類如表 3：

表 3：分割三角形圖形類型及數量

項次	圖形類型	分割點位置	圖形數量
1	G(m, n, s)	D、E、F 三點皆在線段上	2 種
2	G(m, n, -s)	D、F 在線上，E 點在延長線上	4 種
3	G(-m, n, s)	D、E 在線上，F 在延長線上	4 種
4	G(m, -n, s)	E、F 在線上，D 在延長線上	4 種
5	G(m, -n, -s)	F 在線上，D、E 在延長線上	15 種
6	G(-m, n, -s)	D 在線上，E、F 在延長線上	15 種
7	G(-m, -n, s)	E 在線上，D、F 在延長線上	15 種
8	G(-m, -n, -s)	D、E、F 三點皆在延長線上	14 種

如同前面圖 14 及圖 15，我們以公式①或公式②都可以計算 G(m, n, s)的$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$。

推廣後的這八類型 73 種圖形，不管是哪一個圖形類型，都可以選擇以下任一公式證明之。

方法一：因為$\Delta PQR=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\Delta APQ=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\cdot\Delta ABE=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot\Delta ABC$

所以$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$。 ………公式③

方法二：因為$\Delta PQR=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\Delta BQR=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\cdot\Delta BCF=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}\cdot\Delta ABC$

所以$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$。 ………公式④

方法三：因為$\Delta PQR=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\Delta CRP=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\Delta CAD=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\cdot\Delta ABC$

所以$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$。 ………公式⑤

【問題】**以 G(m, n, -s)其中一圖為例，如圖 39。當 s>1，P 在∠A 的廣區，Q 在∠C 的廣區，R 在Δ內部，求證：$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$。**

【證明】

因為 s >1，P 在$\angle A$的廣區，Q 在$\angle C$的廣區，R 在Δ內部，由表 2 可知

$ns-n-1<0$，$sm+s-1>0$，$mn+m+1>0$

由 R(m, n)，R 在Δ內部，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$ ……②

由 P(n, -s)，s>1，P 在$\angle A$的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，s>1，Q 在$\angle C$的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

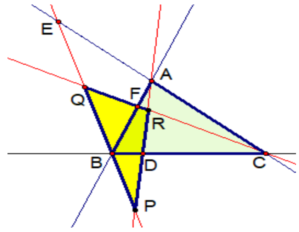


圖 39

③-① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns+1)}{-(ns-n-1)(mn+m+1)}$ ……⑤，

④-② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns+1)}{(sm+s-1)(mn+m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm+s-1}$ ……⑦，

又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n+1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$ 。 QED

本研究均用方法三證明。所有圖形的證明步驟均為：由**表 2 找到需要的分割線段比第①～④式，再根據圖形，當 A 點在 P、R 之間，則**③+①計算$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}$，若 **A 點在 P、R 之外，則以**$|③-①|$計算$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}$。同理，以第②④式**相加或相減計算**$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}$，再將⑥÷②得$\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}$**。最後利用公式⑤求得面積比。**

附錄中有 G(m, n, -s)的所有圖形的證明，面積比公式如表 4。

表 4：G(m, n, -s)類型 4 種圖形的面積比公式

編號	S 值	P、Q、R 位置	判別式	$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$面積比
1	s >1	P 在$\angle A$的廣區， Q 在$\angle C$的廣區， R 在Δ內部	$ns-n-1<0$， $sm+s-1>0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$
2	s >1	**P 在$\angle A$的角區**， Q 在$\angle C$的廣區， R 在Δ內部	$ns-n-1>0$， $sm+s-1>0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$
3	0< s <1	**P 在$\angle A$的廣區**， Q 在$\angle C$的角區， R 在Δ內部	$ns-n-1<0$， $sm+s-1<0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$
4	0< s <1	**P 在$\angle A$的廣區**， Q 在$\angle C$的廣區， R 在Δ內部	$ns-n-1<0$， $sm+s-1>0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$

以 G(m, n, -s)類型為例，當 P 在$\angle A$的廣區時，$ns-n-1<0$，有些公式有負號，為使公式有一致性，可以加上絕對值，所以得 G(m, n, -s)的面積比均為$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(mn+m+1)(sm+s-1)}\right|$。因為分子$(mns+1)^2$為正數，也可以只將分母加上絕對值。

附錄中，我們完整證明了 G(m, n, -s)、G(m, -n, -s)及 G(-m, -n, -s)所有圖形。而 G(m, -n, s)、G(-m, n, s)可由 G(m, n, -s)旋轉輪換而得。

G(-m, n, -s)、G(-m, -n, s)可由 G(m, -n, -s)旋轉輪換而得。

所以這八種**類型圖形的面積比公式，彙整如表 5。**

表 5：各種類型圖形面積比

項次	圖形類型	$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$面積比
1	G(m, n, s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+s+1)(sm+m+1)(mn+n+1)\rvert}$
2	G(m, n, -s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)\rvert}$
3	G(-m, n, s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n+1)(sm-s-1)(mn+m-1)\rvert}$
4	G(m, -n, s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm+s+1)(mn-m-1)\rvert}$
5	G(m, -n, -s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm+s-1)(mn-m-1)\rvert}$
6	G(-m, n, -s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm-s+1)(mn+m-1)\rvert}$
7	G(-m, -n, s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm-s-1)(mn-m+1)\rvert}$
8	G(-m, -n, -s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm-s+1)(mn-m+1)\rvert}$

陸、討論與結論

一、 **任意三角形 ABC 中，**當 D、E、F 分別為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上異於頂點的任意分割點，$\boldsymbol{m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}}$，$\boldsymbol{n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}}$，$\boldsymbol{s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}}$，**則在**非西瓦($\boldsymbol{mns\neq 1}$)**時，分割線**$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$可圍出ΔPQR，則面積比$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=$ $\boldsymbol{\frac{(mns-1)^2}{(ns+s+1)(sm+m+1)(mn+n+1)}=\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+s+1)(sm+m+1)(mn+n+1)\rvert}}$ 。

二、 當分割點推廣到延長線上時，仍然$\boldsymbol{m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}}$，$\boldsymbol{n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}}$，$\boldsymbol{s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}}$，重新定義三個變數 u、v、w。

若 F 在 $\overline{AB}$線段上時，令$\mathrm{u}=\mathrm{m}$；若 F 在 $\overline{AB}$的延長線上時，令$\mathrm{u}=-\mathrm{m}$。
若 D 在 $\overline{BC}$線段上時，令$\mathrm{v}=n$；若 D 在 $\overline{BC}$的延長線上時，令$\mathrm{v}=-\mathrm{n}$。
若 E 在 $\overline{AC}$線段上時，令$\mathrm{w}=s$；當 E 在 $\overline{AC}$的延長線上時，令$\mathrm{w}=-s$。

以項次二 G(m, n, -s)類型為例：F 點在$\overline{AB}$線段上，令$\mathrm{u}=\mathrm{m}$；D 點在$\overline{BC}$線段上，令$\mathrm{v}=n$；E 點在$\overline{AC}$延長線上，**令$\mathbf{w}=-\mathbf{s}$**，則項次二 G(m, n, -s)的公式，即為 G(u, v, w)，則面積比 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=$ $\left|\frac{(mn(-s)-1)^2}{[n(-s)+n+1]\cdot[(-s)m+(-s)+1)\cdot[mn+m+1]}\right|=\boldsymbol{\frac{(uvw-1)^2}{\lvert(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1)\rvert}}$，與項次一 G(u, v, w)公式相同。

同理，G(-m, n, s)、G(m, -n, s)、G(m, -n, -s)、G(-m, n, -s)、G(-m, -n, s)、G(-m, -n, -s)類型均可以表示為 G(u, v, w)，此時$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\boldsymbol{\frac{(uvw-1)^2}{\lvert(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1)\rvert}}$。

此時，不管哪一類別的圖形，依據表 2 及定理 5，可得分割三角形ΔPQR 存在的條件為：

(1)**非西瓦時**(即$\mathbf{uvw \neq 1}$)，

(2)且**三條分割線兩兩不平行時**(即$(\boldsymbol{vw+v+1})(\boldsymbol{wu+w+1})(\boldsymbol{uv+u+1}) \neq \mathbf{0}$)。

三、 最後本研究得到結論如下：

【結論】ΔABC，**若** D、E、F **分別為**$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$**上**異於頂點**的分割點**，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$**為分割直線**，

若 P **為**$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$**的交點**，Q **為**$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$**的交點**，R **為**$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$**的交點。令**$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，

$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$。

(1)當 F 在$\overline{AB}$**線段上時**，$\mathbf{u=m}$；**當 F 在**$\overline{AB}$**的延長線上時**，$\mathbf{u=-m}$。

(2)當 D 在$\overline{BC}$**線段上時**，$\mathbf{v}=\boldsymbol{n}$；**當 D 在**$\overline{BC}$**的延長線上時**，$\mathbf{v=-n}$。

