中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080414

等腰叢林生存法則

學校名稱：新北市新莊區昌平國民小學

作者：	指導老師：
小六 彭翊軒 小五 林毅維	馬恬舒

關鍵詞：排容原理、正多邊形、等腰

摘要

我們研究《科學研習月刊》上一個有趣的數學遊戲「正七邊形的頂點中有五個紅點，兩個黑點，用紅點當頂點可以連成多少個等腰三角形？」。

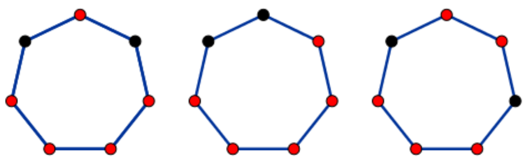
目前研究此題目的其他科展作品，採取直接計算所有頂點皆為紅點的等腰三角形個數，當黑點增加時，分類情形複雜而難有一致規律，所以探討到最多的黑點個數僅為 4 個。

有別於其他作品，我們提出不同的策略，先計算等腰三角形頂點包含黑點的情形，**再利用排容原理扣除，得出一般化的結果：在正N邊形中，給定任意B個黑點（$B=0,1,2,\ldots$），給出計數等腰三角形的個數一般化策略與公式**。除此之外，利用本研究提出的方法，進一步延伸探討正多邊形內的**等腰梯形個數**，給出**計數等腰梯形個數的一般化策略與公式。**

壹、研究動機

我們很喜歡數學，平時常常思考鑽研數學問題，因此加入研究數學科展的行列。老師問了一個刊載在科學期刊上的數學遊戲，叫做「七邊形之謎」，題目如下：

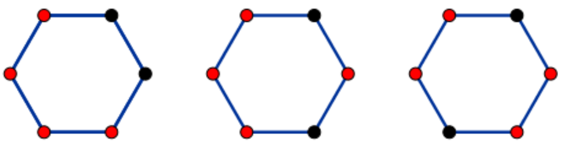
老師在黑板上留下一個問題，當作自習課的作業：「**正七邊形的頂點有五個紅點，兩個黑點。用紅點當頂點可以連成多少個等腰三角形？**」



生性謹慎的小怡說：「我又不知道黑點在那裡，老師給的條件不夠，這一題不能算啦！」

大而化之的小郡說：「沒差啦，黑點在那裡算出來應該都一樣啦！」

小怡說：「怎麼可能算出來一樣？如果題目改成正六邊形，那兩個黑點在對角線的話就沒有等腰三角形了，但是兩個黑點在其他位置就還有等腰三角形。所以答案一定和黑點位置有關啦！」



小郡說：「不管啦，我們先算算看再說吧！」

所以這個七邊形之謎的結果如何呢?

從題目中的敘述可得知，**黑點的位置會影響等腰三角形的個數**，我們在想，等腰三角形的個數除了與黑點的位置相關之外，與**黑點的個數、正多邊形的邊數是否也有相關**呢？其中**是否有規律可循**呢？此規律是否可以應用到所有的正多邊形呢？除了等腰三角形外，**正多邊形內的等腰梯形個數**，是否也存在著一定的規律呢？於是，我們便著手進行「正多邊形之邊數、頂點個數及頂點位置與等腰三角形及等腰梯形個數關係」之研究。

貳、 研究目的

一、探討正N邊形中（$N \geq 4$），連接各頂點所形成的等腰三角形個數，以及恰包含一個黑點、二個黑點與三個黑點的等腰三角形個數。

二、探討在有B個黑點的正N邊形中，計數以紅點為頂點之等腰三角形個數的一般化策略，其中$N \geq 4$，$B \geq 0$。

三、探討正N邊形中（$N \geq 5$），連接各頂點所形成的等腰梯形個數，以及恰包含一個黑點、二個黑點、三個黑點與四個黑點的等腰梯形個數。

四、探討在有B個黑點的正N邊形中，計數以紅點為頂點之等腰梯形個數的一般化策略，其中$N \geq 5$，$B \geq 0$。

參、 名詞與符號

符號 3.1 將正N邊形依順時鐘方向編頂點號碼為$(1,2,3,\cdots,N)$。

黑點$(1,2,4)$代表正多邊形中有 3 個黑點，此三個黑點的編碼各為 1 號、2 號及 4 號。

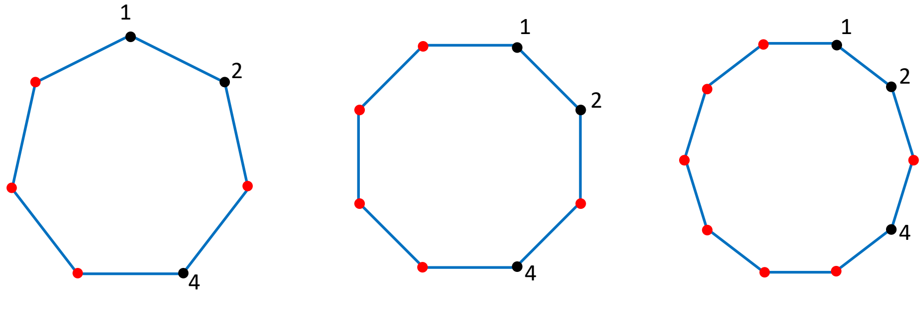


圖 1. 三個黑色頂點編號為$(1,2,4)$的正七邊形、正八邊形、正十邊形

符號 3.2 B記作黑色頂點的編號之集合。

以$N = 10$，給定$B = \{1,3,4,9\}$。則包含任意二個黑點的情形為（1，3)、(1，4)、(1，9)、(3，4)、(3，9)、(4，9)。

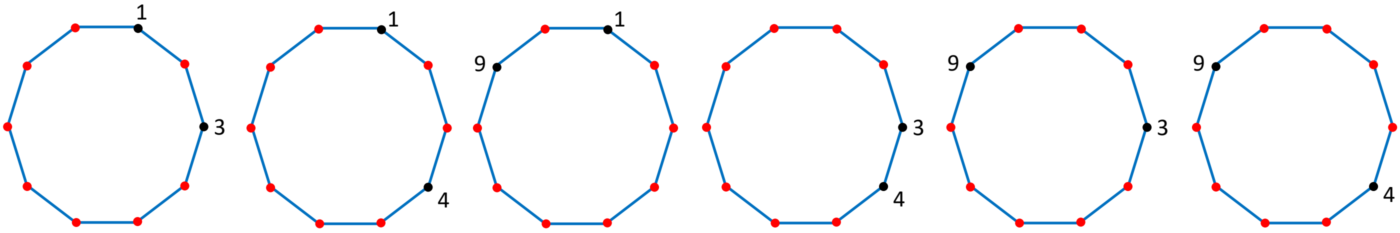


圖 2. 正十邊形中，$B = \{1,3,4,10\}$的六種情形

肆、 研究過程與結果

一、文獻探討：

（一）中華民國第 60 屆科展國中組研究「七邊形之謎」問題的作品，改變原問題情境設定，以紅點做為等腰三角形頂角的頂點，兩黑點作為等腰三角形的另外兩個頂點，開展另一主題方向之研究。

（二）屏東縣第 60 屆科展國中組研究「七邊形之謎」問題的作品，研究 0 個黑點及 2 個黑點的等腰三角形個數公式，並證明公式成立。

（三）金門地區第 60 屆科展國中組研究「七邊形之謎」問題的作品，依黑點個數及正多邊形邊數作為判斷依據：黑點個數分為 0~4 個黑點，再依邊數分為奇數邊、偶數邊及 3 的倍數邊，共計十四個基本公式；在每個基本公式下，依據不同的黑點間隔數，延伸出數種修正補償的公式。

上述作品(一)雖以「七邊形之謎」為出發點，但改變原問題情境，與本作品研究方向不同。而作品(二)及作品(三)，所探討的圖形**僅限於等腰三角形**，且研究方法為排除頂點為黑點的情形，**直接計算**所有頂點皆為紅點的等腰三角形個數，當黑點增加時，需討論多邊形邊數為奇數、偶數，及是否是 3 的倍數，以及黑點的間隔等等，分類情形多且複雜，而難有一致的規律，所以探討到最多的**黑點個數僅為 4 個**。

二、本作品的特色：

1. 本作品超越前述三作品，除研究出在正N邊形中以紅點為頂點之**等腰三角形個數**，更研究出**等腰梯形的個數**。
2. 不同於上述作品直接計數的方法，本研究應用**排容原理**進行研究，不僅得到0個黑點至4個黑點的等腰三角形個數，更得出**任意B個黑點的正N邊形中，所構造出等腰三角形個數的一般化策略**，其中$N \geq 4$，$B \geq 0$。
3. 進一步利用排容原理探討**等腰梯形個數**，除了得到0個黑點至4個黑點的等腰梯形個數外，更得出**任意B個黑點的正N邊形中，所構造出等腰梯形個數的一般化策略**，其中$N \geq 5$，$B \geq 0$。

三、正N邊形內，以紅點為頂點的等腰三角形個數

剛開始著手進行解題時，我們也是逐一畫圖，排除黑點並直接計算頂點為紅點的等腰三角形個數，找出正N邊形內有0個黑點到4個黑點的等腰三角形個數判斷公式，但發現當黑點增加時，分類情形與判斷式相當複雜！

雖然已得到答案，但我們卻不滿意！因此尋思另一種探究等腰三角形個數的方法，而進入第二階段，**利用排容原理進行研究：三角形有三個頂點，分別排除包含一個黑點、包含二個黑點及包含三個黑點的情況，便是可構造的等腰三角形個數！**用排容原理進行研究，最多只需考慮等腰三角形的三個頂點皆為黑點的情況，使我們的研究向前邁進一大步，因而**得出超越4個黑點，而到達黑點個數為任意數的驚人結果！**

本研究先說明利用排容原理尋找正N邊形中等腰三角形個數的過程及結果，再說明等腰梯形個數過程及結果。以下便分別討論正多邊形內所有的等腰三角形個數，以及包含一個黑點、二個黑點及三個黑點的等腰三角形個數。

（一）0個黑點：正N邊形內的等腰三角形個數

我們先從月刊上的問題情境思考，發現正七邊形中，二個黑點有六種排列方式（如圖3)，扣除對稱圖形後，仍有三種不同的排列位置，這三種排列位置仍得一一判斷可否畫出等腰三角形，頗耗費時間。我們在想，正多邊形的每個邊一

樣長、每個角都一樣大，而等腰三角形則是兩腰等長、兩底角一樣大，在正多邊形內選擇適合的頂點畫出等腰三角形，是否存在一種判別的規律？

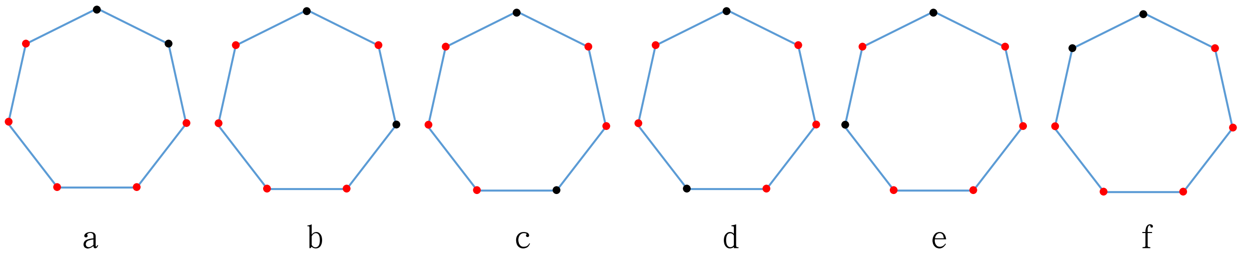


圖 3.　正七邊形的二個黑點有六種排列位置，其中 a-f、b-e、c-d 各為對稱圖形

於是，我們利用簡化問題的策略，研究在 0 個黑點的情形下，連接正多邊形頂點可構造出的等腰三角形個數，發現：當正多邊形邊數不是 3 的倍數時，等腰三角形個數和正多邊形邊數形成整數倍的關係，當正多邊形邊數是 3 的倍數時則否（如表 1)。除此之外，當正多邊形的邊數越多，所形成的等腰三角形也越多，倍數也有越大的趨勢，顯示等腰三角形個數似乎與正多邊形的邊數有關。

