

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

080410

因「材」施計-觀察倍數關係，推理原始密碼

學校名稱：高雄市三民區十全國民小學

作者： 小六 古晴文	指導老師： 黎懿瑩 邱怡瑛
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：因數、倍數、質數

摘要

在數字 2~100 之間，約定取哪五個數字，每個數字有五張牌。

每次遊戲，**提問者**從這二十五張牌中抽五張作牌組。

答題者用乘法提問，以較少提問次數答出牌組數字者，獲勝！

(一) 解題步驟

- (1) 問五張牌相乘，找出具有特殊質因數的牌；
- (2) 找出牌組中，會造成乘積相同的組合，問其中最大數字的倍數相乘。

如果執行步驟(1)，尚未完全解題，就執行步驟(2)；

如果執行步驟(2)，尚未完全解題，再次執行步驟(2)。

在這個規則之下，可以依序確定五張牌。

(二) 提問次數

第一題問五張牌相乘的質因數分解，出現

- (1) 四種以上的質數，直接得知五張牌數字；
- (2) 三種質數，最多加問一題；
- (3) 兩種質數，最多加問兩題；
- (4) 一種質數，最多加問三題。

在這個提問上限之內，一定可以成功解題！

壹、研究動機

去年我們剛開始玩這個推理數字的遊戲時，大家都只用兩張牌的加、減、乘、除來提問，每次都要問很多題，每次遊戲的提問和結果都不一樣，但似乎問「乘法」是最有效的提問，而且「質數」好像很有用！令我們感到十分有趣，於是進行了去年的研究。

在 2~11 之間，約定取哪五個數字，每個數字有五張牌。遊戲的時候，就從這二十五張牌中，任意抽五張出來，玩家透過乘法提問，猜出這五張牌分別是哪些數字，使用較少的問題數量得知答案的人就贏了！

舉例說明：

<p>在 2~11 之間，約定取 2、3、4、6、8 這五個數字，每個數字有五張，共有二十五張牌。</p>	<p>從左邊的二十五張牌中，任意抽五張出來，玩家透過「乘法」提問，猜出這五張牌分別是哪些數字。</p>
	

約定的數字由全部都是質數開始，一次換來一個合數，直到牌組全部都是合數。後來，我們發現遊戲的秘密，是觀察一個牌組中選用的五個數字：

相乘會產生相同乘積的稱為「**相關數字**」，例如：在 2、4、6、8、9 這五個數字的牌組中， $4 \times 9 = 6 \times 6$ ，等式的左邊和右邊各用了兩張牌，而且乘積都是 36，如果知道兩張牌的乘積是 36 的時候，並不能確定這兩張牌是(4, 9)或是(6, 6)，所以 4 和 9 和 6 就是相關數字。

相乘不會產生相同乘積的稱為「**無關數字**」，例如：在 2、3、4、5、7 這五個數字的牌組中，雖然 $2 \times 2 = 4$ ，但是等式左邊是兩張牌、右邊只有一張，如果知道兩張牌的乘積是 4 的時候，可以確定這兩張牌是(2, 2)，不會是 4，所以 2、3、4、5、7 都是無關數字。

提問數學問題的時候，多選無關數字來提問，能夠猜中的牌會比較多。

在去年有限的時間之內，我們只做了 2~11 之間的六個特例，是很小的數字範圍，今年接續研究，調整數字在 2~100 之間，任意選五個數字，希望找到共通性，可以處理更大的數字範圍。



2~100 的數字牌



共五副牌混合，使 2~100 之間，
每個數字各有五張。



約定取哪五個數字，每個數字有五張牌。從這二十五張牌中，任意抽五張出來。

提問乘法問題，來判斷這五張牌分別是哪些數字。

如何使用最少的提問次數，得知五張牌的數字呢？

在去年遊戲中，我們發現「全部質數相乘」這個提問，只要用少數幾題就能解出全部的答案，於是我就推測質數仍然可能是一個解題關鍵。

這次的研究範圍是 2~100，質數出現的比率比較少，所以我一開始使用的第二個提問是「(某質數平方)的倍數相乘」，但做了幾個牌組後發現，不一定每個牌組都會有平方數，就放寬條件修改為「(某數)的倍數相乘」，但每個牌組要提問的「某數」都不大相同……

於是，就開始了現在的研究！

貳、研究目的與問題

將 2~100 之間的數字，全部寫成質數相乘，可分六個類型：質數、兩質數相乘的合數、三質數相乘的合數、四質數相乘的合數、五質數相乘的合數、六質數相乘的合數。

從每個類型中，約定取哪五個數字，每個數字有五張牌，從這二十五張牌中，任意抽五張出來做推測。

其中，質數類型只要提問五張相乘，就能確認那五張牌分別是什麼數字，這部份去年已完成，不列入討論。四個以上質數相乘的合數，在 100 以內較少，所以合併成一個範圍。

範圍一：兩個質數相乘的合數

範圍二：三個質數相乘的合數

範圍三：四個、五個、六個質數相乘的合數

怎麼提問，能以最少次數推測出五張數字呢？

參、名詞定義

Q1：提問第一次、Q2：提問第二次、Q3：提問第三次、Q4：提問第四次

肆、研究設備及器材

紙筆、電腦

伍、研究方法與過程

將 2~100 之間的數字，全部寫成質數相乘，依據分解出來的質數個數，分成六個類型，再依據研究目的分為三個範圍：

質數		範圍一		範圍二	範圍三		
		兩個質數相乘的合數		三個質數相乘的合數	四個質數相乘的合數	五個質數相乘的合數	六個質數相乘的合數
2	41	4=2x2	51=3x17	8=2x2x2	16=2x2x2x2	32=2x2x2x2x2	64=2x2x2x2x2x2
3	43	6=2x3	55=5x11	12=2x2x3	24=2x2x2x3	48=2x2x2x2x3	96=2x2x2x2x2x3
5	47	9=3x3	57=3x19	18=2x3x3	36=2x2x3x3	72=2x2x2x3x3	
7	53	10=2x5	58=2x29	20=2x2x5	40=2x2x2x5	80=2x2x2x2x5	
11	59	14=2x7	62=2x31	27=3x3x3	54=2x3x3x3		
13	61	15=3x5	65=5x13	28=2x2x7	56=2x2x2x7		
17	67	21=3x7	69=3x23	30=2x3x5	60=2x2x3x5		
19	71	22=2x11	74=2x37	42=2x3x7	81=3x3x3x3		
23	73	25=5x5	77=7x11	44=2x2x11	84=2x2x3x7		
29	79	26=2x13	82=2x41	45=3x3x5	88=2x2x2x11		
31	83	33=3x11	85=5x17	50=2x5x5	90=2x3x3x5		
37	89	34=2x17	86=2x43	52=2x2x13	100=2x2x5x5		
	97	35=5x7	87=3x29	63=3x3x7			
		38=2x19	91=7x13	66=2x3x11			
		39=3x13	93=3x31	68=2x2x17			
		46=2x23	94=2x47	70=2x5x7			
		49=7x7	95=5x19	75=3x5x5			
				76=2x2x19			
				78=2x3x13			
				92=2x2x23			
				98=2x7x7			
				99=3x3x11			

範圍一：兩個質數相乘的合數

觀察兩個質數相乘的合數，先進行再分類：

2×質		3×質		5×質		7×質	
6	2×3	6	3×2	10	5×2	14	7×2
10	2×5	15	3×5	15	5×3	21	7×3
14	2×7	21	3×7	35	5×7	35	7×5
22	2×11	33	3×11	55	5×11	77	7×11
26	2×13	39	3×13	65	5×13	91	7×13
34	2×17	51	3×17	85	5×17		
38	2×19	57	3×19	95	5×19		

46	2×23	69	3×23				
58	2×29	87	3×29				
62	2×31	93	3×31				
74	2×37						
82	2×41						
86	2×43						
94	2×47						
平方數							
4	2×2	9	3×3	25	5×5	49	7×7

依上述分類用代號表示，這樣能方便辨識，並且可以一次把同一種類型的牌組一起討論，分別以 X、Y、Z、W 代表分解後較小的質數，以甲、乙、丙、丁代表分解後較大的質數。代號的說明如下：

X	2、3、5 或 7 其中一個	Y	除 X 以外的 2、3、5 或 7 其中一個
Z	X、Y 以外的 2、3、5 或 7 其中一個	W	除 X、Y、Z 以外的那個
甲	除了正在當 X、Y、Z 和 W 的質數以外，與 X、Y、Z、W 配對的質數	乙	除了正在當 X、Y、Z 和 W 的質數以外，與 X、Y、Z、W 配對的質數
丙	除了正在當 X、Y、Z 和 W 的質數以外，與 X、Y、Z、W 配對的質數	丁	除了正在當 X、Y、Z 和 W 的質數以外，與 X、Y、Z、W 配對的質數
戊	除了正在當 X、Y、Z 和 W 的質數以外，與 X、Y、Z、W 配對的質數		

在範圍一之中，抽取五張的所有可能性分為六大類

第一類：五張都有一個相同的質因數 X

第二類：其中四張有一個相同的質因數 X

第三類：其中三張有相同的質因數 X，另外兩張有相同的質因數 Y

第四類：一張有質因數 X、一張有質因數 Y，剩下三張有相同的質因數 Z

第五類：一張有質因數 X，兩張有相同的質因數 Y，剩下兩張有相同的質因數 Z

第六類：一張有質因數 X、一張有質因數 Y、一張有質因數 Z，剩下兩張有相同的質因數 W

第一類：五張都有相同的質因數 X

X×甲	X×乙	X×丙	X×丁	X×戊
-----	-----	-----	-----	-----

特質：牌組中的五個數，都有一個相同的質因數 X

攻略：因為他們都有一個相同的質因數 X ，所以只要用「五張相乘」來提問，獲得的答案除以 X 的 5 次方，再把剩餘的數做質因數分解，把得到的五個質數分別和 X 相乘，就能知道最終牌組。

結果：問「五張相乘」即可解出。

第二類：其中四張有一個相同的質因數 X

四張和 x 配對				一張和 y 配對
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times$ 丙	$x \times$ 丁	$y \times$ 戊
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times$ 丙	$x \times$ 丁	$y \times$ 甲
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times$ 丙	$x \times y$	$y \times$ 戊
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times$ 丙	$x \times y$	$y \times$ 甲

特質：這種組合當中有四個數，都有一個相同的質因數 X

攻略：

藍色部分問五張相乘，答案做質因數分解，有幾個 Y 就是有幾個 $Y \times$ 戊(或甲)，接著扣掉能確定的數，最後把剩下的數分別與 X 相乘，即可知最終牌組。

