

中華民國第 62 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

第一名

030116

與頻率共舞——探討玻璃杯內不同液量之頻率
變化

學校名稱：臺北市立內湖國民中學

作者： 國三 黃庭光 國三 周琴恩 國三 簡于皓	指導老師： 陳玠同 葉蔭炯
---	-----------------------------

關鍵詞：玻璃杯、泛音列、聲音頻率

得獎感言

堅持走到最後，才能帶來最好的成績，科展讓我們成為更好的自己

科展，對於我們來說最大的意義就是能夠和相關領域教授以及其他參賽同學交流的管道，也能藉此了解自己在全國的程度，交流彼此對科學領域的看法。

在這次的研究過程中有笑有淚，都是難以忘懷的經驗，而我們也習慣這種忙得不可開交的生活，促進我們的邏輯思考與時間分配能力。我們的實驗做了整整兩年多，從八年級一直做到畢業，第一年因為報告還不夠完整，而且有很多需要改進的地方。所以我們選擇明年再來大家一起角逐競爭。

在第二年我們把公式建模做的更完善，也有加入敲擊與摩擦的比較，數據也分析的更多更精確。在北市科展順利地拿到了特優。

接下來準備全國科展比賽的三、四個月，是我們做研究以來最辛苦的一段時間。首先，因為我們加入了無腳座與有腳座的比較，所以我們又買了很多玻璃杯，全部的數據都要做一遍。再來，我們跟著教授的指導，又分析了很多新的數據，也就是說作品報告書跟簡報檔都要做很大的修改，我們的公式推導有一部分也因為篇幅的關係刪除了。

最後，我們在比賽的幾個禮拜前，做了很多次的模擬報告，要一直想辦法精簡報告內容，口條也是需要訓練的。然後還要準備很多可能會被問的問題，這樣才比較不會緊張，團隊之間的配合也要很默契，當有人卡住了，另一個隊友要趕快接話。

受到疫情的影響，這次的比賽是透過視訊的方式進行，不只對我們而言是新的考驗，也是師長、工作人員新的考驗，比賽方式和以往都不一樣，所以在知道比賽的方式後，也培養了不管是面對任何場地或設備上都能快速上手的能力。

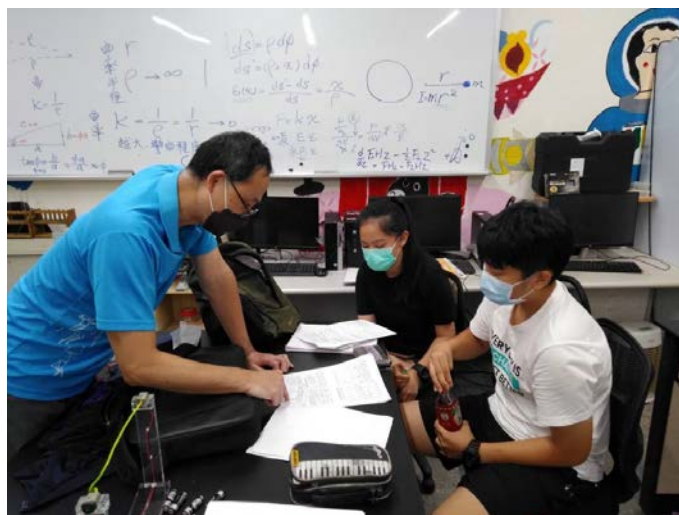
「遇到問題，就要去解決問題」，是我從這次科展感受最深的一句話。在做研究的路上，不論是實驗設計、數據採集、簡報製作、口頭報告，都遇到了很多問題與困難，我們學生及老師們都挺過去了，真的非常感動。

科展最重要的不是比賽，而是相互學習。能在全國科展的大舞台，見識到越來越多組的優秀作品，真的讓我大開眼界。除了更了解自己的不足，也以更謙虛的態度研究。

最後十分感謝指導老師以及支持我的師長一路上的陪伴與指導，也感謝學校給予我們的協助與支持。



全國科展比賽當天在仁愛國中的拍攝照片



指導老師在教我們怎麼報告(圖中的紙是ppt)



測量玻璃杯頻率

壹、摘要

本實驗以不同玻璃杯型以及盛裝不同液體探討振動頻率，以 AUDACITY 進行頻率分析，其中無腳座玻璃杯在杯口所形成的波數為 $n=1, 2, 3\dots$ ；有腳座玻璃杯在杯口所形成的波數為 $n=2, 4, 6\dots$ 。此外腳座可讓玻璃杯更穩定地振動，頻譜上也清楚呈現特徵頻率且有倍頻關係。手摩擦所有玻璃杯主音皆為 $n=2$ ，且強度大於其他泛音百倍以上，視為純音樂器；敲擊杯口與摩擦杯口的主音($n=2$)頻率相同，但產生許多雜音，不適合作為樂器。另外從能量守恆角度推導玻璃杯裝有液體的頻率公式，並以實驗驗證推論，其振動屬於一端受力的「集中負荷」情形，其液高與頻率可以用函數表示。未來希望能進一步以位能角度探討空杯的振動頻率公式，並從黏度探討液體位移速度與玻璃杯位移速度之間關係。

貳、前言

一、研究動機

曾在影片中看到玻璃杯兩種有趣的現象：一是樂器選擇上為何選用高腳杯，而非使用無腳座玻璃杯演奏；二是演奏技巧多半使用沾水的手摩擦玻璃杯口，較少使用敲擊的方式演奏，因此我們想透過實驗分析音色上差異，並且探討此現象的原因。另外也發現水量越多，玻璃杯的頻率下降也愈多，目前參考文獻也沒有明確的公式將玻璃杯的頻率量化，我們想透過建模推導，更進一步知道如何不透過儀器調音，只透過杯子與水量的關係計算出正確的音調。

二、研究目的

- (一) 探討摩擦杯口之特徵頻率和波形與玻璃杯不同形狀之關係。
- (二) 探討摩擦杯口之特徵頻率和波形與杯中不同液體高度之關係。
- (三) 敲擊杯口，比較特徵頻率和波形與摩擦杯口之差別。
- (四) 推導出玻璃杯振動頻率與杯中液體公式並以實驗驗證公式正確性。

三、文獻資料

(一) 國內有三篇探討玻璃杯在裝有液體情形的頻率變化之作品：



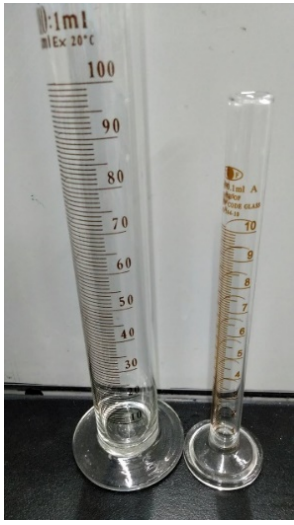

1. 《沒想到玻璃也可以》實驗發現玻璃杯水加越多聲音越低，並且觀察到水表面有駐波，因此可以讓玻璃杯共振，產生比原空杯更大的聲音。
2. 《聽酒杯在唱歌－濃度與聲音頻率關係之探討》實驗得到固定體積，濃度越高的液體(質量越大)頻率下降越多；而固定質量，濃度越高的液體(體積越小)頻率反而下降較少。因此可以知道玻璃杯盛裝同體積的液體，質量越大，頻率越低；玻璃杯盛裝同質量的液體時，液面高度越高，頻率也越低。關於以上現象我們可以猜想與杯壁振動影響有關。
3. 《波濤洶湧的玻璃杯－玻璃杯共振之研究》用聲壓找出玻璃杯口的駐波波形，並且以能量守恆切入，直接寫出空玻璃杯的動能和位能守恆公式，以及在裝有水的情形的動能公式。並且實驗上利用氣壓找出玻璃杯垂直壁的橫向位移與高度平方成正比關係，得出經驗上的關係式 $(\frac{f_o}{f_h})^2 = 1 + \frac{\alpha \rho_l R}{5 \rho_g a} (\frac{h}{H})^5$ ，其中 f_o 為空杯頻率， f_h 為裝有液體頻率， H 為玻璃杯高度， h 為液體高度， α 為係數， ρ_l 為液體密度， ρ_g 為玻璃密度， R 為杯口半徑， a 為杯口厚度。

(二) 國外有一篇探討玻璃杯在裝有液體情形的頻率變化之論文：*A study of wineglass acoustics*. 裡有較為詳細玻璃杯頻率之公式推導，並且作者參考其他文獻，使用近似法得出玻璃杯垂直壁的橫向位移與高度 1.5 次方成正比關係，得出關係式 $(\frac{f_o}{f_h})^2 = 1 + \frac{\alpha \rho_l R}{5 \rho_g a} (\frac{h}{H})^4$ 。

(三) 前面兩文獻沒有證明玻璃杯垂直壁的橫向位移公式，只是透過實驗猜想或近似法得出結果，並且這兩公式有所差異，因此我們想要修正理論，並且依推論證明出公式。我們閱讀高工《機械力學》教科書的彎曲力矩的計算，並且參考國外教材如何計算彎曲曲率半徑，透過「集中負荷」及「均布負荷」進行彎矩計算，並利用楊式係數 $E = \frac{-\Delta P}{\Delta V/V}$ (P 壓力， V 為體積)，來解出玻璃杯垂直壁的橫向位移與高度關係，進而找出頻率變化與水高的真正關係。

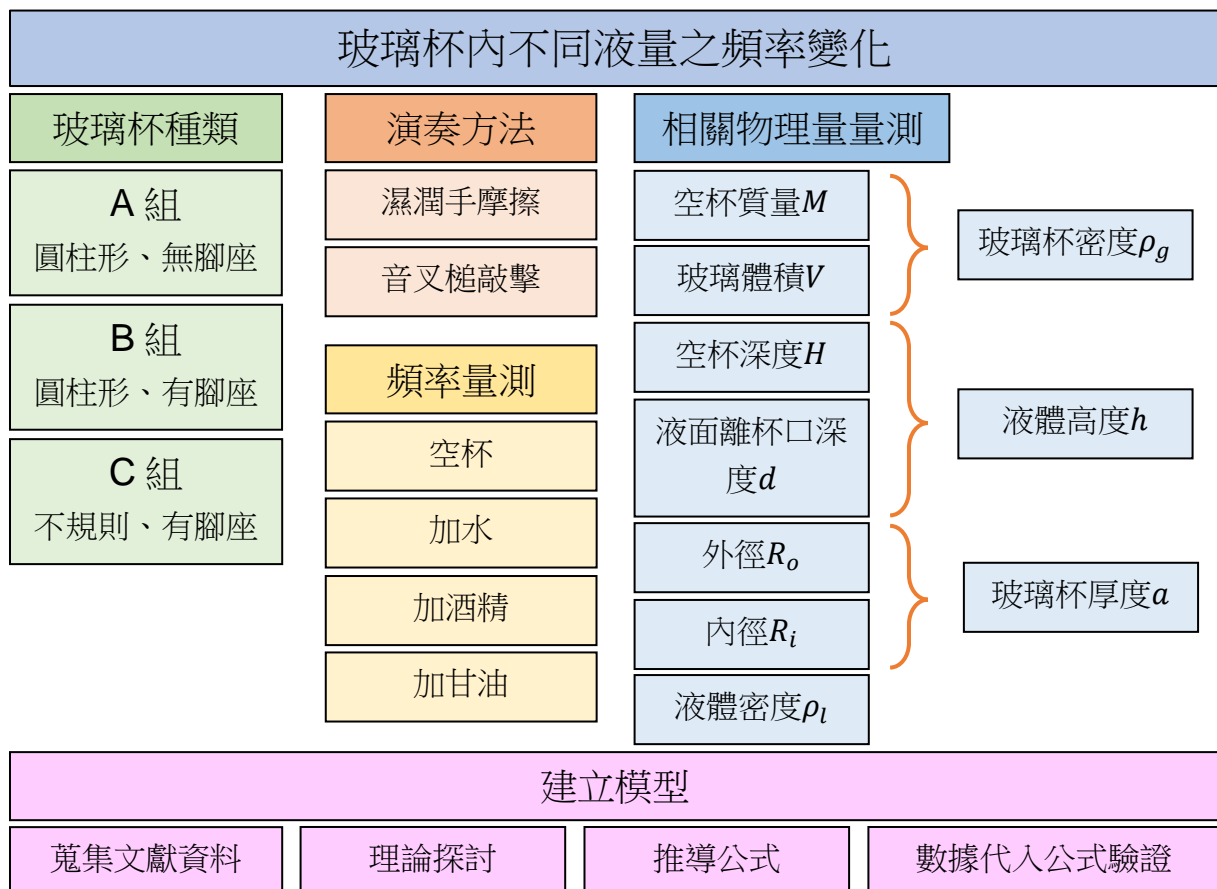
參、實驗器材

圓柱無腳座玻璃杯(A 型)×5	圓柱有腳座玻璃杯(B 型)×4		
			
不規則形有腳座玻璃杯(C 型)×7	麥克風*1		
			廠牌：audio-technica 頻率響應：20-20000Hz
AUDACITY (聲音分析軟體)	燒杯(1000c.c. x2、500c.c. x1)	滴管 x2	電子秤*1
			

螺旋測微器*1	游標尺*1	量筒(100c.c. x1、 10c.c. x2)	水位測量器×1
			

肆、研究過程或方法

研究流程圖



一、玻璃杯依分類標上編號

總共有 16 種不同大小形狀的玻璃杯，為了方便每次實驗進行，並且選出正確的杯子，我們先把所有杯子分成三種(A 型、B 型、C 型)，再把三種類型的杯子由矮到高依序列(不是依照質量排列)，並且標註編號。

A 型：圓柱形狀、無腳座，共五種尺寸(A1~A5)。

B 型：圓柱形狀、有腳座，共四種尺寸(B1~B4)。

C 型：不規則形狀、有腳座，共七種尺寸(C1~C7)。

二、分析音頻方法

(一) 摩擦玻璃杯發聲練習

1. 一支手撐住杯底使之固定，另一手摩擦杯口，如(圖一)。
2. 為了要使實驗精準，所有實驗都由同一人用食指指腹，使用差不多的力摩擦玻璃杯的杯口產生均勻聲音。
3. 每一次摩擦前，食指腹需要沾水，才能產生圓潤的聲音。
4. 使用音叉槌敲擊杯口，如(圖二)，並記錄聲音頻率。



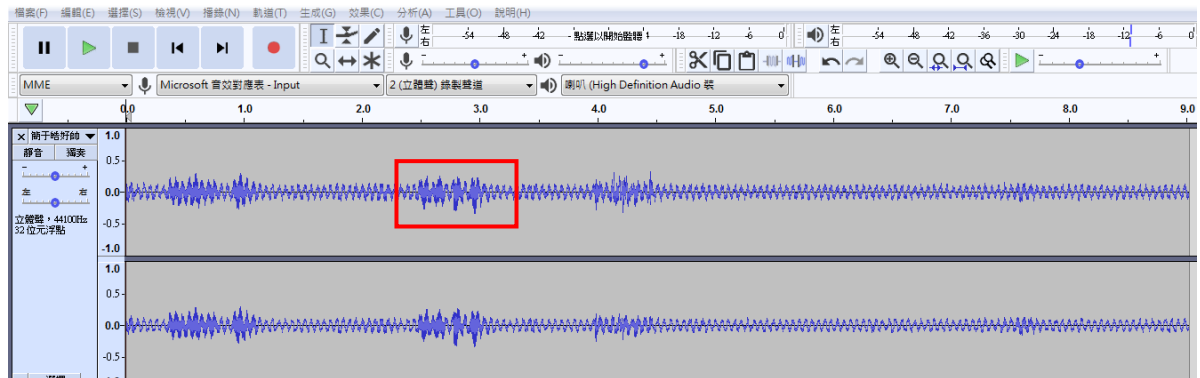
(圖一) 摩擦玻璃杯發聲的方式



(圖二) 音叉槌敲擊杯口的方式

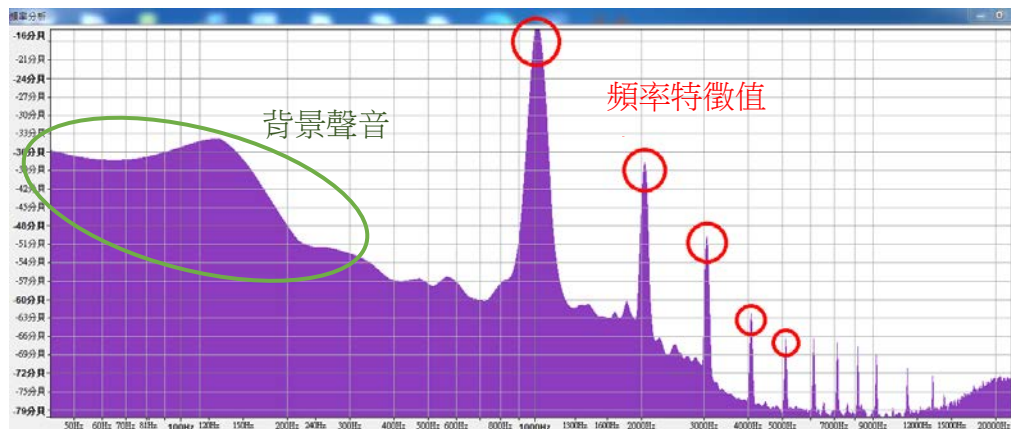
(二) 分析玻璃杯的特徵頻率方法介紹

1. 將麥克風連接至電腦，打開 AUDACITY 錄音程式，先錄製周遭環境的聲音。
手摩擦杯口使玻璃杯聲音穩定後，開始錄音，為了要選取較好的音質，每一次錄音皆須超過 5 秒。



(圖三) AUDACITY 錄音，紅色框為選取清楚的聲音頻率

2. 選取波形穩定以及聲音完整的部分，如 (圖三)紅框。



(圖四) 運用頻率分析找聲音的特徵值

3. 使用 AUDACITY 內部程式點選「分析-頻率分析」，分析聲音的頻率。讀取聲音頻率，選取前數個頻率的強度峰值，即為聲音的特徵值，如 (圖四)，記錄頻率(Hz)、強度(dB)，計算頻率間倍數關係。
4. 改以音叉槌敲擊杯口錄音，重複步驟 1、2、3。
5. 將摩擦玻璃杯的音譜和先前錄製周遭環境的聲音一同比較，分析出哪些是背景聲音，哪些是玻璃杯發出的聲音，獲得正確的聲音頻率。
6. 錄音注意事項