表 1.　等腰三角形個數與正多邊形邊數及其倍數關係

正多邊形邊數(邊)	4	5	6	7	8	9	10	11	12
等腰三角形個數(個)	4	10	8	21	24	30	40	55	52
倍數關係(倍)	1	2	$1\frac{2}{3}$	3	3	$3\frac{1}{3}$	4	5	$4\frac{1}{3}$

因此，依上表結果，我們以正多邊形邊數為基準，分為二個方向討論：

1. 正多邊形邊數 N 不是 3 的倍數：

以正五邊形為例，共可構造出 10 個等腰三角形，乃由二種不同的三角形所構成，每種三角形都是 5 個，一種是等腰三角形的兩腰剛好是正五邊形的其中二個邊（如圖 4 所示之紅色等腰三角形），一種則是等腰三角形的底邊是正五邊形的其中一邊（如圖 4 所示之綠色等腰三角形）。

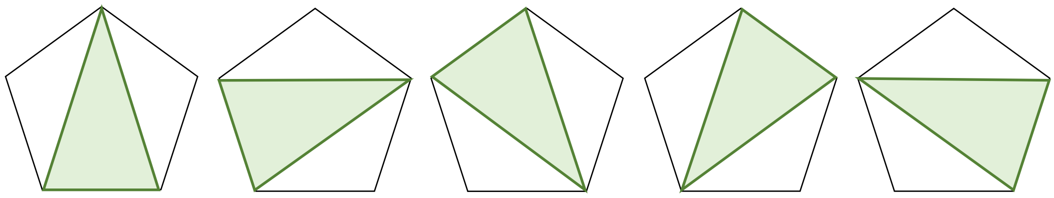


圖 4. 正五邊形可構造出二類等腰三角形，共計 10 個

也就是說，以正五邊形的其中一個頂點作為等腰三角形頂角的頂點，可以畫出兩種不同的等腰三角形，而正五邊形有 5 個頂點，故可畫出的等腰三角形有

$$5 \times 2 = 10 \text{ 個。}$$

這也同時說明了為何等腰三角形個數與正多邊形邊數為倍數關係之原因。

接下來，只要找出正多邊形邊數與可構造出的等腰三角形種類的數量關係，便能列出一般式。我們利用正方形、正五邊形、正七邊形、正八邊形及正十邊形畫畫看，發現各可畫出 1、2、3、3、4 種等腰三角形（如圖 5），與表 1 所呈現的倍數關係不謀而合。

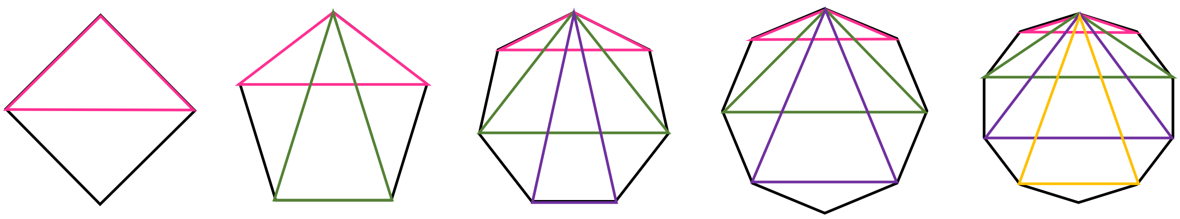


圖 5. 以正四邊形、正五邊形、正七邊形、正八邊形及正十邊形的其中一個頂點出發，各可畫出 1、2、3、3、4 種等腰三角形

進一步觀察發現，**正N邊形的每一個頂點可以畫出的等腰三角形種類為**

$$\boxed{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \tag{1}$$

，其中[ ]為高斯符號。

因此，**邊數非 3 的倍數的正N邊形，可畫出的等腰三角形個數為**

$$\boxed{N \times \left[\frac{N-1}{2}\right]} \tag{2}$$

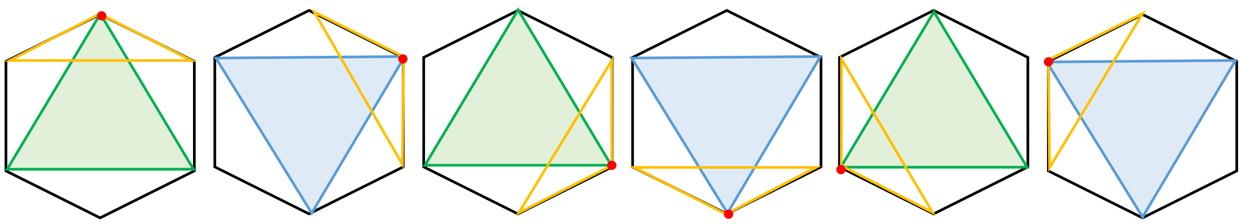
以正八邊形為例，共有8個頂點，以其中1個頂點作為等腰三角形頂角的頂點，還剩下$(8-1)$個頂點，每畫一個等腰三角形，還需要2個頂點，

$(8-1)\div 2 = 3 \ldots 1$，剩下 1 個頂點，無法再畫出等腰三角形。

因此正八邊形的一個頂點可畫出$\left\lfloor \frac{8-1}{2} \right\rfloor = 3$ 種等腰三角形，而正八邊形的所有頂點共可畫出$8\times\left\lfloor \frac{8-1}{2} \right\rfloor = 24$ 個等腰三角形。

2. 正多邊形邊數 N 是 3 的倍數：

以正六邊形為例，每一頂點皆可畫出 2 種等腰三角形（在本研究中，正三角形視為等腰三角形的一種），共可構造出$6\times\left\lfloor \frac{6-1}{2} \right\rfloor = 12$個等腰三角形，與上述(2)的結果相符。但圖 6a、6c、6e 的綠色正三角形雖由不同頂點所畫出，實際上是同一個正三角形，圖 6b、6d、6f 的藍色正三角形亦同，因此正六邊形頂點所構造出的等腰三角形個數應修正為$12-4=8$個（見圖 6）。



a. b. c. d. e.

f.

圖 6. 正六邊形可構造出8個等腰三角形

正六邊形可畫出 2 種不同方向的正三角形，<u>每一種正三角形都有 2 個被重複計數</u>，那麼，不同<u>正多邊形可構造出多少種不同方向的正三角形</u>，便是我們所要解決的問題。我們找出正六邊形、正九邊形、正十二邊形及正十五邊形各能構造出幾種方向不同的正三角形，發現各是 2、3、4 及 5 種（如圖 7）。

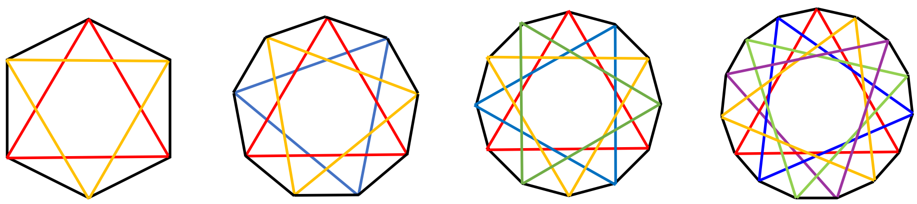


圖 7. 邊數為 3 的倍數之正多邊形可構造出不同方向的正三角形種類

對照正多邊形的邊數與所構造出方向不同的正三角形種類數，發現都是正多邊形頂點數$N \div 3$，細究其原因，由於每一個正三角形需要用 3 個頂點，將頂點數每三個一數分成一堆，分出多少堆，就代表能畫出多少種不同方向的正三角形。由此，便可得出

邊數為 3 的倍數的正N邊形，可畫出的等腰三角形個數為

$$\boxed{N \times \left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor - \frac{2}{3}N} \tag{3}$$

（二）黑點個數為 1 時，可構造出的等腰三角形個數

有了 0 個黑色頂點的公式為基礎，我們以正多邊形邊數是否為 3 的倍數為分界，尋找恰包含 1 個黑色頂點的等腰三角形個數公式。以下就分為正多邊形邊數 N 不是 3 的倍數及 N 是 3 的倍數進行討論：

1. 正多邊形邊數 N 不是 3 的倍數：

列表觀察後發現， N 不論是奇數或偶數，0 個黑點和 1 個黑點的等腰三角形數量差，皆為 3 的倍數（如表 2 所示），這會不會就是和三角形有三個頂點有關呢？我們又著手從圖形中找出隱藏的數字關係。

表 2. 邊數 N 不是 3 的倍數的等腰三角形個數

正多邊形邊數 / 黑點數量	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17
0	4	10	21	24	40	55	78	84	112	136
1	1	4	12	15	20	28	40	60	91	112
差量	3	6	9	9	12	15	18	18	21	24

以正七邊形為例，在 0 個黑點時，共可構造出$7 \times \left\lfloor\frac{7-1}{2}\right\rfloor = 21$個等腰三角形，當加入一個黑點後，每一種等腰三角形各會遇到 3 次黑點（如圖 8），因此要扣除$3 \times \left\lfloor\frac{7-1}{2}\right\rfloor = 9$個包含黑點的等腰三角形。

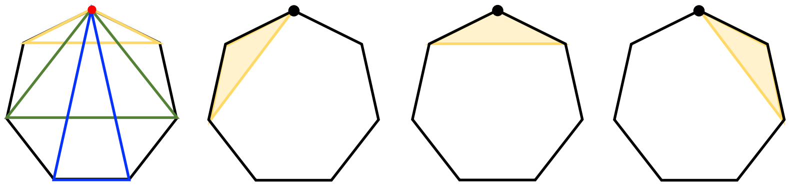


圖 8. 每一種等腰三角形各會遇到 3 次黑點

不論邊數 N 為奇數或偶數，每一種三角形都會遇到黑點三次，因此，**邊數 N 非 3 的倍數之正N邊形，恰包含 1 個黑點的等腰三角形個數為**

$$\boxed{3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]} \tag{4}$$

2. 正多邊形邊數 N 是 3 的倍數：

當邊數 N 為 3 的倍數，會有正三角形的出現，需扣除被重複計數的 2 個正三角形（如圖 9）。

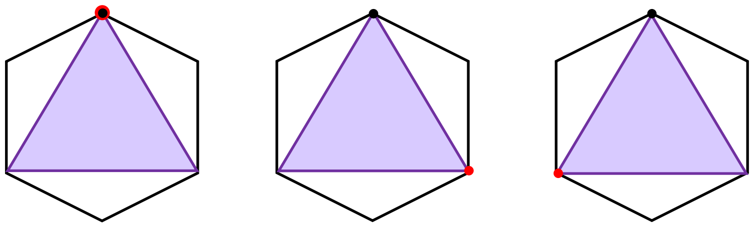


圖 9. N 為 3 的倍數，需扣除被重複計數的 2 個正三角形

因此，**正N邊形邊數 N 為 3 的倍數，恰包含 1 個黑點的等腰三角形個數為**

$$\boxed{3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-2} \tag{5}$$

整合式(2)及式(4)，**邊數 N 非 3 的倍數之正N邊形，在有 1 個黑點時，所能構造出的等腰三角形個數為**

$$\boxed{N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]} \tag{6}$$

整合式(3)及(5)，**邊數 N 為 3 的倍數之正N邊形，在有 1 個黑點時，所能構造出的等腰三角形個數為**

(7)

$$N \times \left[\frac{N-1}{2}\right] - \frac{2}{3}N - \left(3 \times \left[\frac{N-1}{2}\right] - 2\right)$$