(3)當 E 在$\overline{AC}$**線段上時**，$\mathbf{w}=\boldsymbol{s}$；**當 E 在**$\overline{AC}$**的延長線上時**，$\mathbf{w}=-\boldsymbol{s}$。

當 $\boldsymbol{uvw \neq 1}$，**且**$(\boldsymbol{vw+v+1})(\boldsymbol{wu+w+1})(\boldsymbol{uv+u+1}) \neq \mathbf{0}$ **時**，

$$\frac{\Delta \mathrm{PQR}}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{|(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1)|}$$

柒、參考資料及其他

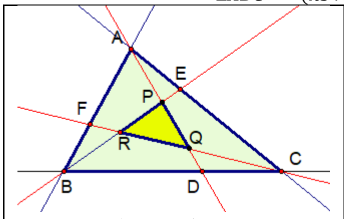
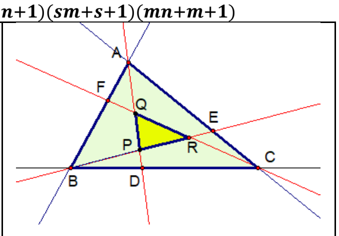
一、國中課本第四冊及第五冊。

二、維基百科：孟氏定理、西瓦定理。

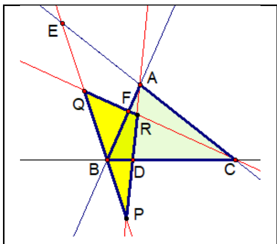
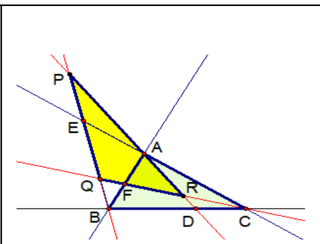
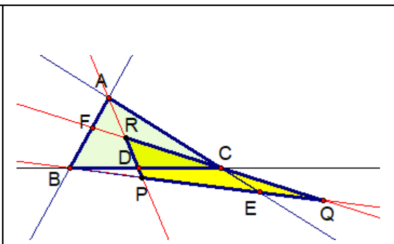
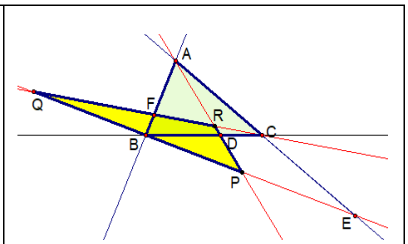
附錄：證明 G(m, n, s)、G(m, n, -s)、G(m, -n, -s)及 G(-m, -n, -s)的所有情形

一、項次 1，G(m, n, s)有 2 種圖形：

由定理 2 已證明得 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}$。

 G(m, n, s)圖 1	 G(m, n, s)圖 2

二、項次 2，G(m, n, -s)有 4 種圖形：

 G(m, n, -s)圖 1	 G(m, n, -s)圖 2	 G(m, n, -s)圖 3	 G(m, n, -s)圖 4
s >1，**P 在∠A的廣區**，Q 在∠C的廣區，R 在Δ內部	s >1，P 在∠A 的角區，Q 在∠C 的廣區，R 在Δ內部	0< s <1，**P 在∠A的廣區**，Q 在∠C 的角區，R 在Δ內部	0< s <1，**P 在∠A的廣區**，Q 在∠C 的廣區，R 在Δ內部

【G(m, n, -s)圖 1 證明】

如 G(m, n, -s)圖 1， s >1，**P 在∠A的廣區**，Q 在∠C的廣區，R 在Δ內部

所以 ns − n − 1 < 0，sm + s − 1 > 0，mn + m + 1 > 0

由 R(m, n)，R 在Δ內部，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$ ……②

由 P(n, -s)，s>1，P 在∠A的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，s>1，Q 在∠C的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

③−① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns+1)}{-(ns-n-1)(mn+m+1)}$ ……⑤，④−② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns+1)}{(sm+s-1)(mn+m+1)}$ ……⑥

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n+1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$ 。 QED

【G(m, n, -s)圖 2 證明】

如 G(m, n, -s)圖 2， s >1，**P 在∠A的角區**，Q 在∠C的廣區，R 在Δ內部

所以 ns − n − 1 > 0，sm + s − 1 > 0，mn + m + 1 > 0

由 R(m, n)，R 在Δ內部，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$ ……②

由 P(n, -s)，s>1，P 在∠A的角區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns-n-1}$ ……③

由 Q(m, -s)，s>1，Q 在∠C的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

③+① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns+1)}{(ns-n-1)(mn+m+1)}$ ……⑤，④−② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns+1)}{(sm+s-1)(mn+m+1)}$ ……⑥

⑥÷ ② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n+1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$ 。 QED

【G(m, n, -s)圖 3 證明】

如 G(m, n, -s)圖 1，0< s <1，**P 在∠A的廣區**，Q 在∠C的角區，R 在Δ內部

所以 ns − n − 1 < 0，sm + s − 1 < 0，mn + m + 1 > 0

由 R(m, n)，R 在Δ內部，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$ ……②

由 P(n, -s)，0< s <1，P 在∠A的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，0< s <1，Q 在∠C的角區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{-(sm+s-1)}$ ……④

③-① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns+1)}{-(ns-n-1)(mn+m+1)}$ ……⑤，④+② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns+1)}{-(sm+s-1)(mn+m+1)}$ ……⑥

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{-(sm+s-1)}$ ……⑦ ，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n+1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$ 。 QED

【G(m, n, -s)圖 4 證明】

如 G(m, n, -s)圖 1，0< s <1，**P 在∠A的廣區**，Q 在∠C的廣區，R 在Δ內部

所以 $ns-n-1<0$，$sm+s-1>0$，$mn+m+1>0$

由 R(m, n)，R 在Δ內部，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$ ……②

由 P(n, -s)，0< s <1，P 在∠A的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，0< s <1，Q 在∠C的角區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

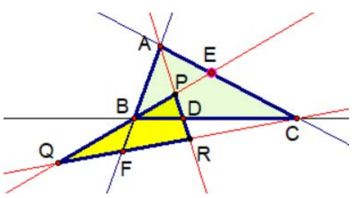
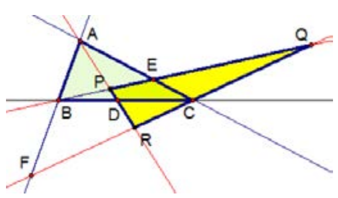
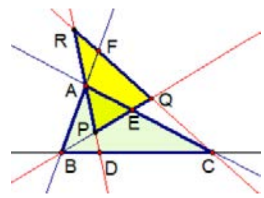
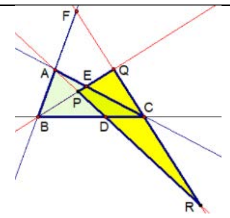
③-① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns+1)}{-(ns-n-1)(mn+m+1)}$ ……⑤，④-② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns+1)}{(sm+s-1)(mn+m+1)}$ ……⑥

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n+1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$ 。 QED

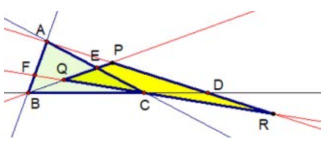
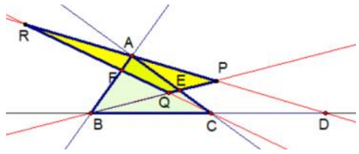
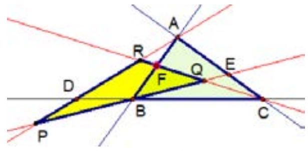
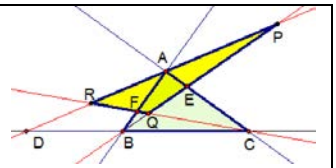
所以，項次 2，G(m, n, -s)，所有圖形得證 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}\right|$。

三、項次 3，G(-m, n, s)有 4 種可能圖形

 G(-m, n, s)圖 1	 G(-m, n, s)圖 2	 G(-m, n, s)圖 3	 G(-m, n, s)圖 4
m>1，P 在內部，Q 在∠***B***角區，R 在∠***A***廣區	m>1，P 在內部，Q 在∠***B***廣區，R 在∠***A***廣區	0<m<1，P 在內部，Q 在∠***B***廣區，R 在∠***A***角區	0<m<1，P 在內部，Q 在∠***B***廣區，R 在∠***A***廣區

