中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

探究精神獎

080412

奇偶互換-怎樣回到原位

學校名稱：桃園市大溪區仁和國民小學

作者：	指導老師：
小五　尤子榕	林徹輝
小五　王子沂	鄧達鈞
小五　陳柏瑋	
小五　林柏勳	
小四　范證淳	

關鍵詞：交換奇數、迴圈、循環

摘要

本研究為探討奇數 n 分為(a, b)整數對後，不斷取偶數除以 2 加於奇數上的交換過程。
我們從交換過程推導出**交換元素 ($H\times2^k$，($n- H\times2^k$))**，並找到交換奇數集合 H，透過交換奇數列表能更快找出數字 n 中有幾個循環，另外也發現 $n_x=2^{(x+1)k}+2^{x\times k}+2^{(x-1)k}+....2^{3k}+2^{2k}+2^k+1$ 時不可交換的數字規律。
交換奇數列表在階段 k 時，可知$[n-(3\times2^k+1)]\div2^{k+1}=s_k...q_k$，若 $q_k<2^k$，則階段 k 最小的數字= q_k+2^k，若 $q_k>2^k$，則階段 k 最小的數字= q_k-2^k。
依照發現，可列出數字 n 的所有交換奇數列。
之後，發現交換奇數的排列呈現迴圈規律，並進一步找到形成循環的條件與糖果數目左右交換的關鍵點。
此外還找到了位置移動數列：$y\times(2^k)^0, y\times(2^k)^1, y\times(2^k)^2,\ y\times(2^k)^3\cdots\cdots y\times(2^k)^{(x-1)}$
以及**位置移動級數 $s(k, y, x)= y_x[1-(-2^k)^x)]/(2^k+1)$**
透過位置移動數列可更快速的列出迴圈，達到快速降階，更迅速找出循環的目標。

壹、研究動機

在科學研習月刊上，我們看到了交換糖果問題。
題目大概描述為：「有兩堆糖果放在左右兩盤,，左盤有四個,，右盤有五個。每一次都從偶數堆的糖果拿一半放到奇數堆去.，然後反覆動作。經過三次動作後可以變成左邊五個，右邊四個?又，如果一開始左盤 a 個，右盤 b 個，什麼樣的(a, b)可以經由若干次操作後變成(b, a)？」
在經過實驗和探討後，我們透過交換奇數列表快速地解開月刊上的問題，我們對於在研究過程中還發現的：給一個正奇數 n，n 分解所產生的交換奇數要如何形成循環?有幾個循環?循環中的迴圈有什麼規律?迴圈形成的結構與大小以及找出位移植一般式規律…等問題也感到興趣。以下就是我們的探討。

貳、研究目的

一、透過列舉交換過程，觀察交換時的規律，並找出其中關鍵部分。

(一)觀察交換過程，找到交換奇數進行交換過程的降階

(二)以 excel 程式運算交換過程

(三)利用疊代法找到循環中的全部交換奇數

二、將交換奇數製成表格，透過表格的規律將其一般化。

(一)找到交換奇數列表中各階段的數目與最小值

(二)運用交換奇數與位置的對應，尋找數字 n 有幾個循環

(三)透過交換奇數與位置的對應找到直線著色問題的答案

三、找到糖果數字可左右交換的特例。

(一)找到可交換的數對

(二)找到不可交換的數對

(三)透過數對的關係證明特例的正確性

四、根據交換奇數的排列找到迴圈結構，並觀察其規律。

(一)透過迴圈結構圖與統整表找到迴圈的一般式

(二)利用位置移動值=(位置值-交換奇數)÷2 找到在迴圈上每個點移動的距離

(三)利用位置移動值結束找到各迴圈開頭與結尾的格數差距

(四)找到位置移動值數列與級數一般式

五、利用位置移動值表格，更快速的找出迴圈，達到快速降階的目的。

(一)利用交換奇數做交換過程的第一次降階

(二)透過交換奇數中的迴圈結構進行交換過程的第二次降階

(三)透過位置移動值表，找到各種交換奇數循環的一般式

參、研究設備及器材

一、紀錄紙

二、電腦與 excel 軟體

本次研究運用 excel 編寫了 3 個相關程式進行不同問題的運算與驗證

肆、研究過程或方法

一、名詞定義與文獻探討

(一)名詞定義

1.交換元素：

若 $a+b$=奇數 n，且 a, b 有一為奇數，有一為偶數，則(a, b)為交換元素

交換元素(a, b)經過交換後產生的元素(a/2, a/2 +b)也是交換元素。

2.交換過程：

在(a, b)經過交換回到(a, b)的過程，稱為交換過程，以 n=13 為例：

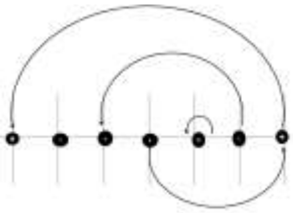
(1, 12)(7, 6)(10, 3)(5, 8)(9, 4)(11, 2)(12, 1)(6, 7)(3, 10)(8, 5)(4, 9)(2, 11)(1, 12)

3.交換奇數：

令在奇數 n 的交換過程中，每個小於 n/2 的奇數為集合 H，則在集合 H={1, 3, 5, 7…}

H×2 的次方數可在交換元素中找到，稱 H 為交換奇數。

4. 迴圈：根據交換奇數表的第一階段(白色區域)中的交換奇數與位置對應，可產生開放式的迴圈。如下圖：



5. 循環

(1)交換過程一定是封閉的循環，但在奇數 n 個交換過程中，不一定只有一個循環，例如 n=9 時，就有以下兩個循環：(1,8) (5,4) (7,2) (8,1) (4,5) (2,7) (1,8)，(3,6) (6,3)

(2)將交換奇數列與位置對應後，可根據對應找到交換奇數的循環。

數字 n=17 可列出以下表格：

交換奇數	1	5	7	3
位置	1	3	5	7

由上表格可知數字 17 的交換奇數循環有 2 個分別是(1)(357)

從這 2 個循環可推出交換過程：

(1)：(1,16)(9,8)(13,4)(15,2)(16,1)(8,9)(4,13)(2,15) (1,16)

(357)：(3,14)(10,7)(5,12)(11,6)(14,3)(7,10)(12,5)(6,11)(3,14)

6. **位置移動值**：代表每個點向上、下移動的格數，向上為「-」，向下為「+」。

每個點的位置移動值=(位置-交換奇數)÷2

可透過位置移動值更快的找到迴圈以及循環

(二)文獻探討：交換糖果問題可不是糖果分配問題

<table>
<tr><th></th><th>歷屆科展</th><th>相似處</th><th>不同處</th></tr>
<tr><td>交換糖果問題</td><td>除了我們作品目前尚未看到其他作品</td><td rowspan="2">1. 可使用二進位輔助解題。
2. 皆會形成循環</td><td>1. 從(a,b)變(b,a)，並找出 $n=2^x+1$ 時可交換的特例。
2. 僅能分兩堆，將偶數堆分一半給奇數堆。
3. 依據交換元素($H\times2^k$，$(n-H\times2^k)$)以及 f(n,(n,f(n,(f(n,f…f(n,1))))))=1，列出交換奇數表 。
4. 根據交換奇數列可快速找出所有循環，判斷奇偶性。
5. 透過迴圈結構更進一步降階，加快尋找循環速度。
6. 透過位值移動數例，找出位值移動級數 $s(k,y,x)=y\times[1-(-2^k)^x)]/(2^k+1)$，依此列出迴圈一般化公式。
7. 透過迴圈結構，找到形成循環的特例。</td></tr>
<tr><td>糖果分配問題</td><td>55 屆國中組
從平分問題到動態穩定
56 屆國中組
再探均分問題的動態穩定
58 屆國小組公平分配遊戲
60 屆國中組
分堆問題之收斂性的探討</td><td>1. 從(a,b)變((a+b)/2, (a+b)/2)
2. 可分好幾堆，但有成功、失敗問題。
3. 常在奧數或科展見到相關問題。</td></tr>
</table>

二、列舉觀察

(一)根據題目描述，我們將數字 n 拆開(n 為大於 1 的奇數)

，從交換元素(1，(n-1))開始列舉交換過程， 可得以下表格與規律

1. 交換過程表

n	交換過程
3	:(1, 2) (2, 1)
5	(1, 4) (3, 2) (4, 1) (2, 3)
7	(1, 6) (4, 3) (2, 5) (1, 6)，(6, 1) (3, 4) (5, 2) (6, 1)
9	(1, 8) (5, 4) (7, 2) (8, 1) (4, 5) (2, 7) (1, 8)，(3, 6) (6, 3)
11	(1, 10) (6, 5) (3, 8) (7, 4) (9, 2) (10, 1) (5, 6) (8, 3) (4, 7) (2, 9) (1, 10)
13	(1, 12)(7, 6)(10, 3)(5, 8)(9, 4)(11, 2)(12, 1) (6, 7)(3, 10)(8, 5)(4, 9)(2, 11)(1, 12)
15	(1, 14)(8, 7)(4, 11)(2, 13) (1, 14)，(14, 1)(7, 8)(11, 4)(13, 2) (14, 1)， (3, 12)(9, 6)(12, 3)(6, 9) (3, 12)，(5, 10)(10, 5)
17	(1, 16)(9, 8)(13, 4)(15, 2)(16, 1)(8, 9)(4, 13)(2, 15) (1, 16)， (3, 14)(10, 7)(5, 12)(11, 6)(14, 3)(7, 10)(12, 5)(6, 11)(3, 14)
19	(1, 18)(10, 9)(5, 14)(12, 7)(6, 13)(3, 16)(11, 8)(15, 4)(17, 2)(18, 1)
21	(1, 20)(11, 10)(16, 5)(8, 13)(4, 17)(2, 19) (1, 20)， (20, 1)(10, 11)(5, 16)(13, 8)(17, 4)(19, 2) (20, 1) (3, 18)(12, 9)(6, 15)，(18, 3)(9, 12)(15, 6) ，(7, 14)(14, 7)

2. 交換過程規律：

從表格中的交換過程可以看到以下幾點規律：

(1)以 n=29 可左右交換的交換過程為例(紅色字表示左邊，藍色字表示右邊)

(28, 1)(14 , 15)(7, 22)(18 , 11)(9, 20)(19, 10)(24, 5)(12, 17)(6, 23)(3, 26)(16, 13)
(8 , 21)(4 , 25)(2 , 27)(1, 28)

以上交換過程可視為

(7×2^2, 1)(7×2^1, 15)(7, 11×2^1)(9×2^1, 11)(9, 5×2^2)(19, 5×2^1)(3×2^3, 5)(3×2^2, 17)
(3×2^1, 23)(3, 13×2^1)(1×2^4, 13)(1×2^3, 21)(1×2^2, 25)(1×2^1, 27)(1, 7×2^2) **1 出現 2 種顏色表可交換**

(2)我們發現以下幾點

a. 在交換過程中找不到 15, 19, 17, 23, 21, 25 的倍數，所以討論時，只要討論 1~(n-1)/2 的奇數即可。1~(n-1)/2 的奇數，我們稱為交換奇數。

b. 令 1~(n-1)/2 的奇數為 H，H_1=1，H_2=3，H_3=5…其他類推。

c. 若交換奇數出現在左右不同位置表示可交換，在一個循環中，如果有奇數個交換奇數則可以左右互換，反之則否。

(3)令 $f(n, H)= n-H\times2^k$，k 為正整數使 $n-H\times2^k>0$ 且 $H\times2^k$ 為 H 小於 n 的最大 2 的次方數倍數

則可知當 $f(n, f(n, f(n, f(n, f\cdots\cdots\cdots f(n, H_x)))))= H_x$ 時，其中過程形成一個循環。

只要列出該循環所有的**交換奇數**，就可以透過 2 的次方數倒推過程。

(二)以電腦運算交換過程：

為了能夠更快更準確的找到所有的交換過程，我們用 excel 編寫運算程式

1.程式邏輯：根據交換糖果問題定義，我們製作以下程式

若上一格是偶數，則此格為上一格除以 2；

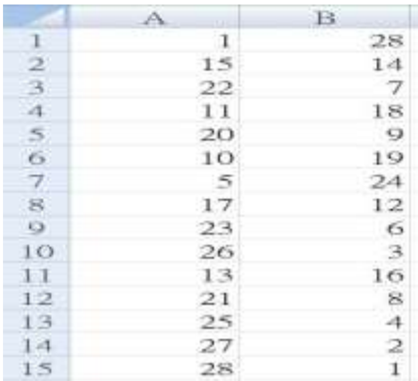
若上一格是奇數，則此格為上一格+上一格旁邊數字除以 2

2.excel 公式

(1)以 A2 和 B2 為例

A2	=IF(ISEVEN(A1),A1/2,A1+B1/2)
B2	=IF(ISEVEN(B1),B1/2,B1+A1/2)

(2)實際運算結果



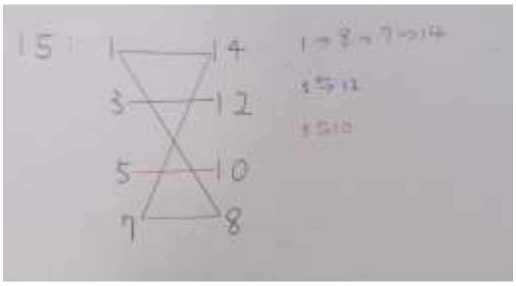
	A	B
1	1	28
2	15	14
3	22	7
4	11	18
5	20	9
6	10	19
7	5	24
8	17	12
9	23	6
10	26	3
11	13	16
12	21	8
13	25	4
14	27	2
15	28	1