（三）黑點個數為 2 時，可構造出的等腰三角形個數

利用式(4)及式(5)，我們可以算出恰包含 1 個黑點的等腰三角形個數，但當多增加一個黑點時，會有被重複扣除的等腰三角形，因此要加回來。以正八邊形為例（如圖 10），紅點代表等腰三角形頂角的頂點，黃色線段代表以紅點為頂角頂點的等腰三角形底邊，因此每一黃色線段便代表 1 個等腰三角形，而藍點代表第二個被加入的黑色頂點。由式(2)及式(4)，當黑點數為 0 時，正八邊形可畫出$8 \times \left[\frac{8-1}{2}\right]$=24 個等腰三角形，加入一個黑點後，有$3 \times \left[\frac{8-1}{2}\right]$=9 個等腰三角形被扣除（以黃色虛線表示），而再加入藍點後，則會有 2 個被重複扣除的等腰三角形（以藍色三角形表示）。

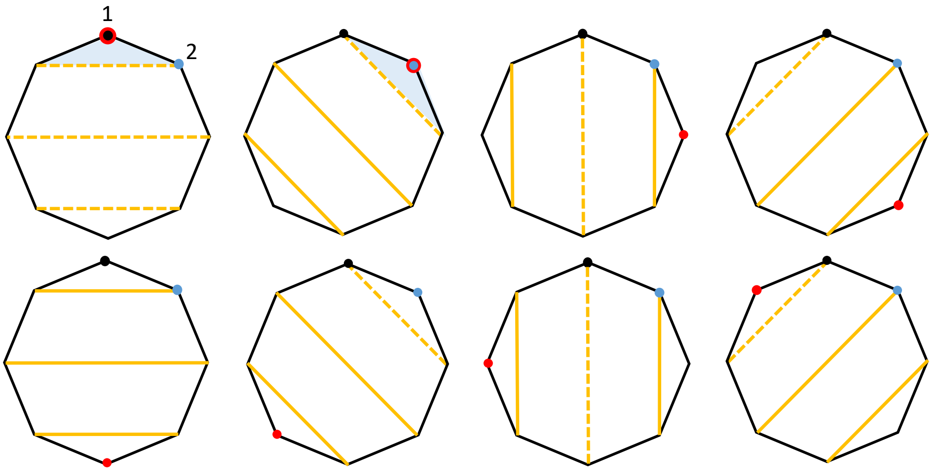


圖 10. 加入第二個黑點時，有 2 個等腰三角形被重複扣除

上述是二個黑點在(1,2)位置時的情形，但當黑點在(1,3)位置時，被重複扣除的等腰三角形卻是 4 個（如圖 11 藍色三角形所示）。

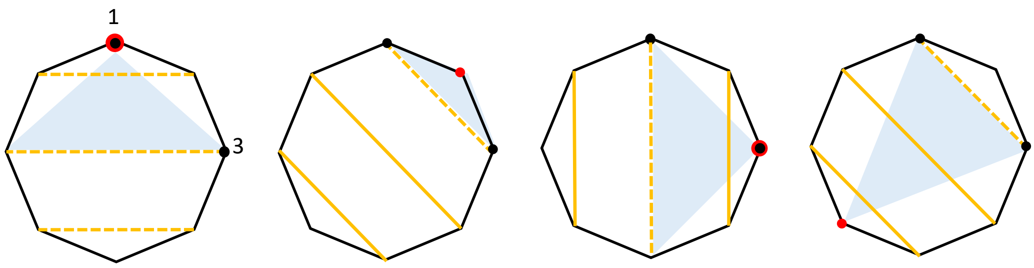
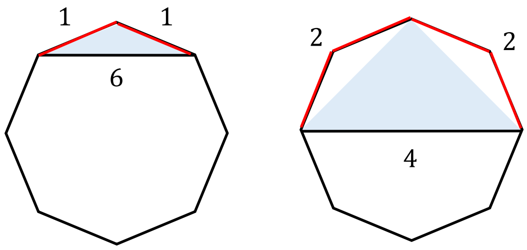


圖 11. 二黑點在(1,3)位置時，有 4 個等腰三角形被重複扣除

我們發現：**等腰三角形的三個邊，恰好與二頂點間的邊之數量互相對應。** 以圖 12 來說明，在正八邊形中，當等腰三角形的兩腰的邊數為 1，底所對應的邊數是 6（見圖 12a）；當等腰三角形的兩腰所對應的邊數為 2 時，底所對應的邊數是 4（見圖 12b），等腰三角形三邊所對應正多邊形的邊數和，恰與正多邊形邊數 N 相等。



a　　　　　　b

圖 12. 等腰三角形三邊邊數之和與正多邊形邊數 N 相等。

老師告訴我們，可以運用數學課所學「以符號代表未知數」的概念，將等腰三角形兩腰所對應正多邊形邊的數量設為x，等腰三角形底對應正多邊形邊的數量設為y，因此得到

$$\boxed{2x+y=N} \tag{8}$$

只要 x 和 y 符合這個算式，所形成的圖形就一定是等腰三角形！

我們將 x 和 y 的正整數解統整歸納成表格以便對照，如表 3 和表 4 所示。

表 3. N為奇數時，x 和 y 的解

N為奇數

x	y
$\frac{N-1}{2}$	1
$\frac{N-3}{2}$	3
$\frac{N-5}{2}$	5
$\vdots$	$\vdots$
1	$N-2$

表 4. N為偶數時，x 和 y 的解

N為偶數

x	y
$\frac{N-2}{2}$	2
$\frac{N-4}{2}$	4
$\frac{N-6}{2}$	6
$\vdots$	$\vdots$
1	$N-2$

以下分為正多邊形邊數 N 不是 3 的倍數及 N 是 3 的倍數進行討論。

1. 正多邊形邊數 N 不是 3 的倍數

以正十一邊形舉例，我們將 x 和 y 的解列出來，正十一邊形可構造出 5 種等腰三角形，其等腰三角形的腰和底所對應的邊數如表 5 所示。

表 5. N為 11 時，x 和 y 的解

x	1	2	3	4	5
y	9	7	5	3	1

再將 x 和 y 的解與黑點編號相互比照，發現如下之關係：

設二黑色頂點編號為i，j，$1 \le i < j \le N$.

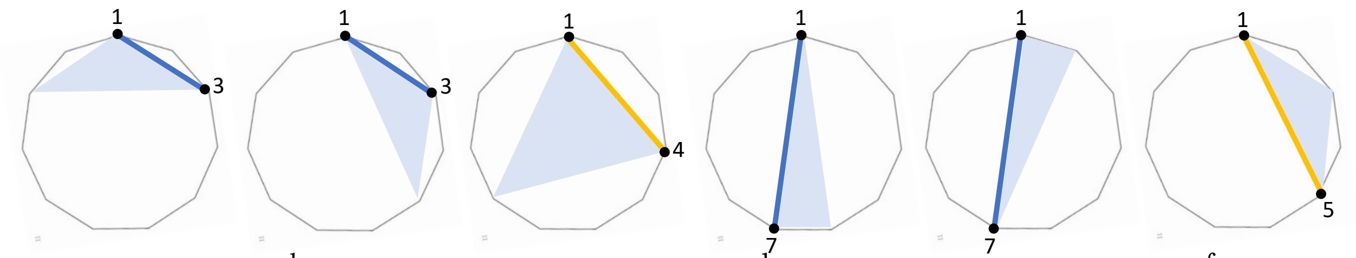
①如果$j-i$是x的解之一，則計 2 個等腰三角形；

如果$j-i$是y的解之一，則計 1 個等腰三角形。

②如果$N-(j-i)$是x的解之一，則計 2 個等腰三角形；

如果$N-(j-i)$是y的解之一，則計 1 個等腰三角形。

這是為什麼呢？當二黑點連線恰好是等腰三角形的腰時，因其有 2 個腰，故會有 2 個等腰三角形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$j-i$，是x的解，當$N-(j-i)$是x的解亦同此理（如圖 13a、圖 13b、圖 13d、圖 13e）；而當二黑點連線恰好是等腰三角形的底時，因只有 1 個底，故會有 1 個等腰三角形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$j-i$或$N-(j-i)$，是y的解（如圖 13c、圖 13f）。



a　b　c　d　e　f

圖 13. 正十一邊形二黑點位置與 x、y 解的關係

2. 正多邊形邊數 N 是 3 的倍數

以正十二邊形為例，正十二邊形可構造出 5 種等腰三角形，此時的等腰三角形的腰和底所對應的邊數如表 6 所示。

表 6. N為 12 時，x 和 y 的解

x	1	2	3	4	5
y	10	8	6	4	2

x 和 y 的解與黑點編號之關係如下：

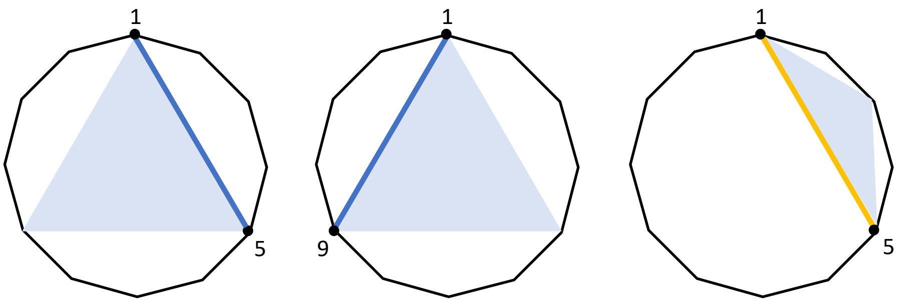
設二黑色頂點編號為i，j，$1 \leq i < j \leq N.$

③如果$j-i \neq \frac{N}{3}$且$j-i \neq \frac{2N}{3}$，則依N非 3 的倍數的方式去計數等腰三角形的數量；

④如果$j-i = \frac{N}{3}$或$j-i = \frac{2N}{3}$，則計等腰三角形的數量為 1；

如果$N-\frac{N}{3}$是y的解之一，則再計 1 個等腰三角形。

這是因為當 N 為 3 的倍數時，會出現正三角形，而二黑點連線恰好是正三角形的其中一邊時，會有 1 個正三角形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$j-i$，恰好是$\frac{N}{3}$或$\frac{2N}{3}$（如圖 14a、圖 14b）；當此二黑點連線恰好是等腰三角形的底時，會有 1 個等腰三角形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$N-\frac{N}{3}$，是y的解（如圖 14c）。



a b c

圖 14. 正十二邊形二黑點位置與 x、y 解的關係

合計①②或③④的數量即為所求。包含黑點i,j的等腰三角形數量記為

$$I(i,j)。 \tag{9}$$

因此，給定黑點編號B，**包含B中任意兩頂點的等腰三角形數量為**

$$\boxed{\sum_{i,j\in B} I(i,j)} \tag{10}$$

那麼，在有 2 個黑點的情形下，正N邊形到底可以構造出幾個以紅點為頂點的等腰三角形呢？根據(6)、(7)及(10)，得出如下兩個式子：

邊數 N 非 3 的倍數之正N邊形，在有 2 個黑點時的等腰三角形個數為

$$\boxed{N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]\times 2+\sum_{i,j\in B} I(i,j)} \tag{11}$$