- (1) 將麥克風連接至電腦，使杯口接近麥克風，以手摩擦杯口使玻璃杯聲音穩定後，使用 AUDACITY 錄音。
- (2) 每次錄音時確保周遭環境安靜，並且先只錄下安靜環境時的背景聲音，才可以確定哪些聲音頻率是來自玻璃杯。
- (3) 因避免儀器設備、分析軟體、環境所造成的誤差，每一次錄音都會錄三遍以上，並且確定每次分析的聲音頻率皆一致，才記錄下來。

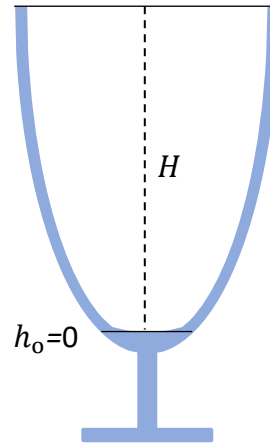
(三) 測量各個玻璃杯空杯以及在不同液體體積下的頻率

1. 空杯頻率分析

- (1) 摩擦玻璃杯空杯口，並用 AUDACITY 錄音分析頻率特徵。
- (2) 將記錄頻率(Hz)、強度(dB)，計算基音倍數記錄在 Excel。
- (3) 游標尺量測內部杯底距杯口高度 H 。



(圖五) 用硬卡當橋樑，再用深度桿測量玻璃杯在特定水量的深度(扣除卡片的厚度)



(圖六) 玻璃杯底至杯口高度 H 圖示

2. 不同體積的液體的頻率分析

- (1) 因為以量筒量取液體再倒入杯中時，會有些許液體殘留在量筒上，所以利用密度算出不同液體在相同體積所需的質量，將玻璃杯放在電子秤上，添加液體到正確質量為止。

表一 經實驗而得的液體密度

水密度=1.0 g/cm ³	酒精密度=0.8 g/cm ³	甘油密度= 1.26g/cm ³
---------------------------	----------------------------	-----------------------------

- (2) 本次使用水、酒精、甘油做為實驗對象，其中 A、B 型使用水、酒精、甘油；C 型則只有使用水。
- (3) 每次加入固定液體體積，測量液面與杯口距離 d ，計算出水位高度 $h = H - d$ ，記錄 d 、 h 。
- (4) 摩擦杯口、敲擊玻璃杯後，並用 AUDACITY 分析聲音頻率特徵。
- (5) 記錄聲音特徵頻率(Hz)及其強度(dB)。

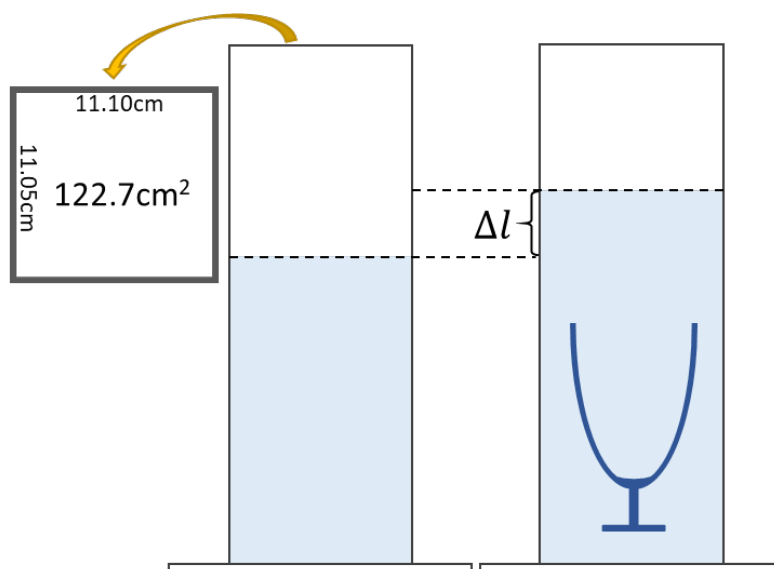
三、測量各個玻璃杯的物理量

(一) 計算各玻璃杯的密度

1. 利用電子秤測量各個玻璃杯的重量。
2. 利用排水法測量玻璃杯整體體積。



(圖七) 玻璃杯沒入裝有水的水位測量器裡



(圖八) 排水法測量玻璃杯整體體積示意圖

- (1) 水位測量器為一個方形的柱形容器(圖七)，首先利用直尺測得水位測量器底面的長與寬，並且算出底部矩形面積，如(表二)。
- (2) 將水裝至好讀取的刻度，並且將玻璃杯放進水位測量器裡，讀取水位上升的高度(水位差= Δl)，如(圖八)。
- (3) 玻璃杯的體積等於排開水的體積(水位差乘上底面積)，如(圖八)。

表二 水位測量器底面長、寬與面積

長(cm)	寬(cm)	面積(cm^2)
11.10	11.05	122.7

3. 算出玻璃杯的密度

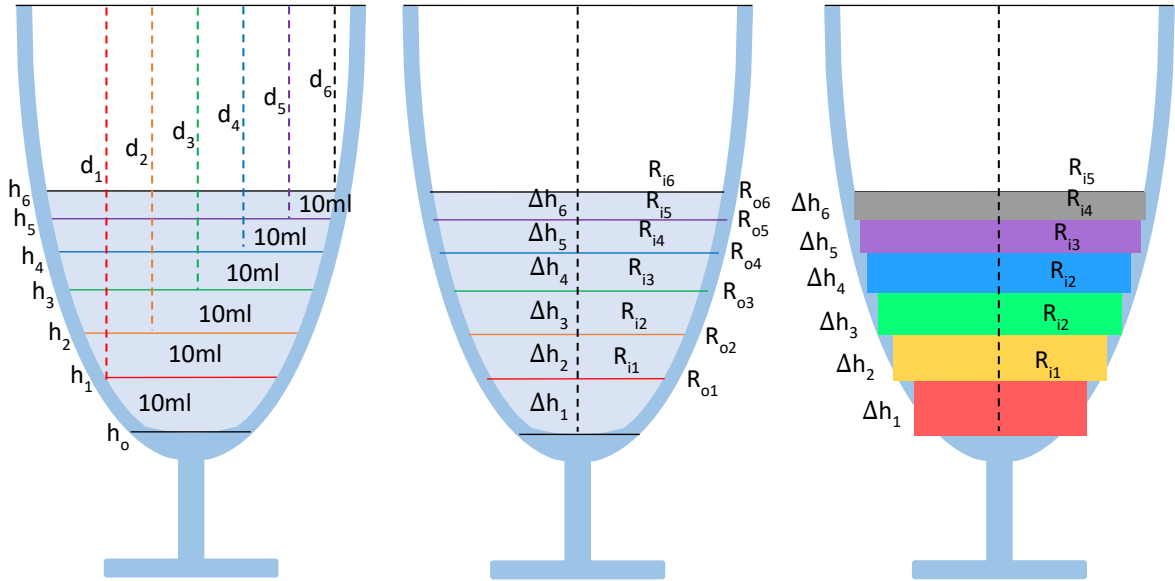
利用密度公式(密度=質量/體積)算出每一個玻璃杯之密度。

(二) 測量不同玻璃杯的半徑與厚度

1. A 型、B 型玻璃杯：直接使用游標尺測量外半徑 R_o 與內半徑 R_i ，杯壁中心半徑

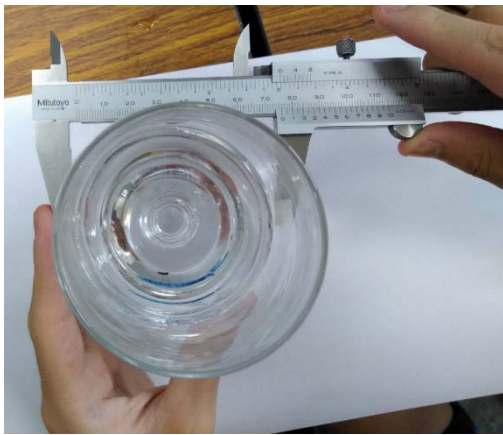
$$R = \frac{R_o + R_i}{2}, \text{ 杯壁厚度 } a = R_o - R_i。$$

2. C 型玻璃杯：

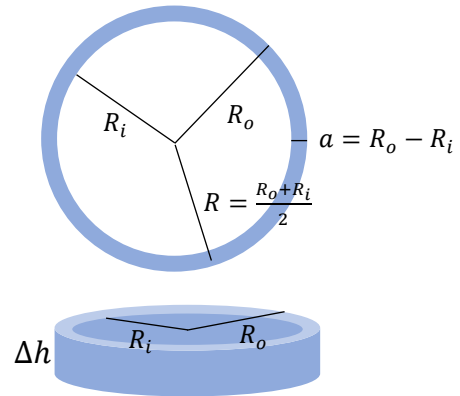


(圖九) 測量不同液體體積下玻璃杯深度、高度、內外徑、區間體積之圖示

- (1) 定義杯底高度 $h_0 = 0$ ，其中液高 h 為杯高 H 減去游標尺測量的水面離杯口深度 d ， $h = H - d$ 量下的深度，每次加入 10ml 水並記錄水高，如(圖九)左邊的圖。
- (2) 紀錄每次加入 10ml 水的高度變化 $\Delta h_n = h_n - h_{n-1}$ ，如(圖九)中間的圖。



(圖十) 游標尺測量玻璃杯的外徑

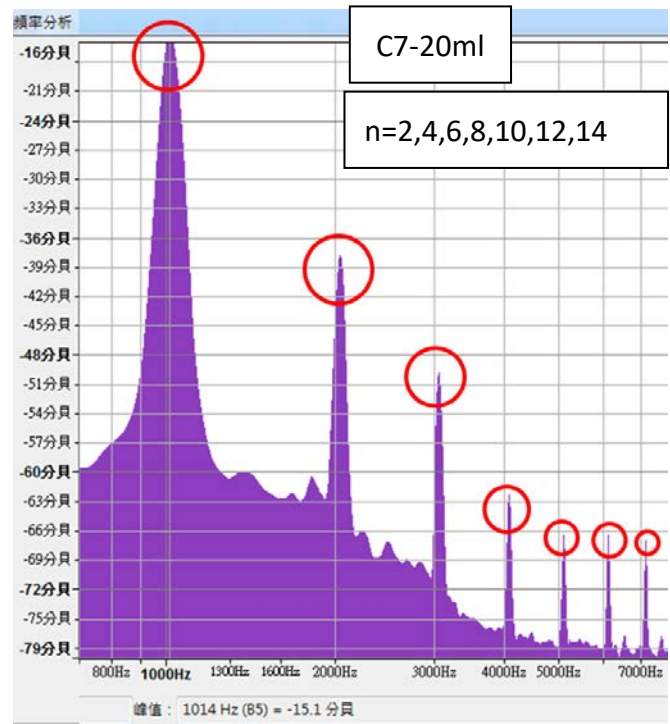
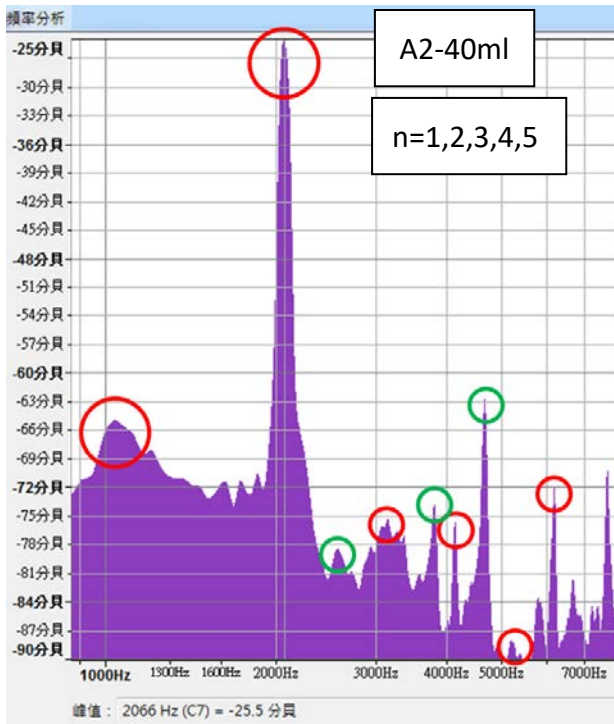


(圖十一) 玻璃杯的區間圖示

- (3) 利用圓柱公式 $\pi R_i^2 \cdot \Delta h = 10\text{ml}$ ，求得區塊內半徑 $R_i = \sqrt{\frac{10\text{ml}}{\pi \Delta h}}$ ，如(圖九)右邊的圖。
- (4) 以游標尺測量每次加入水液面高度處的外徑，並求區塊外半徑 R_o 。
- (5) 區塊半徑 R 與區塊厚度 a 求法如同第 1 點，並且求得平均半徑 R_{ave} ，平均厚度 a_{ave} 。

伍、實驗結果與討論

一、各玻璃杯特徵頻率數據分析



(圖十二) A2 杯(無腳座)在水量 40ml 之頻譜

(圖十三) C7 杯(有腳座)在水量 20ml 之頻譜

分析實驗結果發現：玻璃杯特徵頻率有兩種頻譜類型，各挑選一例代表來呈現，如(圖十二)與(圖十三)，特徵頻率條列如表三與表四，兩種頻譜類型特徵見表五。

表三 A2 杯(圓柱無腳座)在水量 40ml 之特徵頻率數據(綠色為非倍數之頻率)

頻率(Hz)	1033	2066	3128	4118	5178	2560	3786	4650
基音倍數	1.000	2.000	3.028	3.986	5.013	2.478	1.833	4.501
響度(dB)	-64.9	-25.5	-74.9	-74.8	-87.9	-77.7	-73.8	-63.0

表四 C7 杯(不規則有腳座)在水量 20ml 之特徵頻率數據

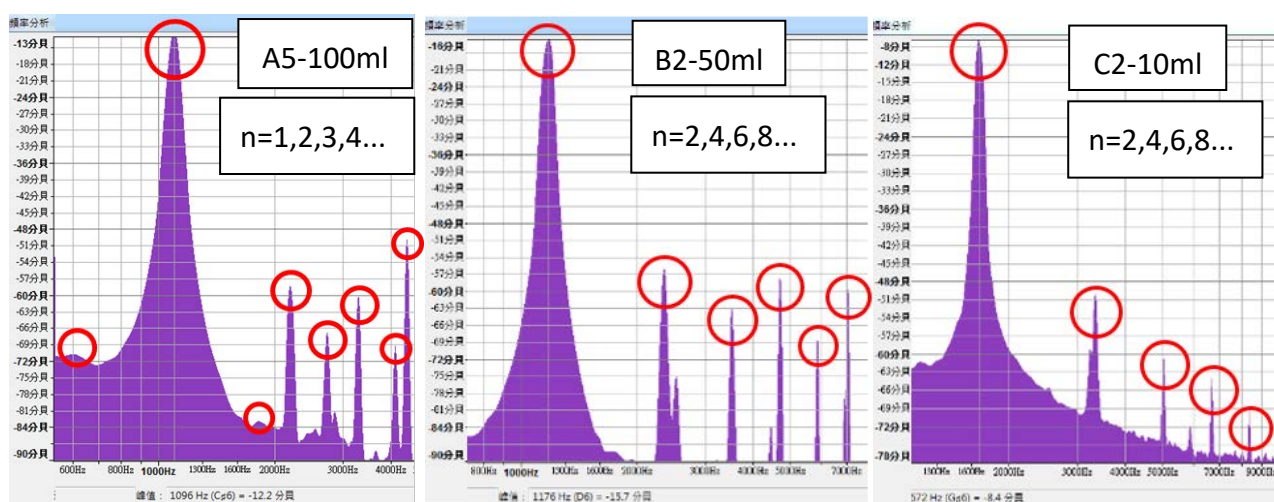
頻率(Hz)	1014	2038	3048	4069	5085	6103	7119
基音倍數	1.000	2.010	3.006	4.013	5.015	6.019	7.021
響度(dB)	-15.1	-37.7	-49.5	-62.2	-66.3	-65.8	-66.9

表五 不同玻璃杯的聲音特徵分類

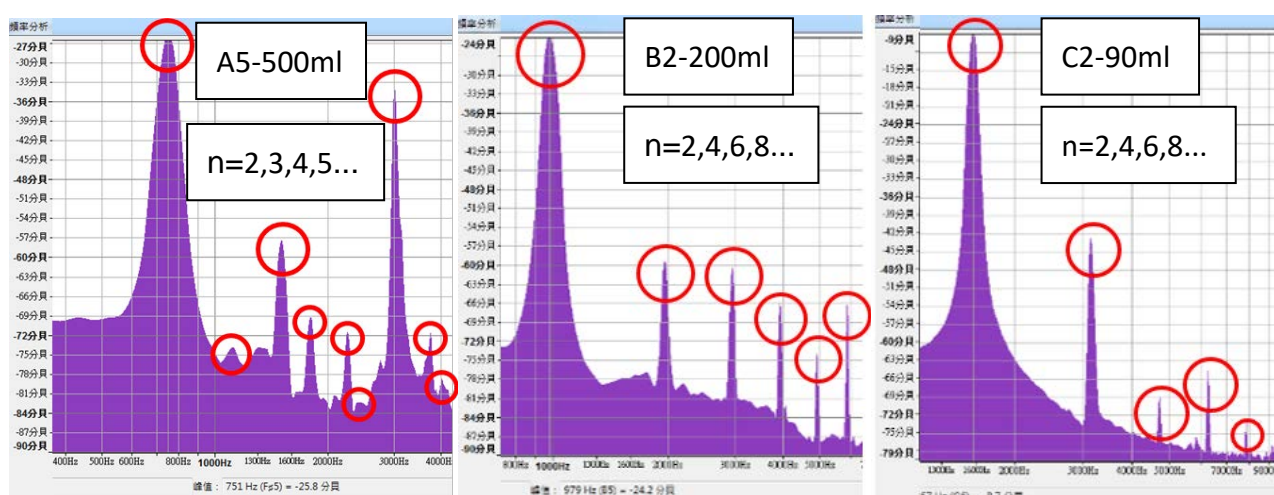
泛音列	杯號	摩擦容易度與音色	非泛音列頻率
n=1, 2, 3, 4.....	A1、A2(裝水)、A3、A4、A5	不易摩擦、些許乾澀	多
n=2, 4, 6, 8.....	A2 空杯、B1~B4、C1~C7	易摩擦、圓潤	少