(三)畫圖統整：

為了更清楚交換過程的細節，用圖形將交換點的循環記錄下來，並從圖形中找出規律。

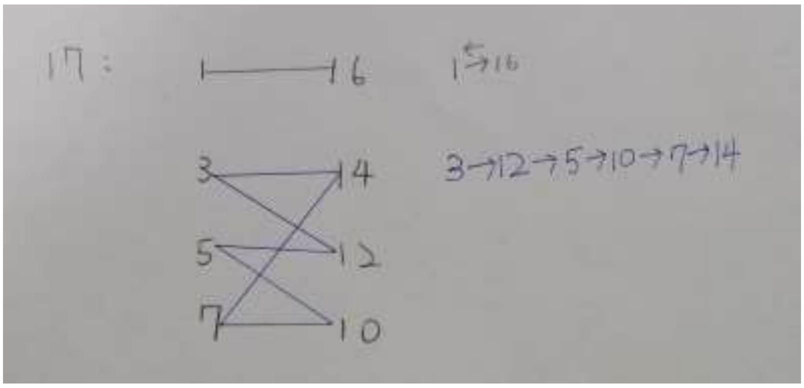
1. 圓圈圖形

(1)以 15 為例有右邊 3 個循環：(1,14)(8,7)(4,11)(2,13)(1,14)，(3,12)(9,6)(12,3)(6,9)，(5,10)(10,5)。**交換奇數為(1,7)，(3)，(5)**

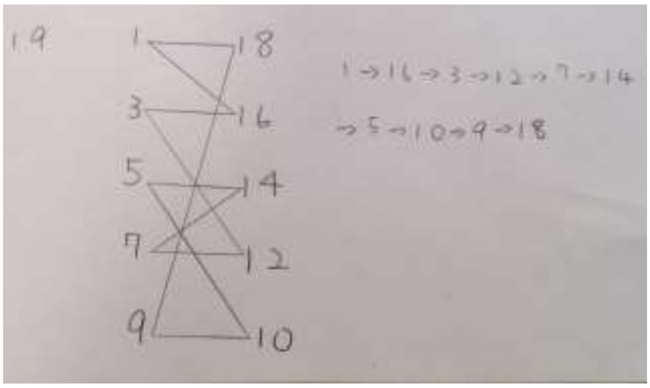


(2)以 17 為例：(1,16)(9,8)(13,4)(15,2)(16,1)，

(3,14)(10,7)(5,12)(11,6)(14,3)(7,10)(12,5)(6,11)(3,14)。**交換奇數為(1)，(3，7，5)**



(3)以 19 為例：(1, 18)(10, 9)(5, 14)(12, 7)(6, 13)(3, 16)(11, 8)(15, 4)(17, 2)(18, 1)



交換奇數為(1，9，5，7，3)

2. 根據圓圈圖形找規律

(1)交換時，以奇數×2 的次方數為交換數字。

若出現(3, 16)(11, 8)(15, 4)(17, 2)(18, 1)，則(11, 8)(15, 4)(17, 2)皆不會是交換點。

(2)交換點形成循環，且每個循環的元素主要由交換奇數構成，若要討論一個循環有幾個元素，只要找出其中的交換奇數即可。

(3)在循環中，若交換奇數為奇數個，則可形成左右互換；若交換奇數為偶數個，則不可形成左右互換。

(四)餘數變更的規律：

我們將運算後的結果以交換奇數程以 2 的次方數的方式表達

1. 先列出全部的組合

例：$19=1\times2^0+18=1\times2^1+17=1\times2^2+15=1\times2^3+11=1\times2^4+3$

$=3\times2^0+16=3\times2^1+13=3\times2^2+7$

$=7\times2^0+12=7\times2^1+5$

$=5\times2^0+14=5\times2^1+9$

$=9\times2^0+10=9\times2^1+1$

共用到交換奇數 1、3、5、7、9

2. 按照順序只列出交接的組合

$19=1\times2^4+3=3\times2^2+7=7\times2^1+5=5\times2^1+9=9\times2^1+1$

3. 將前面數字按照 1, 3, 5, 7 排列並發現規律

$19=1\times2^4+3=3\times2^2+7=5\times2^1+9=7\times2^1+5=9\times2^1+1$

我們發現可將交換元素表示為($H\times2^k$，($n- H\times2^k$))，k 為正整數，

當 $n- H\times2^k \in\{1、3、5、\cdots(n-1)/2\}$時，($H\times2^k$，($n- H\times2^k$))為交換點。

也就是說 $n= H\times2^k+(n-H\times2^k)$

(五)交換過程分類

1. 合數交換過程：

若 a=bxc，則 a 有 b 和 c 相似的數字結構

所以合數一定是多個圈

2. 質數交換過程：n 為質數時有以下 2 種可能

(1)一個圈

(2)多個圈：又分三種可能

a. 可轉換

b. 不可轉換

c. 可轉+不可轉

3. 其他重點

(1)奇數只需要找到(n-1)/2，例如 n=11 時，只須找到交換奇數=5

(2)數字 n 不一定只有一個循環，若交換奇數在第一個圈沒用光就會有多個圈。

三、交換奇數列表

根據研究過程二，我們發現交換元素表示為($H\times2^k$，(n- $H\times2^k$))，k 為正整數，

當 n- $H\times2^k$ $\in${1、3、5、…(n-1)/2}時，($H\times2^k$，(n- $H\times2^k$))為交換點。

所以我們依照數字 n 的順序將交換點依序列出

(一)轉換表格過程

1. 從數字 3 開始向後列出交換點情況如下

$3=1\times2^0+2^1$

$5=1\times2^0+2^2$

$7=1\times2^2+3=3\times2^2+1$

$9=1\times2^3+1=3\times2^1+3$

$11=1\times2^3+3=3\times2^1+5=5\times2^1+1$

$13=1\times2^3+5=5\times2^1+3=3\times2^2+1$

2. 從上可知數字 3、5 有 1 個交換奇數，數字 7、9 有 2 個交換奇數…..，數字 n 的交換奇數會成為一個循環。因此可知

令 f(n,H)= n-$H\times2^k$，k 為正整數使 n-$H\times2^k$>0 且 $H\times2^k$>n/2

則可知當 f(n,f(n,f(n,f(n,f………f(n,H_x)))))= H_x 時，其中過程形成一個循環。

3. 可從列式中看出，每個位置的交換奇數是上個位置的數字+2，我們試著將交換奇數按照順序排列與數字 n 進行列表觀察

(二)製作電腦運算表格

1. 程式邏輯：

此格為左邊數字+2，若+2 超過最大的交換奇數(n-1)/2 則變為 1

2. 電腦表格：

對應數字	7	9	11	13	15	17	19	21
	IF(A2+2>4,1, A2+2)	IF(B2+2>4,1, B2+2)	IF(C2+2>6,1, C2+2)	IF(D2+2>6,1, D2+2)	IF(E2+2>8,1, E2+2)	IF(F2+2>8,1, F2+2)	IF(G2+2>10,1, G2+2)	IF(H2+2>10,1, H2+2)
	IF(A3+2>4,1, A3+2)	IF(B3+2>4,1, B3+2)	IF(C3+2>6,1, C3+2)	IF(D3+2>6,1, D3+2)	IF(E3+2>8,1, E3+2)	IF(F3+2>8,1, F3+2)	IF(G3+2>10,1, G3+2)	IF(H3+2>10,1, H3+2)
			IF(A4+2>6,1, C4+2)	IF(D4+2>6,1, D4+2)	IF(E4+2>8,1, E4+2)	IF(F4+2>8,1, F4+2)	IF(G4+2>10,1, G4+2)	IF(H4+2>10,1, H4+2)
					IF(A5+2>8,1, E5+2)	IF(F5+2>8,1, F5+2)	IF(C5+2>10,1, G5+2)	IF(H5+2>10,1, H5+2)
排列數字							IF(A6+2>10,1, G6+2)	IF(H6+2>10,1, H6+2)

(三)轉換表格表示—橫向觀察

1. 根據研究過程三-(二)的程式，可得以下表格

對應數字	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55
	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
			1	3	5	1	3	5	7	9	11	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	1	3	5	7
					1	3	5	7	9	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	1	3	5	7	9	11	13	15
							1	3	5	7	9	11	13	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
									1	3	5	7	9	11	13	15	17	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
											1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	1	3	5	7	9	11
排列數字													1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	1	3
															1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
																			1	3	5	7	9	11	13	15	17
																					1	3	5	7	9	11	13
																							1	3	5	7	9
																									1	3	5
																											1

2. 我們先進行表格中的橫向觀察，也就是觀察交換奇數在數字 n 不同時有什麼變化。

(1)第一列為 n-1×2 的次方數：$3-1\times2^1=1$，$5-1\times2^2=1$，$7-1\times2^2=3$，$9-1\times2^3=1$，$11-1\times2^3=3$……

第二列為 n-3×2 的次方數：$7-3\times2^1=1$，$9-3\times2^1=3$，$11-3\times2^1=5$，$13-3\times2^2=1$，$15-3\times2^2=3$……

其他列類推

(2)我們依 2 的次方數進行著色，1 次方為白色區域，2 次方為黃色區域，3 次方為綠色

對應數字	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55
	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
			1	3	5	1	3	5	7	9	11	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	1	3	5	7
					1	3	5	7	9	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	1	3	5	7	9	11	13	15
							1	3	5	7	9	11	13	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
									1	3	5	7	9	11	13	15	17	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
											1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	1	3	5	7	9	11
排列數字													1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	1	3
															1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
																			1	3	5	7	9	11	13	15	17
																					1	3	5	7	9	11	13
																							1	3	5	7	9
																									1	3	5
																											1

3. 觀察發現

(1)第一列和其他列不同，白色區域 1 個，黃色區域 2 個，綠色區域 4 個…其他類推

(2)去掉第一列後觀察白色 、黃色、綠色區域，如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI
1	1	3	5																																
2			1	3	5	7	9																												
3					1	3	5	7	9	11	13																								
4							1	3	5	7	9	11	13	15	17																				
5									1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21																
6											1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25												
7													1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29								
8															1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33				
9																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
10																			1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
11																					1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
12																							1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
13																									1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
14																											1	3	5	7	9	11	13	15	17
15																													1	3	5	7	9	11	13
16																															1	3	5	7	9
17																																	1	3	5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS
1	1	3	5	7	9	11																																							
2					1	3	5	7	9	11	13	15	17	19																															
3									1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27																							
4													1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35															
5																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43							
6																					1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
7																									1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
8																													1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
9																																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
10																																					1	3	5	7	9	11	13	15	17
11																																									1	3	5	7	9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23																																	
2									1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39																	
3																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	
4																									1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
5																																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
6																																									1	3	5	7	9

我們發現白色區域 2 個一組，黃色區域 4 個一組、綠色區域 8 個一組。

白色區域在 5 底下接 1；黃色區域在 9 底下接 1；綠色區域在 17 底下接 1。

若白色為第一階段，黃色為第二階段，綠色為第三階段，則第 X 階段在數字 $2^{X+1}+1$ 下接 1。

(3)白色區域從 n=7 開始觀察，黃色區域從 n=13 開始觀察，綠色區域從 n=25 開始觀察，第 X 階段從 $n=3\times2^{X}+1$ 開始觀察。

從觀察各行數字數目發現：

白色區域數字數目為{(1, 1, 2, 1), (2, 2, 3, 2), (3, 3, 4, 3), (4, 4, 5, 4)…}

黃色區域數字數目為{(1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3)…}

綠色區域數字數目為

{(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2,),
(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3)….. }

(4)根據上表觀察可知，每欄各區域最底下的數字判斷法如下：

n/4 餘 3 時，對應白色數字 1；n/4 餘 1 時，對應白色數字 3;

n/8 餘 5 時，對應黃色數字 1: n/8 餘 7 時，對應黃色數字 3;

n/8 餘 1 時，對應黃色數字 5: n/8 餘 3 時，對應黃色數字 7;

n/16 餘 9 時，對應綠色數字 1: n/16 餘 11 時，對應綠色數字 3;
n/16 餘 13 時，對應綠色數字 5: n/16 餘 15 時，對應綠色數字 7;
n/16 餘 1 時，對應綠色數字 9: n/16 餘 3 時，對應綠色數字 11;
n/16 餘 5 時，對應綠色數字 13: n/16 餘 7 時，對應綠色數字 15。

(三)表格觀察—縱向連結

1.在表格中，每兩行一組，數字數目相同。
若該排有 a 個數字，且最後一個數字=1，表示在第 2a-1 排，對應 n=4a-1;
若該排有 a 個數字，且最後一個數字=3，表示在第 2a 排，對應 n=4a+1。
2.白色區每次向上+4，黃色區每次向上+8，綠色區每次向上+16，根據不同區最底下的數字語各區每格的改變，可算出個區有幾個數字。

3.數字 n 那一排共有[(n+1)/4]=k 個數字，交換奇數最大為(k-1)×2+1=2k-1。[]為高斯符號
若白色區應最底下數字為 m1，則白色區域共有[(2k-1-m1)/4]+1 個數字;
若黃色區應最底下數字為 m2，則黃色區域共有[(2k-1-m2)/8]+1 個數字;
若綠色區應最底下數字為 m3，則白色區域共有[(2k-1-m2)/16]+1 個數字,其他類推。
4.以 n=49 為例

位置	數值
1	17
3	1
5	9
7	21
9	13
11	5
13	23
15	19
17	15
19	11
21	7
23	3

共有[(49+1)/4]=12 個數字，且因為 12*2-1=23，
所以交換奇數從 1~23。
49/4=12…1，所以白色區最底下對應數字為 3。
[(23-3)/4]+1=6，所以白色區域共有 6 個數字。
49/8=6…1，所以黃色區底下對應數字為 5。
[(23-5)/8]+1=3，所以黃色區域共有 3 個數字。
其他類推

5、運用交換奇數列找出在數字 n 中的循環，以 n=49 為例

位置	數值
1	17
3	1
5	9
7	21
9	13
11	5
13	23
15	19
17	15
19	11
21	7
23	3

交換奇數 3 對應到位置 3 的奇數 1，奇數 1 對應到位置 1 的奇數 17，奇數 17 對應到位置 17 的奇數 15，奇數 15 對應到位置 15 的奇數 19，奇數 19 對應到位置 19 的奇數 11，奇數 11 對應到位置 11 的奇數 5，奇數 5 對應到位置 5 的奇數 9，奇數 9 對應到位置 9 的奇數 13，奇數 13 對應到位置 13 的奇數 23，奇數 23 對應到位置 23 的奇數 3
可用置換方式記錄為：

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 & 9 & 21 & 13 & 5 & 23 & 19 & 15 & 11 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{bmatrix}$$

因此我們可以找到循環(3,23,13,9,5,11,19,15,17,1,3)

四、直線著色問題

若能將交換奇數表中的奇數與其位置對應，我們可找出其中循環。在對應的過程，我們發現位置列的顏色可被各階段的顏色填滿，這延伸出直線著色問題。

(一)問題描述：根據交換奇數表所形成的橫列，在數字 n 時，其投射到位置列上，各階段形成的顏色列會是什麼樣子?