紅色部分問五張相乘，答案做質因數分解後，把能確定的數提出，再把剩下幾個要與 X 或 Y 配對的甲，和多出來的 X 、 Y 配對，即可知道最終牌組。

結果：問「五張相乘」就能知曉答案。

第三類：其中三張有一個相同的質因數 X ，另外兩張有一個相同的質因數 Y

三張和 x 配對			兩張和 y 配對	
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times$ 丙	$y \times$ 丁	$y \times$ 戊
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times$ 丙	$y \times$ 甲	$y \times$ 戊
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times y$	$y \times$ 丁	$y \times$ 戊
$x \times$ 甲	$x \times$ 乙	$x \times y$	$y \times$ 甲	$y \times$ 戊

$X \times \text{甲}$	$X \times \text{乙}$	$X \times Y$	$Y \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$
$X \times \text{甲}$	$X \times \text{乙}$	$X \times \text{丙}$	$Y \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$

特質：這種組合當中有三個數有共同的質因數 X ，另外兩個數有共同的質因數 Y

攻略：

藍色部分問五張相乘，答案做質因數分解，把所有的能確定的數提出，再把剩下的數分別與 X 相乘，即可知最終牌組。

綠色部分問五張相乘，答案做質因數分解後，把能確定的數提出，由於要形成 $X \times Y$ 需要 X 和 Y 的數量相同，所以只要把剩下幾個要與 X 或 Y 配對的數，和多出來的 X 、 Y 配對即可知道最終牌組。

紅色部分問五張相乘，可以知道丙的數量、 $X \times Y$ 的數量，但無法確定甲和乙到底是配 X 還是 Y 。所以要問 Q2，Q2 問「 X 的倍數相乘」，答案做質因數分解後，有幾個甲，就是有幾個 $X \times \text{甲}$ ，有幾個乙就是有幾個 $X \times \text{乙}$ ，有幾個 Y 就是有幾個 $X \times Y$ ，接著用一開始五張相乘答案的質因數分解，除以 X 的倍數相乘，答案做質因數分解，有幾個甲就是有幾個 $Y \times \text{甲}$ ，有幾個乙就是有幾個 $Y \times \text{乙}$ 。

結果：藍色和綠色部分問「五張相乘」。紅色部分 Q1 問五張相乘，Q2 問「 X 的倍數相乘」。

第四類：一張有質因數 X 、一張有質因數 Y ，剩下三張有一個相同的質因數 Z

一張和 X 配對	一張和 Y 配對	三張和 Z 配對		
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times \text{丙}$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{乙}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{甲}$	$Z \times \text{丙}$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{甲}$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times X$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times X$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times X$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{乙}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{甲}$	$Z \times X$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{甲}$	$Z \times X$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{戊}$

$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times X$	$Z \times Y$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Z \times X$	$Z \times Y$	$Z \times \text{甲}$

特質：這種組合的其中三個數有共同質因數 Z

攻略：

藍色部分問五張相乘答案做質因數分解，把確定的數提出，再把剩下的數分別與 Z 相乘可知最終牌組。

綠色部分問五張相乘，答案做質因數分解後，把能確定的數提出，且由於要形成 $Z \times X$ 需要 X 和 Z 的數量相同，所以只要把剩下幾個要與 X 或 Y 配對的數，和多出來的 X 、 Y 配對，最後再把剩下的數與 Z 相乘，即可知道最終牌組。

紅色部分問五張相乘，答案做質因數分解，把所有的乙以及和乙相同數量的 Y 提出，剩下的 Y 配 Z ，且由於要形成 $Z \times X$ 需要 X 和 Z 的數量相同，所以只要把剩下幾個要與 X 或 Y 配對的數，和多出來的 X 、 Y 配對，最後再把剩下的數與 Z 相乘，即可知道最終牌組。

結果：問「五張相乘」就能知曉答案。

第五類：一張有質因數 X ，兩張有一個相同的質因數 Y ，剩下兩張有一個相同的質因數 Z

一張和 X 配對	兩張和 Y 配對		兩張和 Z 配對	
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{甲}$	$Y \times \text{丙}$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{甲}$	$Y \times \text{丙}$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Y \times \text{丙}$	$Z \times \text{丁}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Y \times \text{丙}$	$Z \times \text{乙}$	$Z \times \text{戊}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{甲}$	$Y \times \text{丙}$	$Z \times \text{甲}$	$Z \times \text{丙}$
$X \times \text{甲}$	$Y \times \text{乙}$	$Y \times \text{丙}$	$Z \times \text{乙}$	$Z \times \text{丙}$

攻略：

藍色部分問五張相乘，答案做質因數分解後，把 X 以及和 X 相同數量的甲提出，再把丙以及和丙相同數量的 Y 提出，剩下的 Y 就是配紅字的數，最後再把剩下的數和 Z 相乘就能知道最終牌組。

紅色部分問完五張相乘後先把答案做質因數分解，有幾個 X 就是有幾個 $X \times \text{甲}$ ，但無法判斷甲和乙，到底是配誰，所以要問 Q2，問「 Y 的倍數相乘」，把答案做質因數分解，有幾個丙就是

有幾個 $Y \times 丙$ ，有幾個乙(或甲)就是有幾個 $X \times 乙$ (或甲)。最後用 Q1 的答案，除以 Q2 答案，質因數分解，有幾個丙就是有幾個 $Z \times 丙$ ，有幾個乙(或甲)就是有幾個 $Z \times 乙$ (或甲)。

結果：藍色部分問「五張相乘」；紅色部分第一題問「五張相乘」，第二題問「Y 的倍數相乘」。

第六類：一張有質因數 X、一張有質因數 Y、一張有質因數 Z，剩下兩張有相同的質因數 W

一張和 X 配對	一張和 Y 配對	一張和 Z 配對	兩張和 W 配對	
$X \times 甲$	$Y \times 乙$	$Z \times 丙$	$W \times 丁$	$W \times 戊$
$X \times 甲$	$Y \times 乙$	$Z \times 丙$	$W \times 甲$	$W \times 戊$
$X \times 甲$	$Y \times 乙$	$Z \times 丙$	$W \times 甲$	$W \times 乙$
$X \times 甲$	$Y \times 甲$	$Z \times 丙$	$W \times 丁$	$W \times 戊$
$X \times 甲$	$Y \times 甲$	$Z \times 丙$	$W \times 甲$	$W \times 戊$
$X \times 甲$	$Y \times 甲$	$Z \times 丙$	$W \times 甲$	$W \times 丙$
$X \times 甲$	$Y \times 甲$	$Z \times 甲$	$W \times 丁$	$W \times 戊$
$X \times 甲$	$Y \times 甲$	$Z \times 甲$	$W \times 甲$	$W \times 戊$

攻略：問五張相乘，答案做質因數分解後，有幾個 X 就是有幾個 $X \times 甲$ ，有幾個 Y 就是有幾個 $Y \times 甲$ (或乙)，有幾個丙就是有幾個 $Z \times 丙$ (或甲)。剩下的和 W 相乘即可知曉最終牌組。

結果：問「五張相乘」就能知曉答案。

範圍一的研究結果：

我發現當牌組中出現，五個數字中有四個數字是由兩個質數分別和兩個不同的質數相乘時(例如 2×5 、 3×5 、 2×7 、 3×7)，問五張相乘就有可能會發生有很多種組合乘積相同的情形，這種時候我們就要問 Q2，我 Q2 會選擇問「(兩個質數中其中一個)的倍數相乘」。

範圍二：三個質數相乘的合數

觀察三個質數相乘的合數，先進行再分類：

$X \times X \times 甲$		$X \times Y \times 甲$	
12	$2 \times 2 \times 3$	30	$2 \times 3 \times 5$
20	$2 \times 2 \times 5$	42	$2 \times 3 \times 7$
28	$2 \times 2 \times 7$	66	$2 \times 3 \times 11$

44	$2 \times 2 \times 11$	78	$2 \times 3 \times 13$
52	$2 \times 2 \times 13$	70	$2 \times 5 \times 7$
68	$2 \times 2 \times 17$		
76	$2 \times 2 \times 19$		
92	$2 \times 2 \times 23$		
18	$3 \times 3 \times 2$		
45	$3 \times 3 \times 5$		
63	$3 \times 3 \times 7$		
99	$3 \times 3 \times 11$		
50	$5 \times 5 \times 2$		
75	$5 \times 5 \times 3$		
98	$7 \times 7 \times 2$		
3 次方			
8	$2 \times 2 \times 2$	27	$3 \times 3 \times 3$

依上述分類用代號表示，能方便辨識，還可以一次把同一種類型的牌組一起討論，分別以 X、Y、Z、W 和甲、乙、丙、丁代表分解後的質數。代號的說明如下：

X	2、3、5 或 7 其中一個	Y	除 X 以外的 2、3、5 或 7 其中一個
Z	X、Y 以外的 2、3、5 或 7 其中一個	W	除 X、Y、Z 以外的那個
甲	除了正在當 X 的質數以外的質數	乙	除了正在當 X 和甲的質數以外的質數
丙	除了正在當 X、甲和乙的質數以外的質數	丁	除了正在當 X、甲、乙和丙以外的質數
戊	除了正在當 X、甲、乙、丙和丁以外的質數		

把範圍二按照數字特性分為第一組「Xx Yx甲」和第二組「Xx Xx甲」兩大組，先分別討論，再把兩組混合討論。

第一組：Xx Yx甲

特質：五個數都是由 3 個不同的質數所組成，都有共同因數 2。

攻略：問五張相乘，答案做質因數分解後，除以五個 2，再把所有能確定的數提出，且由於要形成 5×7 需要 5 和 7 的數量相同，所以我們只要把剩下幾個要與 5 或 7 配對的數，和剩下的 3 配對，最後再把他們分別乘以 2，就可以知道最終牌組。

結果：問「五張相乘」即可解出。

第二組：Xx Xx甲

特質：數字的組成都是由 2 個相同的質數，乘 1 個不同的質數所組成的。

我把第二組，抽取五張的所有可能性分為六大類。

第二組第一類

$X \times X \times \text{甲}$	$X \times X \times \text{乙}$	$X \times X \times \text{丙}$	$X \times X \times \text{丁}$	$X \times X \times \text{戊}$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------

攻略：五張牌做質因數分解後都有兩個共同的質因數，問五張相乘，答案做質因數分解後，有幾個甲就是有幾個 $X \times X \times \text{甲}$ ，有幾個乙就是有幾個 $X \times X \times \text{乙}$ ，有幾個丙就是有幾個 $X \times X \times \text{丙}$ ，有幾個丁就是有幾個 $X \times X \times \text{丁}$ 。