分析各玻璃杯空杯及裝水的特徵頻率，發現都成整數倍關係，符合泛音列的性質。同時也發現，圓柱無腳座玻璃杯(A 型)不易摩擦出聲且有些許乾澀，從頻譜也可找到非泛音列上的雜音，見(圖十二)綠圈及(表三)綠底；而有腳座的玻璃杯(B 型、C 型)容易摩擦出圓潤的聲音，並且所得出的頻譜無其他雜音，因此有腳座玻璃杯可以作為樂器演奏。

已知響度每差 10 分貝，聲音強度就會差 10 倍(強度單位：瓦/平方公尺)，並由實驗數據可知 $n=2$ (主音)的響度都大於其他泛音 20 分貝以上，即聲音強度大於其他泛音 100 倍以上，所以可將玻璃杯視為純音。



(圖十四) A 型(圓柱無腳座)、B 型(圓柱有腳座)、C 型(不規則形有腳座)低水量之頻譜



(圖十五) A 型(圓柱無腳座)、B 型(圓柱有腳座)、C 型(不規則形有腳座)高水量之頻譜

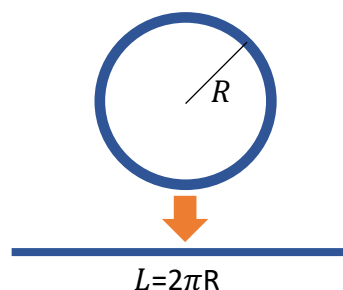
圓柱無腳座的玻璃杯(A 型)在低水位時多半能找出所有的泛音列，如(圖十四)A 型，但在高水位則不容易找出所有泛音列，尤其是 $n=1$ 的峰值消失，並且伴隨雜音出現，如

(圖十五)A 型；有腳座的玻璃杯不管是低水量或是高水量，都能具有 n 為偶數的泛音波形，如(圖十四)與(圖十五) B 型、C 型。

二、各玻璃杯振動模型解釋

首先泛音列都是駐波造成的，形成泛音的物體兩端會有三種狀況，兩端封閉(節點)，如琴弦；兩端開放(兩腹點)，如笛子(實際更複雜些)；一端封閉另一端開放(一節點，一腹點)，如空氣柱實驗和音叉。玻璃杯可視為一圈圈的玻璃環所組成，如橡皮筋一圈圈疊套而成，圈上的任一點剪開，可想像成兩端都是節點或是腹點(圖十六)。(圖十六) 杯口轉換一維線條

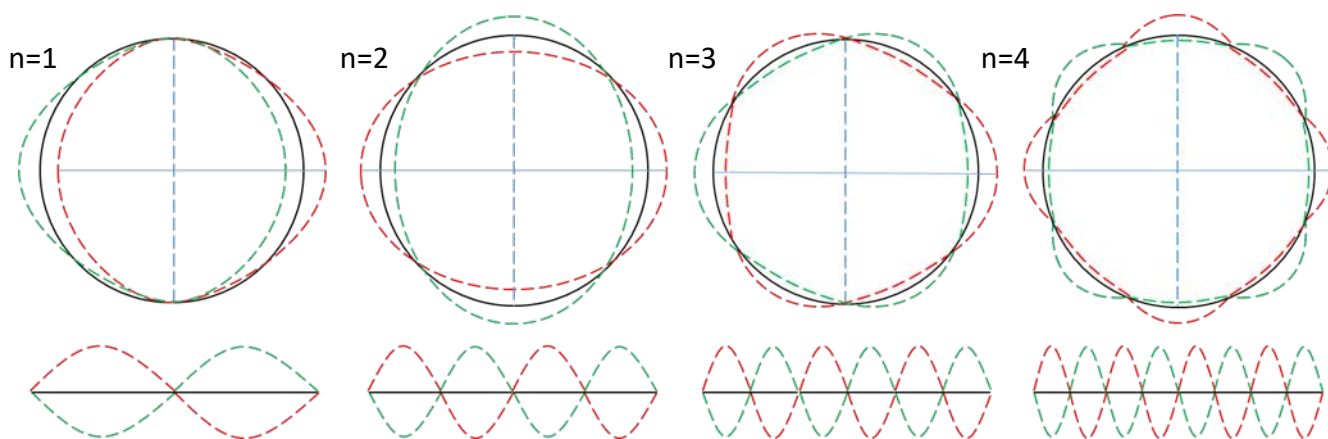
另外由玻璃杯縱向的角度來看，可視為一節點和一腹點的駐波，此來回振動的頻率也會與玻璃環的駐波頻率一致。



(圖十六) 杯口轉換一維線條

為何不是空氣柱所形成的駐波？透過參考資料以及長時間實驗觀察，結果如下：

- (一) 聲音會隨著水位越高而垂直振動範圍越小，按照這樣的方式推理不管是玻璃或是空氣柱，聲音頻率都會變高，但實際上實驗的結果頻率會隨著水量越多而降低。
- (二) 手是一圈一圈地摩擦玻璃杯口，這種能量輸入的方式才能使玻璃杯聲音越來越大，垂直來回摩擦不易產生聲音。
- (三) 圓圈的杯環可以形成封閉的駐波，更容易累積能量形成共振。



(圖十七) 玻璃杯杯口 $n=1, 2, 3, 4$ 之振動及所對應一維之振動

當玻璃杯振動時，玻璃杯口周長會極小範圍的拉長或縮短，過大會造成破裂，可以考慮玻璃杯口波長不變，則不會有杯口全部向外擴張(全部波峰)或是全部收縮(全部波谷)的情形，即半個波所形成的駐波。

當杯口一邊向外凸出，會有一邊向內收縮，則會有數個完整的波所形成的駐波，定義一個波峰與波谷為 $n=1$ ，並依此類推，得出 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ，並且圓周所形成的泛音列型態如上頁(圖十七)上圖，紅色和綠色虛線為 $\theta = 0$ 在某時刻形成波峰以及波谷的波形，上頁(圖十七)下圖為截斷圓環節點變成一維所形成的波形。

分析所有實驗得到的聲音頻譜發現：只有無腳座玻璃杯泛音列符合 $n=1, 2, 3, 4$ (除了 A2 空杯外)，且頻譜會有其他非泛音列的聲音出現；有腳座的玻璃杯泛音列符合 $n=2, 4, 6, 8, \dots$ ，且所得的頻譜幾乎不會有其他非泛音列上的雜音出現(表五)。

我們認為 B、C 型因有腳座，使玻璃杯下端更能形成穩定封閉端，而有單一形式振動，另外腳座還有收斂效果，使玻璃杯整體振動更有一致性，即便在水位高的情形也保有其他泛音列的頻率。有腳座玻璃杯可以想像為許多音叉共享同個柄所圍出的圓，兩叉會因對稱性而同時向外或向內振動，並且只要握住其中一叉，另一叉振動也會同時停止，而玻璃杯振動也符合對稱性，頻率之間皆有明確地倍數關係。

A 型玻璃杯因無腳座收斂，使得杯壁振動時能量較難傳到另一側的杯壁，進而傾向獨立的振動，如圍成圓圈的竹筒，其中一支振動，只能透過推擠其他竹枝和圓底座傳遞，間接讓對面的竹枝振動，因此玻璃杯的振動無法均勻，對稱性差的結果使頻率較紊亂，尤其在盛裝高水位時，有更多非倍數關係的頻率出現。

參考國外玻璃杯共振影片，見下頁(圖十八)，最明顯的振動形式為 $n=2$ ，因為玻璃杯口振動的對稱性，當玻璃杯受摩擦、敲擊或是受外部聲波共振，能量會分布至玻璃杯口產生振動，因杯口振動的對稱性，當一邊受到擠壓凹陷，另外兩邊被推擠而向外擴張，見下頁(圖十九)，並且牽動鄰邊(敲擊邊之對邊)向兩邊拉扯而凹陷，正因如此，所有的玻璃杯 $n=2$ 的響度遠大於其他泛音列(20 分貝以上)。另外玻璃杯在振動時要符合質心守恆，因玻璃杯不移動，要 n 為偶數才能符合質心不動，其中主要波形為 $n=2$ 。



(圖十八) 玻璃杯振動俯視圖(紅圈：未振動時口徑)。取自：Wine glass resonance in slow motion.



(圖十九) 玻璃杯振動側視圖(紅圈：振動時口徑)。取自：Wine glass resonance in slow motion.

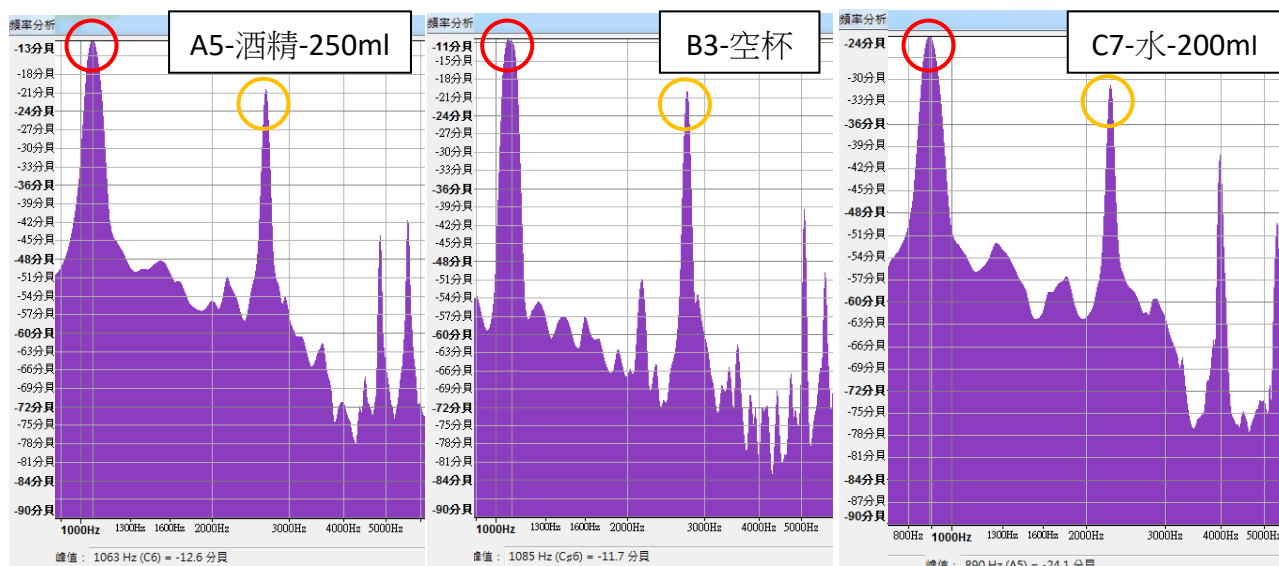
三、敲擊與摩擦玻璃杯聲音之探討

我們使用音叉槌敲擊玻璃杯之杯口地方，其主音($n=2$)頻率與用手摩擦的主音($n=2$)頻率數值幾乎一樣，如(表六)，可以說只要使玻璃杯產生振動，都會表現出其自然頻率($n=2$)，這也可以說明會有人以敲擊的方式演奏玻璃杯，如同小提琴可以用拉奏和彈奏的方式呈現。

表六 不同玻璃杯在不同液量下之自然頻率

杯號	液體-體積	頻率(Hz)	
		摩擦	敲擊
A1	酒精-30ml	2605	2605
A2	甘油-80ml	2019	2018
A3	水-50ml	1496	1496
A4	水-150ml	1527	1527
A5	酒精-250ml	1058	1057
B1	空杯	1528	1528
B2	甘油-150ml	1057	1057
B3	空杯	1086	1085
B4	酒精-120ml	1257	1258

杯號	液體-體積	頻率(Hz)	
		摩擦	敲擊
C1	水-100ml	1222	1222
C2	水-130ml	1364	1365
C3	水-40ml	1127	1127
C4	空杯	1321	1322
C5	水-270ml	669	669
C6	空杯	1694	1694
C7	水-200ml	890	890



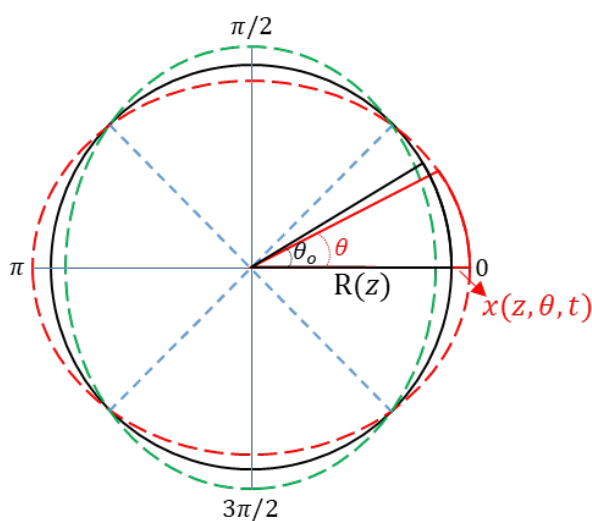
(圖二十) 使用音叉槌敲擊 A5(酒精-250ml)、B3(空杯)、C7(水-200ml)之頻譜

由(圖二十)也發現敲擊的頻譜 $n=4$ 響度只小於 $n=2$ 不到 10 分貝，比摩擦的聲音強度大超過 10 分貝以上，這也可以說明敲擊玻璃杯聽起來清脆且響亮，而用手摩擦玻璃杯聽起來柔和且圓潤。

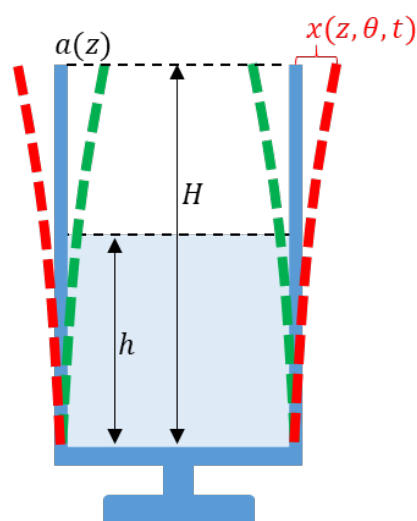
但敲擊的頻譜中也伴隨許多非整數倍的頻率，產生許多噪音，因此多半不適合做為樂器演奏，只有使用手摩擦才能產生較單純的倍頻關係，使之聽起來更為優美。

四、理論公式推導

因第(一)項的公式已有在參考文獻出現，我們只將重點呈現結論；第(二)項與第(三)項則參考《工程力學》及其他教學資源進行建模推導，我們會對此有較詳盡的探討。



(圖二十一) 玻璃杯振動俯視圖



(圖二十二) 玻璃杯振動側視剖面圖

(一) 玻璃杯盛裝液體頻率與空杯頻率之公式關係

玻璃杯的杯口會形成封閉的駐波，為 $n=1、2、3……$ 等組合，由各個玻璃杯的頻率數據特徵值和振動影片證明，主要的波形為 $n=2$ ，見上頁(圖二十一)。因此在此在 $\theta = 0(2\pi)、\frac{\pi}{2}、\pi、\frac{3\pi}{2}$ 形成波腹， $\theta = \frac{\pi}{4}、\frac{3\pi}{4}、\frac{5\pi}{4}、\frac{7\pi}{4}$ 形成節點；會在 $\theta = 0、\frac{\pi}{2}$ 以及 $\theta = \frac{\pi}{4}、\frac{3\pi}{4}$ 有四個對稱軸，繞行玻璃杯一周(2π)會經過兩次重複的波形，可以利用 $\cos 2\theta$ 表示圓周駐波的波動變化。因玻璃杯底部固定，上端為開放端，振幅會隨著 z 軸而增加，見上頁(圖二十二)，以函數 $f(z)$ 隨著時間進行來回振動，在裝有液體下其振動角速度為 ω ，可以將玻璃杯不同位置的振動位移量 $x(z, \theta, t)$ 表示成：

$$x(z, \theta, t) = x_0 f(z) \cos 2\theta \cos \omega t \dots \dots (1)$$

玻璃上的質點運動可拆成垂直於玻璃面的法線速度 v_{\perp} 及平行於玻璃面的切線速度 v_{\parallel} ：

$$v_{\perp} = -\omega x_0 f(z) \cos 2\theta \sin \omega t \dots \dots (2)$$

$$v_{\parallel} = \frac{1}{2} \omega x_0 f(z) \sin 2\theta \sin \omega t \dots \dots (3)$$

液體會透過玻璃杯的振動產生速度，其法線速度係數 σ_{\perp} 及切線速度係數 σ_{\parallel} 與半徑成正比關係，並且在半徑 R 與玻璃的速度分量成 α_{\perp} 和 α_{\parallel} 比例關係：

$$\sigma_{\perp} = \alpha_{\perp} \frac{r}{R} x_0 f(z) \cos 2\theta \cos \omega t \dots \dots (4)$$

$$\sigma_{\parallel} = \alpha_{\parallel} \frac{r}{R} x_0 f(z) \sin 2\theta \cos \omega t \dots \dots (5)$$

將結構簡化成圓柱形的玻璃杯，半徑與厚度固定 ($R(z) = R, a(z) = a$)，透過振動動能以及位能守恆關係，得出液高與頻率函數關係：

$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha \rho_l R \int_0^h [f(z)]^2 dz}{5 \rho_g a \int_0^H [f(z)]^2 dz} \dots \dots (6)$$

其中 v_0 為空杯頻率， v 為裝有液體頻率， H 為玻璃杯高度， h 為液體高度， ρ_l 為液體密度， ρ_g 為玻璃密度，且係數 $\alpha = \alpha_{\perp}^2 + \alpha_{\parallel}^2$ 。