(二)以 n=31 為例，為了能更清楚看出著色後的樣子，我們將原本的白色區域塗上顏色

1. 交換奇數列

15	7	11	3	13	9	5	1

2. 位置列表

1	3	5	7	9	11	13	15

3. 著色後的位置列表

1	3	5	7	9	11	13	15

4. 根據著色後的位置列表，我們發現白色區域以間隔 1 格的距離分散在位置列表中；黃色區域以間隔 3 格的距離

(三)從數字 n=3 到數字 n=93 的位置數列著色後統整

1																						
1																						
1	3																					
1	3																					
1	3	5																				
1	3	5																				
1	3	5	7																			
1	3	5	7																			
1	3	5	7	9																		
1	3	5	7	9																		
1	3	5	7	9	11																	
1	3	5	7	9	11																	
1	3	5	7	9	11	13																
1	3	5	7	9	11	13																
1	3	5	7	9	11	13	15															
1	3	5	7	9	11	13	15															
1	3	5	7	9	11	13	15	17														
1	3	5	7	9	11	13	15	17														
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19													
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19													
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21												
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21												
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23											
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23											
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25										
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25										
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27									
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27									
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29								
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29								
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33						
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33						
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35					
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35					
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37				
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37				
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41		
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41		
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45

五、迴圈結構

我們發現白色區域(第一階段)共有 3 種情況，我們將對應數字移動的值根據不同情況從小到大列成下列 3 種表格。

(1) 第 1 種黑色線

											−16	−16
									−16	−16	−10	−10
									−10	−10	−4	−4
							−10	−10	−4	−4	2	2
					−10	−10	−4	−4	2	2	8	8
					−4	−4	2	2	8	8	14	14
			−4	−4	2	2	8	8	14	14	20	20
	−4	−4	2	2	8	8	14	14	20	20	26	26
	2	2	8	8	14	14	20	20	26	26	32	32
2	8	8	14	14	20	20	26	26	32	32	38	38

(2)第 2 種黑色線

											−18	−18
											−12	−12
									−12	−12	−6	−6
							−12	−12	−6	−6	0	0
							−6	−6	0	0	6	6
					−6	−6	0	0	6	6	12	12
			−6	−6	0	0	6	6	12	12	18	18
			0	0	6	6	12	12	18	18	24	24
	0	0	6	6	12	12	18	18	24	24	30	30
0	6	6	12	12	18	18	24	24	30	30	36	36

(3)第 3 種黑色線

								−14	−14
								−8	−8
						−8	−8	−2	−2
				−8	−8	−2	−2	4	4
				−2	−2	4	4	10	10
		−2	−2	4	4	10	10	16	16
	−2	4	4	10	10	16	16	22	22
−2	4	10	10	16	16	22	22	26	26

3.觀察對應數字移動的值，可以發現以下幾點

(1)在各階段重疊的數字：

第一階段 5、1 重疊

第二階段 9、1 重疊

第三階段 17、1 重疊.......

第 n 階段段 2^{n+1} 重疊

(2)各階段的奇數

第一階段第 n 層為 1~〔$(2n+1)\times 2^{1}-1$〕的奇數

第二階段第 n 層為 1~〔$(2n+1)\times 2^{2}-1$〕的奇數

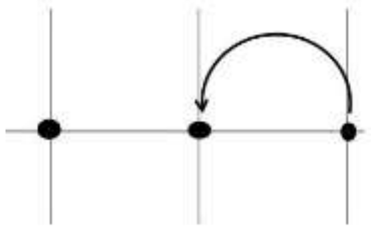
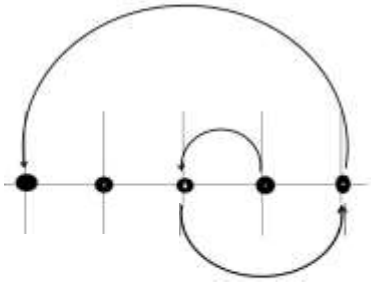
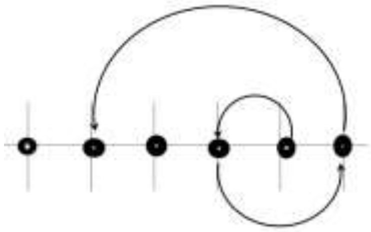
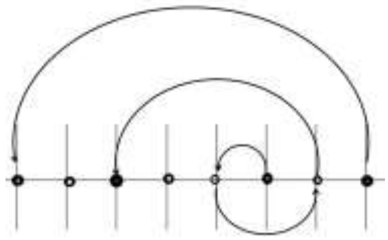
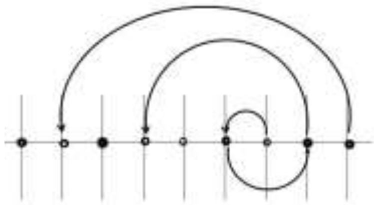
第三階段第 n 層為 1~〔$(2n+1)\times 2^{3}-1$〕的奇數........

第 m 階段第 n 層為 1~〔$(2n+1)\times 2^{m}-1$〕的奇數

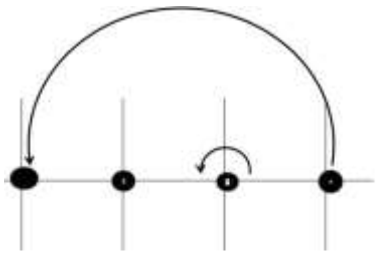
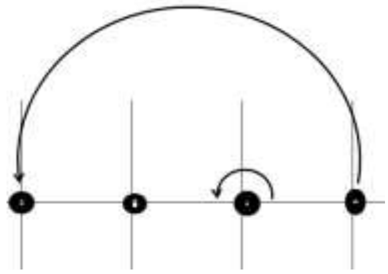
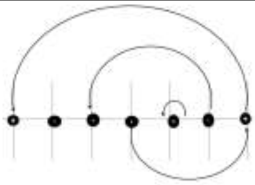
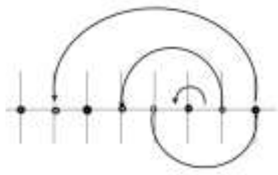
4.將表格化成線：為了更容易觀察規律，我們將對應數字移動表畫成圖形。

以白色區域(第一階段的圖形為例)

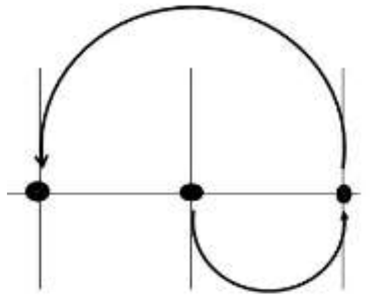
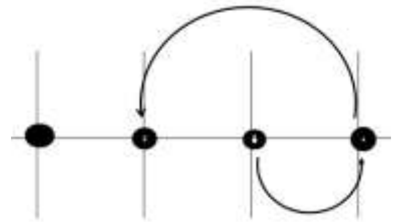
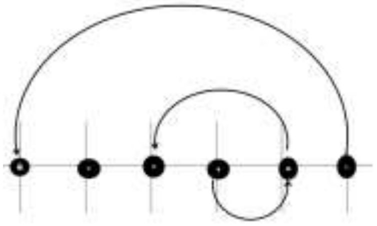
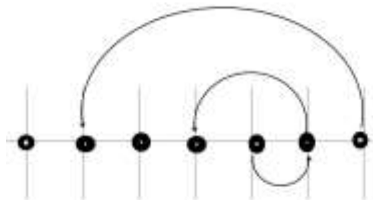
(1)第 1 種黑色線

n=13	n=19	n=25
		
n=31	n=37	
		

(2)第 2 種黑色線

n=15	n=21
	
n=27	n=33
	

(3)第 3 種黑色線

n=11	n=17
	
n=23	n=29
	

六、利用迴圈與直線著色將交換奇數列降階：

雖然將交換過程透過交換奇數列降階後，可以更快速的找到不同的數字循環。但我們也試著透過消除第一階段讓找到循環的過程更簡短與方便。

(一)將後面位值投射到前面位值上：我們發現透過將第一階段的後面位值投射到前面位值上可以讓交換奇數列更簡短，我們以 n=103 為例

1. 未投射前的情況

103																										
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5	1
位置值	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51

2. 第一次投射的過程與結果

將位值投射到前面，直到遇到相同的數字

103																										
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5	1
位置值	51	3	49	7	47	11	45	15	43	19	41	23	39	27	37	31	35	35	37	39	41	43	45	47	49	51

然後刪掉重複的位值

103																	
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45	41	37
位置值	51	3	49	7	47	11	45	15	43	19	41	23	39	27	37	31	35

3. 第二次投射的過程與結果：投射過程如下，直到遇到相同的數字

103																	
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45	41	37
位置值	51	3	49	7	47	11	45	15	43	19	31	23	39	27	35	31	35

投射後刪減結果

103															
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45
位置值	51	3	49	7	47	11	45	15	43	19	31	23	39	27	35

4. 第三次投射的過程與結果：投射過程如下

103															
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45
位置值	51	3	27	7	47	11	35	15	43	19	31	23	39	27	35

投射後刪減結果：經過投射後刪減，成功將交換奇數列降階

103													
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3
位置值	51	3	27	7	47	11	35	15	43	19	31	23	39

(二)選取第一階段數字進行多次投射，但不取代，留下紀錄

1. 僅選取第一階段每次剩下的位值進行投射，直到無法投射

n=103																										
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5	1
位置值	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
第一次投射	51		49		47		45		43		41		39		37		35		33		31		29		27	
第二次投射			27				29				31				33				35				37			
第三次投射							37								35								33			
第四次投射							33																35			
第五次投射							35																			

2. 投射後將第一階段刪除，並將各行依序排列

51	35	43	15	11	23	27	19	31	47	7	3	39
13	17	15	11	23	5	19	21	9	7	3	25	1
45	43				49		41	47			39	51
29					27		31					
37												
33												
35												

從左邊圖表可知降階後可將第一階段刪除

(51,13,45,29,37,33,35,17,43,15,11,23,5,49,27,19,21,41,31,9,47,7,3,25,39,1)→
(1,39,25,3,7,47,9,31,41,21,19,27,49,5,23,11,15,43,17,35,33,37,29,45,13,51)

3. 發現可將迴圈視為各階段的連接點，透過各階段迴圈可將交換奇數列降階

七、位置移動值表

(一)根據研究過程一~四，我們發現交換過程有迴圈的結構，所以我們打算將交換奇數間的關係透過排列畫出來。

1. 位置、n 與移動距離關係圖

我們製作出位置、n 與移動距離關係圖。三欄一組，第一欄是位置，第二欄是 n 產生的交換奇數，第三欄=第一欄數字−第二欄數字=對應數字移動的距離。

根據我們的定義，向上(左)移動為負值，向下(右)移動為正值。

位置	n=19	移動距離	位置	n=21	移動距離	位置	n=23	移動距離	位置	n=25	移動距離	位置	n=27	移動距離		29	移動距離
1	3	-2	1	5	-4	1	7	-6	1	9	-8	1	11	-10	1	13	-12
3	7	-4	3	9	-6	3	11	-8	3	1	2	3	3	0	3	5	-2
5	9	-4	5	1	4	5	3	2	5	5	0	5	7	-2	5	9	-4
7	5	2	7	7	0	7	9	-2	7	11	-4	7	13	-6	7	1	6
9	1	8	9	3	6	9	5	4	9	7	2	9	9	0	9	11	-2
						11	1	10	11	3	8	11	5	6	11	7	4
												13	1	12	13	3	10

2.位置移動值表格：為了更清楚觀察規律，我們將移動距離除以 2，得到位置移動值表格

n=	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77
位	0	0	-1	0	-1	-2	-3	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
置			1	0	-1	1	0	-1	-2	-3	-4	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13
移					2	1	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16
動							3	2	1	0	-1	-2	-3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
值									4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	4	3	2
											5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
													6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
															7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
																	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	8	7	6	5	4
																			9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	9
																					10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
																							11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
																									12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
																											13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
																													14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
																															15	14	13	12	11	10	9	8
																																	16	15	14	13	12	11
																																			17	16	15	14
																																					18	17