邊數 N 為 3 的倍數之正N邊形，在有 2 個黑點時的等腰三角形個數為

$$\boxed{N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{2}{3}N-\left(3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-2\right)\times 2+\sum_{i,j\in B} I(i,j)} \tag{12}$$

3. 舉例說明如下：

以正九邊形，給定黑點編號$B=\{1,4\}$為例，x 和 y 的解為

x	1	2	3	4
y	7	5	3	1

重複的等腰三角形個數列舉如下：

$I(i,j)$	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
$j-i$	1	2	3	4
$N-(j-i)$	8	7	6	5
等腰三角形個數	3	3	1	3

註：(1,6)、(1,7)、(1,8)、(1,9)分別為(1,5)、(1,4)、(1,3)、(1,2)之對稱圖形，數量相等故不列出。

因此，正多邊形邊數$N=9$，頂點編號 1、2、3、…、9，給定$B=\{1,4\}$。

其等腰三角形個數為

$$9\times\left\lceil\frac{9-1}{2}\right\rceil-\frac{2}{3}\times 9-\left(3\times\left\lceil\frac{9-1}{2}\right\rceil-2\right)\times 2+I(1,4)=30-20+1=11 \quad ■$$

（四）黑點個數為 3 時，可構造出的等腰三角形個數

當三個黑點恰好能構成等腰三角形，其中有二個邊要等長，也就是二個黑點間的邊數相等，因此有以下三種情形：

三個黑色頂點編號為i、j、k，$1\le i<j<k\le N.$

1. 點 i 與點 j 間的邊數 = 點 j 與點 k 間的邊數（如圖 15a）；
2. 點 j 與點 k 間的邊數 = 點 k 與點 i 間的邊數（如圖 15b）；
3. 點 i 與點 j 間的邊數 = 點 i 與點 k 間的邊數（如圖 15c）。

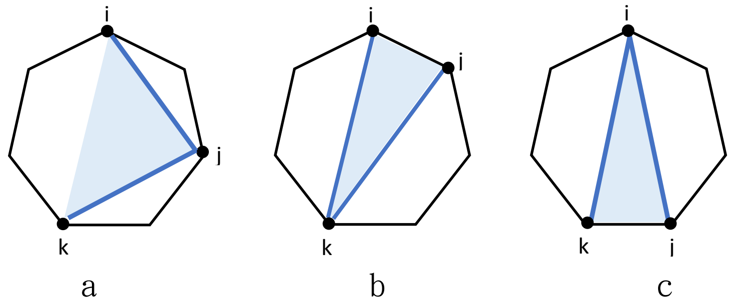


圖 15. 三黑點構成等腰三角形之位置關係

探討點 i、點 j與點 k 之關係，結果如下：

(1)點 i 與點 j 間的邊數 = 點 j 與點 k 間的邊數，此時

$$\underline{\boldsymbol{k-j=j-i}}。$$

(2)點 j 與點 k 間的邊數 = 點 k 與點 i 間的邊數，

此時$(k-j)$本應與$(i-k)$相等，但$i<k$，將i轉換為$(N+i)$，

得到 $k-j=(N+i)-k$

利用等量公理，得 $\underline{\boldsymbol{N=2k-i-j}}$

(3)點 i 與點 j 間的邊數 = 點 i 與點 k 間的邊數，

同理，將i轉換為$(N+i)$，得 $j-i=(N+i)-k$

利用等量公理，得 $\underline{\boldsymbol{N=j+k-2i}}$

符合上列任一條件，計 1 個等腰三角形，若都不符合則計 0 個等腰三角形。

合計數量即為所求。含i,j,k的等腰三角形數量記為

$$I(i,j,k)。\tag{13}$$

因此，給定黑點編號B，**包含B中任意三頂點的等腰三角形數量**為

$$\boxed{\sum_{i,j,k\in B} I(i,j,k)}\tag{14}$$

在有 3 個黑點的情形下，正N邊形可以構造出幾個以紅點為頂點的等腰三角形呢？我們得出如下兩個式子：

邊數 N 非 3 的倍數之正N邊形，在有 3 個黑點時的等腰三角形個數為

$$\boxed{N\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-3\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor\times 3+\sum_{i,j\in B} I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B} I(i,j,k)}\tag{15}$$

邊數 N 為 3 的倍數之正N邊形，在有 3 個黑點時的等腰三角形個數為

$$\boxed{N\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-\frac{2}{3}N-\left(3\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-2\right)\times 3+\sum_{i,j\in B} I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B} I(i,j,k)}\tag{16}$$

（五）計數正 N 邊形，B 個黑點的等腰三角形個數的一般化策略

我們是如何想到要用排容原理進行第二階段研究的呢？其實研究的起源，來自於一個小小的「疑問」。

當得出包含 0 個黑點、1 個黑點、2 個黑點和 3 個黑點的等腰三角形個數後，我們嘗試將它們組合列出一個公式，就是「把 0 個黑點的等腰三角形個數−1 個黑點的等腰三角形個數+2 個黑點重複的等腰三角形個數−3 個黑點重複的等腰三角形個數」，產生了新的疑惑：

為什麼又是加、又是減，後來又要再加呢？

是否有容易理解的解釋方式呢？

我們用三個圓形來表示當黑點個數為 3 個的情況，要計數紅色頂點所能構

造的等腰三角形個數，就是**用 0 個黑點的等腰三角形個數，分別扣除含有 1 個黑點的等腰三角形個數，再分別加回包含 2 個黑點的等腰三角形個數**（如圖 16 之 A、B、C 區域），**最後再減去包含 3 個黑點的等腰三角形個數**（如圖 16 之 D 區域）。老師最後告訴我們，我們在第二階段用的這種研究方法，就是一種「排容原理」的應用。

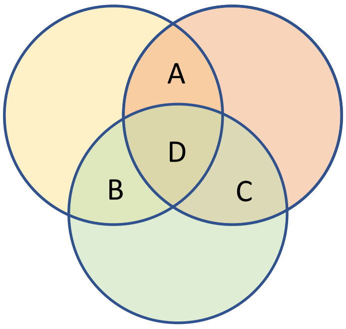


圖 16. 以排容原理說明包含黑點的等腰三角形計數方式

由上述結果，得出計數正N邊形，B個黑點的等腰三角形個數的一般化策略：

1. N不是 3 的倍數，有m個黑色的頂點.

$I_{N,B}$記作給定B，正N多邊形內紅色頂點所能形成的等腰三角形數量。我們有以下等式：

$$I_{N,B}=N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-3m\times\left[\frac{N-1}{2}\right]+\sum_{i,j\in B}I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}I(i,j,k) \tag{17}$$

2. N是 3 的倍數，有m個黑色的頂點.

當正多邊形邊數N為 3 的倍數時，我們得出以下等式：

$$I_{N,B}=N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{2}{3}N-m\times\left(3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-2\right)+\sum_{i,j\in B}I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}I(i,j,k) \tag{18}$$

3. 舉例說明：

以$N=14$，頂點編號 1、2、3、…、14，給定$B=\{1,3,4,9,11\}$。

(1)符合$2x+y=14$之正整數解如表 7。

表 7. $2x+y=14$的正整數解

X	1	2	3	4	5	6
y	12	10	8	6	4	2

(2)分別計數黑點編號含

（1，3）、（1，4）、（1，9）、（1，11）、（3，4）、（3，9）、（3，11）、（4，9）、（4，11）、（9，11）

所能形成的等腰三角形數量，數量分別記作

$I(1,3)$、$I(1,4)$、$I(1,9)$、⋯、$I(9,11)$。

(3)分別計數黑點編號含

（1，3，4）、（1，3，9）、（1，3，11）、（1，4，9）、（1，4，11）、（1，9，11）、（3，4，9）、（3，4，11）、（3，9，11）、（4，9，11）

所能形成的等腰三角形數量，數量分別記作

$I(1,3,4)$、$I(1,3,9)$、$I(1,3,11)$、⋯、$I(4,9,11)$。

因此，邊數$N=14$，黑點個數$m=5$，根據式(13)，紅色頂點所能形成的等腰三角形個數為

$$I_{14,5}=14\times\left[\frac{14-1}{2}\right]-3\times5\times\left[\frac{14-1}{2}\right]+\big(I(1,3)+I(1,4)+I(1,9)+\cdots+I(9,11)\big)$$
$$-\big(I(1,3,4)+I(1,3,9)+I(1,3,11)+\cdots+I(4,9,11)\big)$$
$$=84-90+30-2$$
$$=22$$

四、策略延伸——以紅點為頂點的等腰梯形個數

有了計數等腰三角形的經驗後，我們進一步猜想：**同樣的策略用在計數等腰梯形上**，會不會也適用呢？於是，我們便再次利用排容原理，進行正N邊形中，以紅點為頂點的等腰梯形個數的研究，以下分別討論正多邊形內包含 0 個黑點、包含一個黑

點、二個黑點、三個黑點及四個黑點的等腰梯形個數。

（一）0 個黑點：正多邊形內的等腰梯形個數

依循著尋找等腰三角形的經驗，我們先固定一條邊當上底，找出總共有多少種上底，以及同一個上底所能構造出的等腰梯形個數。而因梯形有二條平行的底，為了避免重複數算，故以較短邊作為上底，較長邊作為下底。

以正九邊形為例，共可找出 3 種上底（見圖 17a 紅線），綠色虛線因為是連接二個頂點中最長的線，無法再找到更長的線當下底，因而不計。

每一種上底所對應的下底數量也不相同，在這三種上底中，最長的上底可畫出 1 種等腰梯形（見圖 17b 藍線），第二長的上底畫出 2 種等腰梯形（見圖 17c 藍線），而最短的上底可畫出 3 種等腰梯形（見圖 17d 藍線）。

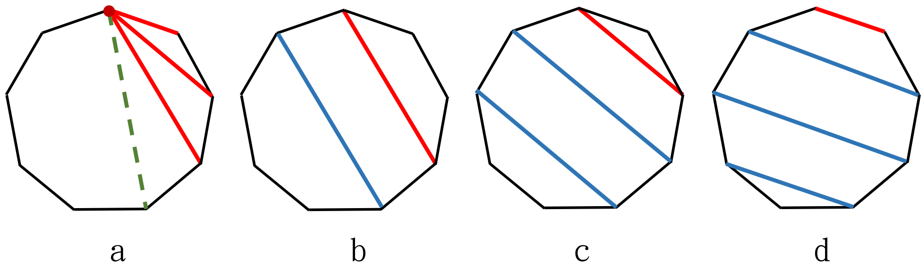


圖 17. 正九邊形可找到的上底種類及相對應的下底數量

再觀察正十二邊形，總共有 4 種上底（見圖 18a 紅線），綠色虛線因為是連接二個頂點中最長的線，無法再找到更長的線當下底，而黃色虛線則因為當它是上底時，另一條下底會和它等長，而形成長方形或正方形，故而不計。