在實驗可以發現液面高度 h 越高，裝有液體頻率 ν 也會越低，從此公式(6)的

$(\frac{\nu_0}{\nu})^2$ 也會越大，因此 $\int_0^h [f(z)]^2 dz$ 隨著液高而增大，且呈現遞增趨勢。

(二) 玻璃杯壁的彎曲應力

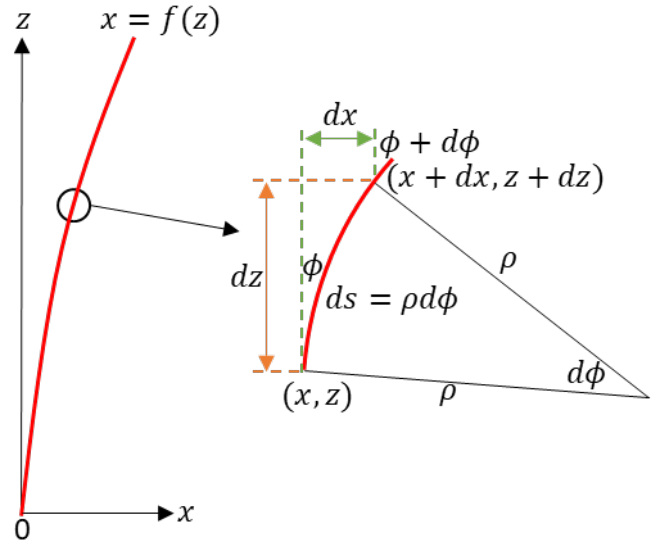
1. 杯壁之彎曲曲率半徑 ρ

要解出 $f(z)$ ，需確切討論振動情形，玻璃壁會從原本的 z 軸上向 x 方向位移(圖二十三)，並且切線方向與 z 軸夾 ϕ 角。

因 ϕ 角非常小，正切函數

$\tan\phi \approx \phi$ ，因此可表示成：

$$\frac{dx}{dz} = \tan\phi(z) \approx \phi(z) \dots \dots (7)$$



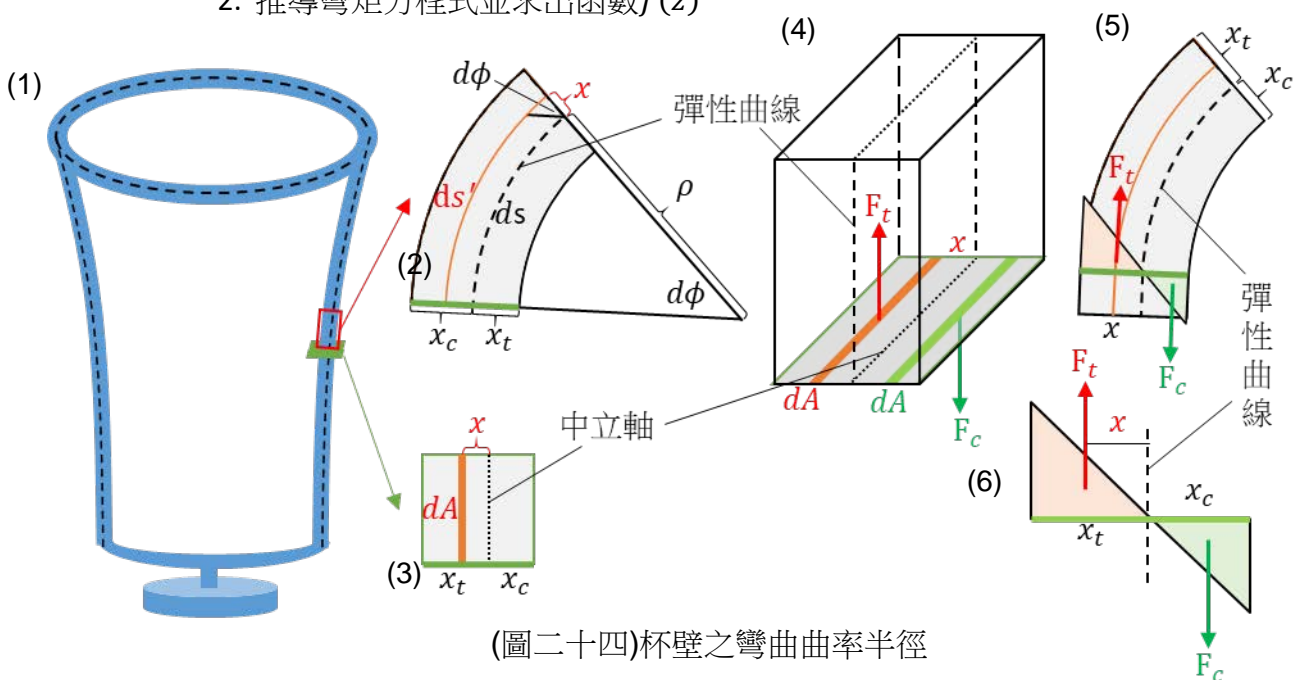
(圖二十三)杯壁之彎曲曲率半徑

另外曲率 \mathcal{K} 定義為 $\mathcal{K} = \frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds}$ (ρ 為曲率半徑， s 為弧長)，並且在微量下

$ds \approx dz$ ，經置換得出半徑 ρ 在座標的關係：

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\rho} = \frac{d\phi(z)}{ds} \approx \frac{d\phi(z)}{dz} = \frac{d(\frac{dx}{dz})}{dz} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d^2x}{dz^2} \dots \dots (8)$$

2. 推導彎矩方程式並求出函數 $f(z)$



(圖二十四)杯壁之彎曲曲率半徑

當玻璃壁受到 x 方向的負荷後產生彎曲，左半部會伸長，右半部收縮，而在玻璃內部，恰有一不收縮或伸長的截面，稱之為中立面。中立面與玻璃橫切面($r - \theta$ 截面)的交界線，稱之為中立軸，如(圖二十四)-(3), (4)；中立面與玻璃與縱切面(z 軸上的截面)的交界線，稱之為彈性曲線，如(圖二十四)-(2), (4)。

見(圖二十四)-(2)，在 z 軸上的截面，定義彈性曲線 $x = 0$ ，中立面兩側的單位伸長或是壓縮量 ε 表示：

$$\varepsilon(x) = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(\rho + x)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = \frac{x}{\rho} \dots \dots (9)$$

因此得到彎曲應力 σ ：

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{x}{\rho} \dots \dots (10)$$

由此可知，彎曲應力 σ 與彈性曲線距離為正比關係，並且在橫切面 x 位置得出在面積 dA 的總力，其中拉伸應力合 $F_{t,x}$ 及壓縮應力合 $F_{c,x}$ ，(圖二十四)-(4), (5)：

$$F_{t,x} = \frac{E}{\rho} \int_L x dA ; F_{c,x} = \frac{E}{\rho} \int_R x dA \dots \dots (11)$$

見(圖二十四)-(4), (5)，對於中立軸的諸彎曲應力的力矩合(彎矩) M 可表示：

$$M = F_c x + F_t x = \frac{E}{\rho} \int_L x^2 dA + \frac{E}{\rho} \int_R x^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A x^2 dA \dots \dots (12)$$

我們可以將縱截面對中立軸之慣性矩表示為 I ，則將 $I = \int_A x^2 dA$ 代入，並且在彎矩和慣性矩在 z 軸方向可表示為：

$$M(z) = \frac{EI(z)}{\rho} \dots \dots (13)$$

將(8)式與(13)式結合，可以寫成：

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI(z)} \dots \dots (14)$$

並且將(14)式做積分後，並且假設慣性矩 I 為常數，可以得到：

$$f(z) = x = \frac{1}{EI} \int_0^z \int_0^z M(z) dz dz \dots \dots (15)$$

(三) 玻璃杯振動時所受負荷情形之猜想

1. 假設一：集中負荷(concentrated load)，(圖二十五)

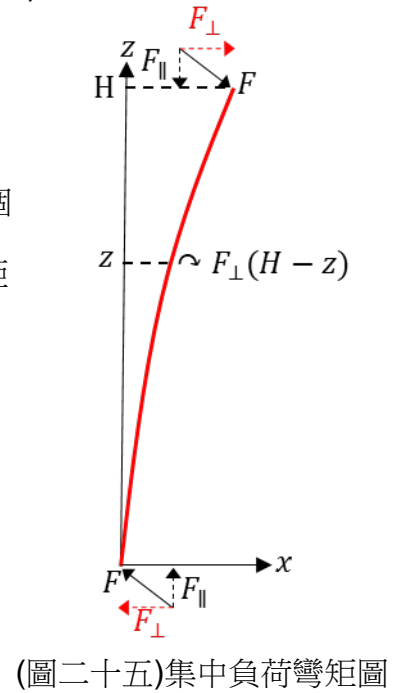
猜想玻璃杯口摩擦或敲擊，屬於一端受力的「集中負荷」的情形，並使玻璃壁產生來回振動。

當外力施加於玻璃杯口，因合力為0，杯底會一個大小相同、方向相反的力作抵銷。另外在位置z的彎矩M(z)可以表示為：

$$M(z) = F_{\perp}(H - z) \dots \dots (16)$$

(16)式代入(15)式，可以得出函數f(z)：

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{EI} \int_0^z \int_0^z (F_{\perp}H - F_{\perp}z) dzdz \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{F_{\perp}Hz^2}{2} - \frac{F_{\perp}z^3}{6} + \mathcal{A}z + \mathcal{B} \right) \dots \dots (17) \end{aligned}$$



(圖二十五)集中負荷彎矩圖

起始值(x, z)座標為(0,0)，並且θ為0，因此得出A = B = 0，即：

$$(x, z) = (0,0) \Rightarrow \mathcal{B} = 0$$

$$\theta(z) = \theta(0) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dz} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0$$

最後得出：

$$f(z) = \frac{F_{\perp}}{2EI} \left(Hz^2 - \frac{z^3}{3} \right) \dots \dots (18)$$

因此可得出：

$$\begin{aligned} \int_0^H [f(z)]^2 dz &= \left(\frac{F_{\perp}}{EI} \right)^2 \int_0^H \left(\frac{H^2}{4} z^4 - \frac{H}{6} z^5 + \frac{1}{36} z^6 \right) dz \\ &= \left(\frac{F_{\perp}}{EI} \right)^2 \left(\frac{H^2}{20} H^5 - \frac{H}{36} H^6 + \frac{1}{252} H^7 \right) = \frac{71}{2520} \left(\frac{F_{\perp}}{EI} \right)^2 H^7 \dots \dots (19) \end{aligned}$$

$$\int_0^h [f(z)]^2 dz = \frac{1}{2050} \left(\frac{F_{\perp}}{EI} \right)^2 (126H^2h^5 - 70Hh^6 + 10h^7) \dots \dots (20)$$

(19)式與(20)式代入(6)式，得到最終的結果：

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 &= 1 + \frac{\alpha}{71} \frac{\rho_l R}{\rho_g a} \left[126 \left(\frac{h}{H} \right)^5 - 70 \left(\frac{h}{H} \right)^6 + 10 \left(\frac{h}{H} \right)^7 \right] \\ &= 1 + \frac{\alpha}{71} \frac{\rho_l R}{\rho_g a} \left(\frac{h}{H} \right)^5 \left[126 - 70 \left(\frac{h}{H} \right) + 10 \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right] \dots \dots (21) \end{aligned}$$

我們定義 $f_1\left(\frac{h}{H}\right)$ 函數：

$$f_1\left(\frac{h}{H}\right) = \frac{1}{71}\left(\frac{h}{H}\right)^5 [126 - 70\left(\frac{h}{H}\right) + 10\left(\frac{h}{H}\right)^2] \dots \dots (22)$$

斜率 m_1 為：

$$m_1 = \alpha \frac{\rho_l R}{\rho_g a}$$

則公式一為：

$$\left(\frac{v_o}{v}\right)^2 - 1 = m_1 f_1\left(\frac{h}{H}\right) \dots \dots (23)$$

2. 假設二：均布負荷(uniformly distributed load)，(圖二十六)

不管玻璃杯受局部摩擦或敲擊，雖然看似一點受力的「集中負荷」的情形，但能量會透過介質分布至玻璃杯整體並產生振動，外壁受能量所轉換的運動等同於在「均布負荷」下所受的彎曲振動。

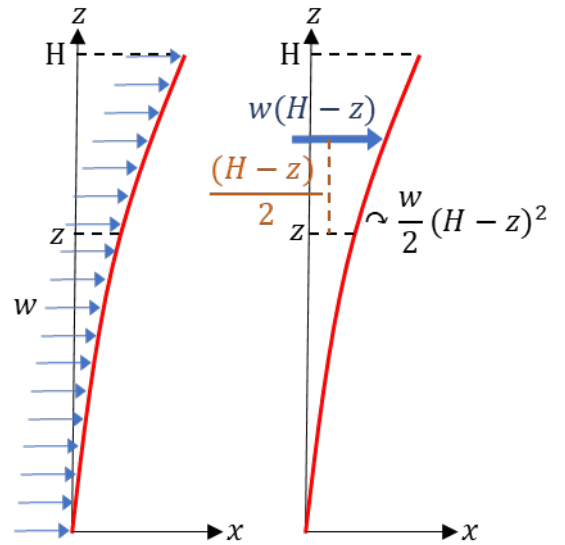
假設玻璃杯振動時屬於均布負荷 $w(N/m)$ ，當 $z - H$ 區間的等效集中負荷為 $w(H - z)$ ，並對位置 z 的力臂為 $\frac{(H-z)}{2}$ ，則在位置 z 的彎矩 $M(z)$ 表示為：

$$M(z) = \frac{w}{2}(H - z)^2 \dots \dots (24)$$

(24)式代入(15)式，可以得出函數 $f(z)$ ：

$$f(z) = \frac{1}{EI} \int_0^z \int_0^z \frac{w}{2}(H - z)^2 dz dz$$

$$= \frac{w}{EI} \left(\frac{z^4}{24} - \frac{H}{6}z^3 + \frac{H^2}{4}z^2 + Cz + D \right) \dots \dots (25)$$



(圖二十六) 均布負荷彎矩圖

起始值 (x, z) 座標為 $(0,0)$ ，並且 θ 為 0 ，因此得出 $C = D = 0$ ，即：

$$(x, z) = (0,0) \Rightarrow D = 0$$

$$\theta(z) = \theta(0) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dz} = 0 \Rightarrow C = 0$$

最後得出：

$$f(z) = \frac{w}{24EI} (z^4 - 4Hz^3 + 6H^2z^2) \dots \dots (26)$$

因此可得出 $[f(z)]^2$ ：

$$[f(z)]^2 = \frac{w^2}{576E^2I^2} (36H^4z^4 - 48H^3z^5 + 28H^2z^6 - 8Hz^7 + z^8) \dots \dots (27)$$

並且透過(27)式，得出在位置 H 及 h 的積分：

$$\begin{aligned} \int_0^H [f(z)]^2 dz &= \frac{w^2}{576E^2I^2} \left(\frac{36}{5} H^4 H^5 - 8H^3 H^6 + 4H^2 H^7 - H H^8 + \frac{H^9}{9} \right) \\ &= \frac{w^2}{576E^2I^2} \frac{104}{45} H^9 \dots \dots (28) \end{aligned}$$

$$\int_0^h [f(z)]^2 dz = \frac{w^2}{576E^2I^2} \left(\frac{36}{5} H^4 h^5 - 8H^3 h^6 + 4H^2 h^7 - H h^8 + \frac{h^9}{9} \right) \dots \dots (29)$$

(28)式與(29)式代入(6)式，得到最終的結果：

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_o}{v}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{\alpha}{185} \frac{\rho_l R}{\rho_g a}\right) \frac{45}{104} \left[\frac{36}{5} \left(\frac{h}{H}\right)^5 - 8\left(\frac{h}{H}\right)^6 + 4\left(\frac{h}{H}\right)^7 - \left(\frac{h}{H}\right)^8 + \frac{1}{9} \left(\frac{h}{H}\right)^9 \right] \\ &= 1 + \left(\frac{5\alpha}{3848} \frac{\rho_l R}{\rho_g a}\right) \left(\frac{h}{H}\right)^5 \left[\frac{36}{5} - 8\frac{h}{H} + 4\left(\frac{h}{H}\right)^2 - \left(\frac{h}{H}\right)^3 + \frac{1}{9} \left(\frac{h}{H}\right)^4 \right] \dots \dots (30) \end{aligned}$$

我們定義 $f_2\left(\frac{h}{H}\right)$ 函數：

$$f_2\left(\frac{h}{H}\right) = \frac{5}{3848} \left(\frac{h}{H}\right)^5 \left[\frac{36}{5} - 8\frac{h}{H} + 4\left(\frac{h}{H}\right)^2 - \left(\frac{h}{H}\right)^3 + \frac{1}{9} \left(\frac{h}{H}\right)^4 \right] \dots \dots (31)$$

斜率 m_2 為：

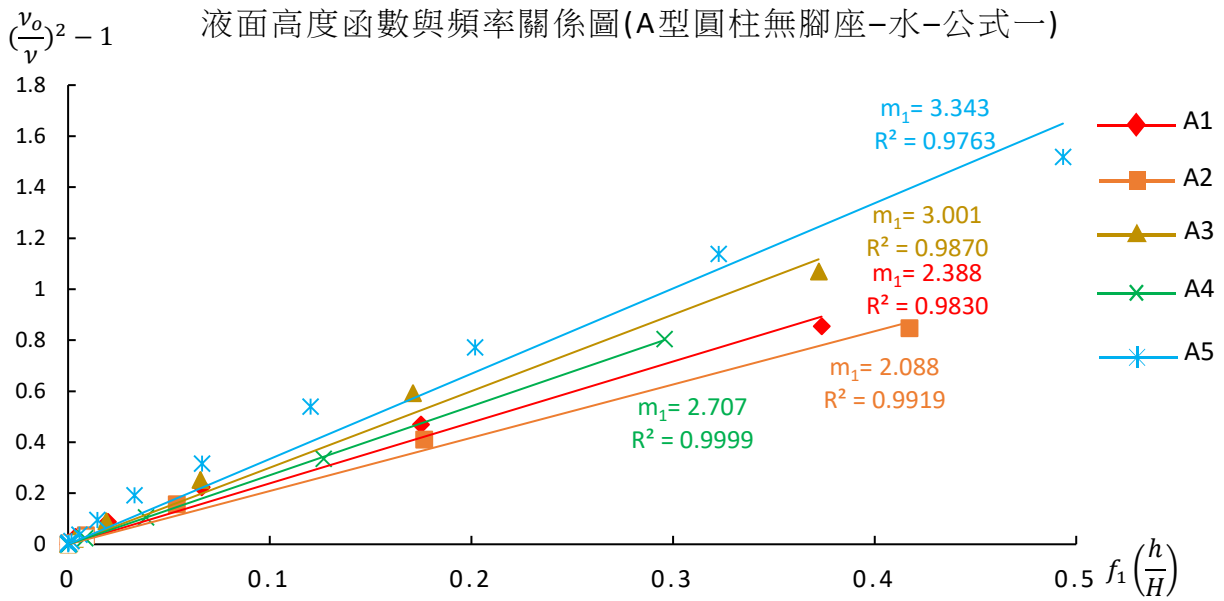
$$m_2 = \alpha \frac{\rho_l R}{\rho_g a}$$