(二)觀察規律

1.各階段的規律：

(1)白色部分每次距離少 2+1=3 格;黃色部分每次距離少 4+1=5 格;綠色部分每次距離賞 8+1=7 格

(2)位置值比對應交換奇數還大則向上移動，反之在向下移動

(3)同一種顏色線條不會交叉

(4)每個點進出共 2 次

(5)第一階段迴圈的中心點有 3 種數字 1、-1、0

2.深入觀察：根據我們的表格，可以看出以下規律(第一列除外)

(1)第一階段：

白色區域的開始點，從數字 7 開始算，以格數為距離

(1, 0)(2, 1)(3, 2)

每 2 個數字 1 輪，每輪開始格數+1

(2)第二階段：

黃色區域的開始點，從數字 13 開始算，以格數為距離

(1, 0, −1, −2)(2, 1, 0, −1)(3, 2, 1, 0)

每 4 個數字 1 輪，每輪開始格數+1

(3)第三階段：

綠色區域的開始點，從數字 25 開始算，以格數為距離

(1, 0, −1, −2, −3, −4, −5, −6)

每 8 個數字 1 輪，每輪開始格數+1

第四階段：從數字 49 開始算，以格數為距離

(1, 0, −1, −2, −3, −4, −5, −6⋯. −14)

每 16 個數字 1 輪，每輪開始格數+1

第 y 階段：從數字 3^y+1 開始算，以格數為距離

(1, 0, −1, −2, −3, −4, −5, −6⋯. −(2^y−2))

每 2^y 個數字 1 輪，每輪開始格數+1

3. **發現迴圈數列**：我們發現在各階段中會有不同的位值移動數列，構成不同大小的迴圈。若 n 很大時，會有以下的迴圈(以第一、二階段為例)

(1)第一階段位移值迴圈數列：

1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128…；-1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, 128…

3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384…；-3, 6, -12, 24, -48, 96, -192, 384…

5, -10, 20, -40, 80, -160, 320, -640…；-5, 10, -20, 40, -80, 160, -320, 640…

從上面可看出第一階段迴圈中的連續兩個點位移植，下一個點為上一個點的-2 倍

(2)第二階段位移值迴圈數列：

1, -4, 16, -64, 256, -1024, 4096…；-1, 4, -16, 64, -256, 1024, -4096…

3, -12, 48, -192, 768, -3072, 12288…；-3, 12, -48, 192, -768, 3072, -12288…

5, -20, 80, -320, 1280, -5120, 20480…；-5, 20, -80, 320, -1280, 5120, -20480…

從上面可看出第一階段迴圈中的連續兩個點位移植，下一個點為上一個點的-4 倍

(3)以 1 開頭的位移值迴圈數列：

第一階段：$(-2)^0$, $(-2)^1$, $(-2)^2$, $(-2)^3$, $(-2)^4$….

第二階段：$(-4)^0$, $(-4)^1$, $(-4)^2$, $(-4)^3$, $(-4)^4$…

第三階段：$(-8)^0$, $(-8)^1$, $(-8)^2$, $(-8)^3$, $(-8)^4$…

第 k 階段，從第一項到第 x 項$(-2^k)^0$, $(-2^k)^1$, $(-2^k)^2$, $(-2^k)^3$, $(-2^k)^4$…. $(-2^k)^{x-1}$

以數字 y 開頭的位移值迴圈數列：

$y\times(-2^k)^0$, $y\times(-2^k)^1$, $y\times(-2^k)^2$, $y\times(-2^k)^3$, $y\times(-2^k)^4$…. $(y\times-2^k)^{x-1}$

伍、研究結果

一、根據研究過程一的列舉結果，我們可以知道

1. 什麼樣的(a, b)可以變成(b, a)，什麼樣的(a, b)不行：

(1) (a, b)可以變成(b, a)：當(a, b)為(1，2^X)的形式時，X 為大於等於 1 的整數，根據倒推的模式可知**(1，2^X)，(2，2^X-1)，(4，2^X-3)…此類交換元素進行交換後可出現左右位置交換的情況**。當 **$n=a\times(2^X+1)$**時，產生單一交換奇數循環，可找到上述情況。

(2) (a, b)不可以變成(b, a) ：當(a, b)為(2^X-1，2^X)的形式時，X 為大於等於 1 的整數，可知**(2^X-1，2^X) 、($2^X+2^{X-1}-1$，2^{X-1})、($2^X+2^{X-1}+2^{X-2}-1$，2^{X-2})**…此類交換元素不能出現左右位置交換的情況。當 **$n=a\times(2^X-1)$**時，產生雙交換奇數循環，可找到上述情況。

(3)我們發現**不只**在 $n=a\times(2^X-1)$時會產生雙交換奇數循環，我們將全部的情況列舉如下：

a. 第一階段+其他階段產生雙奇數循環

n=	7	15	31	63	127
交換點	(4, 3)	(8, 7)	(16, 15)	(32, 31)	(64, 63)

b. 第二階段+其他階段產生雙奇數循環

n=	21	85	341	1365	5413
交換點	(16, 5)	(64, 21)	(256, 85)	(1024, 341)	(4048, 1365)

c. 第三階段+其他階段產生雙奇數循環

n=	73	585
交換點	(64,9)	(512，73)

d. 第四階段+其他階段產生雙奇數循環

n=	273
交換點	(256,17)

(4)在一個循環中，若交換奇數為奇數個表示可左右交換；偶數個則不能左右交換。

(5)當 n 為合數時，n 的交換過程為其因數的交換過程相似結構。

所以會出現 a+b 的和相同，但其中有些交換元素不能左右交換，有些可以的情況。

我們以 n=63 為例，可以發現以下情況：

n	交換過程	交換情況
n=7	(1,6)(4,3)(2,5)(1,6)	不可交換
以 7 為 63 的因數	(9,54)(36,27)(18,45)(9,54)	不可交換
n=9	(1,8)(5,4)(7,2)(8,1)	可交換
以 9 為 63 的因數	(7,56)(35,28)(49.14)(56,7)	可交換

2..交換點的特性

(1)以 n=29 為例：

(28,1)(14,15)(7,22)(18,11)(9,20)(19,10)(24,5)(12,17)

(6,23)(3,26)(16,13)(8,21)(4,25)(2,27) (1,28)

(2)出現相同數字時，以數字 1 為例，若有偶數個交換點，或是說有奇數個交換數則可以左右互換；偶數個交換數則不能左右交換。

(3)反過來看，由左而右可以在交換的過程看到交換數的 2 次方的倍數。

以 n=29 為例

數字 1 的左邊可看到數字 2、4、8、16，因為 32>29，所以 16 為交換數。

29-16=13，所以可看到數字 13、26，因為 52>29，所以 26 為交換數。

依此類推直到重複出現 1 為止。

出現共 7 個交換數，所以我們稱數字 29 的交換過程是 7 階的交換過程。

3. **在數字 n 的交換過程中，定義 $f(a1)=n-a1\times2^x$，$a1\times2^x$ 為 a1 小於 n 的最大 2 的次方數倍數。可得 f(a1)=b1，f(f(a1))=a2，f(f(f(a1)))=b2，….其餘類推。**

若進行過 k 次 f，使得 f(….f(f(f(a1))))=a1，則可知過程中產生的 k 個數字{a1、b1、a2、2….}是 k 階的交換集合。

以 n=29 為例

f(1)=13，f(f(1))=f(13)=3，f(f(f(1)))=f(3)=5，f(f(f(f(1))))=f(5)=9，f(f(f(f(f(1)))))=f(9)=11，f(f(f(f(f(f(1))))))=f(11)=7，f(f(f(f(f(f(f(1)))))))=f(7)=1。

因此可得知，

在 n=29 時，(1,13,3,5,9,11,7)為 7 階的交換過程，因 15×2>29，所以 n=29 也只有此一交換過程。

二、根據研究過程二的交換奇數表，我們可以知道：

(一)目前已發現規律

1. 每大排最下面的數字=(1,3)

2. 每列按照 1,3,5,7

3. 每排由下往上的順序

前面 1,5,9,13

後面 3,7,11,15

4. 第 2 大排有 2 組不規律數字，第 3 大排有 2 組不規律數字

第 4 大排有 3 組不規律數字，第 5 大排有 3 組不規律數字

第 6 大排有 4 組不規律數字，第 7 大排有 4 組不規律數字

(二)餘數決定開始的數字

1. 白色區域(第一階段)開始的數字為 1、3

若 n/4 餘 3 時，對應白色數字 1；n/4 餘 1 時，對應白色數字 3;

2. 黃色區域(第二階段) 開始的數字為 1、3、5、7

n/8 餘 5 時，對應黃色數字 1: n/8 餘 7 時，對應黃色數字 3;

n/8 餘 1 時，對應黃色數字 5: n/8 餘 3 時，對應黃色數字 7;

3. 綠色區域(第三階段) 開始的數字為 1、3、5、7、9、11、13、15

n/16 餘 9 時，對應綠色數字 1: n/16 餘 11 時，對應綠色數字 3;

n/16 餘 13 時，對應綠色數字 5: n/16 餘 15 時，對應綠色數字 7;

n/16 餘 1 時，對應綠色數字 9: n/16 餘 3 時，對應綠色數字 11;

n/16 餘 5 時，對應綠色數字 13: n/16 餘 7 時，對應綠色數字 15。

(三)數字 n 在交換奇數統計表中對應情況

每兩行一組，$n>3$，若 $n/2^2=s1\cdots q1$，$n/2^3=s2\cdots q2$，$n/2^4=s3\cdots q3$，…，$n/2^{k+1}=sk\cdots qk$ 則

1. 數字 n 那一排共有[(n+1)/4]個排列數字，[]表示高斯符號

2. 數字 n 最大的交換奇數字=2×[(n+1)/4]-1

3. 令各階段最底下對應數字為 mk，

當 $qk<2^k$ 則 $mk=qk+2^k$，若 $qk>2^k$，$mk=qk-2^k$

4. 令數字 n 最大的交換奇數=x，則第 k 階段數字數目為$[(x-mk)/2^{k+1}]+1$，[]為高斯符號

(四)根據上面的結果與交換奇數表，我們可以推導出以下算式

1. 觀察第一階段與第二階段的投射落點位置，可列出

$[n-17]/5\times2=s_2'\ ...q_2'$ ，$[n-25]/16=s_2''...q_2''$

第二階段投射到第一階段的數字數目=s’+1-(s”+1)

2. 若(n-7)/4=s1...q1，(n-13)/8=s2...q2

則可知：s1+1=第一階段最底下列，s2+1=第二階段最下列，s2+2=第一階段最上列

因此可知：s3-s2=第二階段數量，s2-s1=第一階段數量

三、從不同角度看交換奇數表

(一)找到在交換奇數表中每個 1 的位置

1. 我們將交換奇數表中每個 1 的位置標示出來

1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1	3	5
		1	3	5	1	3	5	7	9	11	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
				1	3	5	7	9	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
						1	3	5	7	9	11	13	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	1	3	5	7	9	11	13
								1	3	5	7	9	11	13	15	17	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
										1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
												1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	1	3	5	7	9	11	13	15	17
														1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	1	3	5	7	9
																1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	1
																		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
																				1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
																						1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
																								1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
																										1	3	5	7	9	11	13	15
																												1	3	5	7	9	11
																														1	3	5	7
																																1	3

2.由上表可知：
1_1在(1,1),1_2在(2,1),1_3在(3,2),1_4在(4,1),1_5在(5,3),1_6在(6,2),1_7在(7,4),1_8在(8,1),1_9在(9,5)
當 m 是奇數時,1_m=(m,m+1/2)
當 m=1+2k,k=0~...時,1_m=(m,1+k)
當 m=2+4k,k=0~...時,1_m=(m,1+k)
當 m=4+8k,k=0~...時,1_m=(m,1+k)
當 m=8+16k,k=0~...時,1_m=(m,1+k)
由上可知
$3_m=(1_{m-1}x+1,1_{m-1}y)$,$5_m=(3_{m-1}x+1,3_{m-1}y)$.....
可以推知
第 m 行數字 1~m 對應位置(1_m,1_{m-1},1_{m-2},1_{m-3}………..)