每一種上底所對應的下底數量，亦能找到相同的規律，在這四種上底中，最長的上底可畫出 1 種等腰梯形（見圖 18b 藍線），第二長的上底可畫出 2 種等腰梯形（見圖 18c 藍線），第三長的上底可畫出 3 種等腰梯形（見圖 18d 藍線），而最短的上底可畫出 4 種等腰梯形（見圖 18e 藍線）。

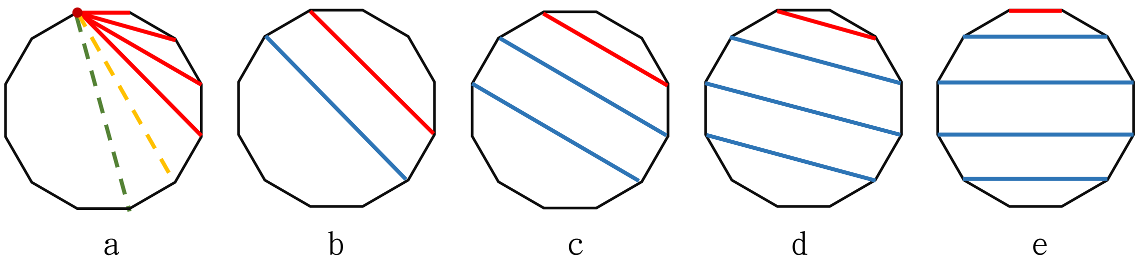


圖 18. 正十二邊形可找到的上底種類及相對應的下底數量

因此，以正N邊形的其中一個頂點作為上底的頂點，我們可以得到，**正N邊形的每一個頂點可以畫出的等腰梯形上底的種類為**

$$\boxed{\left[\frac{N-1}{2}\right]-1} \tag{19}$$

以正十二邊形為例，共有12個頂點，以其中1個頂點作為等腰梯形上底的其中一個頂點，還剩下$(12-1)$個頂點，每2個頂點互相對稱，不重複計數，故$(12-1)\div 2=5\ldots 1$，本可畫出 5 種上底，但由於其中最長的一條當上底時，會與另一條形成長方形或正方形，故而不計，因此正十二邊形的一個頂點可畫出$\left[\frac{12-1}{2}\right]-1=4$ 種等腰梯形的上底。

而由正十二邊形其中一個頂點出發所畫出的四種上底中，最長的上底可畫出 1 種等腰梯形，次長的上底可畫出 2 種等腰梯形，等腰梯形數量依序遞增，最短上底可畫出 4 種等腰梯形，正十二邊形有 12 個頂點，總共可畫出 $1\times 12+2\times 12+3\times 12+4\times 12=(1+2+3+4)\times 12$ 種等腰梯形，因此，正十二邊形可構造出的等腰梯形個數為

$$\frac{(1+4)\times 4}{2}\times 12$$

結合式(19)，正多邊形最長上底可畫出 1 種等腰梯形，次長上底可畫出 2 種等腰梯形，等腰梯形數量依序遞增，則最短上底可畫出（$\left[\frac{N-1}{2}\right]-1$）種等腰梯形，因此正$N$邊形可畫出的等腰梯形個數為

$$\left\{1+2+3+\cdots+\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\right\}\times N$$

$1,2,3\ldots\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)$的總和可用梯形面積公式表示為

$$\frac{\left\{1+\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\right\}\times\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)}{2}\times N$$

$$=\frac{\left[\frac{N-1}{2}\right]\times\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)}{2}\times N$$

所以，**正N邊形可畫出的等腰梯形個數為**

$$\boxed{N \times \frac{\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \times \left(\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 1 \right)}{2}} \tag{20}$$

（二）黑點個數為 1 時，可構造出的等腰梯形個數

以正九邊形為例，從一個頂點出發可畫出$1+2+3=6$種等腰梯形，當加入一個黑點後，由於等腰梯形有四個頂點，所以每一種等腰梯形各會遇到 4 次黑點（如圖 19），共要扣除$4 \times (1+2+3) = 24$個包含黑點的等腰梯形。

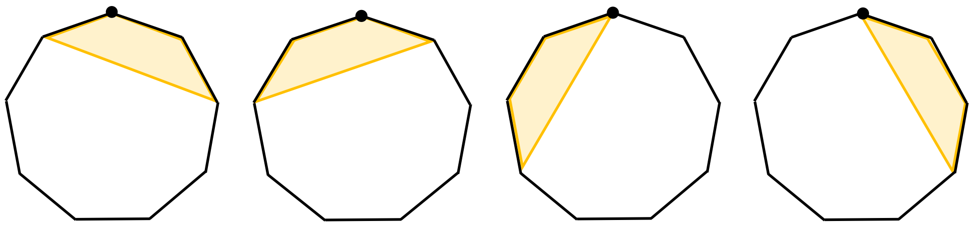


圖 19. 每一種等腰梯形各會遇到 4 次黑點

因此，**正N邊形中，包含 1 個黑點的等腰梯形個數為**

$$\boxed{4 \times \frac{\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \times \left(\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 1 \right)}{2}} \tag{21}$$

整合式(20)及(21)，**正N邊形在有 1 個黑點時，所能構造出的等腰梯形個數為**

$$\boxed{N \times \frac{\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \times \left(\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 1 \right)}{2} - 4 \times \frac{\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \times \left(\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 1 \right)}{2}} \tag{22}$$

（三）黑點個數為 2 時，可構造出的等腰梯形個數

黑點位置不同，所重複扣除的等腰梯形個數亦不相同，且等腰梯形各邊所對應的正多邊形邊數總和，符合以下的公式：

設等腰梯形兩腰對應的邊數為x，上底對應邊數為y，下底對應邊數為z，則

$$\boxed{2x + y + z = N} \quad \text{，其中 } y < z\text{。} \tag{23}$$

而 x、y、z 的解與黑點編號，有如下之關係：

設二黑色頂點編號為i，j，$1 \le i < j \le N$. ①如果$j-i$或$N-(j-i)$是x的解之一，則計 2 個等腰梯形； 如果$j-i$或$N-(j-i)$是y的解之一，則計 1 個等腰梯形； 如果$j-i$或$N-(j-i)$是 z 的解之一，則計 1 個等腰梯形。 ②如果$j-i$或$N-(j-i)$是$x+y$的解之一，則計 2 個等腰梯形。

當二黑點連線是等腰梯形的腰時，因其有 2 個腰，故會有 2 個等腰梯形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$j-i$及$N-(j-i)$是x的解（如圖 20a、圖 20b）；而當二黑點連線是等腰梯形的上底時，因只有 1 個上底，故會有 1 個等腰梯形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$j-i$或$N-(j-i)$，是y的解（如圖 20c）；當二黑點連線是等腰梯形的下底時，因只有 1 個下底，故會有 1 個等腰梯形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$j-i$或$N-(j-i)$，是z的解（如圖 20d）；當二黑點連線是等腰梯形的對角線時，因有 2 條對角線，故會有 2 個等腰梯形被重複計數，此時二黑點所對應的邊數$j-i$或$N-(j-i)$，是$(x+y)$的解（如圖 20e）。

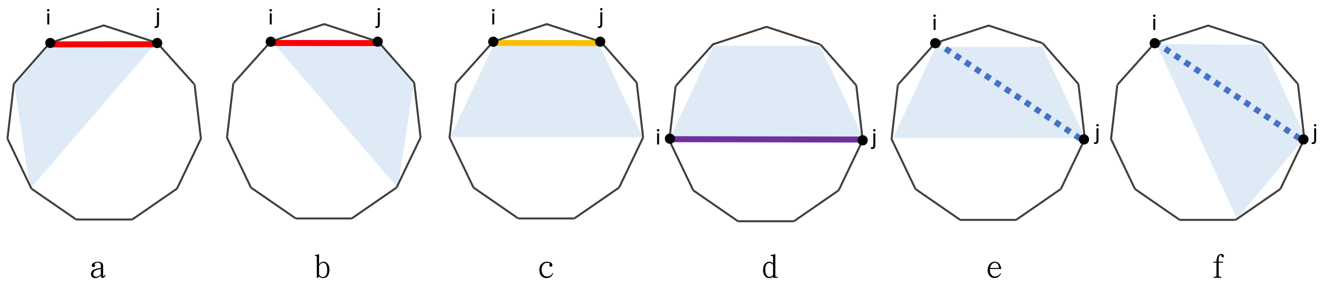


圖 20. 正十一邊形二黑點位置與 x、y、z 解的關係

合計①②的數量即為所求。包含黑點i,j的等腰梯形數量記為

$$T(i,j)。 \tag{24}$$

因此，給定黑點編號B，**包含B中任意兩頂點的等腰梯形數量**為

(25)

$$\sum_{i,j\in B} T(i,j)$$

根據式(22)及(25)，**正N邊形在有 2 個黑點時，所能構造出的等腰梯形個數為**

$$N \times \frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} - 2\times 4\times\frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} + \sum_{i,j\in B} T(i,j) \tag{26}$$

（四）黑點個數為 3 時，可構造出的等腰梯形個數

當三個黑點恰好是等腰梯形的頂點時，兩兩黑點連線所對應的其中二個邊，必為一個底邊及一個腰的組合，兩兩黑點連線共可連出三條連線，每一條連線皆可當等腰梯形的底邊，因此計 3 個等腰梯形（如圖 21）。

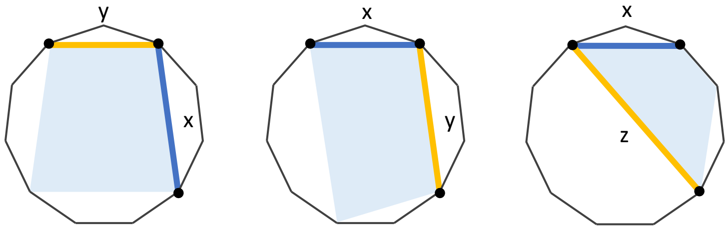


圖 21. 三黑點連線必有 1 個腰與 1 個底邊

當其中二條連線相等時，二條黑點連線只能形成上底與腰的組合，無法形成下底與腰的組合，因此計 2 個等腰梯形（如圖 22）。

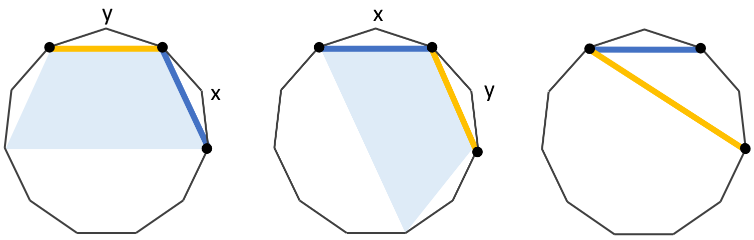


圖 22. 二連線相等，計 2 個等腰梯形

當其中一條連線恰為$\frac{N}{2}$時，此連線是正 N 邊形中最長的連線，只能當下底，計 1 個等腰梯形，因為其他二條連線若當底邊，就會形成長方形或正方形（如圖 23）。

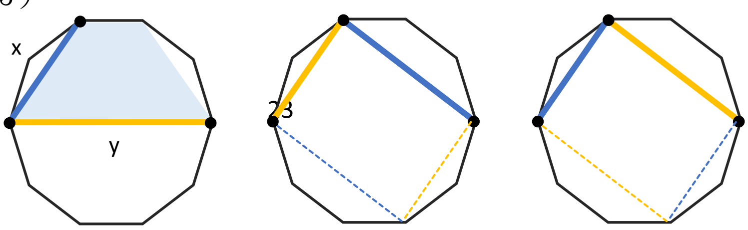


圖 23.　其中一連線為 $\frac{N}{2}$，計 1 個等腰梯形

當其中二條連線相等，且第三條連線為二條連線之和時，三個黑點恰為正三角形頂點，因此無法形成底與腰的組合，計 0 個等腰梯形（如圖 24）。

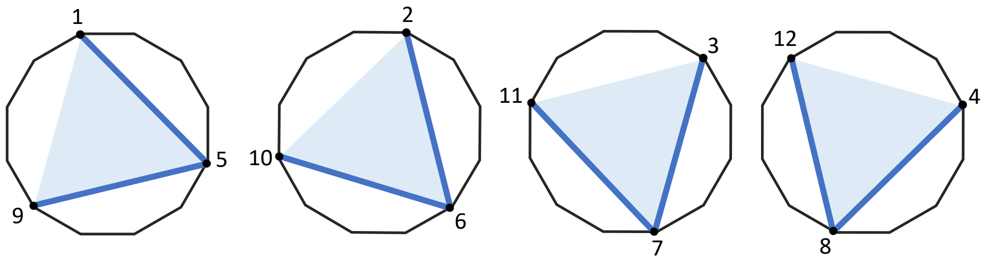


圖 24.　三黑點形成正三角形，計 0 個等腰梯形

因此，黑點編號有如下關係：

三個黑色頂點編號為i、j、k，$1 \le i < j < k \le N$.