結果：「五張相乘」就能解出。

第二組第二類

四張和 $X \times X$ 相乘				一張和 $Y \times Y$ 相乘
$2 \times 2 \times \text{甲}$	$2 \times 2 \times \text{乙}$	$2 \times 2 \times \text{丙}$	$2 \times 2 \times \text{丁}$	$3 \times 3 \times \text{甲}$
$2 \times 2 \times \text{甲}$	$2 \times 2 \times \text{乙}$	$2 \times 2 \times \text{丙}$	$2 \times 2 \times \text{丁}$	$3 \times 3 \times \text{戊}$
$2 \times 2 \times \text{甲}$	$2 \times 2 \times \text{乙}$	$2 \times 2 \times \text{丙}$	$2 \times 2 \times \text{丁}$	$5 \times 5 \times 2$
$2 \times 2 \times \text{甲}$	$2 \times 2 \times \text{乙}$	$2 \times 2 \times \text{丙}$	$2 \times 2 \times \text{丁}$	$5 \times 5 \times 3$
$2 \times 2 \times \text{甲}$	$2 \times 2 \times \text{乙}$	$2 \times 2 \times \text{丙}$	$2 \times 2 \times \text{丁}$	$7 \times 7 \times 2$
$3 \times 3 \times 2$	$3 \times 3 \times 5$	$3 \times 3 \times 7$	$3 \times 3 \times 11$	$2 \times 2 \times \text{甲}$
$3 \times 3 \times 2$	$3 \times 3 \times 5$	$3 \times 3 \times 7$	$3 \times 3 \times 11$	$5 \times 5 \times \text{甲}$
$3 \times 3 \times 2$	$3 \times 3 \times 5$	$3 \times 3 \times 7$	$3 \times 3 \times 11$	$7 \times 7 \times 2$

攻略：

紅色部分：問五張相乘，答案做質因數分解後抓到幾個甲，就是有幾個 $X \times X \times \text{甲}$ ，抓到幾個乙，就是有幾個 $X \times X \times \text{乙}$ ，抓到幾個丙，就是有幾個 $X \times X \times \text{丙}$ ，接著去掉所有的 X 與和 X 相乘的甲乙丙丁，最後再把剩餘的 $Y \times Y$ 和除了 Y 以外的那個質數相乘，即可知曉最終牌組。

藍色部分問五張相乘，答案做質因數分解後把能確定的述提出，若甲剛好等於 2、3、5、7 其中之一時，就先確定其他的數，剩下的 3×3 再配「3 的數量除以 2」這個數量的甲，接著去掉所有的 3 和與 3 配對的數，最後再把剩餘的 $Y \times Y$ 和除了 Y 以外的那個質數相乘，即可知曉最終牌組。

結果：問「五張相乘」就能知曉答案。

第二組第三類

三張和 $X \times X$ 相乘			兩張和 $Y \times Y$ 相乘	
$2 \times 2 \times$ 甲	$2 \times 2 \times$ 乙	$2 \times 2 \times$ 丙	$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙
$2 \times 2 \times$ 甲	$2 \times 2 \times$ 乙	$2 \times 2 \times$ 丙	$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 丁
$2 \times 2 \times$ 甲	$2 \times 2 \times$ 乙	$2 \times 2 \times$ 丙	$3 \times 3 \times$ 丁	$3 \times 3 \times$ 戊
$2 \times 2 \times$ 甲	$2 \times 2 \times$ 乙	$2 \times 2 \times$ 丙	$5 \times 5 \times 2$	$5 \times 5 \times 3$
$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙	$2 \times 2 \times$ 甲	$2 \times 2 \times$ 乙
$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙	$2 \times 2 \times$ 甲	$2 \times 2 \times$ 丁
$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙	$2 \times 2 \times$ 丁	$2 \times 2 \times$ 戊
$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙	$5 \times 5 \times 2$	$5 \times 5 \times 3$

攻略：

藍色部分 Q1 問五張相乘無法解出時，問 Q2「 $X \times X$ 的倍數相乘」，把此答案做質因數分解後，抓到幾個甲，就是有幾個 $X \times X \times$ 甲，抓到幾個乙，就是有幾個 $X \times X \times$ 乙，抓到幾個丙，就是有幾個 $X \times X \times$ 丙，接著就能用 $Q1 \div Q2$ 的商，做質因數分解，來推理剩下的數。

紅色部分：問五張相乘，抓到幾個乙，就是有幾個 $X \times X \times$ 乙，抓到幾個丙，就是有幾個 $X \times X \times$ 丙。因為在 $Y \times Y$ 的部分都會至少有一個在 $X \times X$ 的數中沒有出現的質因數，例如

$2 \times 2 \times$ 甲	$2 \times 2 \times$ 乙	$2 \times 2 \times$ 丙	$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 丁	在這一組是丁
-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	--------

確定有幾個 $Y \times Y \times$ 丁之後，剩下幾個 $Y \times Y$ 就需要配幾個甲，接下來剩下的甲就要配 $X \times X$ ，依照這樣把能確定的數依次拆解，就能知道最終答案。

結果：Q1 問「五張相乘」，Q2 問「 $(X \times X)$ 的倍數相乘」。

第二組第四類

一張和 $X \times X$ 相乘	一張和 $Y \times Y$ 相乘	三張和 $Z \times Z$ 相乘		
$2 \times 2 \times$ 甲	$5 \times 5 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙
$2 \times 2 \times$ 甲	$5 \times 5 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙	$3 \times 3 \times$ 丁
$2 \times 2 \times$ 甲	$5 \times 5 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙
$2 \times 2 \times$ 甲	$5 \times 5 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 丁	$3 \times 3 \times$ 戊
$2 \times 2 \times$ 甲	$5 \times 5 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙	$3 \times 3 \times$ 丁	$3 \times 3 \times$ 戊
$2 \times 2 \times$ 甲	$7 \times 7 \times 2$	$3 \times 3 \times$ 甲	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙
$2 \times 2 \times$ 甲	$7 \times 7 \times 2$	$3 \times 3 \times$ 乙	$3 \times 3 \times$ 丙	$3 \times 3 \times$ 丁

3×3×甲	5×5×甲	2×2×甲	2×2×乙	2×2×丙
3×3×甲	5×5×甲	2×2×乙	2×2×丙	2×2×丁
3×3×甲	5×5×乙	2×2×甲	2×2×乙	2×2×丙
3×3×甲	5×5×乙	2×2×甲	2×2×丁	2×2×戊
3×3×甲	5×5×乙	2×2×丙	2×2×丁	2×2×戊
3×3×甲	7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	2×2×丙
3×3×甲	7×7×2	2×2×乙	2×2×丙	2×2×丁
5×5×甲	7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	2×2×丙
5×5×甲	7×7×2	2×2×乙	2×2×丙	2×2×丁
5×5×甲	7×7×2	3×3×甲	3×3×乙	3×3×丙
5×5×甲	7×7×2	3×3×乙	3×3×丙	3×3×丁

攻略：

藍色部分問五張相乘，依序把能確定的數提出，就能知道最終答案。

紅色部分問五張相乘，答案做質因數分解後，抓到幾個丙，就是有幾個 $Z \times Z \times 丙$ ，接著 Q2 問 $Z \times Z$ 的倍數相乘，把此答案做質因數分解後，抓到幾個甲，就是有幾個 $Z \times Z \times 甲$ ，抓到幾個乙，就是有幾個 $Z \times Z \times 乙$ ，最後再把五張相乘的答案除以 $Z \times Z$ 的倍數相乘，做質因數分解，抓到幾個甲，就是有幾個 $X \times X \times 甲$ ，抓到幾個乙，就是有幾個 $X \times X \times 乙$ ，就能知曉最終牌組。

結果：Q1 問「五張相乘」，Q2 問「 $(Z \times Z)$ 的倍數相乘」。

第二組第五類

一張和 $X \times X$ 相乘	兩張和 $Y \times Y$ 相乘		兩張和 $Z \times Z$ 相乘	
2×2×甲	3×3×甲	3×3×乙	5×5×2	5×5×3
2×2×甲	3×3×乙	3×3×丙	5×5×2	5×5×3
3×3×甲	2×2×甲	2×2×乙	5×5×2	5×5×3
3×3×甲	2×2×乙	2×2×丙	5×5×2	5×5×3
5×5×甲	2×2×甲	2×2×乙	3×3×甲	3×3×乙
5×5×甲	2×2×甲	2×2×乙	3×3×甲	3×3×丙
5×5×甲	2×2×甲	2×2×乙	3×3×丙	3×3×丁
5×5×甲	2×2×甲	2×2×乙	3×3×乙	3×3×丙
5×5×甲	2×2×甲	2×2×乙	3×3×甲	3×3×乙

7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	3×3×甲	3×3×乙
7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	3×3×甲	3×3×丙
7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	3×3×丙	3×3×丁
7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	3×3×乙	3×3×丙
7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	3×3×甲	3×3×乙
7×7×2	2×2×甲	2×2×乙	5×5×2	5×5×3
7×7×2	3×3×甲	3×3×乙	5×5×2	5×5×3

攻略：

紅色部分問五張相乘，先配對出包含 $X \times X$ 的牌，剩下的四種數字牌，觀察是不是有特別的質因數，例如如果出現質因數丁，就能確定有幾個 $Z \times Z \times 丁$ ，出現質因數丙，就能確定有幾個 $Z \times Z \times 丙$ 。就這樣一次一種，把能確定的數依次拆解，就能知道最終答案。

藍色部分問五張相乘，答案做質因數分解後，先把能確定的 X 以及和 X 相乘的數去除，再問 Q2「 $Z \times Z$ 的倍數相乘」，把此答案做質因數分解後，抓到幾個甲，就是有幾個 $Z \times Z \times 甲$ ，抓到幾個乙，就是有幾個 $Z \times Z \times 乙$ 。最後 $Q1 \div Q2$ 得到的數字，做質因數分解，抓到幾個甲，就是有幾個 $Y \times Y \times 甲$ ，抓到幾個乙，就是有幾個 $Y \times Y \times 乙$ ，所以能知曉牌組。

結果：Q1 問「五張相乘」，Q2 問「 $(Z \times Z)$ 的倍數相乘」。

第二組第六類

一張和 $X \times X$ 相乘	一張和 $Y \times Y$ 相乘	一張和 $Z \times Z$ 相乘	兩張和 $W \times W$ 相乘	
2×2×甲	3×3×乙	7×7×2	5×5×2	5×5×3
2×2×甲	3×3×甲	7×7×2	5×5×2	5×5×3
2×2×甲	5×5×甲	7×7×2	3×3×甲	3×3×乙
2×2×甲	5×5×甲	7×7×2	3×3×乙	3×3×丙
2×2×甲	5×5×乙	7×7×2	3×3×甲	3×3×乙
2×2×甲	5×5×乙	7×7×2	3×3×甲	3×3×丙
2×2×甲	5×5×乙	7×7×2	3×3×丙	3×3×丁
3×3×甲	5×5×甲	7×7×2	3×3×甲	3×3×乙
3×3×甲	5×5×甲	7×7×2	3×3×乙	3×3×丙
3×3×甲	5×5×乙	7×7×2	3×3×甲	3×3×乙
3×3×甲	5×5×乙	7×7×2	3×3×甲	3×3×丙