(二)我們根據交換奇數表列出其中的循環，進行統整

1.交換奇數循環表

n=	交換奇數的循環		
3	1		
5	1		
7	1,3		
9	1	3	
11	1,5,3		
13	1,3,5		
15	1,7	3	5
17	3,7,5	1	
19	1,9,5,7,3		
21	1,5	3,9	7
23	1,11,3,5,9,7		
25	1,3,11,7,9	5	
27	1,13,7,5,11	3	9
29	1,7,11,9,5,3,13		
31	5,13,9,11	1,15	3,7

2.根據交換奇數循環表的發現：
出現(1，2^K)型態可交換的交換元素在 $n=1+2^K$ 出現，K 為大於等於 1 的整數；
出現(3，3×2^K)型態可交換的交換元素在 $n=3\times(1+2^K)$出現，K 為大於等於 1 的整數；
出現(5，5×2^K)型態可交換的交換元素在 $n=5\times(1+2^K)$出現，K 為大於等於 1 的整數；
其他類推。

因此我們可以知道當 $n=m\times(1+2^{K})$ 時，且 m 為奇數，，K 為大於等於 1 的整數，會出現以 m 為單一交換奇數的循環。

四、根據研究過程五中的迴圈結構，我們列出以下三種迴圈統計表

（一）迴圈統計表

1. 第一種迴圈

	線數量	出	到	原點位置	總點數	迴圈1	迴圈2	迴圈3	迴圈4	線1	線2	線3
圖1	1	-1	0	1	2					2,1		
圖2	2	0	2	3	5	(4、3、5、1)						
圖3	1	-3	4	5	8	(6、5、7、3)					(8、1)	
圖4	2	1	6	7	11	(8、7、9、5)	(6、11、1)				(10、3)	
圖5	1	-5	8	9	14	(10、9、11、7)	(8、13、3)				(12、5)	(14、1)
圖6	2	2	10	11	17	(12、11、13、9、17、1)	(10、15、5)				(13、7)	(16、3)
圖7	1	-7	12	13	20	(14、13、15、11、19、3)	(12、17、7)				(15、9)	(18、5)
圖8	2	3	14	15	23	(16、15、17、13、21、5)	(14、19、9)	(12、23、1)			(17、11)	(20、7)
圖9	1	-9	16	17	26	(18、17、19、15、23、7)	(16、21、11)	(14、25、3)			(19、13)	(22、9)
圖10	2	4	18	19	29	(20、19、21、17、25、9)	(18、23、13)	(16、27、5)	(21、15、29、1)			(24、11)

2. 第二種迴圈

	線數量	出	到	原點位置	總點數	迴圈1	迴圈2	迴圈3	迴圈4	迴圈5	線1	線2	線3	線4
圖1	0	0	0	1	1									
圖2	1	-1	2	3	4						4,1			
圖3	2	1	4	5	7	4,7,1					6,3			
圖4	1	-3	6	7	10	6,9,3					8,5	10.1		
圖5	2	2	8	9	13	8,11,5	10,7,13,1					12,3		
圖6	1	-5	10	11	16	10,13,7	12,9,15,3					14,5	16,1	
圖7	2	3	12	13	19	12,15,9	14,11,17,5	10,19,1				16,7	18,3	
圖8	1	-7	14	15	22	15,17,11	16,13,19,7	12,21,3				18,9	19,5	22,1
圖9	2	4	16	17	25	17,19,13,25,1	18,15,21,9	14,23,5				20,11	21,7	23,3

3. 第三種迴圈

	線數量	出	到	原點位置	總點數	迴圈1	迴圈2	迴圈3	迴圈4	迴圈5	線1	線2	線3	線4	線5
圖1	2	-1	0	1	3	2,3,1									
圖2	1	-3	2	3	6	4,5,3					6,1				
圖3	2	0	4	5	9	6,7,5,9,1					8,3				
圖4	1	-5	6	7	12	8,9,7,11,3					10,5	12,1			
圖5	2	1	8	9	15	10,11,9,13,5		8,15,1			12,7	14,3			
圖6	1	-7	10	11	18	12,13,11,15,7		10.17.3			14,9	16,5	18,1		
圖7	2	2	12	13	21	14,15,13,17,9		12,19,5	16,11,21,1			18,7	20,3		
圖8	1	-9	14	15	24	16,17,15,19,11		15,21,7	18,13,23,3			20,9	22,5	24,1	

(二)根據迴圈統計表，我們有以下幾點發現

1. 形成迴圈的方法

(1) 2 條線

(2) 1 條線到=2 條線出

2. 迴圈加大的方法

(1)迴圈舊的到=新的出，如圖 1 和圖 2

(2)每多 1 個圖多 3 個點

3. 奇數圖與偶數圖的不同

(1)奇數圖 x 出現線(2+(x-1)×3，1)

奇數圖 x 共有(x+1)/2 條線

分別是

(2+(x-1)×3，1)、(2+(x-1)×3-2，5)、(2+(x-1)×3-4，9)、(2+(x-1)×3-6，13)

或者是

((k-1)×3+2+(n-k×2)，(n-k)×2+1)

k 為{1、3、、5、7....n}

(2)偶數圖出現迴圈

(3.5.1)，(6.11.1)，(9.17.1)，(12.23.1)，(16.29.1)

偶數圖 n 出現迴圈(3+(n-2)/2×3，5+(n-2)/2×5，1)

偶數圖 n 共有 n/2 個迴圈

n 屬於{6,10,14,18...6+4k}，k 為大於等於 0 的整數時，會與迴圈 1 合併

(3)奇數圖產生 1 條線，偶數圖產生 2 條線
圖 1 和圖 2 產生的線相連接
圖 2 和圖 6 產生的線相連接
圖 3 和圖 10 產生的線相連接
圖 a 和圖 2+4(a-1)相連接
由上可知
n 除以 6 餘 1 是第一種迴圈，n 除以 6 餘 3 是第二種迴圈，n 除以 6 餘 5 是第三種迴圈
(三) 利用白色區域的迴圈統計表，可更快速的尋找數字 n 中各循環的交換奇數的排列。

第一階段迴圈一般化公式

1. 第一種迴圈

(1)從迴圈統計表中，可知圖 1、圖 2、圖 6 產生的迴圈互相連接，根據表格規律可得連接數列如下：

1、2、6、22、86....，第 x 項為$(1+2^0+2^2+2^4+2^6....+2^{2(x-2)})$

如連接圖號開頭為 1+y，則可產生連接數列如下：

1+y、$2+2^2$×y、$6+2^4$×y….，第 x 項為$(1+2^0+2^2+2^4+2^6....+2^{2(x-2)})+2^{(2x-1)}$×y

(2)從迴圈統計表中，可知圖 1 產生線段(2，1),圖 3 產生線段(8，1)；

圖 2 產生線段(3,5,1),圖 4 產生線段(6,11,1)。因此我們可一般化為：

奇數圖 m 產生(2+3×(m-1),1)；偶數圖 t 產生(3+(t-2)/2×3,5+(t-2)×3,1)

圖 k 時，奇數圖產生的(2+3×(m-1),1)變為(2+3×(m-1)+2×(k-m),1+2×(k-m))

偶數圖(3+(t-2)/2×3,5+(t-2)×3,1)變(3+(t-2)/2×3+2×(k-t),5+(t-2)×3+2×(k-t),1)

2. 第二種迴圈

(1)根據表格規律可得連接數列如下：

2+y、$5+2^2$×y、$6+2^4$×y…，第 x 項為$[2+3\times(2^0+2^2+2^4+2^6....+2^{2(x-2)})]+2^{2(x-1)}$×y

(2)奇數圖 m 產生(4+3×(m-1),1)；偶數圖 t 產生(4+(t-2)/2×3,7+(t-2)×3,1)

3.第三種迴圈

(1) 根據表格規律可得連接數列如下：

$1+y$、$3+2^2\times y$、$11+2^4\times y$⋯.，第 x 項為$[1+(2^1+2^3+2^5+2^7....+2^{2x-3})]+2^{2(x-1)}\times y$

(2)奇數圖 t 產生$(2+(t-2)/2\times 3, 3+(t-2)\times 3, 1)$；偶數圖 m 產生$(6+3\times(m-1), 1)$

五、根據位置移動值表格，我們可以發現以下規律

(一)位移通式，以第一階段為例：

1.n=7+6k 時

第一階段位移值 1 的位置=[(n-7)/6]+1

最上面的位移值=[(19-n)/24]×3-2

最下面的位移值=[(n-7)/12]×3+1

2.n=9+6k 時

第一階段位移值 0 的位置=[(n-9)/6]+1

最上面的位移值=[(3-n)/24]×3

最下面的位移值=[(n-3)/12]×3

3.n=11+6k 時

第一階段位移值 0 的位置=[(n-11)/6]+1

最上面的位移值=[(11-n)/24]×3-1

最下面的位移值=[(n-11)/12]×3+2

(二)形成迴圈的位移值：在位值移動表中，可以看到形成迴圈的數列

1.第一階段可看到以下迴圈數列：

(1)n 除以 6 餘 1 時：1,-2,4,-8,16,-32,64,-128⋯,第 x 項為$(-1)^{x-1}\times 2^{x-1}$

(2)n 除以 6 餘 5 時：-1,2,-4,8,-16,32,-64,128⋯,第 x 項為$(-1)^{x}\times 2^{x-1}$

(3)以上 2 種 n 在位值移動表中也可以看到

1×y,-2×y,4×y,-8×y,16×y,-32×y,64×y,-128×y⋯,第 x 項為$(-1)^{x-1}\times 2^{x-1}\times y$

或-1×y,2×y,-4×y,8×y,-16×y,32×y,-64×y,128×y⋯,第 x 項為$(-1)^{x}\times 2^{x-1}\times y$ 的數列

，y=不為 3 的倍數的奇數

(4) n 除以 6 餘 3 時：

1×3,-2×3,4×3,-8×3,16×3,-32×3,64×3,-128×3⋯,第 x 項為$(-1)^{x-1}\times 2^{x-1}\times 3$

或-1×3,2×3,-4×3,8×3,-16×3,32×3,-64×3,128×3⋯,第 x 項為$(-1)^{x}\times 2^{x-1}\times 3$ 的數列

另外也可以在其中找到

1×3×y,-2×3×y,4×3×y,-8×3×y,16×3×y⋯,第 x 項為$(-1)^{x-1}\times 2^{x-1}\times 3$

或-1×3×y,2×3×y,-4×3×y,8×3×y,-16×3×y⋯,第 x 項為$(-1)^{x}\times 2^{x-1}\times 3$ 的數列

，y=不為 3 的倍數的奇數

2.第二階段可看到以下迴圈數列：

(1) n 除以 10 餘 3 時：1,-4,16,-64,256,⋯,第 x 項為$(-1)^{x-1}\times 4^{x-1}$

(2) n 除以 10 餘 7 時：-1,4,-16,64,-256,⋯,第 x 項為$(-1)^{x}\times 4^{x-1}$

(3) n 除以 10 餘 1 時：1×2,-4×2,16×2,-64×2,256×2,⋯,第 x 項為$(-1)^{x-1}\times 4^{x-1}\times 2$

(4) n 除以 10 餘 9 時：-1×2,4×2,-16×2,64×2,-256×2,⋯,第 x 項為$(-1)^{x}\times 4^{x-1}\times 2$

(5) n 除以 10 餘 5 時：

1×5,-4×5,16×5,-64×5,256×5,⋯,第 x 項為$(-1)^{x-1}\times 4^{x-1}\times 5$ 和

-1×5,4×5,-16×5,64×5,-256×5,⋯,第 x 項為$(-1)^{x}\times 4^{x-1}\times 5$

3. 迴圈的位移值級數：位移值級數代表該迴圈開頭到尾巴移動的格數。

(1)以第一階段以 1 為開頭為迴圈的位移值級數為例：

將 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128…數列相加後，可得位移值級數

1, -1, 3, -5, 11, -21, 43, -85, 171, -341, 683,

在網路上打入級數前幾個數字，我們在搜尋結果與整數數列線上大全「6」中可看到以 1 為開頭為迴圈的位移值級數在第 x 項時，**位移值級數=$[1-(-2)^x]/3$**

(2)第二階段以 1 為開頭為迴圈的位移值級數為

1, -3, 13, -51, 205, -819, 3277, -13107....

根據整數數列線上大全「6」可知在第 x 項時，**位移值級數=$[1-(-4)^x]/5$**

陸、討論

一、根據研究過程三-(一)-1 我們製作 excel 表進行循環運算

(一)excel 程式

數字n	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
1	=a1-a2*b1	=a1-a2*c1	=a1-a2*d1	=a1-a2*e1	=a1-a2*f1	=a1-a2*g1	=a1-a2*h1
=MIN(IF(B2:H2>0,B2:H2))	=a1-a3*b1	=a1-a3*c1	=a1-a3*d1	=a1-a3*e1	=a1-a3*f1	=a1-a3*g1	=a1-a3*h1

(二)循環運算結果，以 n=103 為例

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	103	1	2	4	8	16	32	64
2	1	102	101	99	95	87	71	39
3	39	64	25	-53	-209	-521	-1145	-2393
4	25	78	53	3	-97	-297	-697	-1497
5	3	100	97	91	79	55	7	-89
6	7	96	89	75	47	-9	-121	-345
7	47	56	9	-85	-273	-649	-1401	-2905
8	9	94	85	67	31	-41	-185	-473
9	31	72	41	-21	-145	-393	-889	-1881
10	41	62	21	-61	-225	-553	-1209	-2521
11	21	82	61	19	-65	-233	-569	-1241
12	19	84	65	27	-49	-201	-505	-1113
13	27	76	49	-5	-113	-329	-761	-1625
14	49	54	5	-93	-289	-681	-1465	-3033
15	5	98	93	83	63	23	-57	-217
16	23	80	57	11	-81	-265	-633	-1369
17	11	92	81	59	15	-73	-249	-601
18	15	88	73	43	-17	-137	-377	-857
19	43	60	17	-69	-241	-585	-1273	-2649
20	17	86	69	35	-33	-169	-441	-985
21	35	68	33	-37	-177	-457	-1017	-2137
22	33	70	37	-29	-161	-425	-953	-2009
23	37	66	29	-45	-193	-489	-1081	-2265
24	29	74	45	-13	-129	-361	-825	-1753
25	45	58	13	-77	-257	-617	-1337	-2777
26	13	90	77	51	-1	-105	-313	-729
27	51	52	1	-101	-305	-713	-1529	-3161
28	1	102	101	99	95	87	71	39

二、相關證明

(一)為何 $n=2^x+1$，必有(1)的單一奇數循環，可左右交換

若 $n=2^x+1$，則有一交換元素為$(1,2^x)$，根據交換規律，可得交換過程

$(1,2^x)(2^{x-1}+1,2^{x-1})(2^{x-2+}2^{x-1}+1,2^{x-2})\cdots\cdots(2^x,1)$

(二)為何 $n=2^x-1$，必有雙奇數循環，不可左右交換

若 $n=2^x-1$，則有一交換元素為$(1,2^x-2)$，根據交換規律，可得交換過程

$(1,2^x-2)(2^{x-1},2^{x-1}-1)(2^{x-2},2^{x-2}+2^{x-1}-1)(2^{x-3},2^{x-3}+2^{x-2}+2^{x-1}-1)\cdots..(1,2^x-2)$

三、特例統整

(一)一定有單一奇數循環，可左右交換：$n=2^x+1$，如：3、5、9、17….