①如果$(j-i)$、$(k-j)$或$(k-i)$任二邊=$\frac{N}{3}$，且第三邊=$\frac{2N}{3}$，計 0 個等腰梯形；

②如果$(j-i)$、$(k-j)$或$(k-i)$=$\frac{N}{2}$，計 1 個等腰梯形；

③如果任兩邊相等，計 2 個等腰梯形，三黑點關係如下：

$\underline{\boldsymbol{k-j=j-i}}$，或$\underline{\boldsymbol{N=2k-i-j}}$，或$\underline{\boldsymbol{N=j+k-2i}}$

（與黑點數為 3 的等腰三角形個數判別方式相同，見頁 15 之說明）

④未符合①、②及③，則計 3 個等腰梯形。

合計①②③④的數量即為所求。包含黑點i, j, k的等腰梯形數量記為

$$T(i,j,k)。 \tag{27}$$

因此，給定黑點編號B，**包含B中任意兩頂點的等腰梯形數量**為

$$\boxed{\sum_{i,j,k \in B} T(i,j,k)} \tag{28}$$

根據式(26)及式(28)，**正N邊形在有 3 個黑點時，所構造出的等腰梯形個數**

(29)

為

$$N \times \frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right) \times \left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} - 3 \times 4 \times \frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right) \times \left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} + \sum_{i,j \in B} T(i,j) - \sum_{i,j,k \in B} T(i,j,k)$$

（五）黑點個數為 4 時，可構造出的等腰梯形個數

在什麼情況下，4 個黑點會恰好構成等腰梯形呢？我們從等腰梯形的性質著手，因為等腰梯形的二條對角線等長（如圖 25a），只要滿足以下條件即可構成等腰梯形：

頂點$\boldsymbol{i}$與頂點$\boldsymbol{k}$間的邊數 = 頂點$\boldsymbol{j}$與頂點$\boldsymbol{l}$間的邊數

，其中黑色頂點編號為i、j、k、l，$1 \le i < j < k < l \le N.$

此時，點 i、點 j、點 k 與點 l 有如下之關係：

① $\underline{\boldsymbol{k-i=l-j}}$ 或
② $\underline{\boldsymbol{k-i=N+j-l}}$

符合上列任一條件，計 1 個等腰梯形，若都不符合則計 0 個等腰梯形。

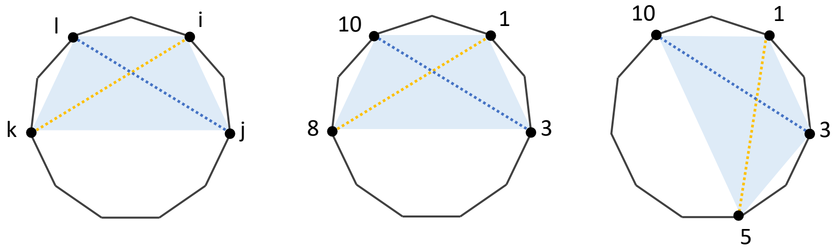


圖 25. 四黑點構成等腰梯形之位置關係

以正十一邊形為例，黑點編號為$1,3,8,10$，此時$8-1=10-3$（如圖 25b），此時

$\underline{\boldsymbol{k-i=l-j}}$。

而當黑點編號為$1,5$，此時$5-1=4$，編號1與編號 5間對應的邊數是 4，但黑點編號$3,10$，$10-3=7$，算出的是另一端對應的邊數，故需用$11-7=4$找出對應的邊數（如圖 25c），此時

$$k-i=N-(l-j)$$

去括號後得到

$$\underline{\boldsymbol{k-i=N+j-l}}$$

合計數量即為所求。含i,j,k,l的等腰梯形數量記為

$$T(i,j,k,l)。 \tag{30}$$

因此，給定黑點編號B，**包含$\boldsymbol{B}$中任意四頂點的等腰梯形數量為**

$$\boxed{\sum_{i,j,k,l\in B} T(i,j,k,l)} \tag{31}$$

根據式(29)及式(31)，**正$\boldsymbol{N}$邊形在有 4 個黑點時，所能構造出的等腰梯形個數為**

$$N\times\frac{(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2}-4\times4\times\frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} +\sum_{i,j\in B}T(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}T(i,j,k)+\sum_{i,j,k,l\in B}T(i,j,k,l) \tag{32}$$

（六）計數正 N 邊形，B 個黑點的等腰梯形個數的一般化策略

根據上述研究得出計數正N邊形，B個黑點的等腰梯形個數的一般化策略如下：***正$\boldsymbol{N}$邊形中，有$\boldsymbol{m}$個黑色的頂點***，$T_{N,B}$記作給定B，正N多邊形內紅色頂點所能形成的等腰梯形數量。我們有以下等式：

$$\boxed{T_{N,B}=N\times\frac{(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2}-4m\times\frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} +\sum_{i,j\in B}T(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}T(i,j,k)+\sum_{i,j,k,l\in B}T(i,j,k,l)} \tag{33}$$

舉例說明，以$N=12$，頂點編號 1、2、3、⋯、11，給定$B=\{1,3,4,9,11\}$。

(1)符合$2x+y+z=12$之正整數解如表 8。

表 8. $2x+y+z=12$的正整數

X	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
y	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
z	9	8	7	6	7	6	5	5	4	3

(2)分別計數黑點編號含

（1，3）、（1，4）、（1，9）、（1，11）、（3，4）、（3，9）、（3，11）、（4，9）、（4，11）、（9，11）

所能形成的等腰三角形數量，數量分別記作

$$I(1,3)、I(1,4)、I(1,9)、\cdots、I(9,11)。$$

(3)分別計數黑點編號含

（1，3，4）、（1，3，9）、（1，3，11）、（1，4，9）、（1，4，11）、（1，9，11）、（3，4，9）、（3，4，11）、（3，9，11）、（4，9，11）

所能形成的等腰梯形數量，數量分別記作

$$T(1,3,4)、T(1,3,9)、T(1,3,11)、\cdots、T(4,9,11)。$$

(4)分別計數黑點編號含

（1，3，4，9）、（1，3，4，11）、（1，3，9，11）、（1，4，9，11）、（3，4，9，11）

所能形成的等腰梯形數量，數量分別記作

$$T(1,3,4,9)、T(1,3,4,11)、T(1,3,9,11)、T(1,4,9,11)、T(3,4,9,11)。$$

因此，邊數$N=12$，黑點個數$m=5$，根據式(33)，紅色頂點所能形成的等腰梯形個數為

$$T_{12,5}=12\times\frac{\left(\left[\frac{12-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{12-1}{2}\right]}{2}-4\times5\times\frac{\left(\left[\frac{12-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{12-1}{2}\right]}{2}$$

$$+（T(1,3)+T(1,4)+T(1,9)\ +\cdots+T(9,11)）$$

$$-（T(1,3,4)+T(1,3,9)+T(1,3,11)\ +\cdots+T(4,9,11)）$$

$$+\big(T(1,3,4,9)+T(1,3,4,11)+T(1,3,9,11)+T(1,4,9,11)+T(3,4,9,11)\big)$$

$$=120-200+107-21+1$$

$$=7$$

伍、結論

一、　給出科學研習月刊 58 卷第 2 期「七邊形之謎」的解答。

二、　利用排容原理，**在正N邊形中，給定任意B個黑點（$\boldsymbol{B=0,1,2,\ldots}$），給出計數等腰三角形個數的一般化策略與公式**，列表呈現如下：

表 9. 包含 0 個黑色頂點~3 個黑色頂點之等腰三角形個數

正 N 邊形邊數 / 黑點個數	N不是 3 的倍數	N是 3 的倍數
0 個黑點	$N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]$	$N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{2}{3}N$
1 個黑點	$3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]$	$3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-2$
2 個黑點	$\sum_{i,j\in B} I(i,j)$	
	①$j-i$或$N-(j-i)$是x的解，計 2 個； ②$j-i$或$N-(j-i)$是 y的解，計 1 個。	③$j-i\neq\frac{N}{3}$且$\neq\frac{2N}{3}$，依N非 3 的倍數計數。 ④$j-i=\frac{N}{3}$或$\frac{2N}{3}$，計 1 個；$N-\frac{N}{3}$是y的解，再計 1 個。
3 個黑點	$\sum_{i,j,k\in B} I(i,j,k)$	
	①$k-j=j-i$。 ②$N=2k-i-j$。 ③$N=\mathrm{j}+k-2i$ 符合三條件任一條，計 1 個等腰三角形；	

	都不符合則計 0 個等腰三角形。

表 10. 正 N 邊形有 m 個黑色頂點，紅色頂點可構造出之等腰三角形個數

N不是 3 的倍數	$I_{N,B}=N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-3m\times\left[\frac{N-1}{2}\right]+\sum_{i,j\in B}I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}I(i,j,k)$
N是 3 的倍數	$I_{N,B}=N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{2}{3}N-m\times\left(3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-2\right)+\sum_{i,j\in B}I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}I(i,j,k)$

三、 利用排容原理，**在正N邊形中，給定任意B個黑點（$\boldsymbol{B=0,1,2,\ldots}$），給出計數等腰梯形個數的一般化策略與公式**。列表呈現如下：

表 11. 包含 0 個黑色頂點~4 個黑色頂點之等腰梯形個數

黑點個數	等腰梯形個數
0 個黑點	$N\times\frac{\left[\frac{N-1}{2}\right]\times\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)}{2}$
1 個黑點	$4\times\frac{\left[\frac{N-1}{2}\right]\times(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1)}{2}$
2 個黑點	$\sum_{i,j\in B}T(i,j)$
	①$j-i$或$N-(j-i)$是x的解，計 2 個； $j-i$或$N-(j-i)$是y的解，計 1 個； $j-i$或$N-(j-i)$是 z 的解，計 1 個。 ②$j-i$或$N-(j-i)$是$x+y$的解，計 2 個。
3 個黑點	$\sum_{i,j,k\in B}T(i,j,k)$
	①$(j-i)$、$(k-j)$或$(k-i)$任二邊=$\frac{N}{3}$，且第三邊=$\frac{2N}{3}$，計 0 個；