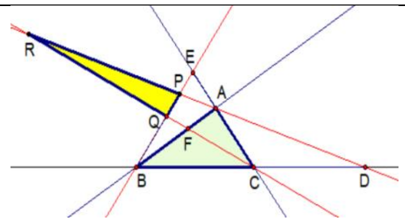
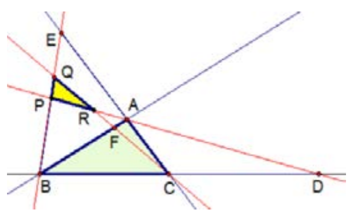
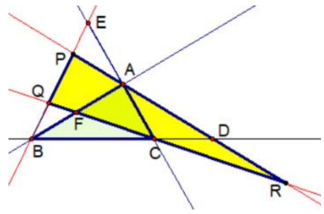
項次 3，G(-m, n, s)可由項次 2，G(m, n, -s)旋轉輪換證明，得 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns+1)^2}{(ns+n+1)(sm-s-1)(mn+m-1)}\right|$。

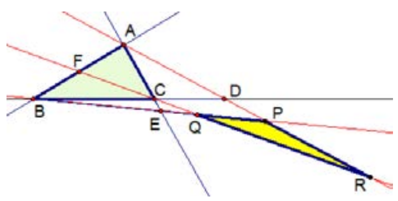
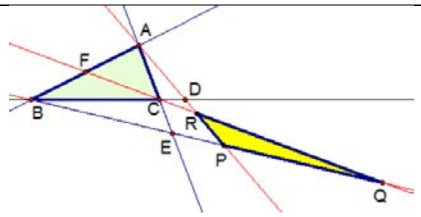
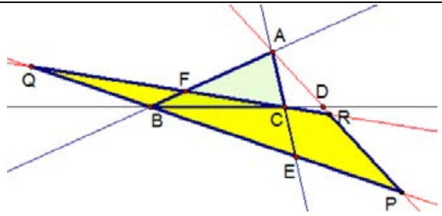
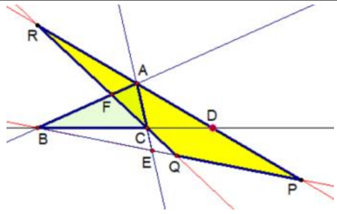
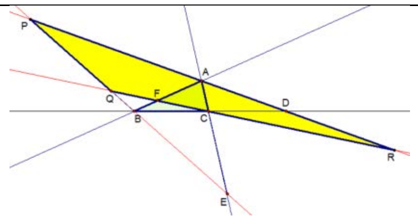
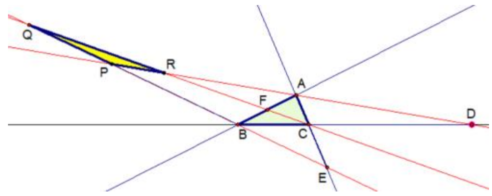
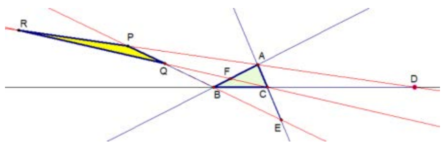
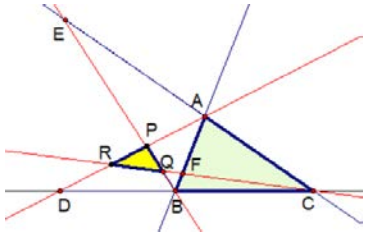
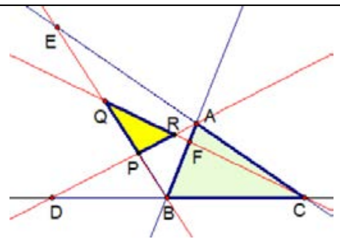
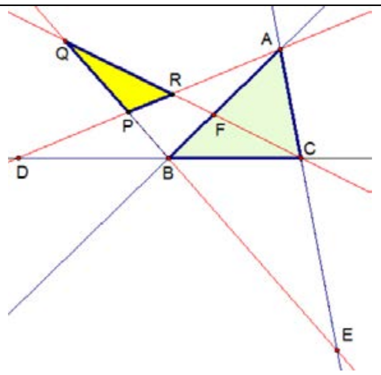
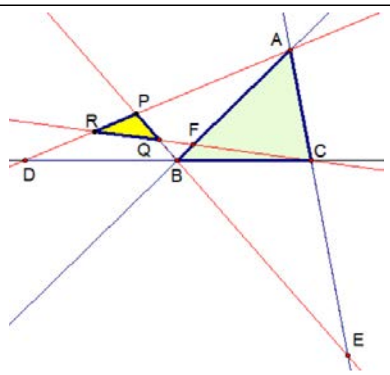
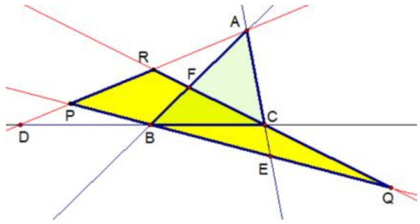
四、項次 4，G(m, -n, s)有 4 種可能圖形

 G(m, -n, s)圖 1	 G(m, -n, s)圖 2	 G(m, -n, s)圖 3	 G(m, -n, s)圖 4
n>1，P 在∠B 廣區，Q 在內部，R 在∠C 角區	n>1，P 在∠B 廣區，Q 在內部，R 在∠C 廣區	0<n<1，P 在∠B 角區，Q 在內部，R 在∠C 廣區	0<n<1，P 在∠B 廣區，Q 在內部，R 在∠C 廣區

項次 4，G(m, -n, s)可由項次 3，G(-m, n, s)旋轉輪換證明，得 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns+1)^2}{(ns+n-1)(sm+s+1)(mn-m-1)}\right|$。

五、項次 5，G(m, -n, -s)有 15 種圖形：

 G(m, -n, -s)圖 1	 G(m, -n, -s)圖 2	 G(m, -n, -s)圖 3
當 n>1，s>1，P 在∠***C***廣區，Q 在∠***C***廣區，R 在∠***C***廣區	當 n>1，s>1，P 在∠***C***廣區，Q 在∠***C***廣區，R 在∠***C***廣區	當 n>1，s>1，P 在∠***C***廣區，Q 在∠***C***廣區，R 在∠***C***角區

 G(m, -n, -s)圖 4 當 n>1，0<s<1，P 在∠*C* 角區，Q 在∠*C* 角區，R 在∠*C* 角區	 G(m, -n, -s)圖 5 當 n>1，0<s<1，P 在∠*C* 角區，Q 在∠*C* 角區，R 在∠*C* 角區	 G(m, -n, -s)圖 6 當 n>1，0<s<1，P 在∠*C* 角區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 角區
 G(m, -n, -s)圖 7 當 n>1，0<s<1，P 在∠*C* 角區，Q 在∠*C* 角區，R 在∠*C* 廣區	 G(m, -n, -s)圖 8 當 n>1，0<s<1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 角區	 G(m, -n, -s)圖 9 當 n>1，0<s<1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 廣區
 G(m, -n, -s)圖 10 當 n>1，0<s<1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 廣區	 G(m, -n, -s)圖 11 當 0<n<1，s>1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 廣區	 G(m, -n, -s)圖 12 當 0<n<1，s>1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 廣區
 G(m, -n, -s)圖 13 當 0<n<1，0<s<1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 廣區	 G(m, -n, -s)圖 14 當 0<n<1，0<s<1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 廣區，R 在∠*C* 廣區	 G(m, -n, -s)圖 15 當 0<n<1，0<s<1，P 在∠*C* 廣區，Q 在∠*C* 角區，R 在∠*C* 廣區

【G(m, -n, -s)圖 1 及圖 2 證明】

因為 n>1，s>1，P、Q、R 皆在∠C 廣區

所以 $ns-n+1>0$，$sm+s-1>0$，$mn-m-1<0$

由 R(m, -n)，R 在∠C 廣區，所以 $\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{-(mn-m-1)}$ ……①　，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$ ……②

由 P(-n, -s)，n>1，s>1，P 在∠*C* 的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(m, -s)，s>1，Q 在∠*C* 的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

若圖 1 則①-③（此時 mns>1），若圖 2 則③-①(此時 0<mns<1) 可得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)|mns-1|}{-(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤，

若圖 1 則②-④，若圖 2 則④-② 可得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)|mns-1|}{-(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{|mns-1|}{sm+s-1}$ ……⑦　，又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns-1)^2}{-(ns-n+1)(sm+s-1)(mn-m-1)}$ 。QED

【G(m, -n, -s)圖 3 證明】

因為 n>1，s>1，P、Q 在∠C 廣區，R 在∠C角區

所以 $ns-n+1>0$，$sm+s-1>0$，$mn-m-1>0$

由 R(m, -n)，R 在∠C 角區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m-1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn-m-1}$ ……②

由 P(-n, -s)，n>1，s>1，P 在∠C的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(m, -s)，s>1，Q 在∠C的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

①+③ 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)(mns-1)}{(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤，②+④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns-1)}{(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns-1}{sm+s-1}$ ……⑦，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^{2}}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 4 圖 5 證明】