(二)根據文獻探討，可知，不能左右交換，最後達成穩定：$n=2^x$，4、8、16、32….在交換糖果問題中，則形成 2 個奇數的數對。

(三)一定有雙奇數循環，不可左右交換：$n=2^x-1$，如：7、15、31、63…

(四)根據可在$(a\times k,b\times k)$中找到(a,b)相似結構原則，我們可以知道

1. 一定有單一奇數循環，可左右交換，如 6、10、12、14、18、27
2. 一定有雙奇數循環，不可左右交換，如 21、35、45
3. 偶數也可視為奇數，如 $12=3\times4$，則 $n=12$ 時會出現類似(1,2)(2,1)的結構：(4,8)(8,4)

(五)未出現特例數字

1. 形成一個循環：11、13、19、29、37
2. 形成多個循環：23、41、43

四、利用聯立方程式找出循環：根據排列運算和交換奇數表，我們可以發現以下幾點

(一)不同位置上排列的一般化

位置 1 上的數字：

在第 n 列時，最接近且比 n 小的 2 的次方數定義為 2^m，則位置 1 上的數字$=n-2^m+1$

出現(1)的列數為：1, 2, 4, 8, 16, 32, 64....2^m

出現(13 的列數為：　3, 5, 9, 17, 33, 65...2^m+1

出現(15 的列數為：　　6, 10, 18, 34, 66...2^m+2

出現(1k 的列數為：$2^m+(k-1)$

位置 2 上的數字：

在第 n 列時，最接近且比 n 小的 3×2 的次方數定義為 3×2^m，則位置 2 上的數字$=n-3\times2^m+1$

出現(31 的列數為：3, 6, 12, 24, 48, 96, 192....3×2^m

出現(3)的列數為：4, 7, 13, 25, 49, 97, 193...$3\times2^m+1$

出現(35 的列數為：5, 8, 14, 26, 50, 98, 194...$3\times2^m+2$

出現(3k 的列數為：$3\times2^m+(k-1)$

在第 n 列時，最接近且比 n 小的 5×2 的次方數定義為 5×2^m，則位置 3 上的數字$=n-5\times2^m+1$

出現(51 的列數為：5, 10, 20, 40, 80, 160, 320....5×2^m

出現(52 的列數為：6, 11, 21, 41, 81, 161, 321...$5\times2^m+1$

出現(5)的列數為：$5\times2^m+2$

出現(5k 的列數為：$5\times2^m+(k-1)$

(二)由上可推導出有 2 個交換奇數的循環位置

(13)：$2^x+1=3\times2^y$，x=1，y=0

(15)：$2^x+2=5\times2^y$，x=3，y=1

(17)：$2^x+3=7\times2^y$，x=1，y=0

(19)：$2^x+4=9\times2^y$，x=?，y=?

a+4=9b，a, b, 為 2 的次方數->a=32, b=4

(25)：$3\times2^x+4=9\times2^y+1$，x=1，y=0

(三)我們也試著推導出 3 個交換奇數的循環位置

(13，(35，(51：$2^x+1=3\times2^y+2=5\times2^z$，x=2，y=0，z=0

(15，(53，(31：$2^x+2=5\times2^y+1=3\times2^z$，x=3，y=0, z=1

a+2=5b+1，5b+1=3c，a, b, c 為 2 的次方數

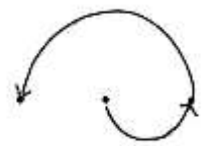
->a+1=5b=3c-1->a：b：c=(5b-1)：b：(5b+1)/3

(四)將交換奇數的對應整數序列想像成一條無限長的連續整數列每進行 2 次運算就多加一個點。

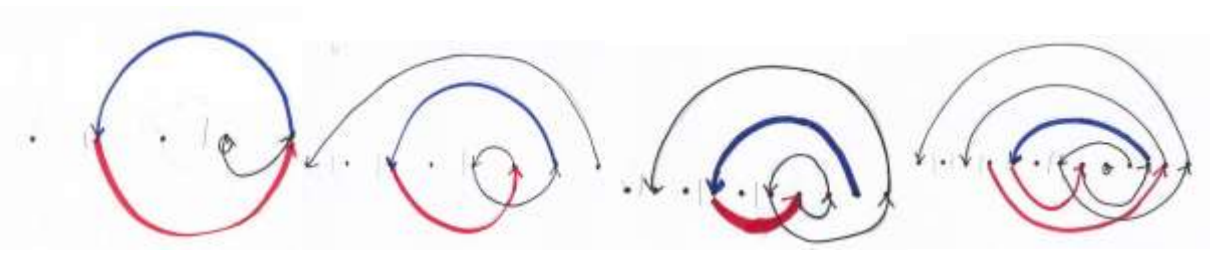
五、迴圈形成的循環

(一)從第一階段和第二階段形成的迴圈圖觀察：以 n=11、21、31….81 為例

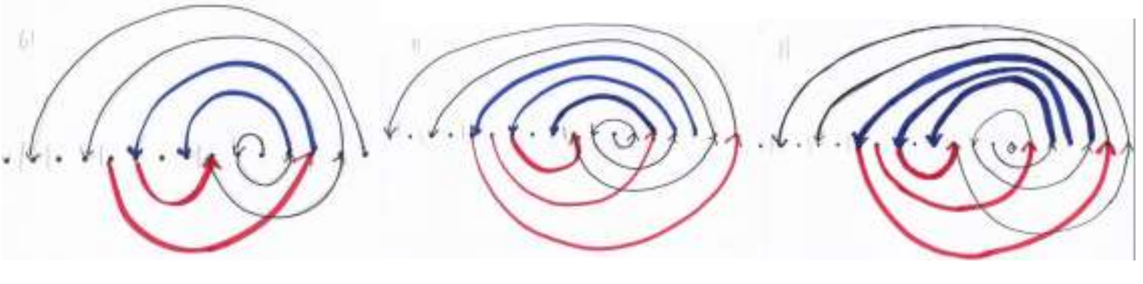
1. n=11



2. n=21, 31, 41, 51



3. n=61, 71, 81



4. 根據上圖，可推知 n=91 時，可成直徑為 13 格的圓形(循環)，經過交換奇數驗證無誤。

(二) 從(一)可知以下幾點：

1. 第一階段和第二階段的中心點每隔 3×5=15 個圖，就向左右遠離兩格。

所以如果在 n 時，第二階段點 p 投射到第一階段點 m，則在數字 n+10 時第二階段點 p 投射到第一階段點 m-2，反之亦然

2. 第一階段投射到第二階段中心點，如 n 時，是點 p，則在數字 n+15×2 時是點 p+1，

3. 以第二階段來確認第一階段是否有循環

第二階段數字為 2×奇數×4^k 時，不會和第一階段形成循環。

第二階段數字為奇數或 4^k×奇數時，可以和第一階段形成循環。

(三)根據位置移動表，將第二階段的投射數字統整後，根據以下表格可找到循環

第二階段數字	-1	-2	-3	-4(+1=-3)	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12(+3=-9)	-13	-14	-15	-16(-1+4=13)	-17	-18	-19	-20(+5=15)
n=	7	19	21	23	35	37	39	51	53	55	67	69	71	83	85	87	99	101	103	115
第一次出現投射到第一階段的數字	1	1 不能形成循環	3	5	5	7 不能形成循環	9	9 不能形成循環	11	13 不能形成循環	13	15	17	17 不能形成循環	19	21	21	23 不能形成循環	25	25
形成循環的數字n=	7	X	21	33	35	X	49	X	63	X	77	(15-9)÷2×10+69=99	91	X	105	(21-13)÷2×10+87=127	119	X	103	(25-15)÷2×10+115=165

六、迴圈的開頭與結尾

(一)我們將 1 開頭迴圈的結尾以橘色色塊標明，如下表：

7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91
-1	-2	-1	-4	-7	-2	-5	-8	-11	-14	-1	-4	-7	-10	-13
1	1	-2	1	-2	-5	-8	1	-2	-5	-8	-11	-14	-17	-20
	1	-2	0	-3	-6	1	-2	-5	-8	-11	-14	-17	0	-3
		1	-2	2	-1	-4	-7	-10	1	-2	-5	-8	-11	-14
		4	1	-2	4	1	-2	-5	-8	-11	4	1	-2	-5
			4	1	-2	-5	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	4
				4	1	-2	-5	5	2	-1	-4	-7	-10	-13
				7	4	1	-2	-5	7	4	1	-2	-5	-8
					7	4	1	-2	-5	-8	6	3	0	-3
						7	4	1	-2	-5	-8	8	5	2
						10	7	4	1	-2	-5	-8	10	7
							10	7	4	1	-2	-5	-8	-11
								10	7	4	1	-2	-5	-8
								13	10	7	4	1	-2	-5
									13	10	7	4	1	-2
										13	10	7	4	1
										16	13	10	7	4
											16	13	10	7
												16	13	10
												19	16	13
													19	16
														19
														22

(二)從上表可知

第一階段以 1 為中心的迴圈

1.根據上圖，可知數字 1 在 n=7 時在位置 3，n=13 時在位置 5，n=19 時在位置 7。

若 n=6k+1，則數字 1 在位置 2k+1。

2.以 1 為迴圈的結尾有 2 組，以 4 為迴圈結尾有 8 組，以 16 為迴圈結尾有 32 組

以 2^k 為迴圈的結尾有 2^{k+1} 組

3.若(n−1)/6=s….q，且 $s=2^1+2^3+2^5+...2^{2k+1}+a$，$a<2^{2k+1}$

則以 1 為開頭的迴圈落點在 2a+1 的位置

4.在位置移動值表第一階段中

數字 1 以下(包含 1)形成奇數個點的迴圈。若(n−7)÷24=s...q，則在數字 n 時有以 s×6+1、(s−1)×6+1，(s−2)×6+1，...1 為開頭的奇數個點的迴圈

數字 1 之上形成偶數個點的迴圈，若(n−43)÷48=s...q，則在數字 n 時有以 −〔s×6+5〕、−〔(s−1)+6+1〕，−〔(s−2)×6+1〕，...，−5 為開頭的偶數個點的迴圈

5.以數字−5 開頭迴圈為例：

以 10 為迴圈的結尾有 20 組，以 40 為迴圈結尾有 80 組，以 160 為迴圈結尾有 320 組

以 5×2^k 為迴圈的結尾有 $5\times2^{k+1}$ 組。

若(n−43)÷6=s….q，且 $s=5\times(2^2+2^4+2^6+...2^{2k})+a$，$a<2^{2k}$，則以−5 為開頭的迴圈落點在 2a+1 的位置

6.由上可知

(1)當 a>0 時，$n\in\{a\times(2^3-1)，a\times(2^3\times2^2-1)，a\times(2^3\times2^{2\times2}-1)，a\times(2^3\times2^{2\times3}-1)\cdots\}$可形成循環

(2)當 a<0 時，$n\in\{a\times(2^4+1)，a\times(2^4\times2^2+1)，a\times(2^4\times2^{2\times2}+1)，a\times(2^4\times2^{2\times3}+1)\cdots\}$可形成循環

(三)根據以上討論，找到各種交換奇數循環出現的數字 n，列表如下：

1.偶數個交換奇數循環：第一階段 n_1 的位置移動值為 1 開頭

	2 交換奇數循環	4 交換奇數循環	6 交換奇數循環
第一階段	$n_1=7=2^2+2^1+1$ $n_2=15=2^3+2^2+2^1+1$ $n_3=31=2^4+2^3+2^2+2^1+1$	$n_1=31=2^4+2^3+2^2+2^1+1$ $n_2=63=2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1$ $n_3=127=2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1$	$n_1=127=2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1$
第二階段	$n_1=21=2^{2*2}+2^{1*2}+1$ $n_2=85=2^{3*2}+2^{2*2}+2^{2*1}+1$ $n_3=341=2^{4*2}+2^{3*2}+2^{2*2}+2^{2*1}+1$	$n_1=341=2^{4*2}+2^{3*2}+2^{2*2}+2^{1*2}+1$ $n_2=1365$ $=2^{5*2}+2^{4*2}+2^{3*2}+2^{2*2}+2^{1*2}+1$	
第三階段	$n_1=73=2^{2*3}+2^{1*3}+1$ $n_2=585=2^{3*3}+2^{2*3}+2^{1*3}+1$		