則公式二為：

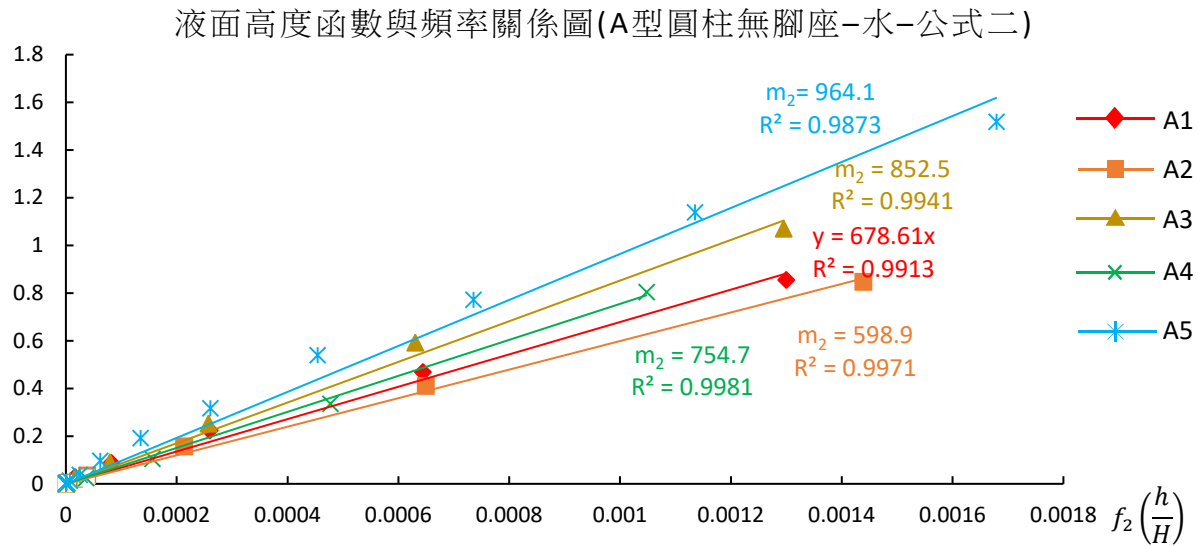
$$\left(\frac{v_o}{v}\right)^2 - 1 = m_2 f_2\left(\frac{h}{H}\right) \dots \dots (32)$$

五、實驗驗證

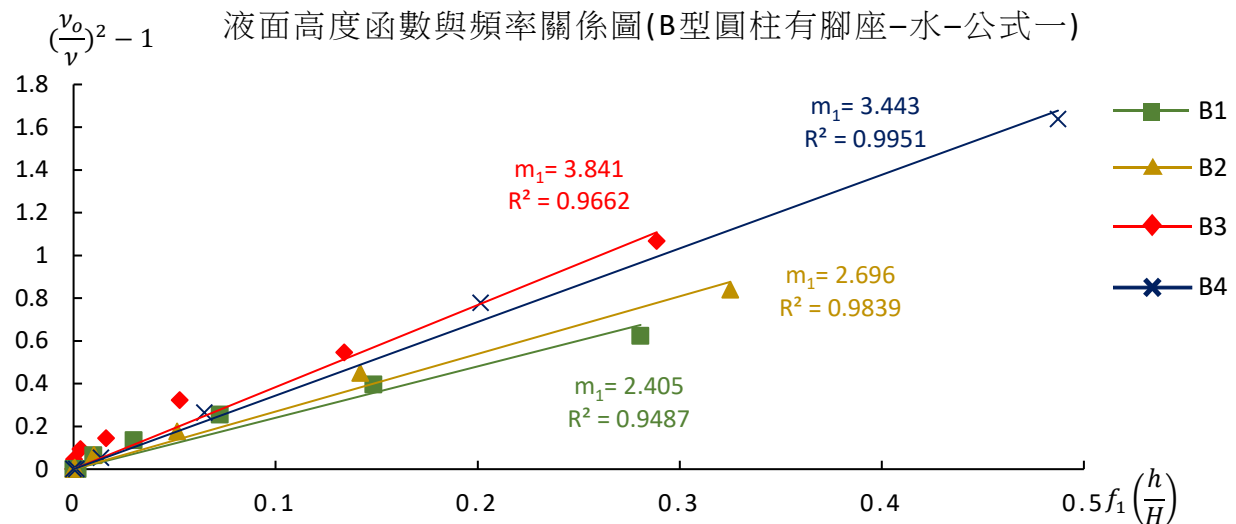
將實驗數據依據公式一及公式二形式，帶入驗證，觀察是否符合，結果如下頁(圖二十七)至圖(三十)。



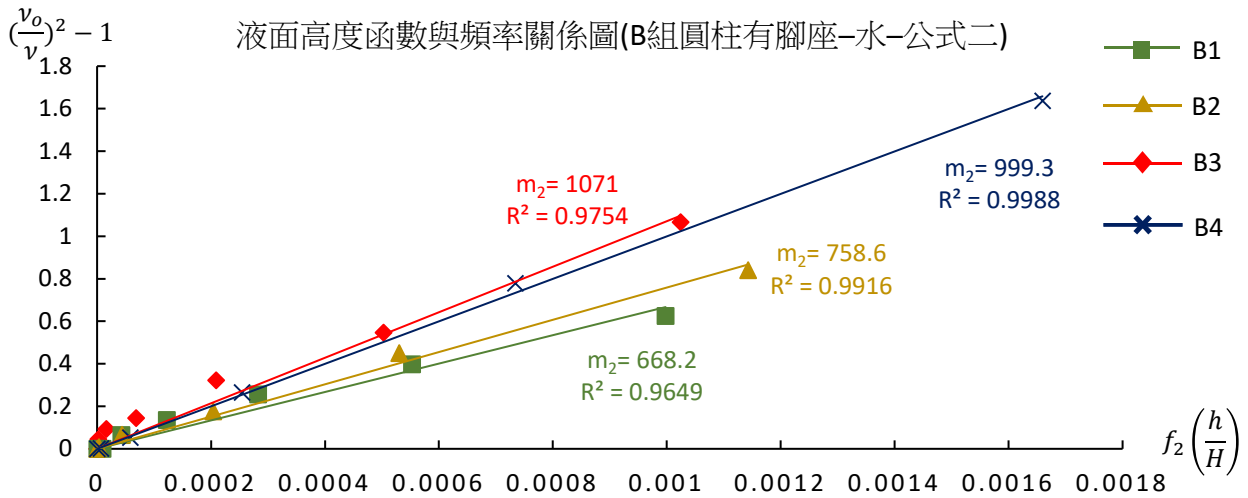
(圖二十七) 液面高度函數與頻率關係圖(A型圓柱無腳座-水-公式一)



(圖二十八) 液面高度函數與頻率關係圖(A型圓柱無腳座-水-公式二)



(圖二十九) 液面高度函數與頻率關係圖(B型圓柱有腳座-水-公式一)

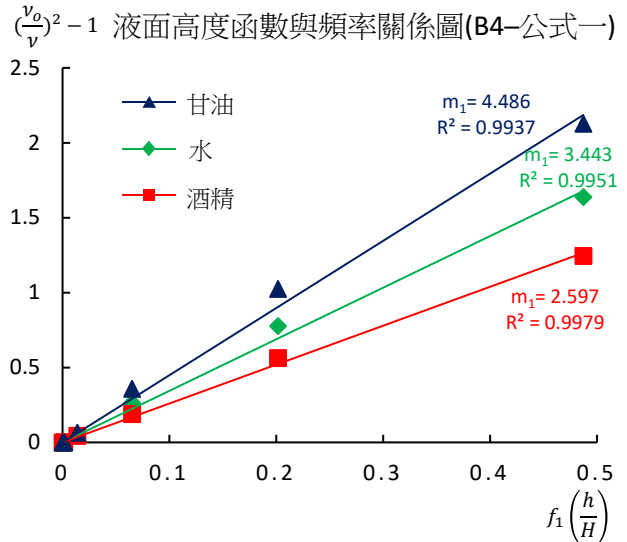
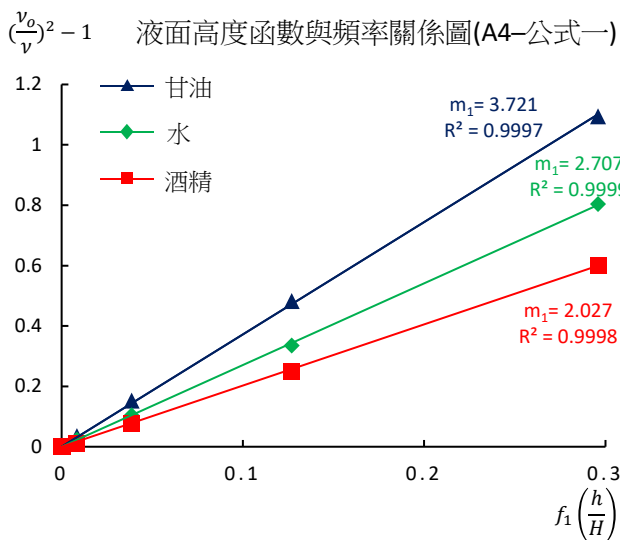


(圖三十) 液面高度函數與頻率關係圖(B 型圓柱有腳座-水-公式二)

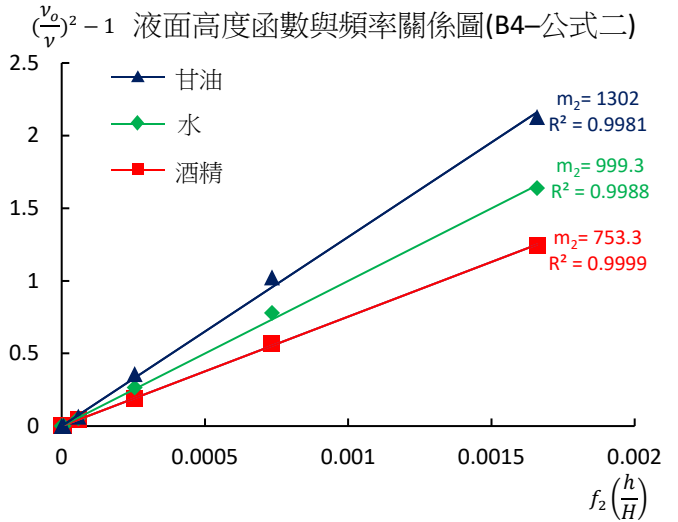
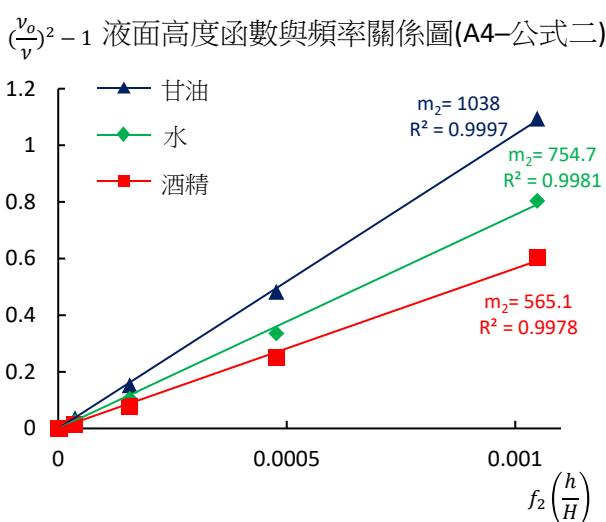
表七 公式一、公式二之斜率與 R^2 (A 型、B 型-水、酒精、甘油)

公式一		$(\frac{v_o}{v})^2 - 1 = \frac{m_1}{71} (\frac{h}{H})^5 [126 - 70(\frac{h}{H}) + 10(\frac{h}{H})^2], m_1 = \alpha \frac{\rho_l R}{\rho_g a}$								
杯號	數值	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4
水	R^2	0.9830	0.9919	0.9870	0.9999	0.9763	0.9487	0.9839	0.9662	0.9951
	m_1	2.388	2.088	3.001	2.707	3.343	2.405	2.696	3.841	3.443
酒精	R^2	0.9842	0.9950	0.9928	0.9998	0.9800	0.9809	0.9824	0.9431	0.9979
	m_1	1.840	1.589	2.290	2.027	2.575	0.5239	2.120	3.052	2.597
甘油	R^2	0.9820	0.9927	0.9870	0.9997	0.9768	0.9708	0.9861	0.9689	0.9937
	m_1	3.090	2.688	4.035	3.721	4.466	3.143	3.452	4.905	4.486
公式二		$(\frac{v_o}{v})^2 - 1 = \frac{5m_2}{3848} (\frac{h}{H})^5 [\frac{36}{5} - 8\frac{h}{H} + 4(\frac{h}{H})^2 - (\frac{h}{H})^3 + \frac{1}{9}(\frac{h}{H})^4], m_2 = \alpha \frac{\rho_l R}{\rho_g a}$								
杯號	數值	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4
水	R^2	0.9913	0.9971	0.9941	0.9981	0.9873	0.9649	0.9916	0.9204	0.9988
	m_2	678.6	598.9	852.5	754.7	964.1	668.2	758.6	1071	999.3
酒精	R^2	0.9921	0.9984	0.9975	0.9978	0.9900	0.9882	0.9908	0.9564	0.9999
	m_2	522.7	455.7	650.0	565.1	743.6	523.4	596.7	851.8	753.3
甘油	R^2	0.9905	0.9973	0.9941	0.9997	0.9877	0.9478	0.9933	0.9787	0.9981
	m_2	878.3	770.9	1146	1038	1288	872.5	971.3	1337	1302

由數據可發現，(圖二十七)~(圖三十)、(表七)，公式一的「集中負荷」與公式二的「均布負荷」都能符合實驗結果。



(圖三十一) 液面高度函數與頻率關係圖(A4 圓柱有腳座(左)、B4 圓柱無腳座(右)-公式一)



(圖三十二) 液面高度函數與頻率關係圖(A4 圓柱有腳座(左)、B4 圓柱無腳座(右)-公式二)

設 α 係數在各液體相似，從實驗數據可以驗證公式一與公式二，液體密度越大所得出斜率也越大($m_2 \propto \rho_l$, $\rho_{\text{水}}=1.00\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$; $\rho_{\text{酒精}}=0.80\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$; $\rho_{\text{甘油}}=1.26\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)，也可以知道密度越大，所具有的動能越大，因此使玻璃杯的振動頻率下降。

因為無法從相關係數判斷哪個公式正確，所以只能透過 α 係數判斷公式的正確性：

$$m = \alpha \frac{\rho_l R}{\rho_g a} \rightarrow \alpha = \frac{\rho_g a}{\rho_l R} m, (m = m_1 \text{ or } m_2; \alpha = \alpha_{\perp}^2 + \alpha_{\parallel}^2)$$

表八 公式一與公式二在 A、B 型玻璃杯所對應液體之 α 值

杯號		A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4
	$\rho_g(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	2.32	2.42	2.35	2.38	2.31	2.34	2.34	2.38	2.38
	R(mm)	33.55	28.45	30.69	28.13	36.56	47.25	37.76	36.83	22.14
	a(mm)	1.950	3.300	2.660	1.725	2.040	1.700	2.040	1.817	1.165
公式一	水 α	0.322	0.391	0.381	0.395	0.431	0.202	0.341	0.451	0.413
	酒精 α	0.310	0.372	0.364	0.370	0.415	0.055	0.335	0.448	0.390
	甘油 α	0.331	0.427	0.407	0.431	0.457	0.210	0.346	0.457	0.427
公式二	水 α	91.5	112	108	110	124	56.3	95.9	126	120
	酒精 α	88.1	107	103	103	120	55.1	94.3	125	113
	甘油 α	94.0	114	116	120	132	58.3	97.5	143	124

依照物理的合理性，液體的運動速度應小於玻璃的振動速度，因為 $\alpha_{\perp} < 1$ ， $\alpha_{\parallel} < 1$ ，所以 $\alpha < 2$ 。公式二之 α 值遠大於2，公式一之 α 值皆小於2，因此我們可以判定公式一的「集中負荷」為正確的猜想。

從公式一可知 α 值與液體的黏度有關， α 值甘油最大；而黏度也是甘油最大(甘油黏度=1.2Pa·s，水黏度=8.9x10⁻⁴ Pa·s，酒精黏度=1.2x10⁻³ Pa·s)。其中黏度與玻璃的水平杯壁運動 v_{\parallel} 的牽引有關，黏度越大， α_{\parallel} 越大，液體水平速度也越大。但從實驗結果發現，甘油黏度為水或酒精的 1000 倍以上，但是 α 值差距最大也不超過 0.03，主要原因：

(一) 玻璃杯主要振動為垂直杯壁方向運動，從(2)式及(3)式，可以知道垂直杯壁速度

的極值 $v_{\perp} = \frac{ds_{\perp}}{dt}$ 為水平杯壁速度的極值 $v_{\parallel} = \frac{ds_{\parallel}}{dt}$ 的 2 倍。

(二) 垂直杯壁運動 v_{\perp} 可透過推擠使液體運動，因此為主要傳遞液體運動的形式。

故 $\alpha_{\perp} > \alpha_{\parallel}$ ，且 $\alpha_{\parallel}^2 < \frac{\alpha}{2}$ ，又 $\alpha_{\perp} = \sqrt{\alpha - \alpha_{\parallel}^2}$ ，由此可得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\alpha} < \alpha_{\perp} < \sqrt{\alpha}$ 。如果只考慮垂直速度係數 α_{\perp} ，其 α_{\perp} 範圍呈現於(表九)：