因為 n>1，0<s<1，P 在∠C角區，Q 在∠C角區，R 在∠C角區

所以 $ns-n+1<0$，$sm+s-1<0$，$mn-m-1>0$，

由 R(m, -n)，n>1，R 在∠C 角區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m-1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn-m-1}$ ……②

由 P(-n, -s)，n>1，0<s<1，P 在∠C的角區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，0<s<1，Q 在∠C的角區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{-(sm+s-1)}$ ……④

若圖 4 則①−③（此時 0<mns<1），若圖 5 則③−①（此時 mns>1）得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)|mns-1|}{-(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤，

若圖 4 則②−④，若圖 5 則④−② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)|mns-1|}{-(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{|mns-1|}{-(sm+s-1)}$ ……⑦，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^{2}}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 6 證明】

因為 n>1，0<s<1，P 在∠C角區，Q 在∠C廣區，R 在∠C角區

所以 $ns-n+1<0$，$sm+s-1>0$，$mn-m-1>0$，

由 R(m, -n)，n>1，R 在∠C 角區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m-1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn-m-1}$ ……②

由 P(-n, -s)，n>1，0<s<1，P 在∠C的角區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，0<s<1，Q 在∠C的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

③−① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)(mns-1)}{-(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤（此時 mns>1），②+④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns-1)}{(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns-1}{sm+s-1}$ ……⑦，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^{2}}{-(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 7 證明】

因為 n>1，0<s<1，P 在∠C角區，Q 在∠C角區，R 在∠C廣區

所以 $ns-n+1<0$，$sm+s-1<0$，$mn-m-1<0$，

由 R(m, -n)，n>1，R 在∠C 廣區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{-(mn-m-1)}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$ ……②

由 P(-n, -s)，n>1，0<s<1，P 在∠C的角區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，0<s<1，Q 在∠C的角區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{-(sm+s-1)}$ ……④

①+③ 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)(mns-1)}{-(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤（此時 0<mns<1），②+④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns-1)}{-(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns-1}{sm+s-1}$ ……⑦，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^{2}}{-(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 8 證明】

因為 n>1，0<s<1，P 在∠C廣區，Q 在∠C廣區，R 在∠C角區

所以 $ns-n+1>0$，$sm+s-1>0$，$mn-m-1>0$，

由 R(m, -n)，n>1，R 在∠C 角區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m-1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn-m-1}$ ……②

由 P(-n, -s)，n>1，0<s<1，P 在∠C的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(m, -s)，0<s<1，Q 在∠C的廣區，$\frac{CQ}{CF}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

①＋③ 得 $\frac{PR}{AD}=\frac{(n-1)(mns-1)}{(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤（此時 mns>1），②＋④ 得 $\frac{QR}{CF}=\frac{(m+1)(mns-1)}{(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{QR}{CR}=\frac{mns-1}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{CD}{BC}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{QR}{CR}\cdot\frac{PR}{AD}\cdot\frac{CD}{BC}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^2}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 9 與圖 10 證明】

因為 n>1，0<s<1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{C}$廣區

所以 ns − n + 1 > 0，sm + s − 1 > 0，mn − m − 1 < 0，

由 R(m, -n)，n>1，R 在 ∠C 廣區，所以$\frac{AR}{AD}=\frac{m(n-1)}{-(mn-m-1)}$ ……① ， $\frac{CR}{CF}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$ ……②

由 P(-n, -s)，n>1，0<s<1，P 在∠C的廣區，$\frac{AP}{AD}=\frac{n-1}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(m, -s)，0<s<1，Q 在∠C的廣區，$\frac{CQ}{CF}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

若圖 9 則③－①（此時 0<mns<1），若圖 10 則①－③（此時 mns>1） 得 $\frac{PR}{AD}=\frac{(n-1)|mns-1|}{-(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤

若圖 9 則②－④，若圖 10 則④－② 得 $\frac{QR}{CF}=\frac{(m+1)|mns-1|}{-(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{QR}{CR}=\frac{|mns-1|}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{CD}{BC}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{QR}{CR}\cdot\frac{PR}{AD}\cdot\frac{CD}{BC}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^2}{-(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 11 與圖 12 證明】

因為 0<n<1，s>1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{C}$廣區

所以 ns − n + 1 > 0，sm + s − 1 > 0，mn − m − 1 < 0，

由 R(m, -n)，0<n<1，R 在 ∠C 廣區，所以$\frac{AR}{AD}=\frac{m(1-n)}{-(mn-m-1)}$ ……① ， $\frac{CR}{CF}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$ ……②

由 P(-n, -s)，0<n<1，s>1，P 在∠C的廣區，$\frac{AP}{AD}=\frac{1-n}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(m, -s)，s>1，Q 在∠C的廣區，$\frac{CQ}{CF}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

若圖 11 則①－③（此時 0<mns<1），若圖 12 則③－①（此時 mns>1）得 $\frac{PR}{AD}=\frac{(1-n)|mns-1|}{-(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤，

若圖 11 則②－④，若圖 12 則④－② 得 $\frac{QR}{CF}=\frac{(m+1)|mns-1|}{-(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{QR}{CR}=\frac{|mns-1|}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{CD}{BC}=\frac{1}{1-n}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{QR}{CR}\cdot\frac{PR}{AD}\cdot\frac{CD}{BC}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^2}{-(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 13 與圖 14 證明】

因為 0<n<1，0<s<1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{C}$廣區

所以 ns − n + 1 > 0，sm + s − 1 > 0，mn − m − 1 < 0，

由 R(m, -n)，0<n<1，R 在 ∠C 廣區，所以$\frac{AR}{AD}=\frac{m(1-n)}{-(mn-m-1)}$ ……① ， $\frac{CR}{CF}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$ ……②

由 P(-n, -s)，0<n<1，0<s<1，P 在∠C的廣區，$\frac{AP}{AD}=\frac{1-n}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(m, -s)，0<s<1，Q 在∠C的廣區，$\frac{CQ}{CF}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

若圖 13 則③－①（此時 0<mns<1），若圖 14 則①－③（此時 mns>1）得 $\frac{PR}{AD}=\frac{(1-n)|mns-1|}{-(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤，

若圖 13 則④－②，若圖 14 則②－④ 得 $\frac{QR}{CF}=\frac{(m+1)|mns-1|}{-(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{QR}{CR}=\frac{|mns-1|}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{CD}{BC}=\frac{1}{1-n}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{QR}{CR}\cdot\frac{PR}{AD}\cdot\frac{CD}{BC}=\frac{(\boldsymbol{mns-1})^2}{-(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm+s-1})(\boldsymbol{mn-m-1})}$ 。 QED

【G(m, -n, -s)圖 15 證明】

因為 0<n<1，0<s<1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{C}$角區，R 在∠$\boldsymbol{C}$廣區

所以 ns − n + 1 > 0，sm + s − 1<0，mn − m − 1 < 0，

由 R(m, -n)，0<n<1，R 在 ∠C 廣區，所以$\frac{AR}{AD}=\frac{m(1-n)}{-(mn-m-1)}$ ……① ， $\frac{CR}{CF}=\frac{m+1}{-(mn-m-1)}$ ……②

由 P(-n, -s)，0<n<1，0<s<1，P 在∠C的廣區，$\frac{AP}{AD}=\frac{1-n}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(m, -s)，0<s<1，Q 在∠C的角區，$\frac{CQ}{CF}=\frac{s(m+1)}{-(sm+s-1)}$ ……④

③－① 得 $\frac{PR}{AD}=\frac{(1-n)(mns-1)}{(ns-n+1)(mn-m-1)}$ ……⑤，（此時 0<mns<1）

②＋④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns-1)}{-(sm+s-1)(mn-m-1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns-1}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{1-n}$ ……⑧

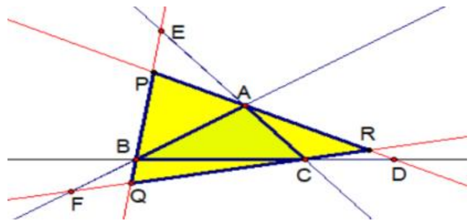
由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns-1)^2}{(ns-n+1)(sm+s-1)(mn-m-1)}$ 。 QED

所以項次 5，G(m, -n, -s)所有圖形得證$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns-1)^2}{(ns-n+1)(sm+s-1)(mn-m-1)}\right|$。

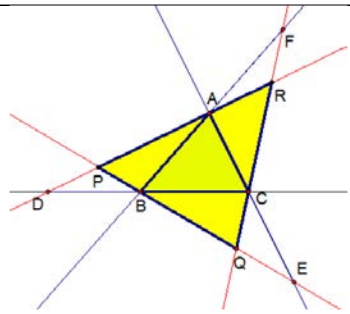
六、項次 6，G(-m, n, -s)有 15 種圖形，可由項次 5(m, -n, -s)旋轉輪換，得$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns-1)^2}{(ns-n-1)(sm-s+1)(mn+m-1)}\right|$。