	②$(j-i)$、$(k-j)$或$(k-i)$=$\frac{N}{2}$，計 1 個； ③$k-j=j-i$，或$N=2k-i-j$，或$N=j+k-2i$，計 2 個； ④未符合①、②及③，計 3 個。
4 個黑點	$\sum_{i,j,k,l\in B} I(i,j,k,l)$
	①$k-i=l-j$ ②$k-i=N+j-l$ 符合二條件任一條，計 1 個等腰梯形； 都不符合則計 0 個等腰梯形。

表 12. 正 N 邊形內有 m 個黑色頂點，紅色頂點可構造出之等腰梯形個數

$$T_{N,B} = N \times \frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} - 4m \times \frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2} + \sum_{i,j\in B} T(i,j) - \sum_{i,j,k\in B} T(i,j,k) + \sum_{i,j,k,l\in B} T(i,j,k,l)$$

陸、參考資料

1. 游森棚（2019）。七邊形之謎。*科學研習月刊，58*(2)。取自 https://www.ntsec.edu.tw/Article.aspx?a=15539
2. 紀珮羽、吳珈榛、黃薇均（2020）。*正 n 多邊形中的等腰個數這樣算*。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會。國中組數學科。
3. 鍾秉樺、黃裕翔、歐陽嘉駿（2020）。*「形形相印」—探討正多邊形內等腰三角形個數*。金門地區第 60 屆中小學科學展覽會。國中組數學科。
4. 佚名（2020）。*三角奇連—研究正 n 邊形中等腰三角形個數之規律*。屏東縣第 60 屆中小學科學展覽會。國中組數學科。
5. 李源順（主編）（2020）。*國民小學五下數學第十單元*。臺南市：南一。

【評語】080414

1. 本研究從「科學研習月刊」一個有趣的數學題引發探究的靈感，經由一連串的提問，衍生出許多可探討的問題；作者利用排容原理進行研究，有系統地分析問題、用圖示協助、並清楚的說明各種情境的考量與對應的解法，循序解決問題，然後得出一般化的結果，並進一步延伸探討正多邊形內的等腰梯形個數，給出計數等腰梯形個數的一般化策略與公式，研究歷程堪稱完整。

2. 能先針對過去的相關研究進行討論與分析，從而指出本研究與過去研究不同之處，值得肯定；可以考慮改以表列呈現的方式，應更能令讀者一目了然。

作品簡報

筭腰叢林生存法則

國小組
數學科
080414

前言

研究問題

正七邊形的頂點中有五個紅點，二個黑點，用紅點當頂點可以連成幾個等腰三角形？

圖1. 黑點位置有多種變化，影響等腰三角形個數。

文獻探討

- 所探討圖形僅限於等腰三角形。
- 直接計算頂點為紅點的等腰三角形個數，最多探討到的黑點個數僅為4個。

研究目的

- 利用**排容原理**，探討**任意*B*個黑點**的正N邊形中，計數以紅點為頂點之**等腰三角形**個數的一般化策略，其中$N \geq 4$，$B \geq 0$。
- 利用**排容原理**，探討**任意*B*個黑點**的正N邊形中，計數以紅點為頂點之**等腰梯形**個數的一般化策略，其中$N \geq 5$，$B \geq 0$。

等腰三角形個數

恰包含0個黑色頂點

●N非3的倍數

$$N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]$$

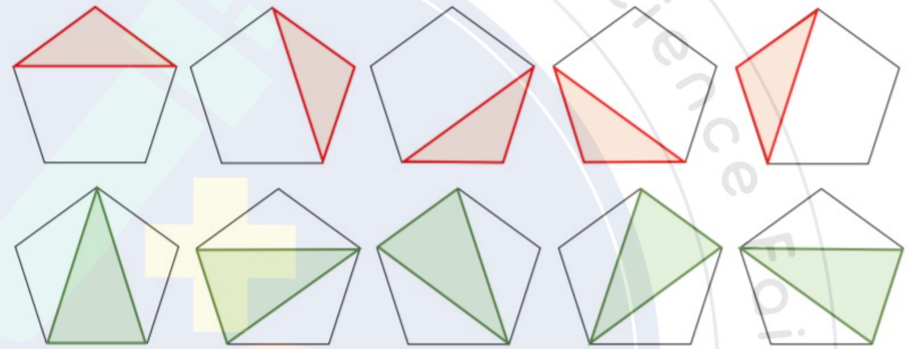


圖2. 正五邊形可構造出$\left[\frac{N-1}{2}\right]$類等腰三角形，共計$N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]$個

●N是3的倍數

$$N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{2}{3}N$$

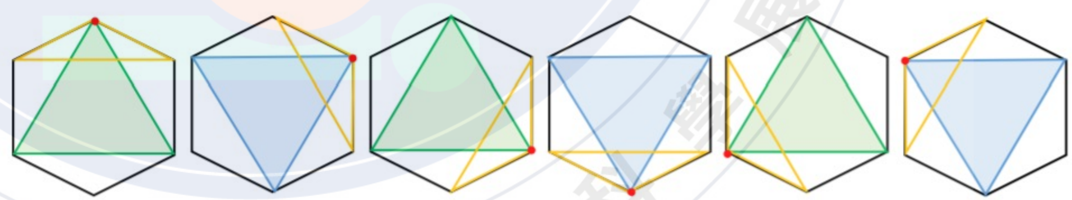


圖3. 每一類正三角形都有2個被重複計數，共計$\frac{2}{3}N$個

等腰三角形個數

恰包含1個黑色頂點

●N非3的倍數

$$N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]$$

圖4. 每一種等腰三角形會遇到 3 次黑點

●N是3的倍數

$$N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{2}{3}N-\left(3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-2\right)$$

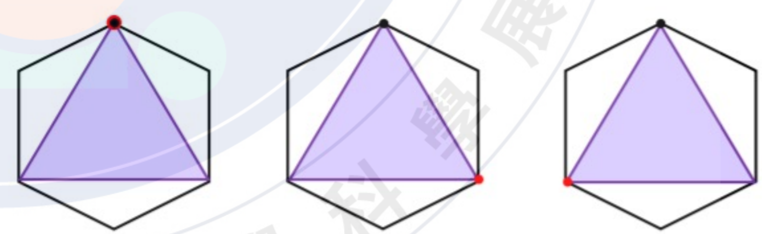


圖5. 需扣除被重複計數的2個正三角形

等腰三角形個數

恰包含2個黑色頂點

$$2x + y = N$$

表1. $2x + y = 11$的正整數解

x	y
1	9
2	7
3	5
4	3
5	1

表2. $2x + y = 12$的正整數解

x	y
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

●N非3的倍數

設二黑色頂點編號為i，j，$1 \le i < j \le N.$

① $j-i$ 或 $N-(j-i)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的解，計2個；

② $j-i$ 或 $N-(j-i)$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的解，計1個。

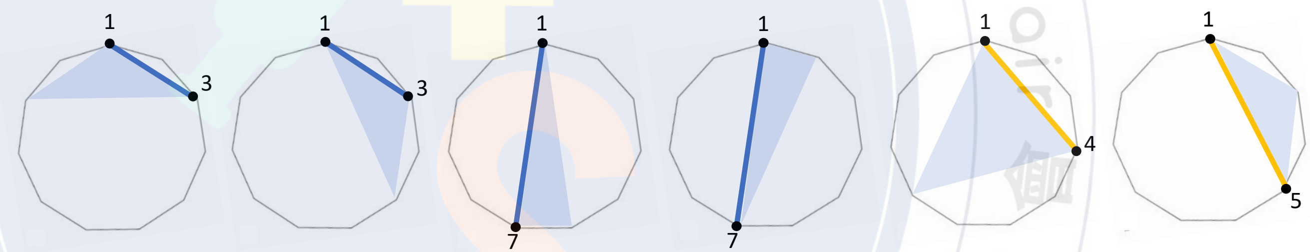


圖6. 正十一邊形二黑點位置與x、y的關係

●N是3的倍數

③ $j-i = \frac{N}{3}$ 或 $\frac{2N}{3}$，計1個；

④ $\frac{2N}{3}$是 $\boldsymbol{y}$ 的解，計1個。

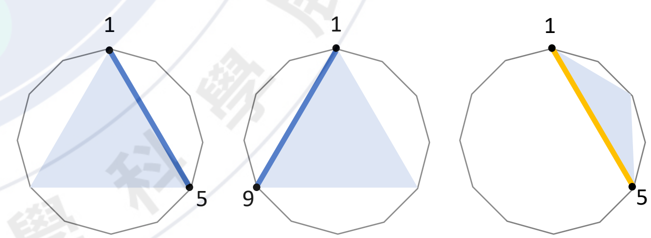


圖7. 正十二邊形二黑點位置與x、y的關係

等腰三角形個數

恰包含3個黑色頂點

需扣除1個被重複計數的等腰三角形。有如下三種情形：

- 點i與點j間的邊數=點j與點k間的邊數，即 $\boldsymbol{k-j=j-i}$
- 點j與點k間的邊數=點k與點i間的邊數，即$\boldsymbol{N=2k-i-j}$
- 點i與點j間的邊數=點i與點k間的邊數，即$\boldsymbol{N=j+k-2i}$

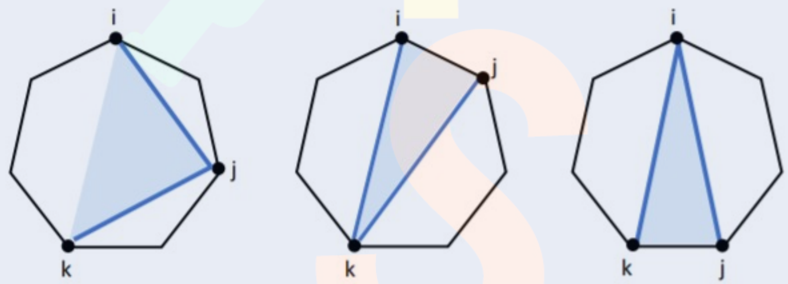


圖8. 三黑點構成等腰三角形之位置關係

等腰三角形個數的一般化公式

- N非3的倍數 $N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-3m\times\left[\frac{N-1}{2}\right]+\sum_{i,j\in B} I(i,j)-\sum_{ij,k\in B} I(i,j,k)$
- N是3的倍數 $N\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-\frac{2}{3}N-m\times\left(3\times\left[\frac{N-1}{2}\right]-2\right)+\sum_{i,j\in B} I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B} I(i,j,k)$

等腰梯形個數

恰包含0個黑色頂點

- 從一頂點出發的**<u>上底</u>**個數為

$$\left[\frac{N-1}{2}\right]-1$$

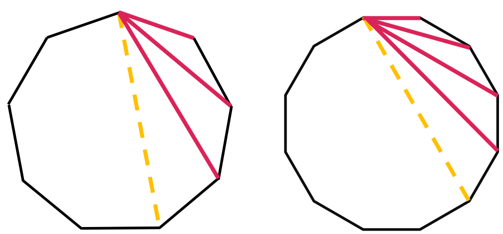


圖9. 所畫之不等長線段，有一條無法做上底

- 正N邊形所能構造出的等腰梯形個數為

$$N\times\frac{\left[\frac{N-1}{2}\right]\times\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)}{2}$$