表九 A、B 組液體公式一之係數 α_{\perp}

液體	數值	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4
水 α_{\perp}	$\sqrt{\alpha}$	0.567	0.625	0.618	0.629	0.656	0.450	0.584	0.671	0.643
	$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$	0.401	0.442	0.437	0.444	0.464	0.318	0.413	0.475	0.455
酒精 α_{\perp}	$\sqrt{\alpha}$	0.557	0.610	0.603	0.608	0.644	0.235	0.579	0.669	0.624
	$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$	0.394	0.431	0.427	0.430	0.455	0.166	0.409	0.473	0.441
甘油 α_{\perp}	$\sqrt{\alpha}$	0.575	0.654	0.638	0.657	0.676	0.458	0.589	0.676	0.654
	$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$	0.407	0.462	0.451	0.464	0.478	0.324	0.416	0.478	0.462

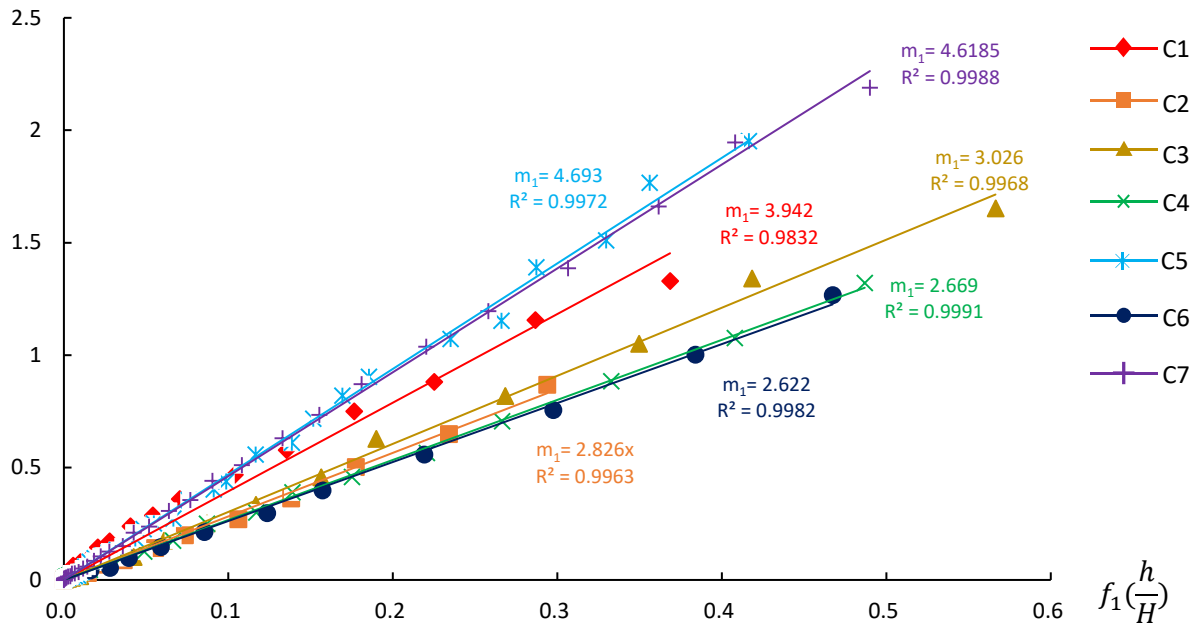
此外將不同形狀的高腳杯(C 型)數據也帶入公式一，發現也高度吻合，見(圖三十三)。為何圓柱的推導公式竟然可以與不規則形狀的玻璃杯數據吻合呢？我們認為可能原因有以下三點：

- (一) 普遍玻璃杯腳座半徑較窄，到 $\frac{h}{H} = 0.4$ 以上則較大且趨於一致(圖三十三)。
- (二) 厚度只有腳座往上一開始較厚， $\frac{h}{H} = 0.4$ 之後則較薄且趨於一致(圖三十四)。
- (三) 因為公式的第一項為 $(\frac{h}{H})^5$ ，見(表十)，在 $\frac{h}{H} = 0.4$ 時，由於 a 、 R 的變動造成的誤差也只有 1%；同樣在 $\frac{h}{H} = 0.5$ 時所造成的誤差也只增加到 3%，因此玻璃杯高度一半下的形狀厚度誤差不太影響實驗結果。

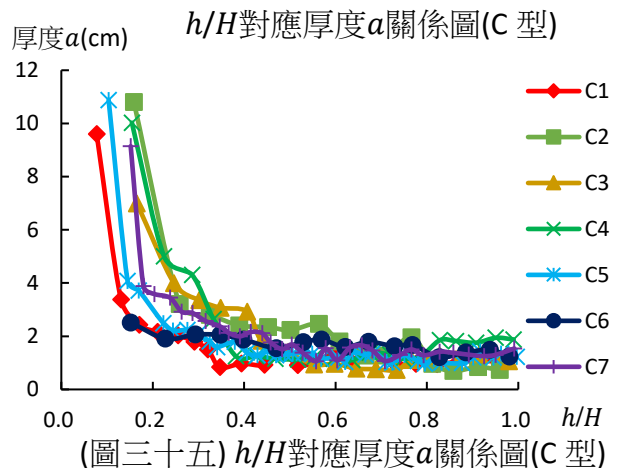
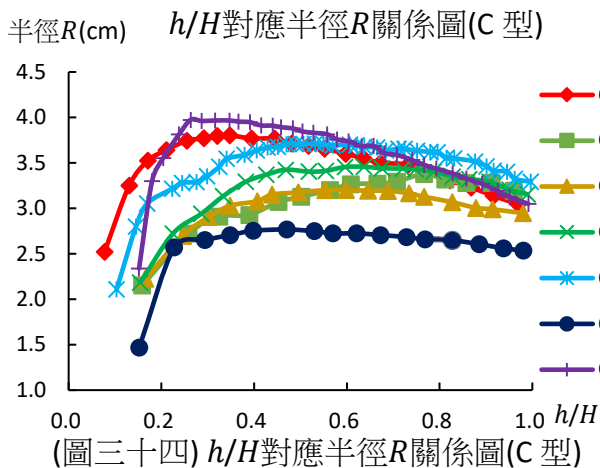
表十 $\frac{h}{H} < 1$ 時所對應 $(\frac{h}{H})^5$ 的值

$\frac{h}{H}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$(\frac{h}{H})^5$	10^{-5}	3×10^{-4}	2×10^{-3}	10^{-2}	3×10^{-2}	8×10^{-2}	0.17	0.33	0.59

$(\frac{v_0}{v})^2 - 1$ 液面高度函數與頻率關係圖(C組不規則形有腳座-水-公式一)



(圖三十三) 液面高度函數與頻率關係圖(C組不規則形有腳座-水-公式一)



因C型玻璃杯形狀上下口徑不一且厚度不一致，採取每加上 10ml 的水得出所對應的半徑($R = \frac{R_o + R_i}{2}$)及厚度($a = R_o - R_i$)，並求出平均半徑 R_{ave} 及平均 a_{ave} 厚度，並算出公式一水的 α 值，見下頁(表十一)，發現 α 皆小於2，驗證公式一集中負荷：一端受力情形，符合水量與頻率的關係式。

表十一 公式一在 C 型玻璃杯所對應水之 α 值

杯號	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
$\rho_g(\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$	2.55	2.42	2.47	2.47	2.38	2.55	2.37
$R_{\text{ave}}(\text{mm})$	33.12	28.71	27.59	29.71	33.13	24.02	34.33
$a_{\text{ave}}(\text{mm})$	1.879	1.737	1.661	1.786	1.874	1.427	1.871
水 α	0.534	0.455	0.474	0.455	0.562	0.445	0.546

陸、結論

- 一、無腳座玻璃杯之泛音列符合 $n=1, 2, 3\dots$ ，且聲音頻譜有其他非泛音列的頻率出現；有腳座玻璃杯之泛音列符合 $n=2, 4, 6\dots$ ，且聲音頻譜無其他非泛音列的頻率出現。
- 二、腳座可讓玻璃杯有更穩定地振動，形成聲音更圓潤，頻譜上也清楚呈現特徵頻率。
- 三、手摩擦所有玻璃杯主音皆為 $n=2$ ，且強度大於其他泛音百倍以上，視為純音樂器。
- 四、敲擊杯口與摩擦杯口的主音($n=2$)頻率相同，但產生許多雜音，不適合作為樂器。
- 五、玻璃杯振動屬於一端受力的「集中負荷」情形，其液高與頻率函數可表示為：

$$\left(\frac{v_o}{v}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{71} \frac{\rho_l R}{\rho_g a} \left(\frac{h}{H}\right)^5 [126 - 70\left(\frac{h}{H}\right) + 10\left(\frac{h}{H}\right)^2]$$

- 六、玻璃杯的垂直杯壁運動 v_{\perp} 為主要傳遞液體運動的形式；水平杯壁運動 v_{\parallel} 與黏度有關，黏度越大，切線速度係數 α_{\parallel} 也越大。

柒、未來展望

- 一、未來可以推導玻璃杯振動時的位能(U)公式，並找出玻璃杯物理量與自然頻率之關係式，並且以每次選擇一種操縱變因(如高度、半徑、厚度)進行實驗。
- 二、未來可用黏滯係數(吸附力以及內聚力)探討不同液體之 α 值或修正液體動能公式。

捌、參考文獻資料

- 一、「音響知識」為啥功放上的音量控制的 dB 數會出現負的？(2019)。每日頭條。

取自：<https://kknews.cc/digital/rl6x9rn.html>

- 二、王栢村(2019)。如何計算質塊彈簧系統的「自然頻率」。Youtube 王栢村。
取自：<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=g49RIJcfsf0>
- 三、官大為(2015)。一次搞懂「泛音列」。好和絃。
取自：<https://www.youtube.com/watch?v=0iJmDhNocaQ>
- 四、阻尼振盪。
取自：<http://ezphysics.nchu.edu.tw/prophys/basicexp/expnote/damping/exp8.pdf>
- 五、泛音(2019)。Wikipedia。
取自：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B3%9B%E9%9F%B3>
- 六、泛音列(2021)。Wikipedia。
取自：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B3%9B%E9%9F%B3%E5%88%97>
- 七、沈子耕、盧政良、高執貴(2017)。波濤洶湧的酒杯—玻璃杯共振之研究中華民國第57屆中小學科學展覽會作品說明書。
取自：<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/051817.pdf>
- 八、高仲仁、莊翔宇、孫以澤(2017)。沒想到玻璃也可以—奇妙的聲與波。2017 全國科學探究競賽—這樣教我就懂 國中組、高中職組。取自：<http://sciexplore2017.colife.org.tw/Upload/%E5%A5%87%E5%A6%99%E7%9A%84%E6%B3%A2%E8%88%87%E8%81%B2-2234cdf8-66c5-424f-b764-c6bb8fe85d68-20170410103755933.pdf>
- 九、黃澗瑩、蕭宇岑、梁沛如。聽酒杯在唱歌—濃度與聲音頻率關係之探討。
取自：<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/59/pdf/NPHSF2019-030108.pdf>
- 十、黏度。Wikipedia。取自：<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%BB%8F%E5%BA%A6>
- 十一、聲音的特性和分貝標度。香港特別行政區政府環境保護署。取自：
https://www.epd.gov.hk/epd/noise_education/web/CHI_EPD_HTML/m1/intro_5.html
- 十二、A.P. French .(1982).A study of wineglass acoustics。
取自：<https://www.nikhef.nl/~h73/tgo/praktgeluid/French1983.pdf>
- 十三、Bryce Jared McGee.(2019)。樑之應力。全華圖書。
取自：<https://slidesplayer.com/slide/16731909/>

十四、Drum vibration animations(2019). Wikimedia Commons.

取自：https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Drum_vibration_animations

十五、Erikoui (2021) .The Formula Behind all of Structural Engineering: Euler-Bernoulli Bending

from First Principles.取自：<https://www.youtube.com/watch?v=S7zYcRtLMBc&t=425s>

十六、Eugenia Montgomery (2019)。樑之應力。龍騰文化。

取自：<https://slidesplayer.com/slide/16460833/>

十七、Good Vibrations with Freeball (2016).Transverse Vibration Analysis of an Euler-Bernoulli

Beam (Continuous System). 取自：<https://www.youtube.com/watch?v=3R8q3becNvg>

十八、Marty33 (2009). Wine glass resonance in slow motion.

取自：<https://www.youtube.com/watch?v=BE827gwnnk4>

十九、Sourceforge (2020). Audacity. 取自：<https://sourceforge.net/projects/audacity/>

二十、Tassew tera (2019). Beams Simple Beam Theory, Derivation of Euler Bernoulli and Bending Stress Formulae. YouTube.

取自：<https://www.youtube.com/watch?v=IU5gZK51Eo4&t=352s>

二十一、Thomas Guignard(2002). Tuning of Musical Glasses. Signal and Information Processing Laboratory.

取自：http://www.glassarmonica.com/media/resources/dipl_93.pdf

二十二、Tuning Fork Modes Georgia State University.

取自：<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Music/tunfor.html#c1>

二十三、Wikiland Euler–Bernoulli beam theory.

取自：https://www.wikiwand.com/en/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory

二十四、Young's Modulus, Bar Vibrational Modes, Clamped Bar Modes.

Department of Physics and Astronomy.

取自：<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>

二十五、Zfang(2019). [聲音影片]玻璃杯與水晶音樂。精讚。取自：

<http://n.sfs.tw/content/index/11966>

【評語】 030116

1. 作品探究玻璃杯壁與液體間產生頻率原因雖非新穎題材，但團隊透過實驗設計呈現具研究價值作品。
2. 作品理論推導合理，實驗設計完整且數據豐富，結論具說服力。
3. 研究方法適切且研究內容完整。

作品簡報

與頻率共舞——

探討玻璃杯內不同液量之頻率變化

組別：國中組
科別：物理科

引導動機

1. 為何要使用有腳座的玻璃杯演奏？
2. 為何是使用摩擦而較少敲擊演奏？
3. 探討液量與頻率的關係？
4. 透過建模推導出公式。

文獻探討

1. 玻璃杯液體加越多，頻率越低；盛裝同體積的液體，濃度越大(質量越大)，頻率越低。
2. 兩種不同公式，頻率變化與液高的數學關係：
 - (1) 第一篇透過聲壓找出頻率經驗公式。
 - (2) 第二篇透過理論近似擬合出頻率公式。
3. 用有腳座玻璃杯進行實驗分析。
4. 以摩擦或外部聲波振動進行實驗分析。

研究貢獻

1. 使用不同液體進行聲音頻率的實驗。
2. 加入有腳座與無腳座玻璃杯振動模型比較。
3. 加入摩擦與敲擊振動模型比較。
4. 透過理論推導，精確量化頻率變化與液高的數學關係。

研究目的

1. 不同形狀玻璃杯

2. 不同液體高度

3. 摩擦 v.s. 敲擊

4. 頻率與杯中液體公式

特徵頻率

波型

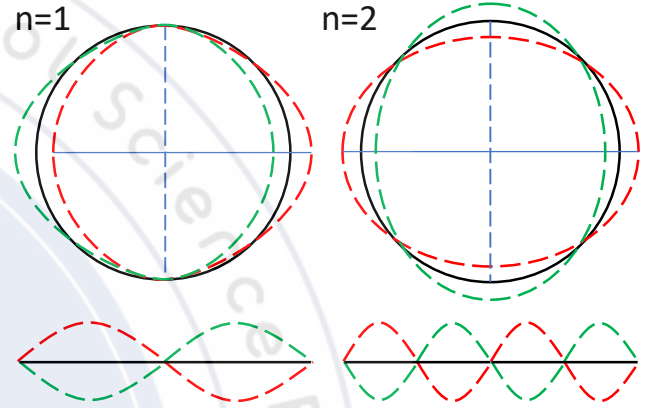
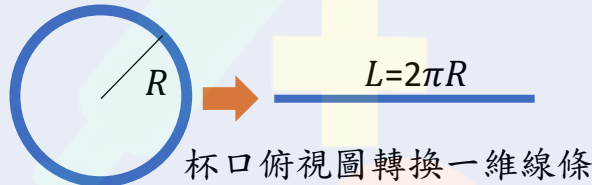
5. 實驗驗證

原理假設

液量增加頻率下降與振動模型之假設



1. 可以形成封閉的駐波，更容易累積能量形成共振。
2. 頻率 ν 與波數 n 成正比，因此頻率間有**整數倍**關係。



杯口 $n=1, 2$ 之振動及所對應一維之振動

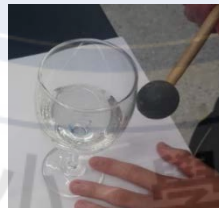
實驗與分析流程

分類	A型-5種	B型-4種	C型-7種
圖示			
形狀	圓柱形 無腳座	圓柱形 有腳座	不規則形 有腳座
加入液體	空杯、水 酒精、甘油	空杯、水 酒精、甘油	空杯 水

頻率量測(頻譜法分析)