2.奇數個交換奇數循環：第一階段 n_1 的位置移動值為−1 開頭

	3 交換奇數循環	5 交換奇數循環	7 交換奇數循環
第一階段	$n_1=17=2^4+1$ $n_2=33=2^5+1$ $n_3=65=2^6+1$	$n_1=65=2^6+1$ $n_2=129=2^7+1$ $n_3=257=2^8+1$	$n_1=257=2^8+1$ $n_2=513=2^9+1$ $n_3=1025=2^{10}+1$
第二階段	$n_1=129=2^7+1$ $n_2=257=2^8+1$ $n_3=513=2^9+1$	$n_1=1025=2^{10}+1$	
第三階段	$n_1=1025=2^{10}+1$ $n_2=2049=2^{11}+1$ $n_3=4097=2^{12}+1$		

柒、結論

一、在研究結果一中，我們已列出可左右交換的(a, b)、不可左右交換的(a, b)、(a, b)左右交換的條件、交換結果的特例。並且在討論五、六中討論找到了迴圈形成循環的規律。將全部特例整理如下：

(一)可交換的單一交換奇數循環：

單奇數循環 $n=H\times(2^x+1)$

當 H=1 時，產生單一奇數循環的奇數在位置 1

當 H>1 時，產生單一奇數循環的奇數在位置 H，H 為 n 的因數

(二) 第 k 階段產生不可交換的雙交換奇數循環：

1. $n_1=(2^k+1)\times2^k+1=2^{2k}+2^k+1$ 時，交換點為$((2^k)^2，2^k+1)$

2. $n_2=2^{3k}+2^{2k}+2^k+1$ 時，交換點為$(2^{3k}，n_1)$

3. $n_3=2^{4k}+2^{3k}+2^{2k}+2^k+1$ 時，交換點為$(2^{4k}，n_2)$

4. $n_x=2^{(x+1)k}+2^{x\times k}+2^{(x-1)k}+....2^{3k}+2^{2k}+2^k+1$ 時，交換點為$(2^{(x+1)k}，2^{x\times k}+2^{(x-1)k}+....2^{3k}+2^{2k}+2^k+1)$

(三)迴圈形成的循環：第一階段迴圈形成的循環

(1)當 a>0 時，$n=a\times(2^3\times2^{2\times(x-1)}-1)$可形成循環，x 為項數

(2)當 a<0 時，$n=a\times(2^4\times2^{2\times(x-1)}+1)$可形成循環，x 為項數

二、交換過程一般化：

(一). 以(ak, bk)表示第 k 次交換糖果的結果，k∈{1、2、3…}，ak+bk=n，n 為奇數

分糖果過程可以紀錄如下：

(a1, b1)(a2, b2)(a3, b3)……

(二)若 a1 為偶數, 則 a2=a1/2，b2=b1+a1/2，反之亦然。

所以可知若 a(k-1)=偶數，則 ak= a(k-1)/2，bk= b(k-1)+a(k-1)/2

若 a(k-1)=奇數，則 ak= a(k-1)+ b(k-1)/2，bk= b(k-1)/2

(三)反過來看交換糖果過程：

令 am=1，則 $a(m-1)=2^1$，$a(m-2)=2^2$ ，$a(m-3)=2^3$….，直到 $a(m-c)=2^c$，且 2^b 為最接近整數 n 的 2 的次方數。

由上可知 $b(m-c)=n-2^c$，且 b(m-c)為不大於 n/2 的奇數。

如上，(a(m-c)，b(m-c))稱為交換點，a(m-c)與 b(m-c)稱為交換數。

三、透過交換奇數表可知

(一)令交換元素表示為$(H\times2^k，(n- H\times2^k))$，k 為正整數，

當 $n- H\times2^k$ ∈{1、3、5、…(n-1)/2}時，$(H\times2^k，(n- H\times2^k))$為交換點。

也就是說 $n= H\times2^k+(n- H\times2^k)$，H 為交換奇數集合。

(二) 在數字 n 的交換過程中，定義 $f(n, a1)=n-a1\times2^x$，$a1\times2^x$ 為 a1 小於 n 的最大 2 的次方數倍數。可得 f(n, a1)=b1，f(n, f(n, a1))=a2，f(n, f(n, f(n, a1)))=b2，…..其餘類推。若進行過 k 次 f，使得 f(n, …. f(n, f(n, f(n, a1))))=a1，則可知過程中產生的 k 個數字{a1、b1、a2、2….}是 k 階的交換集合。

依照上述方式可列出交換奇數列表

在不同數字 n 時，交換奇數由下往上的排列可分成不同階段。

透過 $n\div2^k$ 的餘數可推出各階段最底下交換奇數，以此向上推算可知整行交換奇數的排列。

(三)研究結果二已列出在數字 n 時，利用不同 1 的位置可找出數字 n 交換奇數的分布，也可以將此情況與直線著色問題的解答互相對照。

(四)交換奇數列表一般式：在數字 n 的交換奇數列表中：

1. 數字 n 有[(n+1)÷4]個交換奇數，最大的交換奇數=2×[(n+1)÷4]-1，[]為高斯符號

2. 在階段 k 時，可列出算式 $[n-(3\times2^{k}+1)]\div2^{k+1}=s_k...q_k$，數字 n 最大的階段以 s_M 表示，則第 k 階段的數字數目 $=s_k+1-(s_{k+1}+1)$

3. 承上，若 $q_k<2^k$，則階段 k 最小的數字 $= q_k+2^k$，若 $q_k>2^k$，則階段 k 最小的數字 $= q_k-2^k$。令階段 k 最小的數字 $=m_k$，則階段 k 的交換奇數為 m_k，m_k+2^k，$m_k+2\times2^k$，$m_k+2\times3^k\cdots$

4. 透過交換奇數表可以更快找到數字 n 有多少循環以及一個循環中有幾個交換奇數，如同研究過程三-(三)-5

四、迴圈發現

(一)第 k 階段的迴圈圖形有 2^k+1 種

(二)第一階段有 3 種迴圈圖形可得最大迴圈一般式分別如下

1. 若 $n\div6=s\cdots1$，則在第一階段中可得最大迴圈位置數列為：

$(2s+1)$，$(2s+1)-2^1$，$(2s+1)+2^2$，$(2s+1)-2^3$，$(2s+1)+2^4$，……

2. $n\div6=s\cdots3$

$(2s+3)$，$(2s+3)-3\times2^1$，$(2s+3)+3\times2^2$，$(2s+3)-3\times2^3$，$(2s+3)+3\times2^4$，……

3. $n\div6=s\cdots5$

$(2s+1)$，$(2s+1)+2^1$，$(2s+1)-2^2$，$(2s+1)+2^3$，$(2s+1)-2^4$，……

(三)迴圈位移值數列：令 k 表示階段數，y 表示迴圈開頭位移值，x 表示項數，

第 k 階段迴圈位移值數列：

$y\times(2^k)^0, y\times(2^k)^1, y\times(2^k)^2,\ y\times(2^k)^3\cdots\cdots y\times(2^k)^{(x-1)}$

(四)迴圈位移值級數：同上，根據研究結果五，

令 s(k, y, x)表示第 k 階段位移值 y 開頭的第 x 項位移值級數，則

$s(k, y, x)= y\times[1-(-2^k)^x)]/(2^k+1)$

六、根據迴圈位移值數列與交換奇數規律，可逐個列出所有迴圈。

根據交換奇數表、位置移動值、討論六可得以下數字 n 的一般式：

(一) 單一交換奇數循環：第 k 階段 $n=2^k+1$

(二)偶數個交換奇數循環：在第 k 階段可找到的 y 個奇數循環第一個數字 n 表示 n_1，則

$n_1=2^{yk}+2^{(y-1)k}+2^{(y-2)k}+....2^{3k}+2^{2k}+2^k+1$，y 為偶數

(三)奇數個交換奇數循環：在第 k 階段可找到的 y 個奇數循環其中的第 x 個數字 n

$n=2^{1+yk+(x-1)}+1$，y 為大於 1 的奇數

七、此次研究我們編寫了 3 個 excel 程式。電腦運算結果與我們的推論相符。

八、未來展望：

(一)推導出更快速尋找迴圈的辦法

(二)透過降階的方式，讓尋找迴圈更有效率

九、心得：這次的研究中，我們不只是解決問題，還從解決問題的過程中發現有趣的問題。數學的重點不只是解題，而是發現更快的解答方式以及更有趣的問題。

捌、參考文獻資料

一、Excel 函數 (依類別) Office 支援網

二、徐筠悉、林佳妤、卓品瑜、陳楷翔，第五十八屆全國科展國小組數學科「公平分配遊戲」

三、林建銘、高暐芬、廖昇瑋，第五十六屆全國科展國中組數學科佳作「再探均分問題的動態穩定」

四、陳奕均，第五十五屆全國科展國中組數學科佳作「從平分問題到動態穩定」

五、蘇皓暘、張成緯、吳家宏第六十屆全國科展國中組數學科「分堆問題之收斂性的探討」

六、整數數列線上大全

【評語】080412

1. 本研究主要在探討奇數 n 分為(a，b)整數對後，不斷取偶數除以 2 加於奇數上的交換過程；作者首先透過列舉與觀察規律，從中找出關鍵、再利用表格，將其規律一般化、然後根據交換奇數的排列找到迴圈結構，並觀察其規律、最後則是利用位置移動值表格，更快速的找出迴圈，達到快速降階的目的。整體而言，循序漸進的抽絲剝繭，還能從解決問題中再發現新的問題， ，符合科學探究的精神，值得鼓勵。

2. 文獻探討中有羅列許多過去科展的相關作品，並整理出這些作品與本研究最大的不同之處，點出了本研究的新意與亮點，值得肯定。

作品簡報

奇偶互換-怎樣回到原位

數學科-國小組

作品編號:080412

第61屆中華民國中小學科學展覽會
National Primary & High School Science Fair

壹、研究動機

在科學研習月刊上，我們看到了交換糖果問題。

題目大概描述為：「有兩堆糖果放在左右兩盤,，左盤有四個,，右盤有五個。每一次都從偶數堆的糖果拿一半放到奇數堆去.，然後反覆動作。經過三次動作後可以變成左邊五個，右邊四個?又，如果一開始左盤 a 個，右盤 b 個，什麼樣的(a, b)可以經由若干次操作後變成(b, a)？」

在經過實驗和探討後，我們透過交換奇數列表快速地解開月刊上的問題，我們對於在研究過程中還發現的：給一個正奇數 n，n 分解所產生的交換奇數要如何形成循環?有幾個循環?循環中的迴圈有什麼規律?迴圈形成的結構與大小以及找出位移植一般式規律…等問題也感到興趣。以下就是我們的探討。

貳、研究目的

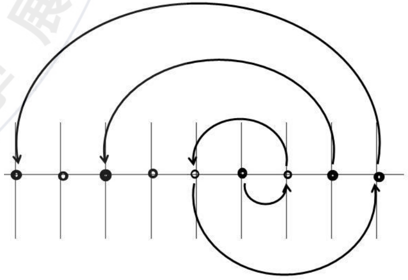
一、透過列舉交換過程，觀察交換時的規律，並找出其中關鍵部分。
二、將交換奇數製成表格，透過表格的規律將其一般化。
三、找到糖果總和數可左右交換的特例。
四、根據交換奇數的排列找到迴圈結構，並觀察其規律，達到快速降階的目的。
五、利用位置移動 值表格，找出位移 值級數，並將總和數分類後發現各種循環的一般式。

參、文獻探討

一、雖有人討論過糖果分配問題，但在未見他人討論交換糖果問題。
二、我們作品和他人最大不同點：
1.找到交換過程中的交換奇數規律，並以交換奇數找到循環。
2.以疊代法找到交換奇數。
3.探討透過迴圈結構找到位移值數列，並探討位移值級數。
4.將總和數進行分類，找到各循環的一般化通式。

肆、名詞介紹

一、交換奇數：在奇數 n 的交換過程中，每個小於 n/2 的奇數為集合 H，稱 H 為交換奇數。
可透過交換奇數快速找到循環，且反推交換過程。
二、迴圈：根據交換奇數表的的交換奇數與位置對應， 產生開放式的迴圈。迴圈結構範例如下圖。
三、循環：
1.當(a,b)經過交換回到(a,b)，構成循環
2.交換奇數與位置對應經過置換回到原位，也構成循環。
可透過交換奇數的循環可找到交換過程的循環。



伍、研究方法:交換過程列舉

以 n=29 的交換過程為例(紅色字表示左邊,藍色字表示右邊)

(28, 1)(14 , 15)(7, 22)(18 , 11)(9, 20)(19, 10)(24, 5)(12, 17)(6, 23)(3, 26)(16, 13)
(8 , 21)(4 , 25)(2 , 27)(1, 28)

以上交換過程可視為

$(7\times2^2, 1)(7\times2^1, 15)(7, 11\times2^1)(9\times2^1, 11)(9, 5\times2^2)(19, 5\times2^1)(3\times2^3, 5)(3\times2^2, 17)$
$(3\times2^1, 23)(3, 13\times2^1)(1\times2^4, 13)(1\times2^3, 21)(1\times2^2, 25)(1\times2^1, 27)(1, 7\times2^2)$ 1 出現 2 種顏色表可交換

發現一:交換奇數

(一)在交換過程中找不到 15, 19, 17, 23, 21, 25 的倍數,所以討論時,只要討論 1~(n-1)/2 的奇數即可。1~(n-1)/2 的奇數,我們稱為交換奇數。

(二)若交換奇數出現在左右不同位置表示可交換,在一個循環中,如果有奇數個交換奇數則可以左右互換,反之則否。

(三)令 $f(n, H)=n-H\times2^k$,k 為正整數使 $n-H\times2^k>0$ 且 $H\times2^k$ 為 H 小於 n 的最大 2 的次方數倍數
則可知當 $f(n, f(n, f(n, f(n, f\cdots\cdots f(n, H_x))))) = H_x$ 時,其中過程形成一個循環。
只要列出該循環所有的交換奇數,就可以透過 2 的次方數倒推過程。