$3 \times 3 \times \text{甲}$	$5 \times 5 \times \text{乙}$	$7 \times 7 \times 2$	$3 \times 3 \times \text{丙}$	$3 \times 3 \times \text{丁}$
------------------------------	------------------------------	-----------------------	------------------------------	------------------------------

攻略：

Q1：問五張相乘，答案做質因數分解後，觀察五種牌的質因數分解，判斷是否具有其他牌沒有、只有自己獨有的質因數，如果有，就一次一個把它刪去，若還無法找出最終牌組，再問 Q2。

Q2：問 $W \times W$ 的倍數相乘，把此答案做質因數分解後，把能確定的數提出，然後再把 Q1 除以 Q2 的答案，做質因數分解，就能把剩餘尚未解出的數找出來。

結果： Q1 問「五張相乘」，Q2 問「 $(W \times W)$ 的倍數相乘」。

第一組和第二組的混合

第一組和第二組混合就是從下列表格中隨意找五種數字，每種數字五張，從這二十五張中抽出五張。

$X \times X \times \text{甲}$		$X \times Y \times \text{甲}$	
8	$2 \times 2 \times 2$	30	$2 \times 3 \times 5$
12	$2 \times 2 \times 3$	42	$2 \times 3 \times 7$
20	$2 \times 2 \times 5$	66	$2 \times 3 \times 11$
28	$2 \times 2 \times 7$	78	$2 \times 3 \times 13$
44	$2 \times 2 \times 11$	70	$2 \times 5 \times 7$
52	$2 \times 2 \times 13$		
68	$2 \times 2 \times 17$		
76	$2 \times 2 \times 19$		
92	$2 \times 2 \times 23$		
18	$3 \times 3 \times 2$		
27	$3 \times 3 \times 3$		
45	$3 \times 3 \times 5$		
63	$3 \times 3 \times 7$		
99	$3 \times 3 \times 11$		
50	$5 \times 5 \times 2$		
75	$5 \times 5 \times 3$		
98	$7 \times 7 \times 2$		

攻略：

第一組和第二組混合的時候，要先觀察約定的五種牌分別做質因數分解的結果，找找看是否一些特別牌，具有其他牌沒有的、只有自己獨有的質因數，Q1 問「五張相乘」之後，一次一種把特別牌的張數找出來，例如：如果 Q1 五張相乘的質因數分解出現幾個 17、19、23，就能確定 68、76、92 的牌有幾張。抽到其他的牌，也可以觀察看看有沒有特別牌，利用它獨

有的質因數來解題。

剩下來無法分辨的，有兩種可能，「 $X \times X \times \text{甲}$ 、 $Y \times Y \times \text{甲}$ 、和 $X \times Y \times \text{甲}$ 」和「 $X \times X \times \text{甲}$ 、 $Y \times Y \times \text{甲}$ 、和 $X \times X \times \text{乙}$ 、 $Y \times Y \times \text{乙}$ 」的混合，遇到這種情況無法解題，就提問 Q2「 $X \times X$ 的倍數相乘」，及可知曉最終牌組。

因為第一組和第二組混合之後，共同的質因數只有可能變少、不可能增加，所以找到獨有質因數的機會，會比單純討論第二組的時候更高。

結果：Q1 問「五張相乘」，Q2 問「 $(X \times X)$ 的倍數相乘」。

範圍二的研究結果：

1. Q1 問五張相乘。
2. 若 Q1 無法解出全部答案，Q2 問「(數量最多的質因數平方)的倍數相乘」，例如在組合是 3 張 $X \times X$ 配兩張 $Y \times Y$ 時，問 $X \times X$ 的倍數相乘，即可將有 $X \times X$ 的部分切割出來，剩下的 $Y \times Y$ 搭配張數，就可以推理出最終答案。

範圍三：四個、五個、六個質數相乘的合數

經由範圍一及範圍二的研究，我發現解題使用的思考模式有三個重點：

(一) 最大公因數 (二) 獨有質因數 (三) 必須是五張牌組成

基於上述重點，觀察四、五、六個質數相乘的合數，重新調整排列順序，進行再分類：

四個質數相乘的合數		五個質數相乘的合數		六個質數相乘的合數			
16	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	60	$2 \times 2 \times 3 \times 5$	32	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	64	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
24	$2 \times 2 \times 2 \times 3$	84	$2 \times 2 \times 3 \times 7$	48	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$	96	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
40	$2 \times 2 \times 2 \times 5$	100	$2 \times 2 \times 5 \times 5$	80	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$		
56	$2 \times 2 \times 2 \times 7$	54	$2 \times 3 \times 3 \times 3$	72	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$		
88	$2 \times 2 \times 2 \times 11$	90	$2 \times 3 \times 3 \times 5$				
36	$2 \times 2 \times 3 \times 3$	81	$3 \times 3 \times 3 \times 3$				

攻略：

Q1 問五張相乘，答案做質因數分解。

(一) 因為範圍三中只有 88 有質因數 11，所以出現幾個 11 就是有幾個 88；

(二) 若約定的五種牌中只有一種牌有質因數 7，那就能直接確定這種牌有幾張；如果一次出現兩種牌的質因數都有 7，在範圍三中只有 56 和 84 有質因數 7，問 84 的倍數相乘，就能知道有幾個 84，剩下的 7 就是 56 的；這裡問 56 的倍數也可以有相同的效果。

(三) 若約定的五種牌中只有一種牌有質因數 5，就直接確定這種牌有幾張；如果一次出現兩種牌的質因數都有 5，就從那二種找出數字比較大的牌，提問那種牌的倍數相乘，就能知道數字大的牌有幾張，剩下幾個 5 就表示數字小的牌有幾張；如果約定的五種牌，很多牌都有質因數 5，就要觀察這五種牌的質因數分解，找出有獨有質因數的牌，來提問那個獨有質因數的倍數相乘，例如：約定的五種牌是 40、60、80、90、100

五種牌的質因數分解	五種牌同除以最大公因數 10	
40=2×2×2×5	2×2	Q1 問五張相乘的結果除以 100000，剩下幾個質因數 5 就代表有幾個 100； Q2 問 9 的倍數相乘，確定 90 有幾張；去除 90 後剩下幾個質因數 3，就有幾個 60；剩餘質因數 2 受總張數限制，能確定會是 40 還是 80，以及各有幾張。
60=2×2×3×5	2×3	
80=2×2×2×2×5	2×2×2	
90=2×3×3×5	3×3	
100=2×2×5×5	2×5	

(四) 牌組中出現質因數 2 和 3 的數量很多，很容易混在一起，如果沒有更大的質因數幫助做前面的判斷，就會分不出這個質因數 2 或 3 到底屬於哪一張牌。分不出來的情況有兩個類別，分別舉例如下：

		特質	攻略
第一類	16×81=36×36 48×48=32×72	兩數相乘 =第三數 平方	提問最大數的倍數相乘，例如提問 81 的倍數相乘，確定 81 有幾個就能確定 16 有幾個，剩下的都是 36。
第二類	24×32=16×48	兩數相乘 = 另兩數相 乘	第一種方法：提問 48 的倍數相乘，可以確定 48 有幾張，因為會有兩組數字無法判斷只有在張數和乘積都相同的情況才會發生，所以同時也能利用 48 的張數推出 16 的張數，剩下的質因數 3 都是 24 的，再剩下的 2 都是 32 的。 第二種方法：也可以提問 24 的倍數相乘，質因數 3 的個數就是 24 和 48 合計的張數，接著檢查

			質因數 2 的數量，可以符合張數的答案只會有一種。所以，確定了 24 和 48 的張數，就確定了 32 和 16 的張數。
--	--	--	---

範圍三的研究結果：

1. Q1 問五張相乘。
2. 若 Q1 無法解出全部答案，Q2 問「獨有質因數的倍數相乘」或是「有很多共同質因數的牌中，最大的那個牌的倍數相乘」。

陸、討論

經由範圍一到三的研究，發現解題的攻略都和質因數有關，我決定修改 2~100 的寫法，把相同的質因數寫在一起，比較容易看出有幾種不同的質因數，和同一種質因數有幾個：

質數		範圍一		範圍二		範圍三		
2	43	$4=2^2$	$51=3 \times 17$	$8=2^3$	$52=2^2 \times 13$	$16=2^4$	$32=2^5$	$64=2^6$
3	47	$6=2 \times 3$	$55=5 \times 11$	$12=2^2 \times 3$	$63=3^2 \times 7$	$24=2^3 \times 3$	$48=2^4 \times 3$	$96=2^5 \times 3$
5	53	$9=3^2$	$57=3 \times 19$	$18=2 \times 3^2$	$66=2 \times 3 \times 11$	$36=2^2 \times 3^2$	$72=2^3 \times 3^2$	
7	59	$10=2 \times 5$	$58=2 \times 29$	$20=2^2 \times 5$	$68=2^2 \times 17$	$40=2^3 \times 5$	$80=2^4 \times 5$	
11	61	$14=2 \times 7$	$62=2 \times 31$	$27=3^3$	$70=2 \times 5 \times 7$	$54=2 \times 3^3$		
13	67	$15=3 \times 5$	$65=5 \times 13$	$28=2^2 \times 7$	$75=3 \times 5^2$	$56=2^3 \times 7$		
17	71	$21=3 \times 7$	$69=3 \times 23$	$30=2 \times 3 \times 5$	$76=2^2 \times 19$	$60=2^2 \times 3 \times 5$		
19	73	$22=2 \times 11$	$74=2 \times 37$	$42=2 \times 3 \times 7$	$78=2 \times 3 \times 13$	$81=3^4$		
23	79	$25=5^2$	$77=7 \times 11$	$44=2^2 \times 11$	$92=2^2 \times 23$	$84=2^2 \times 3 \times 7$		
29	83	$26=2 \times 13$	$82=2 \times 41$	$45=3^2 \times 5$	$98=2 \times 7^2$	$88=2^3 \times 11$		
31	89	$33=3 \times 11$	$85=5 \times 17$	$50=2 \times 5^2$	$99=3^2 \times 11$	$90=2 \times 3^2 \times 5$		
37	97	$34=2 \times 17$	$86=2 \times 43$			$100=2^2 \times 5^2$		
41		$35=5 \times 7$	$87=3 \times 29$					
		$38=2 \times 19$	$91=7 \times 13$					
		$39=3 \times 13$	$93=3 \times 31$					
		$46=2 \times 23$	$94=2 \times 47$					
		$49=7^2$	$95=5 \times 19$					