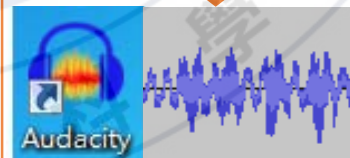
手摩擦玻璃杯



音叉槌敲擊杯口



廠牌：audio-technica
頻率響應：20-20000Hz



錄音並分析頻率

物理量量測

外徑 R_o

內徑 R_i

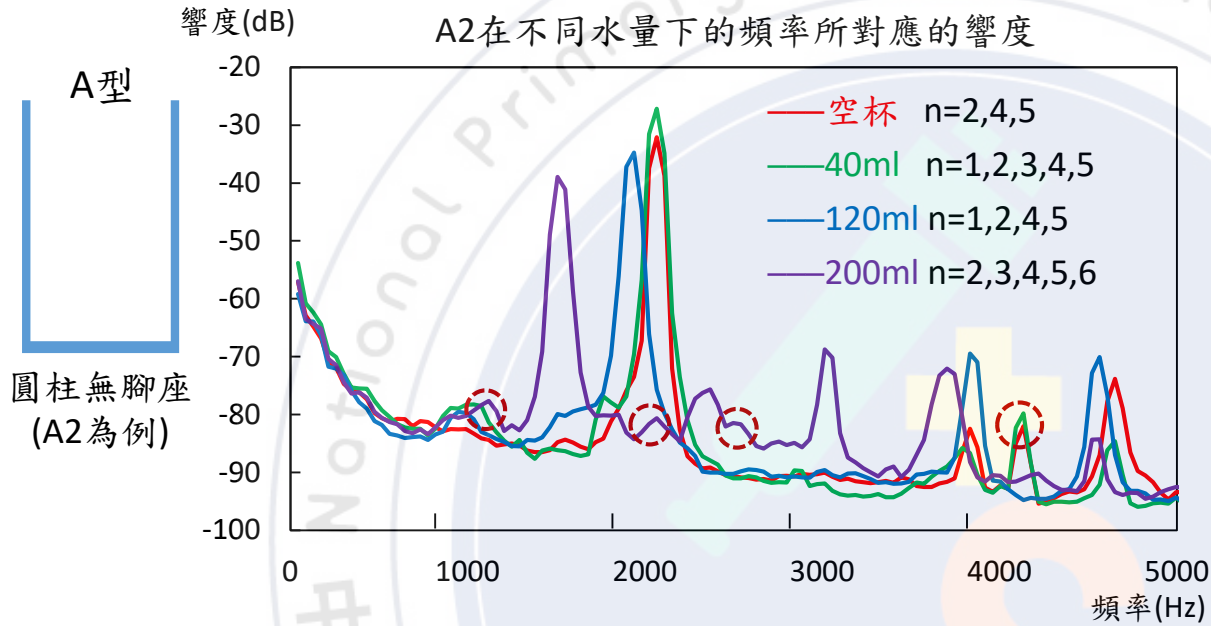
厚度 a

杯高 H 、玻璃密度 ρ_g

液高 h 、液體密度 ρ_l

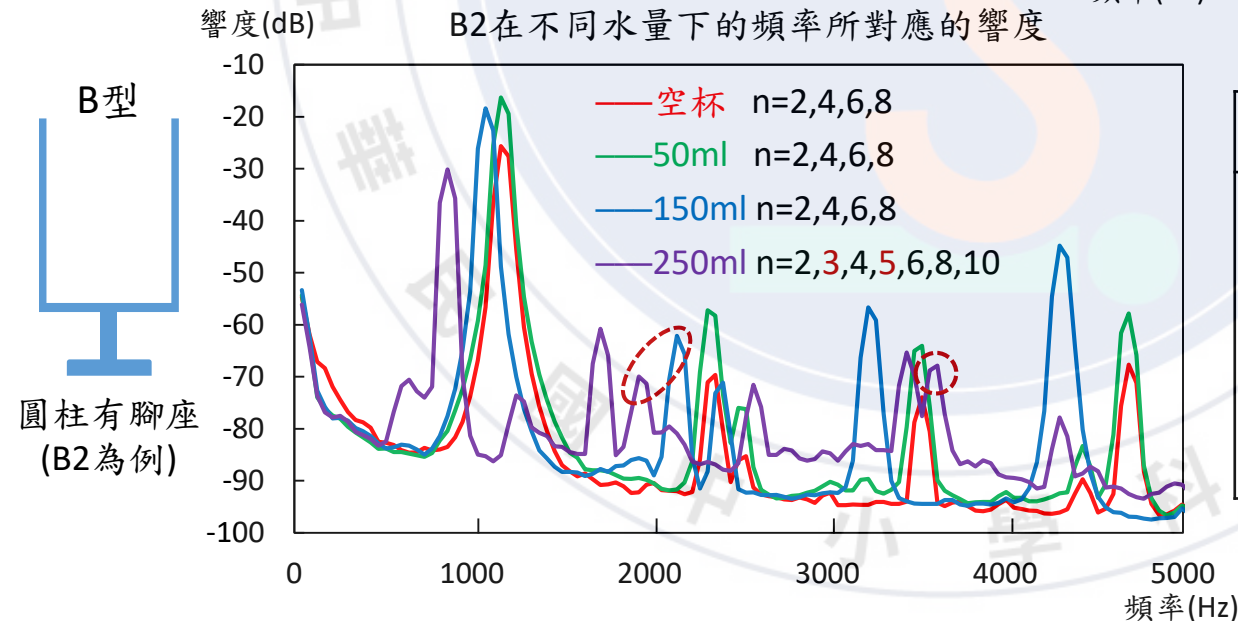
實驗結果與討論

一、分析各玻璃杯特徵頻率(空杯與低、中、高水位)



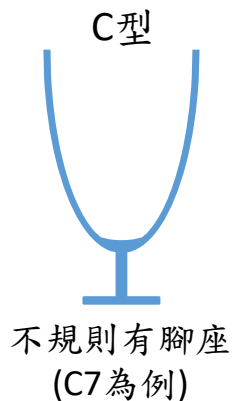
A型—圓柱形無腳座

1. 頻率有 $n=1, 2, 3, 4...$ 倍數關係。
2. 偶數 n 明顯，奇倍頻率比偶倍小20dB以上，且不易判讀。
3. 有些情形特徵頻率(多是 $n=1$)消失，並有雜音(紅綠線紅圈)。
4. 高水位時，有更多非倍數關係的頻率出現(紫線紅圈)。



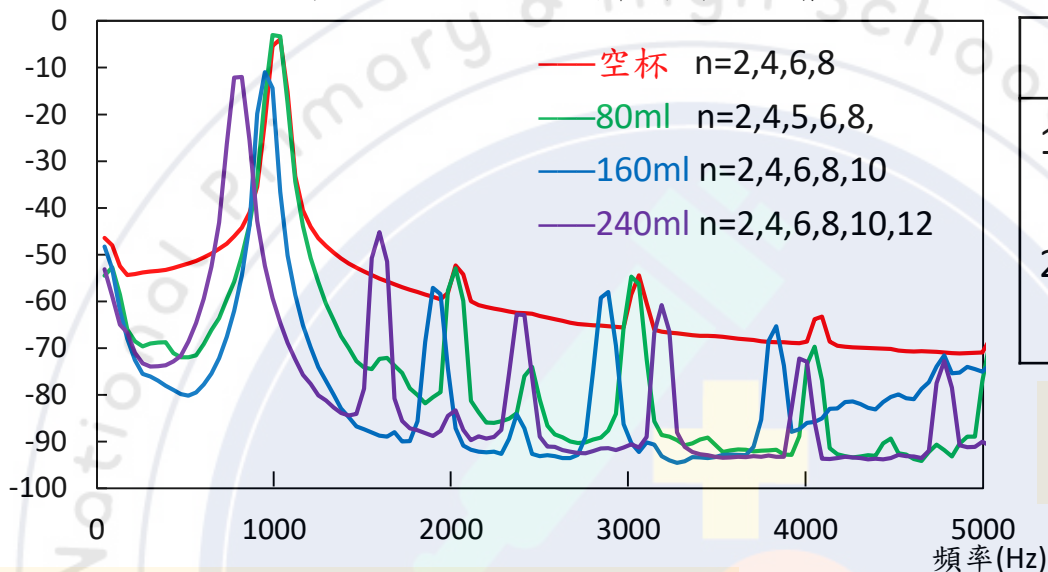
B型—圓柱形有腳座

1. 低水位： $n=2,4,6,8...$ ，頻率間有偶數倍關係，且較少雜音。
2. 高水位： $n=2,3,4,5...$ ，奇數頻率($n \leq 5$)出現，並有非倍數關係的頻率出現(紫線紅圈)。



響度(dB)

C7在不同水量下的頻率所對應的響度



C型—不規則形有腳座

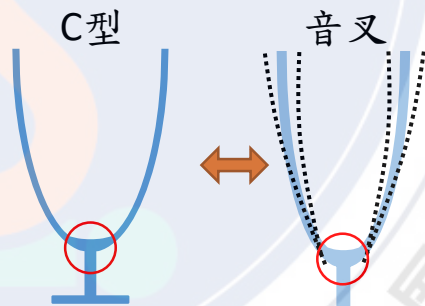
- 1.任何水位下 $n=2,4,6,8\dots$ ，頻率間有偶數倍關係，且幾無雜音。
- 2.高水位仍頻譜整齊乾淨，且其保有完整偶數倍的頻率。

有腳座且底部半徑縮小的玻璃杯適合作為樂器演奏。

A、B、C形玻璃杯之共通性：

- 1.液體高度越高，頻率下降越多。
2. $n=2$ 響度大於其他泛音20分貝以上，為純音樂器。

C型玻璃杯適合作為樂器之解釋



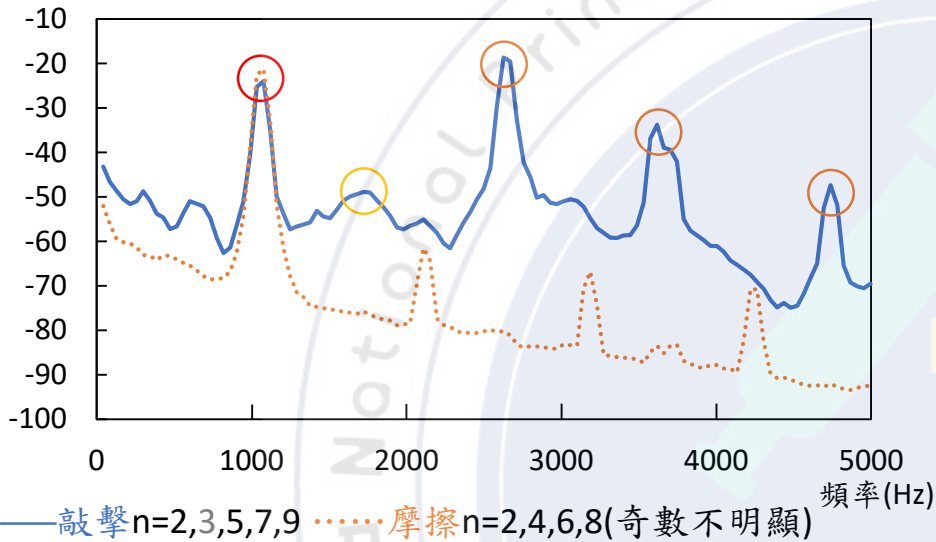
兩叉會對稱性而同時向外或向內振動，並且只要握住其中一叉，另一叉也同時停止。

- 1.腳座形成收斂封閉端，震動有對稱性使 n 為偶數。
- 2.杯底收縮有更佳收斂效果，使振動有一致性。
- 3.可想像許多音叉共享同個柄所圍出的圓，使玻璃杯振動符合對稱性，頻率間皆有偶數倍關係。

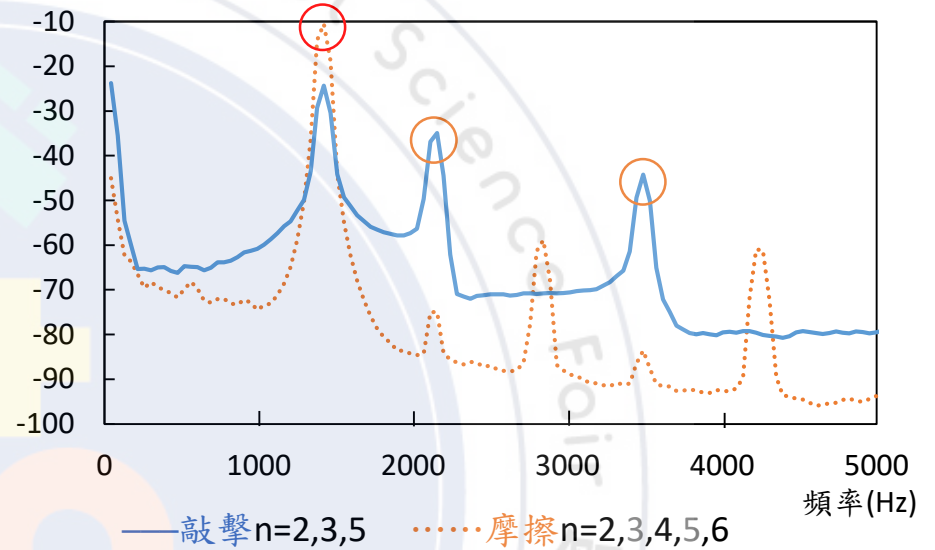
杯型	特徵頻率泛音列	
	空杯、低水量	中、高水量
A型 圓柱無腳座	$n=1,2,3,4\dots$ 有些特徵頻率消失，有雜音產生	
B型 圓柱有腳座	$n=2,4,6,8\dots$ 較少雜音	$n=2,3,4,5\dots$ 有奇數頻率、雜音
C型 不規則有腳座	$n=2,4,6,8\dots$ 較少雜音	$n=2,4,6,8\dots$ 較少雜音

二、敲擊與摩擦玻璃杯聲音之探討

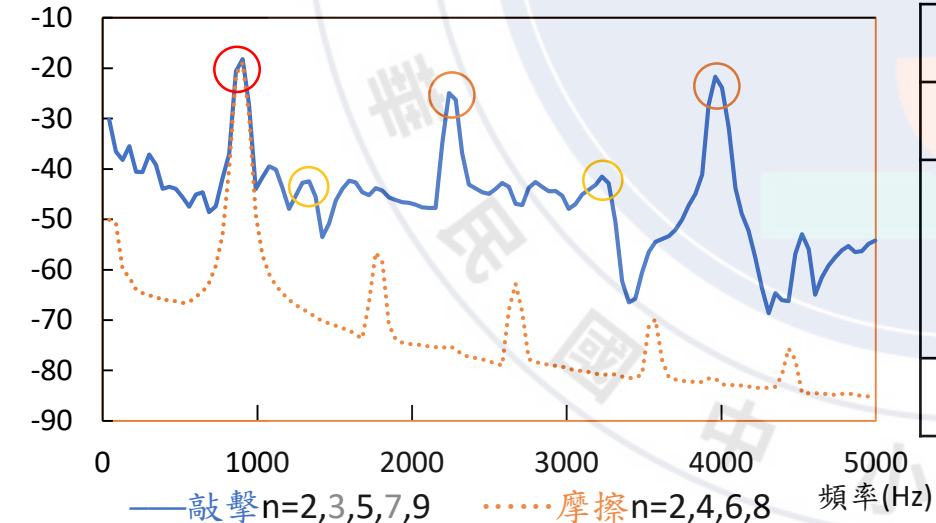
A5杯(無腳座)250ml酒精之頻譜(摩擦&敲擊)



B1杯(有腳座)90ml水甘油頻譜(摩擦&敲擊)



C7杯(有腳座)20ml水之頻譜(摩擦&敲擊)



方式	敲擊	摩擦
主音	主音頻率 $n=2$ 皆相同(紅色圓圈)	
其他泛音	n 為奇數(5,7,9...) 響度與主音相近(橘圈)	n 為偶數(4,6,8...), 響度小於主音20dB以上
	$n=3$ 和部分奇倍不明顯	所有偶數倍頻率皆存在
雜音	多非倍數關係的頻率	少非倍數關係的頻率

摩擦玻璃杯適合作為樂器演奏方式之解釋

演奏方式	敲擊	摩擦
頻譜解釋	敲擊會破壞對稱性，並產生質心偏移 →除了 $n=2$ 為偶數外，其餘為奇數	均勻摩擦會保有對稱性，質心守恆 → n 為偶數
音色	其他泛音響度與主音相近 →清脆且響亮(非純音)	其他泛音響度小於主音20dB以上 →柔和且圓潤(純音)
樂聽性 演奏性	頻譜中伴隨許多非整數倍的頻率產生 噪音，聽起來刺耳，不適合作為演奏	頻譜中多是單純的倍頻關係，聽起來 優美，適合作為演奏

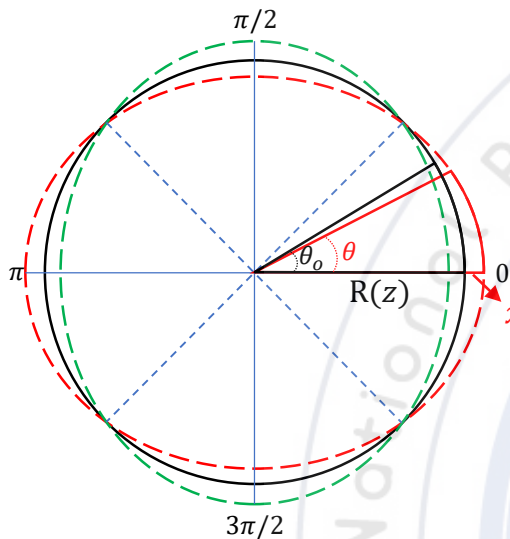
$n=2$ 振動最明顯(響度最大)之原因

1. 杯口振動的對稱性，當一邊受到擠壓凹陷，另外兩邊被推擠而向外擴張，並牽動鄰邊向兩邊拉扯而凹陷。
2. 振動時要符合質心守恆(除敲擊會使質心偏移)，因玻璃杯不移動，要 n 為偶數才能符合質心不動。
3. 實驗影片中主要波形為 $n=2$ ，是最簡單的振動形式。

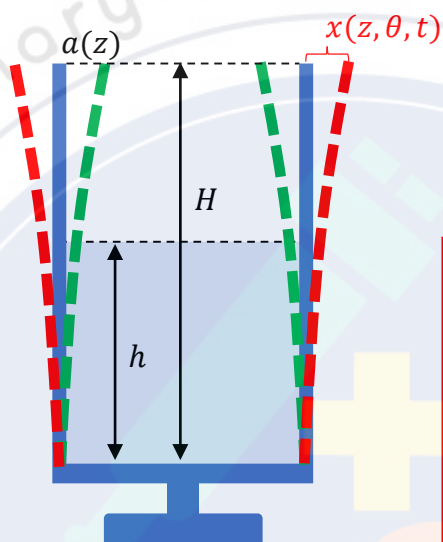


玻璃杯振動俯視圖(紅圈：未振動時原始口徑)
取自：Wine glass resonance in slow motion.