七、項次 7，G(m, -n, -s)有 15 種圖形，可由項次 6(-m, n, -s)旋轉輪換，得$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns-1)^2}{(ns+n-1)(sm-s-1)(mn-m+1)}\right|$。

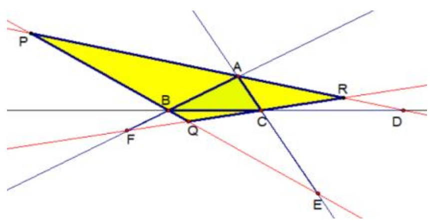
八、項次 8，G(-m, -n, -s)有 14 種圖形：



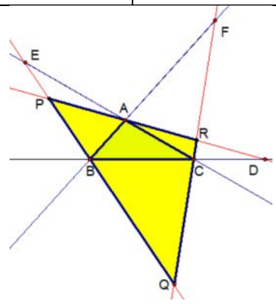
G(-m, -n, -s)圖 1



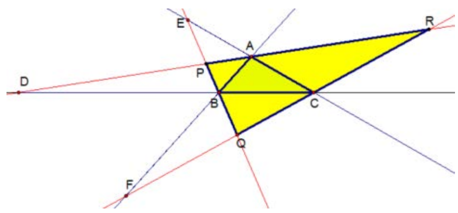
G(-m, -n, -s)圖 2



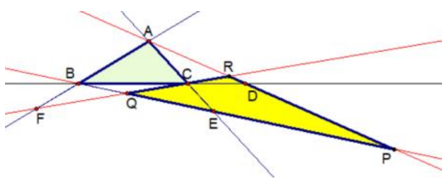
G(-m, -n, -s)圖 3



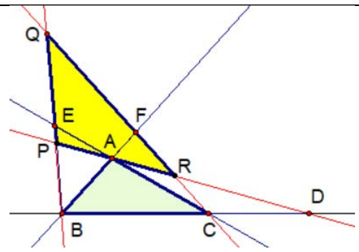
G(-m, -n, -s)圖 4



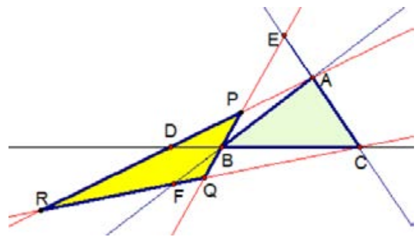
G(-m, -n, -s)圖 5



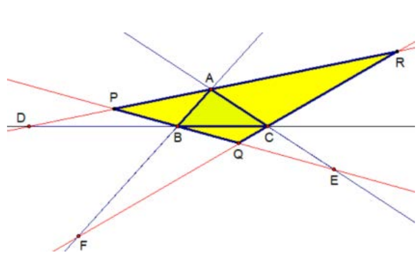
G(-m, -n, -s)圖 6



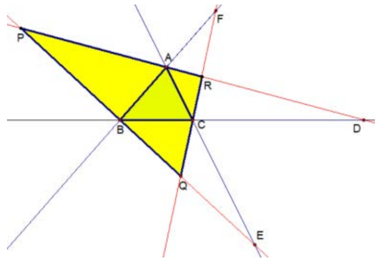
G(-m, -n, -s)圖 7



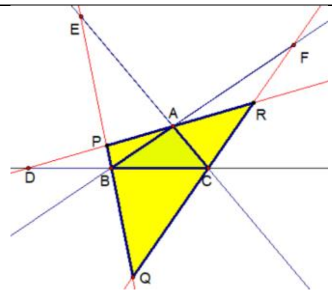
G(-m, -n, -s)圖 8



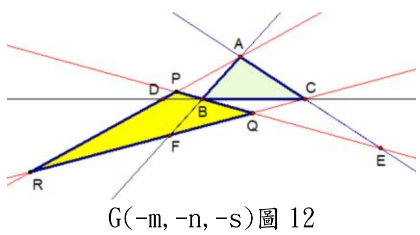
G(-m, -n, -s)圖 9



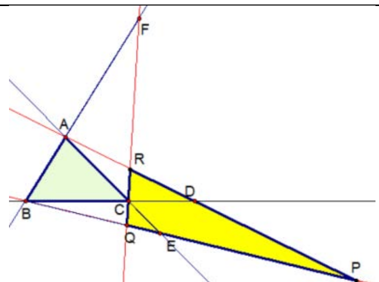
G(-m, -n, -s)圖 10

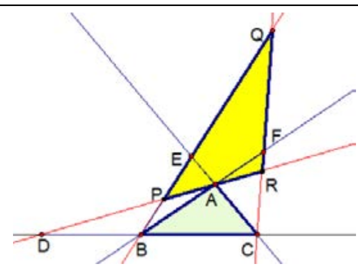


G(-m, -n, -s)圖 11



G(-m, -n, -s)圖 12





G(-m, -n, -s)圖 14

	G(-m,-n,-s)圖 13	

只需證明 G(-m,-n,-s)圖 1，圖 2，圖 3，圖 6，圖 9，圖 12。

【G(-m,-n,-s)圖 4】 0<m<1，n>1，s>1，P 在∠C廣區，Q 在∠A廣區，R 在∠B廣區，其證明可由圖 3 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 5】 m>1， 0<n<1，s>1，P 在∠C廣區，Q 在∠A廣區，R 在∠B廣區，其證明可由圖 4 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 7】 0<m<1， n>1，s>1，P 在∠C廣區，Q 在∠A角區，R 在∠B廣區，其證明可由圖 6 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 8】 m>1， 0<n<1，s>1，P 在∠C廣區，Q 在∠A廣區，R 在∠B角區，其證明可由圖 7 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 10】 0<m<1，n>1，0<s<1，P 在∠C廣區，Q 在∠A廣區，R 在∠B廣區，其證明可由圖 9 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 11】 0<m<1，0<n<1，s>1，P 在∠C廣區，Q 在∠A廣區，R 在∠B廣區，其證明可由圖 10 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 13】 <m<1，n>1，0<s<1，P 在∠C角區，Q 在∠A廣區，R 在∠B廣區，其證明可由圖 12 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 14】 0<m<1，0<n<1，s>1，P 在∠C廣區，Q 在∠A角區，R 在∠B廣區，其證明可由圖 13 旋轉輪換得證。

【G(-m,-n,-s)圖 1 證明】

因為 m>1，n>1，s>1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{A}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{B}$廣區

所以 $ns-n+1>0$，$sm-s+1>0$，$mn-m+1>0$

由 R(-m,-n)，m>1，n>1，R 在∠B 廣區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m+1}$ ……① ， $\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{mn-m+1}$ ……②

由 P(-n,-s)，n>1，s>1，P 在∠C的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(-m,-s)，m>1，s>1，Q 在∠A的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s+1}$ ……④

①＋③ 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)(mns+1)}{(ns-n+1)(mn-m+1)}$ ……⑤，②＋④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m-1)(mns+1)}{(sm-s+1)(mn-m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm-s+1}$ ……⑦ ，又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns+1})^2}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm-s+1})(\boldsymbol{mn-m+1})}$ 。 QED

【G(-m,-n,-s)圖 2】

因為 0<m<1，0<n<1，0<s<1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{A}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{B}$廣區

所以 $ns-n+1>0$，$sm-s+1>0$，$mn-m+1>0$

由 R(-m,-n)，0<m<1，0<n<1，R 在∠B 廣區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(1-n)}{mn-m+1}$ ……① ， $\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{1-m}{mn-m+1}$ ……②

由 P(-n,-s)，0<n<1，0<s<1，P 在∠C的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(-m,-s)，0<m<1，0<s<1，Q 在∠A的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(1-m)}{sm-s+1}$ ……④

①＋③ 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(1-n)(mns+1)}{(ns-n+1)(mn-m+1)}$ ……⑤，②＋④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(1-m)(mns+1)}{(sm-s+1)(mn-m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm-s+1}$ ……⑦ ，又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{1-n}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns+1})^2}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm-s+1})(\boldsymbol{mn-m+1})}$ 。 QED

【G(-m,-n,-s)圖 3 證明】

因為 m>1，n>1，s>1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{A}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{B}$廣區

所以 $ns-n+1>0$，$sm-s+1>0$，$mn-m+1>0$

由 R(-m,-n)，m>1，n>1，R 在∠B 廣區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m+1}$ ……① ， $\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{mn-m+1}$ ……②

由 P(-n,-s)，n>1，s>1，P 在∠C的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(-m,-s)，m>1，s>1，Q 在∠A的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s+1}$ ……④