重新依照使用到的質因數來分類，下列圖形中，連在一起的數字表示彼此有相關，這樣比較看得出數字的關係，知道哪些數字有獨有的質因數，哪些數字有很多共同的質因數。

		$9=3^2$	$27=3^3$	$81=3^4$
	$6=2 \times 3$	$18=2 \times 3^2$	$54=2 \times 3^3$	
$4=2^2$	$12=2^2 \times 3$	$36=2^2 \times 3^2$		
$8=2^3$	$24=2^3 \times 3$	$72=2^3 \times 3^2$		
$16=2^4$	$48=2^4 \times 3$			
$32=2^5$	$96=2^5 \times 3$			
$64=2^6$				

縱行是 2 的次方逐漸增加，
橫列是 3 的次方逐漸增加，
中間是縱行橫列相乘，中間這些數都有質因數 2 和 3。

		$25=5^2$
	$10=2 \times 5$	$50=2 \times 5^2$
	$20=2^2 \times 5$	$100=2^2 \times 5^2$
	$40=2^3 \times 5$	
	$80=2^4 \times 5$	

縱行是 2 的次方逐漸增加，
橫列是 5 的次方逐漸增加，
25 是 5 的平方，
其他數字都有質因數 2 和 5。

$15=3 \times 5$	$45=3^2 \times 5$	$75=3 \times 5^2$
-----------------	-------------------	-------------------

這些數字都有質因數 3 和 5。

		$49=7^2$
	$14=2 \times 7$	$98=2 \times 7^2$
	$28=2^2 \times 7$	
	$56=2^3 \times 7$	

縱行是 2 的次方逐漸增加，
橫列是 7 的次方逐漸增加，
49 是 7 的平方，
其他數字都有質因數 2 和 7。

$21=3 \times 7$	$63=3^2 \times 7$
-----------------	-------------------

這些數字都有質因數 3 和 7。

$35=5 \times 7$	$70=2 \times 5 \times 7$
-----------------	--------------------------

這些數字都有質因數 5 和 7。

$42=2 \times 3 \times 7$	$84=2^2 \times 3 \times 7$
--------------------------	----------------------------

這些數字都有質因數 2、3 和 7。

以下的數因為有比較大的質因數，所以具有相同質因數的牌就比較少。

$22=2 \times 11$	$33=3 \times 11$	$55=5 \times 11$	$77=7 \times 11$	$44=2^2 \times 11$	$66=2 \times 3 \times 11$	$88=2^3 \times 11$	$99=3^2 \times 11$
------------------	------------------	------------------	------------------	--------------------	---------------------------	--------------------	--------------------

$26=2 \times 13$	$39=3 \times 13$	$65=5 \times 13$	$91=7 \times 13$	$52=2^2 \times 13$	$78=2 \times 3 \times 13$
------------------	------------------	------------------	------------------	--------------------	---------------------------

$34=2 \times 17$	$51=3 \times 17$	$85=5 \times 17$
------------------	------------------	------------------

$68=2^2 \times 17$

$74=2 \times 37$

$38=2 \times 19$	$57=3 \times 19$	$95=5 \times 19$
------------------	------------------	------------------

$76=2^2 \times 19$

$82=2 \times 41$

$46=2 \times 23$	$69=3 \times 23$
------------------	------------------

$92=2^2 \times 23$

$86=2 \times 43$

$58=2 \times 29$	$87=3 \times 29$
------------------	------------------

$$94=2 \times 47$$

$$62=2 \times 31$$

$$93=3 \times 31$$

這個表格，讓我很容易看見 2~100 這九十九個數字之間的關係，以及五張牌相乘的乘積的質因數分解出現什麼質數的時候，該如何解題。

以下說明在 2~100 全範圍中任意約定五種數字時，如何順利解題。

(一) 比對法

有無

37、41

43、47

說明：2~100 中，有質因數 47 的合數，只有 94。此段落以(47, 94)為例，而(43, 86)、(41, 82)、(37, 74)情況相同。

比對五種牌中，**有一種出現**了 47，例如：有 47、沒有 94，那麼，47 有幾次方，就代表有幾個 47；
，**有兩種出現**了 47，例如：有 47、也有 94，那麼，問其中較大的數(94)的倍數相乘，就可以區分 94 和 47；
，**沒有出現 47**，直接進入下一步。



有無

29、31

說明：2~100 中，有質因數 29 的合數，只有 58、87。我以(29, 58, 87) 為例，而(31, 62, 93)情況相同。

比對五種牌中，**有一種出現**了 29，例如：有 58、沒有 29 和 87，那麼，29 有幾次方，就代表有幾個 58；
，**有兩種出現**了 29，例如：有 29、有 58，那麼，問其中較大的數(58)的倍數相乘，就可以區分 58 和 29；
，**有三種出現**了 29，例如：有 29、有 58、也有 87，那麼，問他們最大公因數也就是 29 的倍數相乘，就可以區分 29、58、87；
，**沒有出現 29**，直接進入下一步。



有無

23

說明：2~100 中，有質因數 23 的合數，是 46、69、92。

比對五種牌中，**有一種出現**了 23，例如：有 23、沒有 46、69、92，那麼，23 有幾次方，就代表有幾個 23；
，**有兩種出現**了 23，例如：有 23、有 46，問其中較大的數(46)的

	<p>倍數相乘，就可以區分 23 和 46；</p> <ul style="list-style-type: none"> · 有三種以上出現 23，例如：有 23、有 46、也有 69 和 92，那麼，問他們的最大公因數，也就是 23 的倍數相乘，就可以區分 23、46、69 和 92； · 沒有出現 23，直接進入下一步。
	
<p>有無 17、19</p>	<p>說明：2~100 中，有質因數 17 和 19 的合數，分別各有五個。 此段落以【有質因數 17】為例，而【有質因數 19】情況相同。</p> <p>比對五種牌中，有一種出現了 17，例如：有 17、沒有 34、51、68、85，那麼，17 有幾次方，就代表有幾個 17；</p> <ul style="list-style-type: none"> · 有兩種出現了 17，例如：有 34、有 17，那麼，問其中較大的數 (34) 的倍數相乘，就可以區分 17 和 34； · 有三種以上出現 17，例如：有 17、有 34、也有 51、68 和 85，那麼，問他們的最大公因數，也就是 17 的倍數相乘，就可以區分 17、34、51、68 和 85； · 沒有出現 17，直接進入下一步。
	
<p>有無 13</p>	<p>說明：2~100 中，有質因數 13 的合數，有七個。</p> <p>比對五種牌中，有一種出現了 13，例如：有 26、沒有 13、39、65、91、52、78，那麼，13 有幾次方，就代表有幾個 26；</p> <ul style="list-style-type: none"> · 有兩種出現了 13，例如：有 13、有 26，那麼，問其中較大的數 (26) 的倍數相乘，就可以區分 13 和 26； · 有三種以上出現 13，例如：有 13、有 26、也有 39、52、65、78 和 91，那麼，問他們的最大公因數，也就是 13 的倍數相乘，就可以區分出來； · 沒有出現 13，直接進入下一步。
	
<p>有無</p>	<p>說明：2~100 中，有質因數 5 的合數，有很多個。以【有質因數 5】為例，而【有質因數 7】、【有質因數 11】情況相同。</p> <p>比對五種牌中，有一種出現了 5，例如：出現 15，沒有出現 5、10、20……，那</p>

5、7、

11

- 麼，5 有幾次方，就代表有幾個 15；
- 有兩種出現了 5，例如：有 5、有 10，那麼，問其中較大的數 (10) 的倍數相乘，就可以區分 10 和 5；
 - 有三種以上出現 5，例如：有 5、10、15、20、25……，那麼，問他們最大公因數也就是 5 的倍數相乘，就可以區分出來；
 - 沒有出現 5，直接進入下一步。



有無

2、3

說明：2~100 中，有質因數 2 的合數，有很多個。以【有質因數 2】為例，而【有質因數 3】情況相同。

比對五種牌中，有一種出現了 2，那麼，2 有幾次方，就平均分配給這一種數字，看看會有幾個；

- 有兩種出現了 2，就問其中較大的數，它的倍數相乘，就可以把兩者區分出來；
- 有三種以上出現 2，問他們的最大的公因數的倍數相乘，就可以區分出來。

越大的質數，出現的次數越少。所以這些比較大的質數，很容易成為牌組中出現次數很少的質數，由大的質數往下檢查，能夠幫助我依序判斷出牌組的數字。

(二) 配對分割法

在討論(一)比對法中，越大的質數越容易被找出來，如果五種牌都是由較小的質數相乘組合而成，找不到特別的質因數來當篩網，它們就很容易混在一起，就無法以五張相乘，一題解出整個牌組。但我發現這些牌組都有張數相同、乘積也相同的情況。

例如 (2 : 3 : 4 : 6 : 8) 這樣的組合

在(2 : 3 : 4 : 6 : 8)中，有第一組 $2 \times 8 = 4 \times 4$ 、第二組 $4 \times 6 = 3 \times 8$ 、第三組 $2 \times 6 = 3 \times 4$ 乘積相同。

遇到這種乘積相同的牌組，需要問三題：

Q1 問五張相乘，觀察它的質因數分布來判斷 Q2 怎麼問。

Q2 問第一組乘積相同中最大的數，它的倍數相乘。例如：在(2：3：4：6：8)中，有第一組乘積相同 $2 \times 8 = 4 \times 4$ ，在(2：4：8)中，問含有 8 的那張牌的倍數相乘。

Q3 問第二組乘積相同中最大的數，它的倍數相乘，如果這個數和 Q2 問的是同一個，那就要問第二大的數，它的倍數相乘。例如：在(2：3：4：6：8)中，有第二組乘積相同 $4 \times 6 = 3 \times 8$ ，在(3：4：6：8)中，因為 8 問過了，就改問含有 6 的那張牌的倍數相乘。因為到這裡已經確定了每一種牌各有幾張，所以就不再問第三組乘積相同的最大數了。

在乘積相同的情況下，**確定了最大的牌有幾張，同時就確定了最小的牌有幾張，剩下的張數就是中間的牌**，於是由此可以推論出，每一種牌各有幾張。

(2：4：8：16：32) 是最複雜的組合，都是 2 的次方組成的牌組，共有六組乘積相同的情況： $2 \times 8 = 4 \times 4$ ； $2 \times 16 = 4 \times 8$ ； $2 \times 32 = 4 \times 16$ ； $4 \times 16 = 8 \times 8$ ； $4 \times 32 = 8 \times 16$ ； $8 \times 32 = 16 \times 16$ 。