發現一：交換奇數

交換奇數列表

根據 $f(n,H)=n-H\times2^{k}$，
可找出與 H 對應的交換奇數。
將 H 由小到大排列，依序找出交換奇數，
並將其製成交換奇數表。
我們還發現，k 不同時，交換奇數間的規律不同
，故以不同顏色表示。

對應數字	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55
	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
			1	3	5	1	3	5	7	9	11	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	1	3	5	7
					1	3	5	7	9	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	1	3	5	7	9	11	13	15
							1	3	5	7	9	11	13	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
									1	3	5	7	9	11	13	15	17	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
											1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	1	3	5	7	9	11
													1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	1	3
排列數字															1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
																	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
																			1	3	5	7	9	11	13	15	17
																					1	3	5	7	9	11	13
																							1	3	5	7	9
																									1	3	5
																											1

從交換奇數找到循環

交換奇數與位值對應如右圖
可用置換方式記錄為：

$$\begin{bmatrix}17 & 1 & 9 & 21 & 13 & 5 & 23 & 19 & 15 & 11 & 7 & 3\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23\end{bmatrix}$$

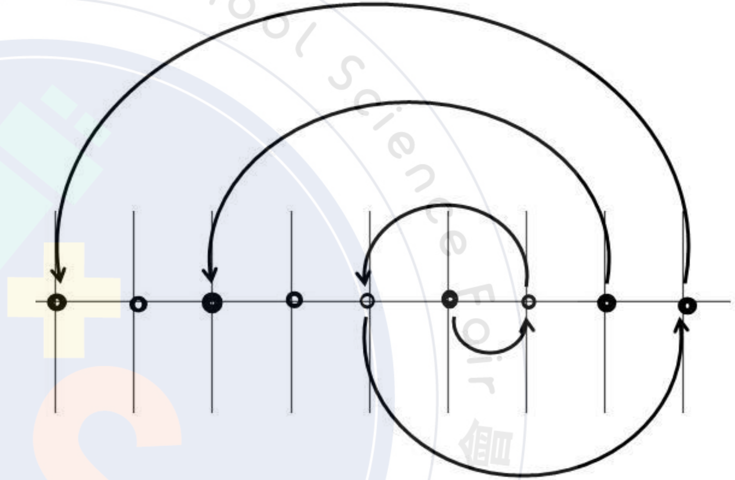
因此我們可以找到循環(3,23,13,9,5,11,19,15,17,1,3)

位置	數值
1	17
3	1
5	9
7	21
9	13
11	5
13	23
15	19
17	15
19	11
21	7
23	3

發現二:交換數列中的迴圈結構

迴圈結構

將交換奇數與位置對應後，會出現迴圈結構
(如右圖，以n=35為例)



透過迴圈降階

降階前

103																										
交換奇數列	39	7	23	47	31	15	51	43	35	27	19	11	3	49	45	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5	1
位置值	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51

降階後

51	35	43	15	11	23	27	19	31	47	7	3	39
13	17	15	11	23	5	19	21	9	7	3	25	1
45	43				49		41	47			39	51
29					27		31					
37												
33												
35												

伍、研究方法：位置移動值表格

n=	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77
位	0	0	-1	0	-1	-2	-3	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
置			1	0	-1	1	0	-1	-2	-3	-4	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13
移					2	1	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16
動							3	2	1	0	-1	-2	-3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
值									4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	4	3	2
											5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
													6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
															7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
																	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	8	7	6	5	4
																			9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	9
																					10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
																							11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
																									12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
																											13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
																													14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
																															15	14	13	12	11	10	9	8
																																	16	15	14	13	12	11
																																			17	16	15	14
																																					18	17

發現三：位置移動值迴圈數列

我們發現在各階段中會有不同的位值移動數列，構成不同大小的迴圈。

第一階段：$(-2)^0$, $(-2)^1$, $(-2)^2$, $(-2)^3$, $(-2)^4\cdots$.

第二階段：$(-4)^0$, $(-4)^1$, $(-4)^2$, $(-4)^3$, $(-4)^4\cdots$

第三階段：$(-8)^0$, $(-8)^1$, $(-8)^2$, $(-8)^3$, $(-8)^4\cdots$

第 k 階段，從第一項到第 x 項$(-2^k)^0$, $(-2^k)^1$, $(-2^k)^2$, $(-2^k)^3$, $(-2^k)^4\cdots$. $(-2^k)^{x-1}$

以數字 y 開頭的位移值迴圈數列：

$y\times(-2^k)^0$, $y\times(-2^k)^1$, $y\times(-2^k)^2$, $y\times(-2^k)^3$, $y\times(-2^k)^4\cdots$. $(y\times-2^k)^{x-1}$

陸、研究結果

一、可交換與不可交換

(一) (a, b)可以變成(b, a)：當(a, b)為(1，2^x)的形式時，X 為大於等於 1 的整數，根據倒推的模式可知(1，2^x)，(2，2^x-1)，(4，2^x-3)…此類交換元素進行交換後可出現左右位置交換的情況。當 n=ax(2^x+1)時，產生單一交換奇數循環，可找到上述情況。

(二) (a, b)不可以變成(b, a) ：當(a, b)為(2^x-1，2^x)的形式時，X 為大於等於 1 的整數，可知(2^x-1，2^x) 、(2^x+2^{x-1}-1，2^{x-1})、(2^x+2^{x-1}+2^{x-2}-1，2^{x-2})…此類交換元素不能出現左右位置交換的情況。當 n=ax(2^x-1)時，產生雙交換奇數循環，可找到上述情況。

二、交換數列表一般式

在數字 n 的交換奇數列表中：

(一)數字 n 有[(n+1)÷4]個交換奇數，最大的交換奇數=2x[(n+1)÷4]-1，[ ]為高斯符號

(二)在階段 k 時，可列出算式 n÷2^{k+1}=s_k. . . q_k，

若 $q_k<2^k$，則階段 k 最小的數字= q_k+2^k，若 $q_k>2^k$，則階段 k 最小的數字= q_k-2^k。

令階段 k 最小的數字=m_k，則階段 k 的交換奇數為 m_k，m_k+2^k ，m_k+2x2^k，m_k+3x2^k…

陸、研究結果

三、迴圈一般式

以第一階段迴圈第一種迴圈為例：從迴圈統計表中，可知

圖 1 產生線段(2，1), 圖 3 產生線段(8，1)；

圖 2 產生線段(3, 5, 1), 圖 4 產生線段(6, 11, 1)。因此我們可一般化為：

奇數圖 m 產生(2+3x(m-1), 1)；偶數圖 t 產生(3+(t-2)/2x3, 5+(t-2)x3, 1)

圖 k 時，奇數圖產生的(2+3x(m-1), 1)變為(2+3x(m-1)+2x(k-m), 1+2x(k-m))

偶數圖(3+(t-2)/2x3, 5+(t-2)x3, 1)變(3+(t-2)/2x3+2x(k-t), 5+(t-2)x3+2x(k-t), 1)

四、位移值級數

迴圈的位移值級數：位移值級數代表該迴圈開頭到尾巴移動的格數。

(一)第一階段以 1 為開頭為迴圈的位移值級數為例：

將 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128…數列相加後，可得位移值級數

1, -1, 3, -5, 11, -21, 43, -85, 171, -341, 683,

以 1 為開頭為迴圈的位移值級數在第 x 項時，位移值級數=$[1-(-2)^x)]/3$

(二)第二階段以 1 為開頭為迴圈的位移值級數為

1, -3, 13, -51, 205, -819, 3277, -13107. . . . 在第 x 項時，位移值級數=$[1-(-4)^x)]/5$

柒、討論

一、電腦驗證

根據我們發現的公式 $f(n,H)=n-H\times2^{x}$，設計 excel 程式進行驗證

數字 n	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
1	=a1-a2*b1	=a1- a2*c1	=a1- a2*d1	=a1- a2*e1	=a1- a2*f1	=a1- a2*g1	=a1- a2*h1
=MIN(IF(B2:H2>0,B2:H2))	=a1-a3*b1	=a1-a3*c1	=a1-a3*d1	=a1-a3*e1	=a1-a3*f1	=a1-a3*g1	=a1-a3*h1

二、迴圈+點形成的循環

奇數個交換奇數循環：第一階段 n_1 的位置移動值為-1 開頭

	3 交換奇數循環	5 交換奇數循環	7 交換奇數循環
第一階段	$n_1=17=2^4+1$ $n_2=33=2^5+1$ $n_3=65=2^6+1$	$n_1=65=2^6+1$ $n_2=129=2^7+1$ $n_3=257=2^8+1$	$n_1=257=2^8+1$ $n_2=513=2^9+1$ $n_3=1025=2^{10}+1$
第二階段	$n_1=129=2^7+1$ $n_2=257=2^8+1$ $n_3=513=2^9+1$	$n_1=1025=2^{10}+1$	
第三階段	$n_1=1025=2^{10}+1$ $n_2=2049=2^{11}+1$ $n_3=4097=2^{12}+1$		

位置移動值為-1 開頭形成循環：

第一階段形成循環

n	17	33	65	129
位	0	0	0	0
置	-1	-3	-7	-15
移	-1	-4	-10	-22
動	2	1	-1	-5
值		-3	-10	~
		0	-5	~
		3	0	3
		6	5	8
			-7	13
			-4	-15
			-1	-12
			2	-9
			5	~
			8	15
			11	18
			14	21
				24
				27
				30

第二階段形成循環

n	129	257	513
位	0	0	0
置	-15	-31	-63
移	-22	-46	-94
動	-5	-13	-29
值	-24	-52	-108
	~	~	~
	-2	19	~
	3	24	46
	8	29	51
	13	-31	56
	-15	-28	61
	-12	-25	-63
	-9	-22	-60
	-6	-19	-57
	~	-16	-54
	18	~	-51
	21	41	~
	24	44	[illegible]
	27	47	108
	30	50	111
		53	114
		56	117
		59	120
		62	123
			126

捌、結論

一、特例統整

(一)可交換的單一交換奇數循環：

單奇數循環 $n=H\times(2^{x}+1)$

當 $H=1$ 時，產生單一奇數循環的奇數在位置 1

當 $H>1$ 時，產生單一奇數循環的奇數在位置 H，H 為 n 的因數

(二) 第 k 階段產生不可交換的雙交換奇數循環：

1. $n_1=(2^{k}+1)\times 2^{k}+1=2^{2k}+2^{k}+1$ 時，交換點為 $((2^{k})^{2}, 2^{k}+1)$
2. $n_2=2^{3k}+2^{2k}+2^{k}+1$ 時，交換點為 $(2^{3k}, n_1)$
3. $n_3=2^{4k}+2^{3k}+2^{2k}+2^{k}+1$ 時，交換點為 $(2^{4k}, n_2)$
4. $n_x=2^{(x+1)k}+2^{x\times k}+2^{(x-1)k}+....2^{3k}+2^{2k}+2^{k}+1$ 時，交換點為 $(2^{(x+1)k}, 2^{x\times k}+2^{(x-1)k}+....2^{3k}+2^{2k}+2^{k}+1)$

二、位移值數列與級數

(一)迴圈位移值數列：令 k 表示階段數，y 表示迴圈開頭位移值，x 表示項數，

第 k 階段迴圈位移值數列：

$y\times(-2^{k})^{0}, y\times(-2^{k})^{1}, y\times(-2^{k})^{2}, y\times(-2^{k})^{3}\cdots\cdots y\times(-2^{k})^{(x-1)}$

(二)迴圈位移值級數：

令 $s(k, y, x)$ 表示第 k 階段位移值 y 開頭的第 x 項位移值級數，則

$s(k, y, x)= y\times[1-(-2^{k})^{x})]/(2^{k}+1)$

捌、結論

三、構成特例迴圈的數字n

(一) 單一交換奇數循環：第 k 階段 $n=2^k+1$

(二)偶數個交換奇數循環：在第 k 階段可找到的 y 個奇數循環第一個數字 n 表示 n_1，則

$n_1=2^{yk}+2^{(y-1)k}+2^{(y-2)k}+....2^{3k}+2^{2k}+2^k+1$，y 為偶數

(三)奇數個交換奇數循環：在第 k 階段可找到的 y 個奇數循環其中的第 x 個數字 n

$n=2^{1+yk+(x-1)}+1$，y 為大於 1 的奇數

四、未來研究方向與建議

在繳交科展說明書後，我們持續研究。

發現數字 n 在因倍數關係、2 的次方數相似關係時，可找到相似的結構。

此外並不能找到其他相似的結構。我們推測：只要去掉數字 n 中因倍數、2 的次方數產生的循環，剩下的數字會單獨形成一個循環。

所以，我們建議未來進行相關題目研究的同學，可從以下幾點著手：

1. 找到是否有其他相似結構，並證明之。
2. 若沒有相似結構該數字 n 的循環順序為何?

玖、參考資料

一、Excel 函數 (依類別) Office 支援網

二、徐筠悉、林佳妤、卓品瑜、陳楷翔, 第五十八屆全國科展國小組數學科「公平分配遊戲」

三、林建銘、高暐芬、廖昇瑋, 第五十六屆全國科展國中組數學科佳作「再探均分問題的動態穩定」

四、陳奕均, 第五十五屆全國科展國中組數學科佳作「從平分問題到動態穩定」

五、蘇皓暘、張成緯、吳家宏第六十屆全國科展國中組數學科「分堆問題之收斂性的探討」