①＋③ 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)(mns+1)}{(ns-n+1)(mn-m+1)}$ ……⑤，②＋④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m-1)(mns+1)}{(sm-s+1)(mn-m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm-s+1}$ ……⑦ ，又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns+1})^2}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm-s+1})(\boldsymbol{mn-m+1})}$ 。 QED

【G(-m,-n,-s)圖 6】

因為 m>1，n>1，0<s<1，P 在∠$\boldsymbol{C}$角區，Q 在∠$\boldsymbol{A}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{B}$廣區

所以 $ns-n+1<0$，$sm-s+1>0$，$mn-m+1>0$

由 R(-m,-n)，m>1，n>1，R 在∠B 廣區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n-1)}{mn-m+1}$ ……① ， $\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{mn-m+1}$ ……②

由 P(-n,-s)，n>1，0<s<1，P 在∠C的角區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$ ……③

由 Q(-m,-s)，m>1，0<s<1，Q 在∠A的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s+1}$ ……④

③－① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n-1)(mns+1)}{-(ns-n+1)(mn-m+1)}$ ……⑤，②＋④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m-1)(mns+1)}{(sm-s+1)(mn-m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm-s+1}$ ……⑦　　，又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n-1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns+1})^2}{-(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm-s+1})(\boldsymbol{mn-m+1})}$ 。 QED

【G(-m,-n,-s)圖 9】

因為 m>1，0<n<1，0<s<1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{A}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{B}$廣區

所以 $ns-n+1>0$，$sm-s+1>0$，$mn-m+1>0$

由 R(-m,-n)，m>1，0<n<1，R 在∠B 廣區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(1-n)}{mn-m+1}$ ……① ， $\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{mn-m+1}$ ……②

由 P(-n,-s)，0<n<1，0<s<1，P 在∠C的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(-m,-s)，m>1，0<s<1，Q 在∠A的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s+1}$ ……④

①＋③ 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(1-n)(mns+1)}{(ns-n+1)(mn-m+1)}$ ……⑤，②＋④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m-1)(mns+1)}{(sm-s+1)(mn-m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm-s+1}$ ……⑦　　，又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{1-n}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns+1})^2}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm-s+1})(\boldsymbol{mn-m+1})}$ 。 QED

【G(-m,-n,-s)圖 12】

因為 m>1，0<n<1，0<s<1，P 在∠$\boldsymbol{C}$廣區，Q 在∠$\boldsymbol{A}$廣區，R 在∠$\boldsymbol{B}$角區

所以 $ns-n+1<0$，$sm-s+1>0$，$mn-m+1<0$

由 R(-m,-n)，m>1，0<n<1，R 在∠B 角區，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(1-n)}{-(mn-m+1)}$ ……① ， $\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m-1}{-(mn-m+1)}$ ……②

由 P(-n,-s)，0<n<1，0<s<1，P 在∠C的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$ ……③

由 Q(-m,-s)，m>1，0<s<1，Q 在∠A的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m-1)}{sm-s+1}$ ……④

①－③ 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(1-n)(mns+1)}{-(ns-n+1)(mn-m+1)}$ ……⑤，②－④ 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m-1)(mns+1)}{-(sm-s+1)(mn-m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm-s+1}$ ……⑦　　，又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{1-n}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(\boldsymbol{mns+1})^2}{-(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm-s+1})(\boldsymbol{mn-m+1})}$ 。 QED

所以項次 8，G(-m,-n,-s)所有圖形均得證，$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(\boldsymbol{mns+1})^2}{(\boldsymbol{ns-n+1})(\boldsymbol{sm-s+1})(\boldsymbol{mn-m+1})}\right|$。

【評語】030404

本作品探討連接三角形的三個頂點與對邊上的三等分點，將三角形切割成 19 個區域，這 19 個區域的面積比會如何？作品將各線段的比改為比值，使得推理更流暢。作者們巧妙的藉助了比例的性質，針對這些問題，給出了答案。說理清楚而且完整，十分難得。比較美中不足的是，部分的說明稍嫌繁瑣了些。事實上，就如同作者們在最後討論與結論的部分所提到的，有些看似不同的分類，事實上結果可用一個一致性的形式來表述的。如果可以把長度的比值改成用向量的倍數來定義，或者引進解析幾何(也就是把圖形放在座標上討論)，應該可以讓說明變得更簡單，論述的過程也可能可以進一步的簡化。沒有觀察到這一點，有點可惜。

作品簡報

「非西瓦」時之三角形面積分割探討

組別:國中組

科別:數學科

National Primary & High School Science Fair
中華民國中小學科學展覽會

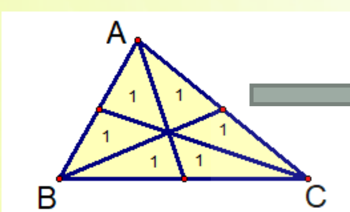
壹、研究問題

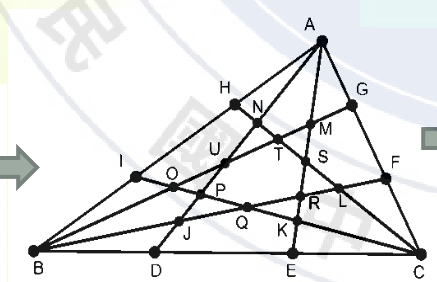
1.**動機：**三角形三中線將三角形平分為6個面積相等的三角形

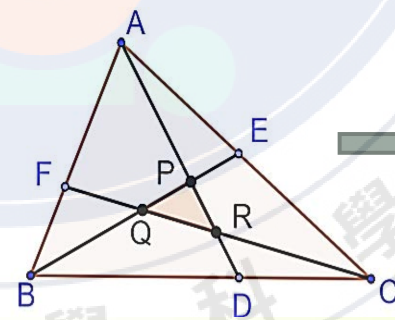
2. **問題1：**三角形三頂點與其對邊的三等分點連線(面積三分線)，將三角形分成19個區域，這些區域的面積比例?

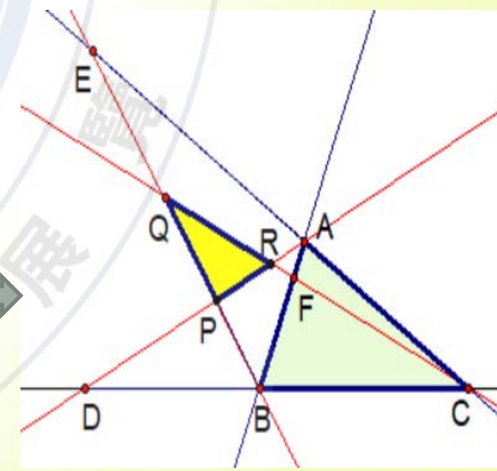
3. **問題2：**三角形，D、E、F為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上**任意分割點**，若$\overline{AF}:\overline{BF}=a:b$，$\overline{BD}:\overline{CD}=c:d$，$\overline{CE}:\overline{AE}=e:f$時，怎樣的條件下，分割線$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$可圍出ΔPQR？並求ΔPQR與ΔABC面積比。

3. **問題3：**當分割點在**邊上**或其**延長線**上時， ΔPQR存在的條件?並求Δ PQR與Δ ABC面積比?









貳、文獻探討

1. 我們搜尋過去文獻資料，沒有找到任何與「非西瓦」相關的研究報告。

2. 西瓦定理 及 孟氏定理

3. 【孟氏定理延伸性質】根據孟氏定理，圖有二組三點共線，四組線段比，由已知兩組之線段比，求另兩組線段比。

(1) $\frac{a}{a+b}=\frac{yz}{yz+w(x+y)}$

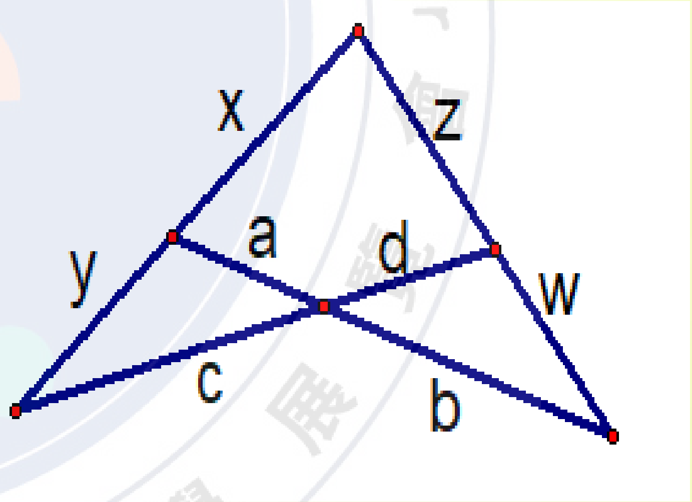
(2) $\frac{x}{x+y}=\frac{bz-aw}{bz}$

(3) $\frac{a}{a+b}=\frac{cz}{(c+d)(z+w)}$

(4) $\frac{x}{x+y}=\frac{d(z+w)}{dz+w(c+d)}=\frac{d(w+z)}{cw+d(w+z)}$

(5) $\frac{a}{a+b}=\frac{cx-dy}{x(c+d)}$

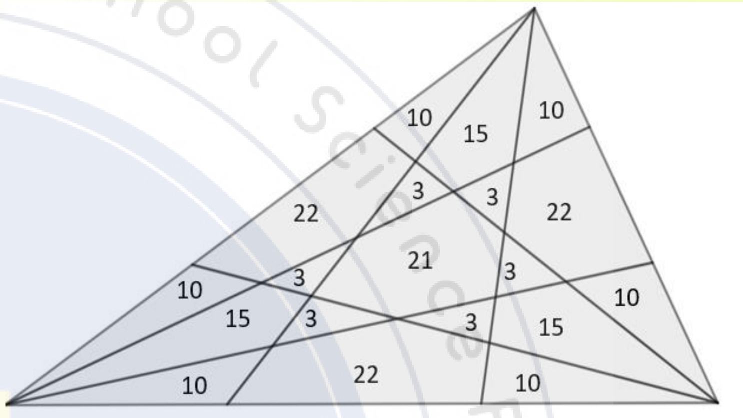
(6) $\frac{x}{x+y}=\frac{d(a+b)}{b(c+d)}$。