這時要使用的問題為

Q1 問五張相乘

Q2 問最大的數 32 的倍數相乘，看此題答案的質因數分解中 2 出現的次數除以 5，就知道有幾張 32，如果 32 的數量沒超過四張則需問 Q3

Q3 問第二大的數 16 的倍數相乘，看此題答案的質因數分解中 2 出現幾次，先扣除 32 的，再把 2 剩餘的出現次數除以 4，就知道有幾張 16，如果 32 和 16 的數量加起來沒超過 4 張則需問 Q4

Q4 問第三大的數 8 的倍數相乘，看此題答案的質因數分解中 2 出現幾次，先扣除 32 和 16 的，再把 2 剩餘的出現次數除以 3 就知道有幾張 8，問完就可以知道整個牌組

這個問法也吻合上面(2：3：4：6：8)直接問每一組重複中最大的數的倍數相乘，因為 32、16 和 8 三題的倍數相乘即可概括。

所以，發生「**乘積相同、張數恰好也相同**」的情況，提問的順序會是

Q1：五張相乘

Q2：乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

Q3：第二組乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

Q4：第三組乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

(三) 特殊質因數法

從討論(一)比對法中，我發現可以觀察題目約定的五種數字，如果有哪一種數字，出現了別種數字沒有的質因數，而且這個質因數，在 Q1 問五張相乘的結果中出現，就會很明顯可以判斷出那種牌的張數，我把符合這種情況的質因數稱為**特殊質因數**，特殊質因數不一定是像 47、31 這種較大的質數，如果是在「一個偶數，搭配四個奇數」的牌組中，2 就會是特殊質因數。

用特殊質因數的觀點來思考，我決定 Q1 一律問五張相乘，做質因數分解之後，出現的特殊質因數種類越多，提問次數就越少：

五種特殊質因數：五種牌都有特殊質因數，問 Q1，就知道每種牌各出現幾次。

四種特殊質因數：五種牌共有四種特殊質因數，觀察次方就可以知道它們出現的次數。

扣掉知道的，就會知道剩下幾張牌，張數和剩餘的乘積搭配，就會知道答案。

所以只要問一題五張相乘，就可以知曉最終牌組。

三種特殊質因數：三種特殊質因數有 $(P_{甲}、P_{乙}、P_{丙}、P_{丙}、P_{丙})$ 和 $(P_{甲}、P_{乙}、P_{丙}、P_{乙}、P_{丙})$ 兩種類型，如果 Q1 尚無法完全解題，加問 Q2：「乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘」，就可以確認是哪一種配對。

兩種特殊質因數：兩種特殊質因數有 $(P_{甲}、P_{甲}、P_{乙}、P_{乙}、P_{乙})$ 和 $(P_{甲}、P_{乙}、P_{乙}、P_{乙}、P_{乙})$ 兩種類型，如果 Q1 尚無法完全解題，加問 Q2：「乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘」但有些牌組中有兩組乘積相同的配對，這時候 Q2 只能問出其中一組，因此需要問 Q3：「第二種乘積相同組合中，最大數的倍數相乘。」就能確認每張牌的數字。

一種特殊質因數：只有一種特殊質因數是最複雜的一種情況，如果 Q1 尚無法完全解題，問 Q2：「乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘」

但有些牌組中有三組以上乘積相同的配對，這時候 Q2 只能問出其中一組，因此需要 Q3 甚至 Q4，用同樣的提問規則，繼續分割乘積相同的組合。

只要**觀察題目**五種數字牌的**特殊質因數**，是否出現在五張相乘的質因數分解中，可以很快的解出牌組的答案。

(四) 「次方」乘以「張數」法

經過上述討論，激發了靈感，我把原研究問題用新的角度看待：

每個牌組有五種數字，我們要知道每種數字分別有幾張。假設第一種數到第五種數，依序有 A、B、C、D、E 張，而每個數都可以寫成質因數分解

第一種數 = $2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times \dots \times 47^{a_{47}}$	$a_n \geq 0$	有 A 張
第二種數 = $2^{b_2} \times 3^{b_3} \times 5^{b_5} \times \dots \times 47^{b_{47}}$	$b_n \geq 0$	有 B 張
第三種數 = $2^{c_2} \times 3^{c_3} \times 5^{c_5} \times \dots \times 47^{c_{47}}$	$c_n \geq 0$	有 C 張
第四種數 = $2^{d_2} \times 3^{d_3} \times 5^{d_5} \times \dots \times 47^{d_{47}}$	$d_n \geq 0$	有 D 張
第五種數 = $2^{e_2} \times 3^{e_3} \times 5^{e_5} \times \dots \times 47^{e_{47}}$	$e_n \geq 0$	有 E 張

$$\begin{aligned}
 & \text{Q1 五張相乘的結果，就是 } (2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times \dots \times 47^{a_{47}})^A \times (2^{b_2} \times 3^{b_3} \times 5^{b_5} \times \dots \times 47^{b_{47}})^B \times \\
 & (2^{c_2} \times 3^{c_3} \times 5^{c_5} \times \dots \times 47^{c_{47}})^C \times (2^{d_2} \times 3^{d_3} \times 5^{d_5} \times \dots \times 47^{d_{47}})^D \times (2^{e_2} \times 3^{e_3} \times 5^{e_5} \times \dots \times 47^{e_{47}})^E \\
 & = 2^{T_2} \times 3^{T_3} \times 5^{T_5} \times \dots \times 47^{T_{47}} \quad T_n \geq 0
 \end{aligned}$$

這麼一來，質數 2 的次方 T_2 ，就會是上面每種牌的質數 2 的次方，乘以那種牌的張數：

$$\text{質數 2 的次方 } T_2 = A \times a_2 + B \times b_2 + C \times c_2 + D \times d_2 + E \times e_2$$

而且

$$\text{質數 } 3 \text{ 的次方 } T_3 = A \times a_3 + B \times b_3 + C \times c_3 + D \times d_3 + E \times e_3$$

$$\text{質數 } 5 \text{ 的次方 } T_5 = A \times a_5 + B \times b_5 + C \times c_5 + D \times d_5 + E \times e_5$$

.....

$$\text{質數 } 47 \text{ 的次方 } T_{47} = A \times a_{47} + B \times b_{47} + C \times c_{47} + D \times d_{47} + E \times e_{47}$$

五張相乘的質因數分解中，每出現一種質數，就會有一個「 $\blacktriangle A + \blacktriangledown B + \bullet C + \blackstar D + \blacksquare E = \text{某數}$ 」的算式。

我們想要知道每個數字分別出現幾次，就是要知道 A、B、C、D、E 分別是多少？

每一種牌組都有的條件，是總張數 $A+B+C+D+E=5$

「 $\blacktriangle A + \blacktriangledown B + \bullet C + \blackstar D + \blacksquare E = \text{某數}$ 」就是我們得到的額外的條件，每個牌組至少有其中一個算式，而有些牌組能得到很多個算式。

例如：

牌組抽出的五張牌都是由 12 和 18 組成， $12=2^2 \times 3$ ， $18=2 \times 3^2$ ，但是不知道 12 和 18 各有幾張。於是假設 12 有 A 張、18 有 B 張，我們想要知道 A 和 B 各是多少。

然後我們開始提問，提問 Q1 五張相乘，得到 $2^8 \times 3^7$ ，這裡有 2 和 3 兩種質數，就可以寫出兩個算式，於是我們擁有以下三個條件

條件 ① $A+B=5$

條件 ② 質數 2 有 $A \times a_2 + B \times b_2 = A \times 2 + B \times 1 = 8$

條件 ③ 質數 3 有 $A \times a_3 + B \times b_3 = A \times 1 + B \times 2 = 7$

這裡我們可以看見，只使用條件 ① 和 ②，就能算出 $A=3$ ， $B=2$ ，得知牌組為 12、12、12、18、18。

這個方法跟我之前解題，只剩兩張的時候，把剩餘的質數 2，依照牌組每個數字有幾個 2，來分配進去，結果只會有一種可能性，於是就確定了答案，是一樣的道理！

這個道理就是：**張數是條件、配對也是條件。**

也就是說，2 個條件就足夠解出 A 和 B 兩個未知數，但是我們只問一題就總共得到 3 個條件，所以只要提問 Q1 五張相乘，一題就可以解題成功。

用條件的觀點，回顧討論(三)特殊質因數法，如果要知道 A、B、C、D、E 五個未知數，我發現

五種特殊質因數有的條件：① $A+B+C+D+E=5$

②~⑥ Q1 有五種特殊質因數，得知 5 個額外的條件

總共有 6 個條件，從討論(三)我們知道這種情況會解題成功

四種特殊質因數有的條件：① $A+B+C+D+E=5$

②~⑤ Q1 有四種特殊質因數，得知 4 個額外的條件

總共有 5 個條件，從討論(三)我們知道這種情況會解題成功

三種特殊質因數有的條件：① $A+B+C+D+E=5$

②~④ Q1 有三種特殊質因數，得知 3 個額外的條件

總共有 4 個條件，從討論(三)我們知道這種情況不一定解題成功

需問 Q2 來增加 1 個條件，增加後有 5 個條件，解題一定成功

二種特殊質因數有的條件：① $A+B+C+D+E=5$

②~③ Q1 有兩種特殊質因數，得知 2 個額外的條件

總共有 3 個條件，從討論(三)我們知道這種情況不一定解題成功

需問 Q2、Q3 來增加 2 個條件，共 5 個條件時解題一定成功

一種特殊質因數有的條件：① $A+B+C+D+E=5$

② Q1 只有一種特殊質因數，得知 1 個額外的條件

總共有 2 個條件，從討論(三)我們知道這種情況不一定解題成功

需問 Q2、Q3、Q4 來增加 3 個條件，共 5 個條件時解題一定成功

從以上五個特殊質因數到一個特殊質因數的條件對應，我發現其中的規律：五個條件可以保證解出五個未知數，如果 Q1 得到的條件不夠，就要增加提問來補足五個條件。

條件的觀點印證了我前面所有嘗試的結果：

(1) 當五張相乘的質因數分解出現四種以上的質因數時，只要問一題 Q1 就保證解題成功。

(2) 每少出現一個質因數，就要增加一題，所以前面舉例過的

牌組(2, 3, 4, 6, 8)，有 2 和 3 兩種質因數，最多加問兩題一定解題成功；

牌組(2, 4, 8, 16, 32)，只有 2 一種質因數，最多加問三題一定解題成功。

(3) 「最多加問三題保證成功」的意思是，有可能不需要這麼多題。

例如：牌組(2, 4, 8, 16, 32)