三、理論公式推導與實驗驗證



玻璃杯振動俯視圖



圓柱玻璃杯振動側視剖面圖

透過推導(彎矩 M ，慣性矩 I) 得出：

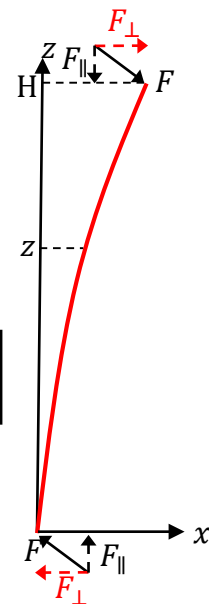
$$f(z) = \frac{1}{EI} \int_0^z \int_0^z M(z) dz dz$$

彈性係數 E

集中負荷 F

玻璃杯口摩擦或敲擊，屬於一端受力的情形，並使玻璃壁產生來回振動。

$$M(z) = F_{\perp}(H - z)$$



$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 - 1 = mf\left(\frac{h}{H}\right)$$

$$f\left(\frac{h}{H}\right) = \frac{1}{71}\left(\frac{h}{H}\right)^5 \left[126 - 70\left(\frac{h}{H}\right) + 10\left(\frac{h}{H}\right)^2\right]$$

$$m = \alpha \frac{\rho_l R}{\rho_g a}$$

A、B型 α 值 < 0.5

玻璃上質點速度	液體透過玻璃振動的速度
$v_{\perp} = -\omega x_0 f(z) \cos 2\theta \sin \omega t$	$\sigma_{\perp} = \alpha_{\perp} \frac{r}{R} x_0 f(z) \cos 2\theta \cos \omega t$
$v_{\parallel} = \frac{1}{2} \omega x_0 f(z) \sin 2\theta \sin \omega t$	$\sigma_{\parallel} = \alpha_{\parallel} \frac{r}{R} x_0 f(z) \sin 2\theta \cos \omega t$

垂直於玻璃面的法線速度 v_{\perp}
 平行於玻璃面的切線速度 v_{\parallel}

法線速度 σ_{\perp} ，係數 $\alpha_{\perp} < 1$
 切線速度 σ_{\parallel} ，係數 $\alpha_{\parallel} < 1$

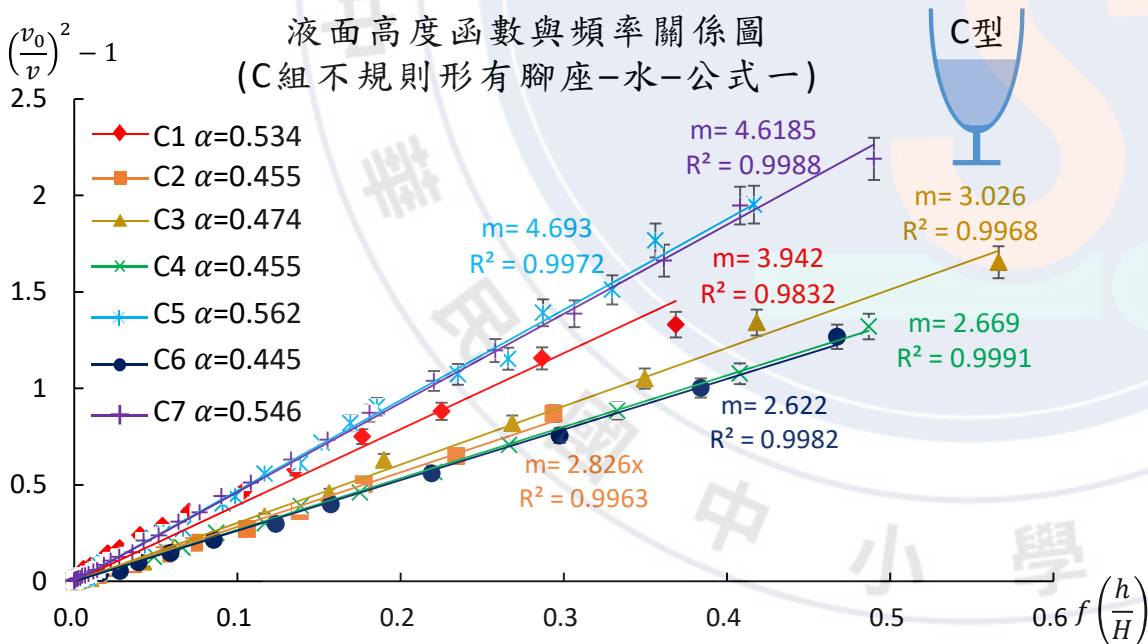
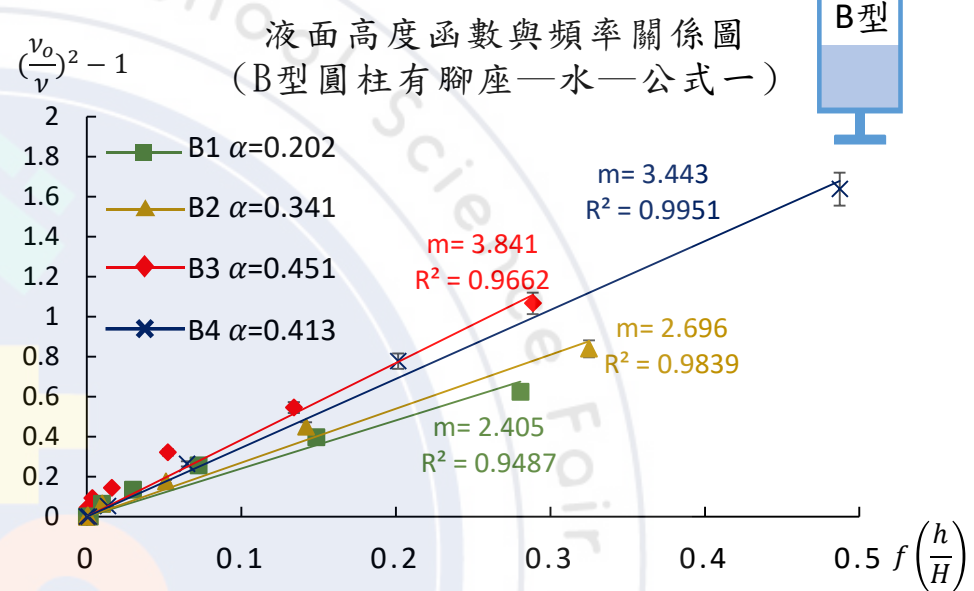
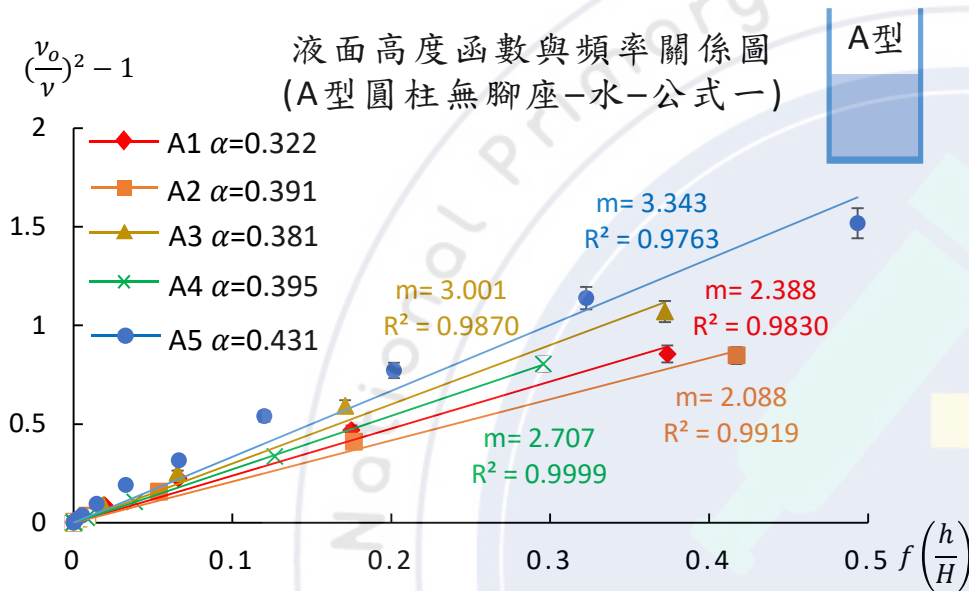
$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha \rho_l R}{5 \rho_g a} \int_0^h [f(z)]^2 dz$$

$$\alpha = \alpha_{\perp}^2 + \alpha_{\parallel}^2 < 2$$

空杯頻率 v_0 ，裝有液體頻率 v ，玻璃杯高度 H ，液體高度 h
 液體密度 ρ_l ，玻璃密度 ρ_g ，杯口半徑 R ，杯口厚度 a

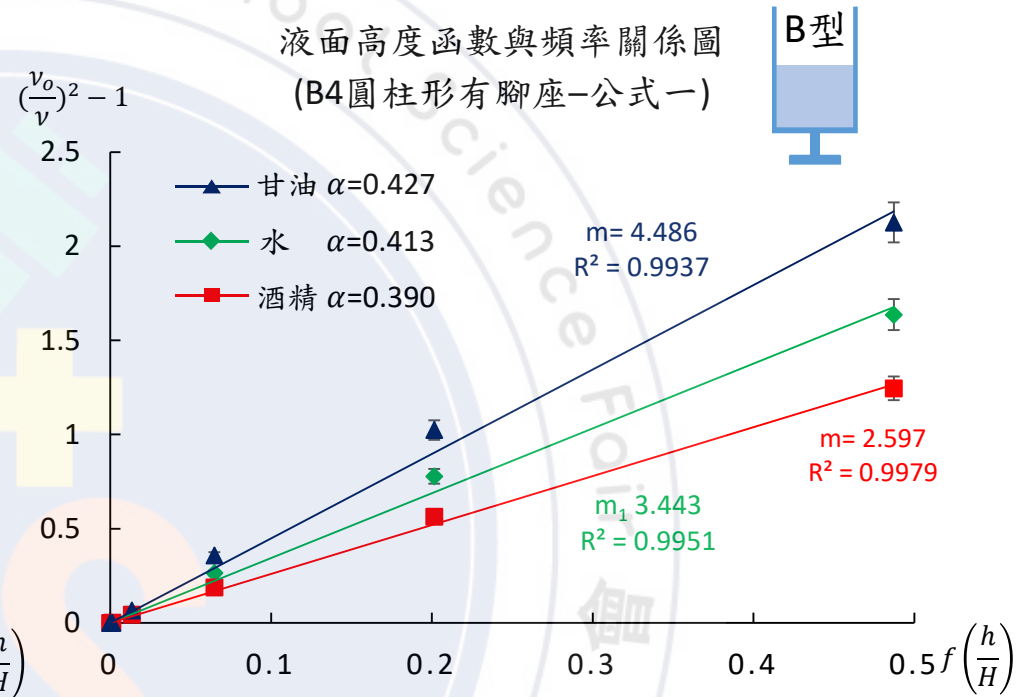
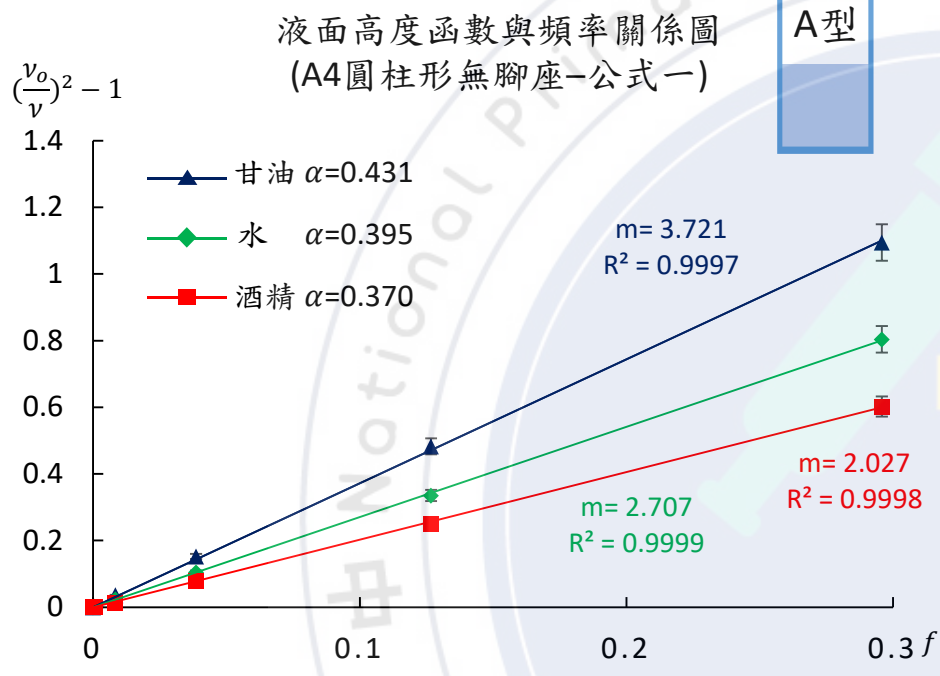
四、玻璃杯在不同液體頻率公式驗證

不同型玻璃杯裝有水之頻率公式驗證



1. C型下端口徑窄且厚，但 $\frac{h}{H} = 0.4$ 時口徑厚度趨於一致。在 $\frac{h}{H} = 0.4$ 時，厚度、半徑變動造成 $(\frac{h}{H})^5$ 的誤差只有 1%，因此 C 型與集中負荷(一端受力)公式高度吻合。
2. A、B 型 $\alpha < 2$ ；C 型利用平均半徑及平均厚度算出 $\alpha < 2$ ，驗證集中負荷符合水量與頻率的關係式。

A、B型玻璃杯裝有不同液體之頻率公式驗證



玻璃杯裝有不同液體仍與集中負荷公式高度吻合且 $\alpha < 2$

$$\alpha = \alpha_{\perp}^2 + \alpha_{\parallel}^2$$

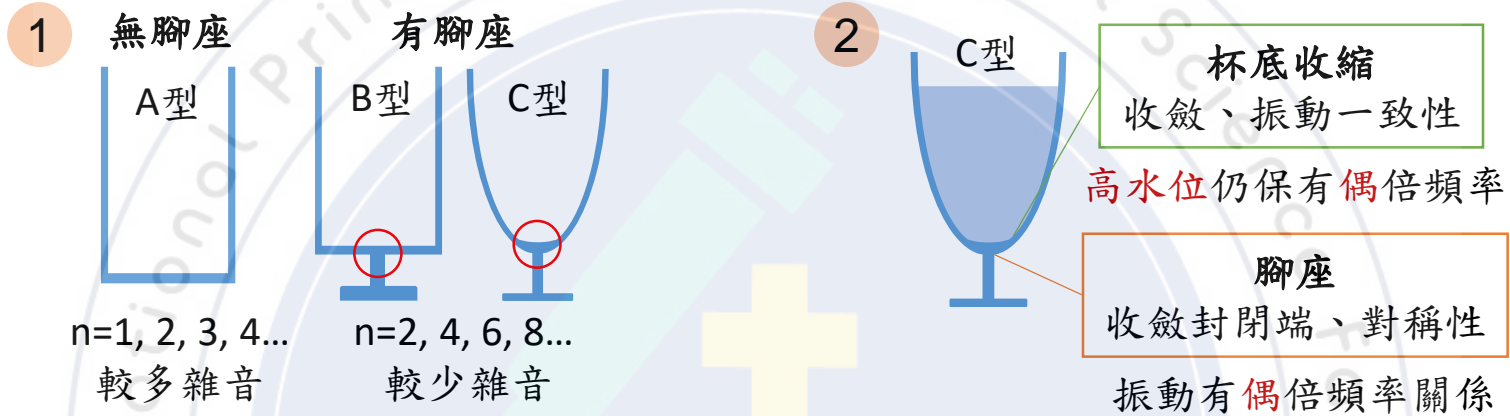
黏度越大 α_{\parallel} 越大，甘油黏度為水或酒精的 10^3 倍以上，但 α 值差距最大也不超過0.03。

1. 垂直速度 v_{\perp} 極值為2倍水平速度 v_{\parallel} 的極值
→ 玻璃杯主要振動為垂直杯壁方向運動。

2. 垂直杯壁運動可透過推擠使液體運動，因此為主要傳遞液體運動的形式($\alpha_{\perp} > \alpha_{\parallel}$, $\alpha_{\parallel}^2 < \frac{\alpha}{2}$)。

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\alpha} < \alpha_{\perp} < \sqrt{\alpha} \rightarrow 0.3 < \alpha_{\perp} < 0.7$$

結論



3

方式	敲擊	摩擦
主音	主音頻率 $n=2$ 皆相同 (紅色圓圈)	
其他泛音	n 為奇數 ($n=3,5,7\dots$, 3 不明顯)	n 為偶數 ($n=4,6,8\dots$)
	響度與主音相近 (非純音)	響度小於主音 20dB 以上 (純音)
雜音	多非倍數關係的頻率	少非倍數關係的頻率
樂聽性	響亮但刺耳，不適合演奏	柔和且圓潤，適合演奏

4

玻璃杯振動屬於一端受力的集中負荷情形，液高與頻率函數表示為：

$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{71} \frac{\rho_l R}{\rho_g a} \left(\frac{h}{H}\right)^5 [126 - 70\left(\frac{h}{H}\right) + 10\left(\frac{h}{H}\right)^2]$$

5

垂直杯壁運動 v_{\perp}	水平杯壁運動 v_{\parallel}
主要傳遞液體運動形式	與黏度有關，黏度越大，切線速度係數 α_{\parallel} 也越大

未來展望

1. 推導玻璃杯振動時的位能(U)公式，並找出玻璃杯物理量與自然頻率之關係式，並且以每次選擇一種操縱變因(如高度、半徑、厚度)進行實驗。
2. 用黏滯係數(吸附力以及內聚力)探討不同液體之 α 值或修正液體動能公式。
3. 自製杯口破缺，破壞某些泛音列型態，並驗證玻璃杯口的振動模態。

參考資料

1. 沈子耕、盧政良、高執貴(2017)。波濤洶湧的酒杯-玻璃杯共振之研究中華民國第57屆中小學科學展覽會作品說明書。取自：<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/57/pdf/051817.pdf>
2. 高仲仁、莊翔宇、孫以澤(2017)。沒想到玻璃也可以—奇妙的聲與波。2017全國科學探究競賽—這樣教我就懂國中組、高中職組。取自：<http://sciexplore2017.colife.org.tw/Upload/%E5%A5%87%E5%A6%99%E7%9A%84%E6%B3%A2%E8%88%87%E8%81%B2-2234cdf8-66c5-424f-b764-c6bb8fe85d68-20170410103755933.pdf>
3. 黃瀨瑩、蕭宇岑、梁沛如。酒杯在唱歌—濃度與聲音頻率關係之探討。
取自：<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/59/pdf/NPHSF2019-030108.pdf>
4. A.P. French .(1982).A study of wineglass acoustics.
取自：<https://www.nikhef.nl/~h73/tgo/praktgeluid/French1983.pdf>
5. Marty33 (2009). Wine glass resonance in slow motion. 取自：<https://www.youtube.com/watch?v=BE827gwgnk4>