參、研究過程

【問題1結果】

面積三分線將三角分成19個區域，各區域面積比如圖。



心得：之後的計算技巧及研究方法，從研究面積三分線獲得。

問題2：【**研究命題**】三角形**內部**分割線所圍三角形

若$\overline{AF}:\overline{BF}=a:b$，$\overline{BD}:\overline{CD}=c:d$，$\overline{CE}:\overline{AE}=e:f$，$\Delta PQR$為三**分割線**$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$所圍的三角形，(1)**怎樣條件下**，$\Delta PQR$存在。(2)此時$\Delta PQR$與$\Delta ABC$的面積比。

重要想法:因變數太多，實在很難操作計算，於是我們假設$m=\frac{a}{b}$、$n=\frac{c}{d}$、$s=\frac{e}{f}$，不失一般性。操作三個變數的計算，比較容易一點。

參、研究過程

【問題2結果】

(1)當**非西瓦**（$mns \neq 1$）時，ΔPQR存在，有**2種**可能圖形。

(2)不管哪個圖，**分割線段比**都一樣。

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}} = \frac{|(n+1)(mns-1)|}{(mn+m+1)(ns+n+1)},$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}} = \frac{|(s+1)(mns-1)|}{(ns+n+1)(sm+s+1)},$$

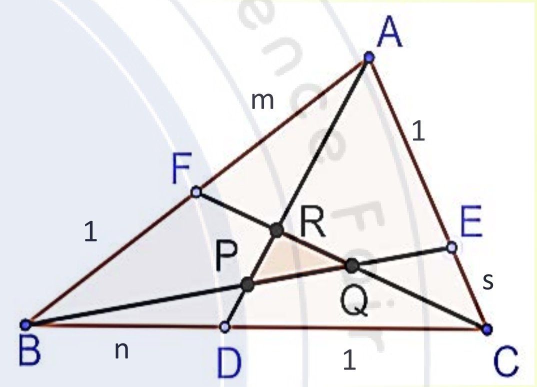
$$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}} = \frac{|(m+1)(mns-1)|}{(sm+s+1)(mn+m+1)},$$

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} = \frac{|(mns-1)|}{(mn+m+1)},$$

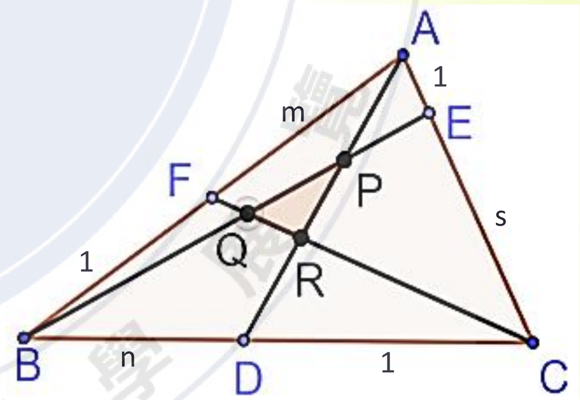
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{|(mns-1)|}{(ns+n+1)},$$

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}} = \frac{|(mns-1)|}{(sm+s+1)}。$$

(3) $$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = \frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}。$$



$0 < mns < 1$時

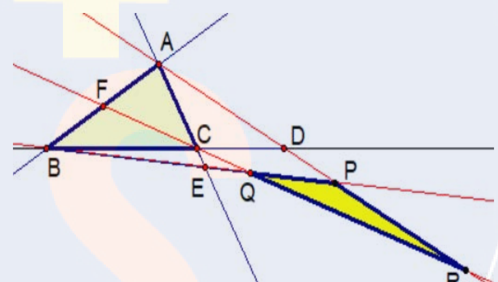


$mns > 1$時

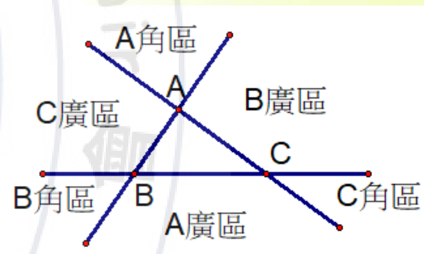
參、研究過程

問題3：【研究命題】ΔABC，若D、E、F分別為直線$\overleftrightarrow{BC}$、直線$\overleftrightarrow{AC}$、直線$\overleftrightarrow{AB}$上的分割點，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$稱為分割線，P為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點，Q為$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點，R為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點。

令$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$，怎樣的條件下ΔPQR存在？並求$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=?$



G(m,-n,-s)

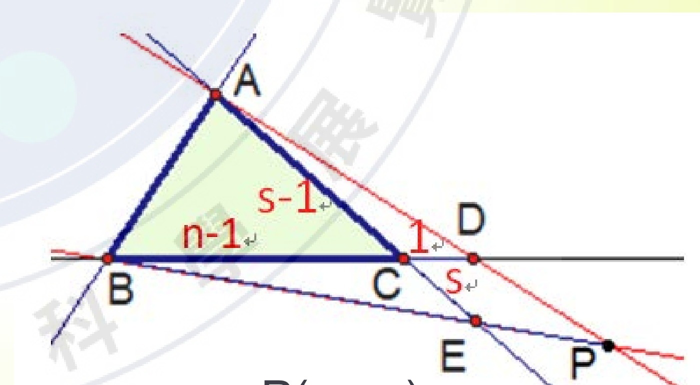


【定義圖形】

1. G(±m, ±n, ±s)八類型：
   正(+)號：分割點在**邊上**，
   負(−)號：分割點在**延長線**上。

2. 定義：角區與廣區，如圖。

3. 定義：P(±n, ±s)、
   Q(±m, ±s)、
   R(±m, ±n)。



P(-n,-s)

參、研究過程

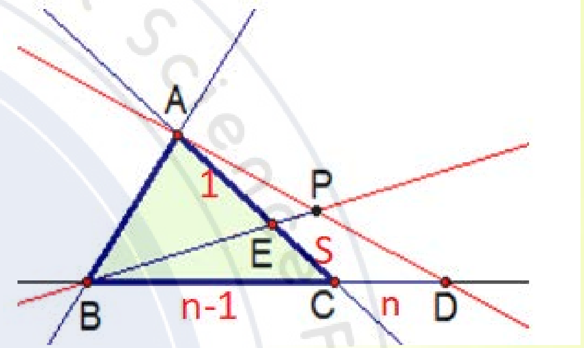
1. 以P(−n, s)為例，有三種可能圖形，計算分割線段比。

a. 當n>1時，P只在∠*B*的廣區：

由孟氏定理延伸性質(3)(4)，

得$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns+n-1}$，

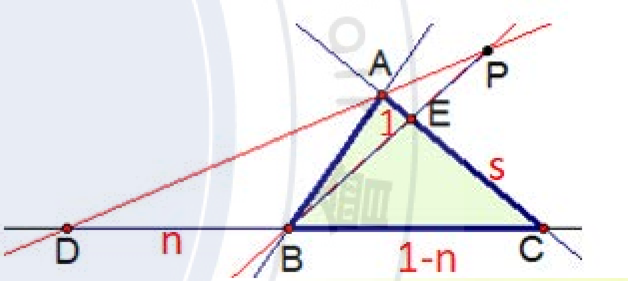
此時$ns+n-1>0$。



b. 當0<n<1，P在∠*B*的廣區時：

同理可得$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns+n-1}$，

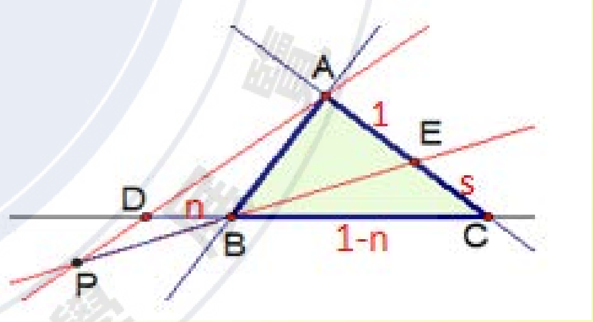
此時$ns+n-1>0$。



c. 當0<n<1，P在∠*B*的角區時：

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{-(ns+n-1)}$，

此時$ns+n-1<0$。



同理可求P(n, −s)、P(−n, −s)及Q(m, −s)、Q(−m, s)、Q(−m, −s)及R(m, −n)、Q(−m, n)、Q(−m, −n)