如果五張相乘=32，因為有五張牌，所以我直接知道這五張都是 2。

如果五張相乘=32768，共有十二種組合可以達成這個乘積，其中四種組合需要加問兩題、另外八種組合需要加問三題。

到這裡，我可以知道**在問幾題的範圍之內，一定可以得出答案**，確定五種牌各有幾張：

最少需要問一題，Q1 問五張相乘，做質因數分解

(1) 出現四種以上的質數，直接確定五種牌各有幾張；

(2) 出現三種質數，最多加問一題；

(3) 出現兩種質數，最多加問兩題；

(4) 出現一種質數，最多加問三題。

柒、結論

(一) 解題步驟

Q1：五張相乘

Q2：乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

Q3：第二組乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

Q4：第三組乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

依循這個規則，最少問一題，最多問四題，一定可以成功解題。

(二) 提問次數

第一題問五張相乘的質因數分解

(1) 出現四種以上的質數，直接確定五種牌各有幾張；

(2) 出現三種質數，最多加問一題；

(3) 出現兩種質數，最多加問兩題；

(4) 出現一種質數，最多加問三題。

在這個提問上限之內，一定可以成功解題。

捌、研究展望

我們在以上研究中，已經將逐步分析出有規律的解題步驟，未來希望可以將步驟寫成電腦程式，不用每一個牌組都由人工從重新觀察數字關係開始，而可以由電腦直接依照我們的研究結果執行解題。

玖、參考資料及其他

一、 黎懿瑩、林壽福(2018)。終極密碼。國立臺灣師範大學數學教育中心。

二、 王心禹、陳樂謙、古晴文(2020)。積少、乘多-分析數字關係，推理原始密碼。第 60 屆高雄市中小學科學展覽會國小組數學。

三、 翰林版國小數學第 11 冊(2016)。最大公因數與最小公倍數。翰林出版社。

【評語】 080410

1. 本作品從簡單的質因數、倍數等相關概念進行發想，循序漸進地進行探究以尋求解答，研究過程符合科學探究的精神。
2. 作品中介紹的猜數字遊戲其規則相當有趣，可以訓練學生對整數質因數分解以及最大公因數、最小公倍數的計算與了解。
3. 作者提出四步驟解題法，是一個相當不錯的發現，建議作者能在其是否為最少步驟這個議題上再多討論。另外，關於如何提問與如何推理以致快速成功猜測出，建議應該要有更具體明確的完整說明，再輔以例子驗證之。

作品簡報

因「材」施計

- 觀察倍數關係，推理原始密碼 -

國小組數學科
編號：080410

研究動機

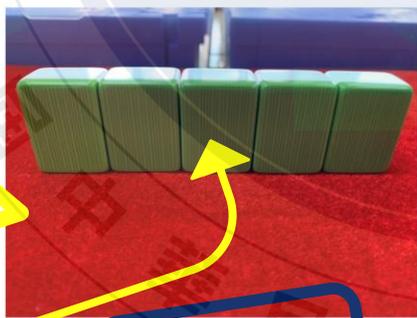
去年我們發現，提問「全部質數相乘」，很容易解出全部答案，所以我推測質數在今年仍是解題關鍵。

今年擴大範圍，做2~100，質數比較少，我修改提問為「某數的倍數相乘」，但每個牌組要提問的「某數」卻都不相同.....

選擇「某數」有沒有規則，可以使解題快、狠、準呢？

在2~11之間，約定取2、3、4、6、8這五個數字，每個數字有五張，共有二十五張牌。

從左邊的二十五張牌中，任意抽五張出來，玩家透過「乘法」提問，猜出這五張牌分別是哪些數字。



去年



2~100的數字牌



共五副牌混合，使2~100之間，每個數字各有五張。



約定取哪五個數字，每個數字有五張牌。從這二十五張牌中，任意抽五張出來。

提問乘法問題，來判斷這五張牌分別是哪些數字。

如何使用最少的提問次數，得知五張牌的數字呢？

今年

研究目的與問題

- 將2~100之間的數字，寫成質數相乘，依據使用的質數次數，再分成三個範圍。

範圍一：2個質數相乘的合數

範圍二：3個質數相乘的合數

範圍三：4個、5個、6個質數相乘的合數

- 從範圍中，約定取哪五個數字，每個數字有五張牌，從這二十五張牌中，任意抽五張出來做推測。

怎麼提問，能最快推測出五張牌的數字呢？

名詞定義

Q1：提問第一次、Q2：提問第二次

Q3：提問第三次、Q4：提問第四次

質數		範圍一		範圍二		範圍三		
		兩個質數相乘的合數		三個質數相乘的合數		四個質數相乘的合數	五個質數相乘的合數	六個質數相乘的合數
2	41	4=2x2	51=3x17	8=2x2x2	52=2x2x13	16=2x2x2x2	32=2x2x2x2x2	64=2x2x2x2x2x2
3	43	6=2x3	55=5x11	12=2x2x3	63=3x3x7	24=2x2x2x3	48=2x2x2x2x3	96=2x2x2x2x2x3
5	47	9=3x3	57=3x19	18=2x3x3	66=2x3x11	36=2x2x3x3	72=2x2x2x3x3	
7	53	10=2x5	58=2x29	20=2x2x5	68=2x2x17	40=2x2x2x5	80=2x2x2x2x5	
11	59	14=2x7	62=2x31	27=3x3x3	70=2x5x7	54=2x3x3x3		
13	61	15=3x5	65=5x13	28=2x2x7	75=3x5x5	56=2x2x2x7		
17	67	21=3x7	69=3x23	30=2x3x5	76=2x2x19	60=2x2x3x5		
19	71	22=2x11	74=2x37	42=2x3x7	78=2x3x13	81=3x3x3x3		
23	73	25=5x5	77=7x11	44=2x2x11	92=2x2x23	84=2x2x3x7		
29	79	26=2x13	82=2x41	45=3x3x5	98=2x7x7	88=2x2x2x11		
31	83	33=3x11	85=5x17	50=2x5x5	99=3x3x11	90=2x3x3x5		
37	89	34=2x17	86=2x43			100=2x2x5x5		
	97	35=5x7	87=3x29					
		38=2x19	91=7x13					
		39=3x13	93=3x31					
		46=2x23	94=2x47					
		49=7x7	95=5x19					

範圍一：2個質數相乘的合數

研究過程

2個質數相乘的合數，都是「2、3、5、7的倍數」，所以我用X、Y、Z、W代表2、3、5、7，甲、乙、丙、丁代表另一個質數。從範圍一抽取五種數字的所有可能性，分為六大類：

第一類	第二類	第三類	第四類	第五類	第六類
五張都有相同的X	其中四張有相同的X	三張有X，另兩張有Y	三張有X、一張有Y、一張有Z	兩張有X，兩張有Y，一張有Z	兩張有X、一張有Y、一張有Z、一張有W

研究結果：

第一、二、四、六類，只需Q1。

第三、五類，其中一部分只需Q1；
另外一部分需要Q1+Q2。

Q1：五張相乘

Q2：X的倍數相乘

會需要問Q2的情況都是：
牌組中出現
X×甲、Y×甲、X×乙、Y×乙，
問五張相乘，很多種組合乘積相同，抓到甲不能確定是配X、還是配Y。

範圍二：3個質數相乘的合數

研究過程

X 、 Y 、 Z 、 W 代表2、3、5、7，甲、乙、丙、丁代表分解後其餘質因數。分類如下：

$X \times Y \times \text{甲}$	$X \times X \times \text{甲}$ ~ 第一類	$X \times X \times \text{甲}$ ~ 第二類	$X \times X \times \text{甲}$ ~ 第三類	$X \times X \times \text{甲}$ ~ 第四類	$X \times X \times \text{甲}$ ~ 第五類	$X \times X \times \text{甲}$ ~ 第六類
30、42、 66、78、 70	$X \times X$ 分別和 甲、乙、丙、丁、戊 相乘	四張有 $X \times X$ ， 一張有 $Y \times Y$	三張有 $X \times X$ ， 兩張有 $Y \times Y$	三張有 $X \times X$ ， 一張有 $Y \times Y$ ， 一張有 $Z \times Z$	兩張有 $X \times X$ ， 兩張有 $Y \times Y$ ， 一張有 $Z \times Z$	兩張有 $X \times X$ ， 一張有 $Y \times Y$ ， 一張有 $Z \times Z$ ， 一張有 $W \times W$

研究結果：

$X \times Y \times \text{甲}$ 、 $X \times X \times \text{甲}$ 第一~二類，
只需Q1。

$X \times X \times \text{甲}$ 第三~六類，
其中一部分只需Q1；
另外一部分需要Q1+Q2。

把整個範圍二混合抽牌，
可在Q1利用獨有的質因數辨認特殊牌，
只有少部分牌組需要Q1+Q2。

Q1：五張相乘

Q2： $X \times X$ 的倍數相乘

會需要問Q2的情況有三種可能：

$X \times X \times \text{甲}$ 、 $Y \times Y \times \text{甲}$ 、 $X \times Y \times \text{甲}$ 或

$X \times X \times \text{甲}$ 、 $X \times X \times \text{乙}$ 、 $Y \times Y \times \text{甲}$ 、 $Y \times Y \times \text{乙}$

$X \times X \times \text{甲}$ 、 $X \times X \times \text{乙}$ 、 $Y \times Y \times \text{甲}$ 、 $Z \times Z \times \text{乙}$

範圍三：4個、5個、6個質數相乘的合數

研究過程

1. 利用「獨有質因數」來分割。

舉例說明：

約定的五種牌是40、60、80、90、100

Q1問五張相乘再 $\div 10^5$ ，剩下幾個5代表幾個100；

Q2問9的倍數相乘，確定90有幾張；

去除90後剩下幾個3，就有幾個60；

剩餘的2受總張數限制，能確定會是40還是80，以及各幾張。

2. 利用「最大數」來分割。

舉例說明：

$16 \times 81 = 36 \times 36$ ，乘積相同、張數也相同，不知是(16,81)還是(36,36)

提問最大數的倍數相乘，也就是提問81的倍數相乘，確定81有幾個，就確定16有幾個，剩下的都是36。

16	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	60	$2 \times 2 \times 3 \times 5$	32	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
24	$2 \times 2 \times 2 \times 3$	84	$2 \times 2 \times 3 \times 7$	48	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
40	$2 \times 2 \times 2 \times 5$	100	$2 \times 2 \times 5 \times 5$	80	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$
56	$2 \times 2 \times 2 \times 7$	54	$2 \times 3 \times 3 \times 3$	72	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
88	$2 \times 2 \times 2 \times 11$	90	$2 \times 3 \times 3 \times 5$	64	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
36	$2 \times 2 \times 3 \times 3$	81	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	96	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

研究結果：

1. Q1問五張相乘。
2. 若Q1無法解出全部答案，則Q2問「獨有質因數的倍數相乘」或是「乘積相同、張數也相同時，問最大的那個牌的倍數相乘」。

	$9=3^2$	$27=3^3$	$81=3^4$
	$6=2 \times 3$	$18=2 \times 3^2$	$54=2 \times 3^3$
$4=2^2$	$12=2^2 \times 3$	$36=2^2 \times 3^2$	
$8=2^3$	$24=2^3 \times 3$	$72=2^3 \times 3^2$	
$16=2^4$	$48=2^4 \times 3$		
$32=2^5$	$96=2^5 \times 3$		
$64=2^6$			