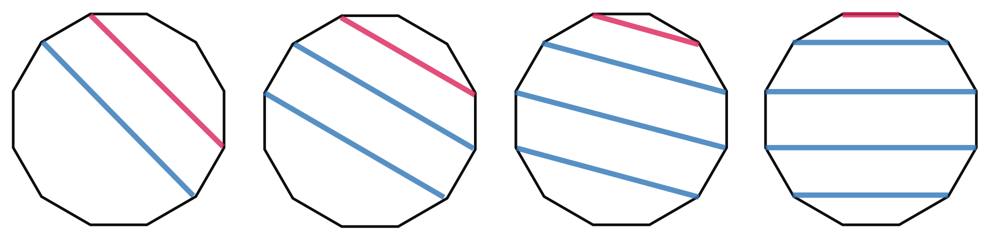


圖10. 每一種上底可構造出的等腰梯形數量依序遞增

恰包含1個黑色頂點

$$N\times\frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2}-\mathbf{4}\times\frac{\left(\left[\frac{\mathbf{N-1}}{\mathbf{2}}\right]-\mathbf{1}\right)\times\left[\frac{\mathbf{N-1}}{\mathbf{2}}\right]}{\mathbf{2}}$$

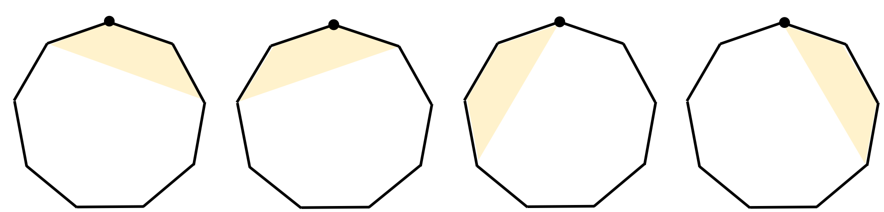


圖11. 每一種等腰梯形會遇到4次黑點

等腰梯形個數

恰包含2個黑色頂點

$2x + y + z = N$ ，其中 $y < z$。

設二黑色頂點編號為i，j，$1 \leq i < j \leq N$.

①$j - i$ 或 $N - (j - i)$ 是 x 的解，計2個；

$j - i$ 或 $N - (j - i)$ 是 y 的解，計1個；

$j - i$ 或 $N - (j - i)$ 是 z 的解，計1個。

②$j - i$ 或 $N - (j - i)$ 是 $x + y$ 的解，計2個。

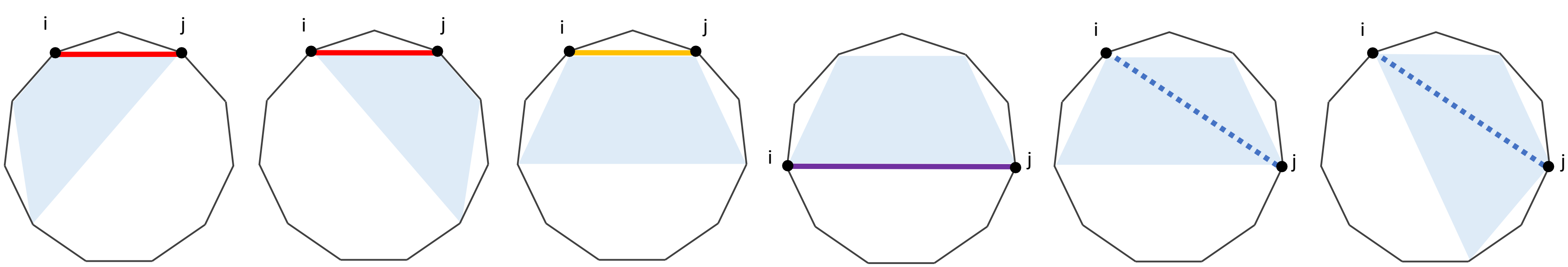


圖12. 正十一邊形二黑點位置與x、y、z解的關係

等腰梯形個數

恰包含3個黑色頂點

連接兩兩黑點所形成的邊，其中二邊只能為**一個底邊及一個腰**，有以下四種情形：

- 每一條連線皆可當等腰梯形的**底邊**，計3個。

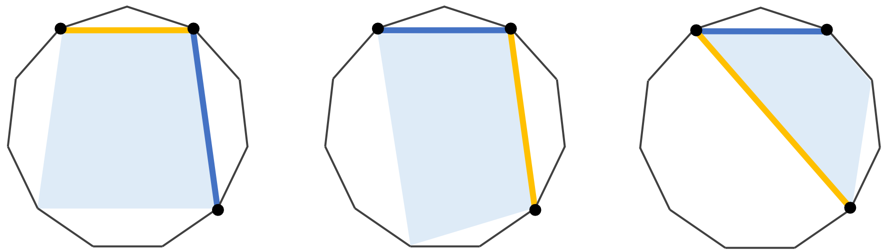


圖13. 二條連線各為一個底邊與一個腰

- 其中二條邊**等長**，計2個。

$$\boldsymbol{k-j=j-i}\text{，或}\boldsymbol{N=2k-i-j}\text{，或}\boldsymbol{N=j+k-2i}$$

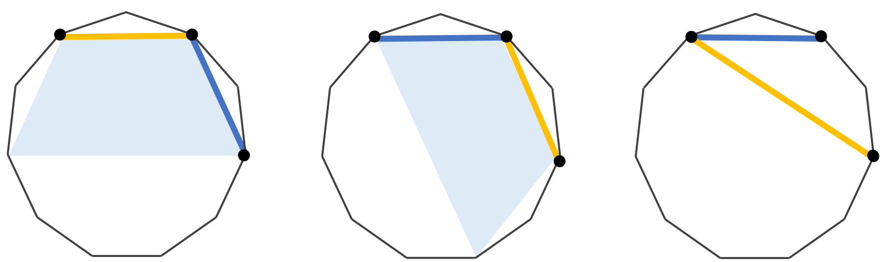


圖14. 二連線等長，計2個等腰梯形

等腰梯形個數

恰包含3個黑色頂點(續前頁)

- 其中一條連線恰為 $\frac{N}{2}$ 時，計1個。

$$j-i=\frac{N}{2}\text{，或}k-j=\frac{N}{2}\text{，或}k-i=\frac{N}{2}$$

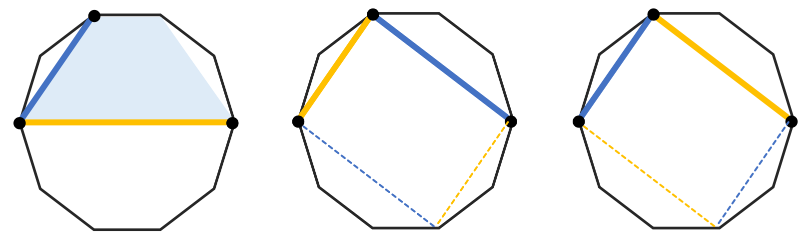


圖15. 其中一連線為$\frac{N}{2}$，計1個等腰梯形

- 三個黑點恰為**正三角形頂點**，計0個。

$$\text{任二邊}=\frac{N}{3}\text{，且第三邊}=\frac{2N}{3}$$

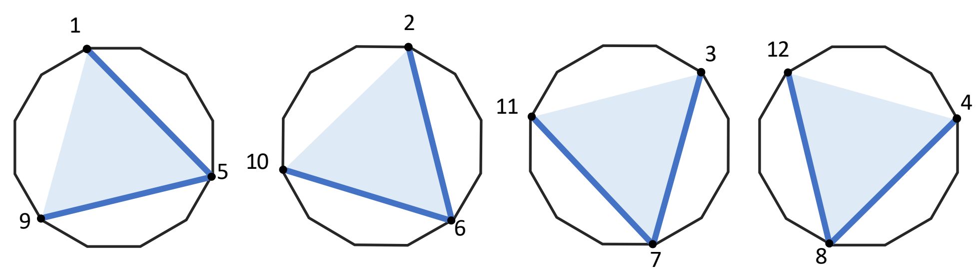


圖16.三黑點形成正三角形，計0個等腰梯形

等腰梯形個數

恰包含4個黑色頂點

有1個等腰梯形被重複計數，此時二條對角線等長。

點i與點k間的邊數=點j與點l間的邊數

① $k-i=l-j$

② $k-i=N+j-l$

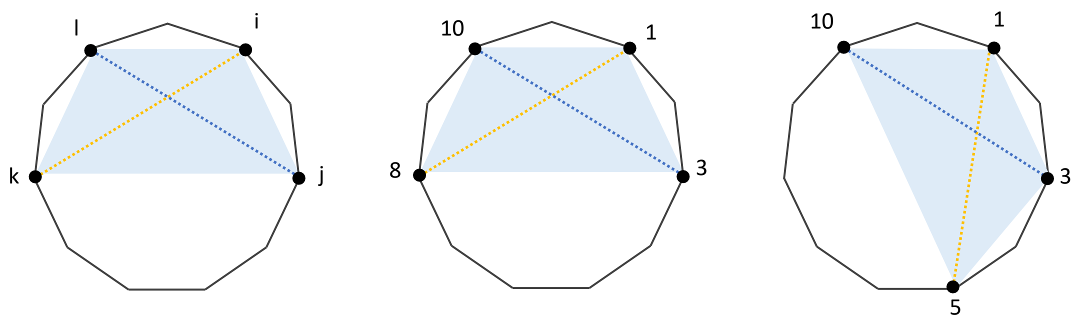


圖17. 四黑點構成等腰梯形之位置關係

等腰梯形個數的一般化公式

$$N\times\frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2}-4m\times\frac{\left(\left[\frac{N-1}{2}\right]-1\right)\times\left[\frac{N-1}{2}\right]}{2}+\sum_{i,j\in B}T(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}T(i,j,k)+\sum_{i,j,k,l\in B}T(i,j,k,l)$$

結論

給出在正N邊形中，給定**任意m個黑點（$m=0,1,2,\ldots$），等腰三角形個數及等腰梯形個數的一般式**。

等腰三角形

- N非3的倍數 $N\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-3m\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor+\sum_{i,j\in B}I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}I(i,j,k)$
- N是3的倍數 $N\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-\frac{2}{3}N-m\times\left(3\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-2\right)+\sum_{i,j\in B}I(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}I(i,j,k)$

等腰梯形

$$N\times\frac{\left(\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-1\right)\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor}{2}-4m\times\frac{\left(\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor-1\right)\times\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor}{2}+\sum_{i,j\in B}T(i,j)-\sum_{i,j,k\in B}T(i,j,k)+\sum_{i,j,k,l\in B}T(i,j,k,l)$$

參考資料

1. 游森棚（2019）。七邊形之謎。*科學研習月刊，58*(2)。紀珮羽、吳珈榛、黃薇均（2020）。
2. 鍾秉樺、黃裕翔、歐陽嘉駿（2020）。*「形形相印」—探討正多邊形內等腰三角形個數*。金門地區第60屆中小學科學展覽會。國中組數學科。
3. 佚名（2020）。*三角奇連—研究正n邊形中等腰三角形個數之規律*。屏東縣第60屆中小學科學展覽會。國中組數學科。
4. 李源順（主編）（2020）。*國民小學五下數學第十單元*。臺南市：南一。