P(−n, s)、(P(n, −s)、P(−n, −s)分割線段比

圖形類型	m、n、s條件	P、Q、R的位置	判別條件	分割線段比
P(-n,s)	n>1	P只在∠B的廣區	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns+n-1}$
	0<n<1	P在∠B的廣區時	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns+n-1}$
	0<n<1	P在∠B的角區時	$ns+n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{-(ns+n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{-(ns+n-1)}$
P(n,-s)	s>1	P在∠A的廣區時	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$
	s>1	P在∠A的角區時	$ns-n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns-n-1}$
	0<s<1	P只在∠A的廣區	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$
P(-n,-s)	n>1、s>1	P只在∠C的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P在∠C的廣區時	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P在∠C的角區時	$ns-n+1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n+1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$
	0<n<1、s>1	P只在∠C的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$
	0<n<1、0<s<1	P只在∠C的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$

參、研究過程

1. G(±m, ±n, ±s)八類型圖形共有73種，求面積比方法皆相同。

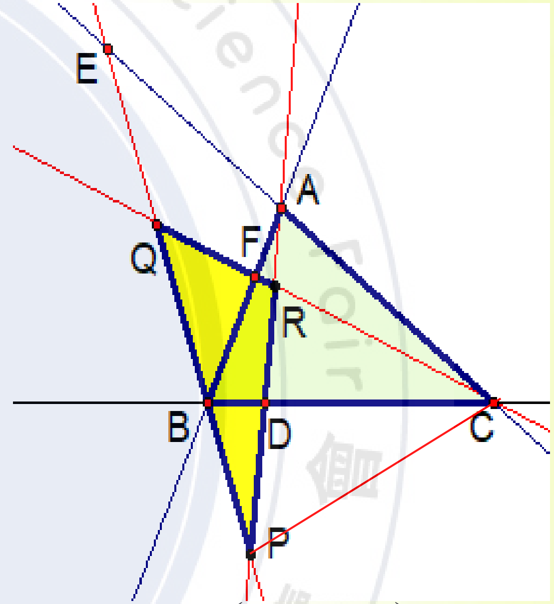
2. 以**等高三角形面積等於底邊比**，求$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$

因為$\Delta PQR = \frac{\overline{QR}}{\overline{CR}} \cdot \Delta CRP$

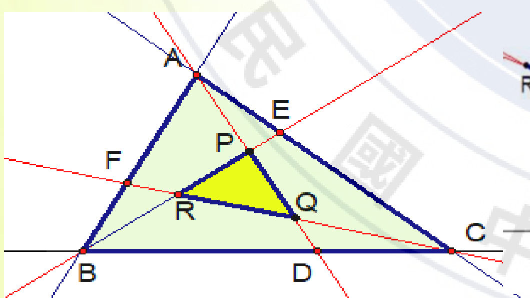
$$= \frac{\overline{QR}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{PR}}{\overline{AD}} \cdot \Delta CAD$$

$$= \frac{\overline{QR}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{PR}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \cdot \Delta ABC$$

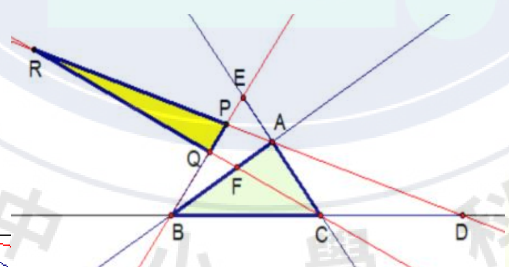
所以$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = \frac{\overline{QR}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{PR}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$。



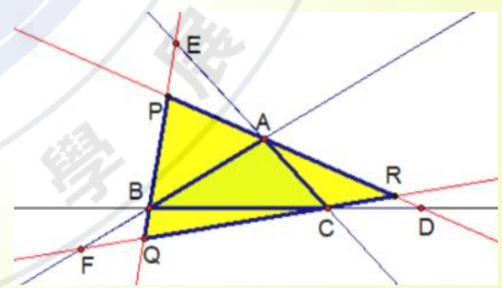
G(m, n, −s)



G(m, n, s)



G(m, −n, −s)



G(−m, −n, −s)

- **以(m, n, -s)為例證明。**

當 s>1，P 在∠A 的廣區，Q 在∠C 的廣區，R 在Δ內部，求證：$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{-(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$。

【證明】

因為 s>1，P 在∠A的廣區，Q 在∠C的廣區，R 在Δ內部

所以 $ns-n-1<0$，$sm+s-1>0$，$mn+m+1>0$

由 R(m, n)，R 在Δ內部，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$ ……①，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$ ……②

由 P(n, -s)，s>1，P 在∠A的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$ ……③

由 Q(m, -s)，s>1，Q 在∠C的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

③-① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns+1)}{-(ns-n-1)(mn+m+1)}$ ……⑤，④-② 得

$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns+1)}{(sm+s-1)(mn+m+1)}$ ……⑥

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm+s-1}$ ……⑦ ，又$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n+1}$ ……⑧

由公式⑤及⑤⑦⑧ $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{-(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$ 。

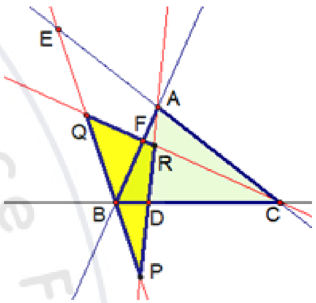


圖 39

所有圖形的證明步驟均為：由表2找到需要的分割線段比第(1)~(4)式，再根據圖形，當A點在P、R之間，則(3)+(1)計算$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}$；若A點在P、R之外，則以|(3)-(1)|計算$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}$。同理，以第(2)(4)式相加或相減計算$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}$為第(6)式，再將(6)÷(2)得$\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}$。最後利用公式(5)，求得面積比。

肆、研究結果

項次	圖形類型	$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$面積比
1	(m, n, s)	$\dfrac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+s+1)(sm+m+1)(mn+n+1)\rvert}$
2	(m, n, -s)	$\dfrac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)\rvert}$
3	(-m, n, s)	$\dfrac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n+1)(sm-s-1)(mn+m-1)\rvert}$
4	(m, -n, s)	$\dfrac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm+s+1)(mn-m-1)\rvert}$
5	(m, -n, -s)	$\dfrac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm+s-1)(mn-m-1)\rvert}$
6	(-m, n, -s)	$\dfrac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm-s+1)(mn+m-1)\rvert}$
7	(-m, -n, s)	$\dfrac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm-s-1)(mn-m+1)\rvert}$
8	(-m, -n, -s)	$\dfrac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm-s+1)(mn-m+1)\rvert}$

National Primary & High School Science Fair 中華民國中小學科學展覽會

伍、討論與結論

【結論1】分割三角形ΔPQR存在條件為：

(1)**非西瓦**（即$\mathbf{uvw \neq 1}$)**時**，

(2)且**三條分割線兩兩不平行時**

即$(\boldsymbol{vw+v+1})(\boldsymbol{wu+w+1})(\boldsymbol{uv+u+1}) \neq \mathbf{0}$ 。

【結論2】ΔABC，若D、E、F分別為$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的分割點，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$為分割直線，若P為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點，Q為$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點，R為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點。令$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$。

(1)當F在$\overline{AB}$上時，$u=m$；當F在$\overline{AB}$延長線上時，$u=-m$。

(2)當D在$\overline{BC}$上時，$v=n$；當D在$\overline{BC}$延長線上時，$v=-n$。

(3)當E在$\overline{AC}$上時，$w=s$；當E在$\overline{AC}$延長線上時，$w=-s$。

若$uvw \neq 1$，且$(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1) \neq 0$，

$$\frac{\boldsymbol{\Delta PQR}}{\boldsymbol{\Delta ABC}} = \frac{(\boldsymbol{uvw}-\mathbf{1})^2}{|(\boldsymbol{vw+v+1})(\boldsymbol{wu+w+1})(\boldsymbol{uv+u+1})|}$$