	$25=5^2$
$10=2 \times 5$	$50=2 \times 5^2$
$20=2^2 \times 5$	$100=2^2 \times 5^2$
$40=2^3 \times 5$	
$80=2^4 \times 5$	

$15=3 \times 5$	$45=3^2 \times 5$	$75=3 \times 5^2$
-----------------	-------------------	-------------------

	$49=7^2$
$14=2 \times 7$	$98=2 \times 7^2$
$28=2^2 \times 7$	
$56=2^3 \times 7$	

$21=3 \times 7$	$63=3^2 \times 7$
-----------------	-------------------

$35=5 \times 7$	$70=2 \times 5 \times 7$
-----------------	--------------------------

$42=2 \times 3 \times 7$	$84=2^2 \times 3 \times 7$
--------------------------	----------------------------

討論

依照使用到的質因數來分類，看得出哪些數字有「獨有的質因數」，哪些數字有很多「共同的質因數」。

這個表格，讓我很容易利用數字之間的關係來解題。

$22=2 \times 11$	$33=3 \times 11$	$55=5 \times 11$	$77=7 \times 11$	$44=2^2 \times 11$	$66=2 \times 3 \times 11$	$88=2^3 \times 11$	$99=3^2 \times 11$
------------------	------------------	------------------	------------------	--------------------	---------------------------	--------------------	--------------------

$26=2 \times 13$	$39=3 \times 13$	$65=5 \times 13$	$91=7 \times 13$	$52=2^2 \times 13$	$78=2 \times 3 \times 13$
------------------	------------------	------------------	------------------	--------------------	---------------------------

$34=2 \times 17$	$51=3 \times 17$	$85=5 \times 17$	$68=2^2 \times 17$
------------------	------------------	------------------	--------------------

$38=2 \times 19$	$57=3 \times 19$	$95=5 \times 19$	$76=2^2 \times 19$
------------------	------------------	------------------	--------------------

$46=2 \times 23$	$69=3 \times 23$	$92=2^2 \times 23$
------------------	------------------	--------------------

$58=2 \times 29$	$87=3 \times 29$
------------------	------------------

$62=2 \times 31$	$93=3 \times 31$
------------------	------------------

$$74=2 \times 37$$

$$82=2 \times 41$$

$$86=2 \times 43$$

$$94=2 \times 47$$

討論(一) 比對法

越大的質數，出現的次數越少。所以這些比較大的質數，很容易成為牌組中出現次數很少的質數，由大的質數往下檢查，能夠幫助我依序判斷出牌組的數字。

有47、43、
41或37嗎？

有31或
29嗎？

有23
嗎？

有19或
17嗎？

有13
嗎？

有11、7
或5嗎？

有3或2嗎？

舉例說明：

2~100中，有質因數23的合數，是46、69、92。

比對牌組的五種數字中，

有一種出現了23，例如：有23、沒有46,69,92，那麼，23有幾次方，就代表有幾個23；

有兩種出現了23，例如：有23、有46，問其中較大的數(46)的倍數相乘，就可以區分23和46；

有三種以上出現了23，例如：有23,46,69和92，那麼，問他們的最大公因數(23)的倍數相乘，就可區分；

沒有出現23，直接進入下一步。

討論(二) 配對分割法

牌組中的數字，如果產生乘積相同、張數也相同的情況， $A \times D = B \times C$ ，(其中 $A > B \geq C > D$)。

只要確定最大的牌A有幾張，同時就確定了最小的牌D有幾張，剩下的張數就是中間的牌B和C。

於是由此可以推論出，A、B、C、D各有幾張。

「乘積相同、張數也相同」提問順序是

Q1：五張相乘

Q2：乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

Q3：第二組乘積相同中，最大數的倍數相乘

Q4：第三組乘積相同中，最大數的倍數相乘

舉例說明

(2, 4, 8, 16, 32)，共有六組乘積相同的配對。其中最複雜的組合，要使用的問題為

Q1問五張相乘

Q2問最大數32的倍數相乘，就知道有幾張32，如果32的數量沒超過四張則需問Q3

Q3問第二大數16的倍數相乘，看此題答案的質因數分解中2出現幾次，扣除32的，就知道有幾張16，如果32和16的數量加起來沒超過4張則需問Q4

Q4問第三大數8的倍數相乘，看此題答案的質因數分解中2出現幾次，先扣除32和16的，就知道有幾張8，到這裡就確定整個牌組

最簡單的組合

如果五張相乘=32

我直接知道這五張都是2。

最複雜的組合

如果五張相乘=32768

共有12種組合可以達成這個乘積。

其中4種組合需要問到Q3、

另外8種組合需要問到Q4。

討論(三) 特殊質因數法

牌組五種數字各自的「獨有質因數」，在五張相乘後會明顯特殊，我把它們叫做「特殊質因數」。

質因數分解中，特殊質因數的種類越多，提問次數就越少：

五種特殊質因數：五種牌都有特殊質因數，問Q1，就知道每種牌各出現幾次。

四種特殊質因數：五種牌共有四種特殊質因數，問Q1，觀察次方就可以知道它們出現的次數。再把張數和剩餘的乘積搭配，就會知道答案。

三種特殊質因數：三種特殊質因數有 $(P_{甲}、P_{乙}、P_{丙}、P_{丙}、P_{丙})$ 和 $(P_{甲}、P_{乙}、P_{丙}、P_{乙}、P_{丙})$ 兩種類型，如果Q1尚無法完全解題，加問Q2：「乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘」，就可以確認是哪一種配對。

兩種特殊質因數：兩種特殊質因數有 $(P_{甲}、P_{甲}、P_{乙}、P_{乙}、P_{乙})$ 和 $(P_{甲}、P_{乙}、P_{乙}、P_{乙}、P_{乙})$ 兩種類型，如果Q1尚無法完全解題，加問Q2：「乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘」，如果Q2尚無法完全解題，加問Q3：「第二種乘積相同組合中，最大數的倍數相乘。」就能確認每張牌的數字。

一種特殊質因數：只有一種特殊質因數，如果Q1尚無法完全解題，問Q2：「乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘」

用同樣的提問規則，繼續分割乘積相同的組合，直到解題完成，最多有可能問到Q4。

觀察特殊質因數各出現幾次，就可以確認數字牌各有幾張。

討論(四) 「次方」乘以「張數」法

我們想知道牌組中每種數字分別有幾張。假設第一種數到第五種數，依序有A、B、C、D、E張。

$$\text{第一種數} = 2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times \dots \times 47^{a_{47}}$$

$$a_n \geq 0 \quad \text{有A張}$$

$$\text{第二種數} = 2^{b_2} \times 3^{b_3} \times 5^{b_5} \times \dots \times 47^{b_{47}}$$

$$b_n \geq 0 \quad \text{有B張}$$

$$\text{第三種數} = 2^{c_2} \times 3^{c_3} \times 5^{c_5} \times \dots \times 47^{c_{47}}$$

$$c_n \geq 0 \quad \text{有C張}$$

$$\text{第四種數} = 2^{d_2} \times 3^{d_3} \times 5^{d_5} \times \dots \times 47^{d_{47}}$$

$$d_n \geq 0 \quad \text{有D張}$$

$$\text{第五種數} = 2^{e_2} \times 3^{e_3} \times 5^{e_5} \times \dots \times 47^{e_{47}}$$

$$e_n \geq 0 \quad \text{有E張}$$

$$\text{五張相乘} (2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times \dots \times 47^{a_{47}})^A \times (2^{b_2} \times 3^{b_3} \times 5^{b_5} \times \dots \times 47^{b_{47}})^B \times (2^{c_2} \times 3^{c_3} \times 5^{c_5} \times \dots \times 47^{c_{47}})^C \times (2^{d_2} \times 3^{d_3} \times 5^{d_5} \times \dots \times 47^{d_{47}})^D \times (2^{e_2} \times 3^{e_3} \times 5^{e_5} \times \dots \times 47^{e_{47}})^E = 2^{T_2} \times 3^{T_3} \times 5^{T_5} \times \dots \times 47^{T_{47}} \quad T_n \geq 0$$

$$\text{質數2的次方} \times \text{張數} \quad T_2 = a_2 \times A + b_2 \times B + c_2 \times C + d_2 \times D + e_2 \times E$$

$$\text{質數3的次方} \times \text{張數} \quad T_3 = a_3 \times A + b_3 \times B + c_3 \times C + d_3 \times D + e_3 \times E$$

$$\text{質數5的次方} \times \text{張數} \quad T_5 = a_5 \times A + b_5 \times B + c_5 \times C + d_5 \times D + e_5 \times E$$

- **原本的條件**：總張數 $A+B+C+D+E=5$ 。
- **五張相乘後額外的條件**：每出現一種質數，就有一個「 $\blacktriangle A + \blacktriangledown B + \bullet C + \blackstar D + \blacksquare E = \text{某數}$ 」的算式。
- 每個牌組至少有其中1個算式，有些牌組能得到很多個算式。

和討論(三) 對應，我發現：

- 1種質數=1個算式=1個額外條件，5種質數=5個算式=5個額外條件。
- 原本+額外，有5個條件可保證解出A、B、C、D、E，這5個未知數。
- 條件不夠，就增加提問，來補足條件。

條件觀點印證了前面所有的結果，我知道**問幾題一定可以得出答案**：

最少一題，問五張相乘的質因數分解，看出現幾種質數？如果，

出現4種以上，有5個條件，答案確定；

出現3種，有4個條件，最多加問1題；

出現2種，有3個條件，最多加問2題；

出現1種，有2個條件，最多加問3題。

結論

(一) 解題步驟

Q1：五張相乘

Q2：乘積相同的組合中，最大數的倍數相乘

Q3：第二組乘積相同中，最大數的倍數相乘

Q4：第三組乘積相同中，最大數的倍數相乘

最少問一題，最多問四題，一定可以解題成功。

(二) 提問次數

第一題問五張相乘的質因數分解，看出現幾種質數

(1) 出現4種以上，直接確定五種牌各有幾張；

(2) 出現3種，最多加問1題；

(3) 出現2種，最多加問2題；

(4) 出現1種，最多加問3題。

在這個提問上限之內，一定可以解題成功。

參考資料

- 一、黎懿瑩、林壽福(2018)。終極密碼。國立臺灣師範大學數學教育中心。
- 二、王心禹、陳樂謙、古晴文(2020)。積少、乘多-分析數字關係，推理原始密碼。第60屆高雄市中小學科學展覽會國小組數學。
- 三、翰林版國小數學第11冊(2016)。最大公因數與最小公倍數。翰林出版社。