中華民國第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080409

數字翻筋斗圖形花樣大解碼

學校名稱：新竹市東區關東國民小學

作者：	指導老師：
小六　呂卓諺	傅秀蘭
小六　翁婕珊	楊和淦
小六　劉家珊	

關鍵詞：圖形特徵、位移向量、旋轉變換

摘要

本研究主要探討由一組數字來畫圖，所畫的圖形特徵與數字組合間的關係，並歸納共通性質。

(一)圖形特徵

1.個數 1 或 2 均畫出 1 個矩形。

2.個數≧3，圖形較多樣化。一次循環，均可畫出一個以最小數字為邊長的矩形，且從數字組合可判斷此種矩形彼此的離合程度。

3.個數非 4 整數倍，均畫出點對稱圖形。

4.數字順序相反的數序，互為線對稱圖形。

5.數字先後關係不變，只改變起始數字，所畫圖形經旋轉後會相同。

(二)循環次數，由個數除以 4 的餘數所決定。

(三)位移向量與旋轉變換：

1.將第一次循環起點到終點的位置向量做旋轉變換，可得各次循環的位移向量和終點座標。

2.可證循環次數。

3.可推算對稱中心座標。

(四)應用：繪出可變換圖形花樣的互動遊戲。

壹、研究動機

學校數學社團的老師，帶我們玩了許多數學小遊戲。其中，「數字翻筋斗」這個遊戲，最讓我們深感興趣。這是個讓數字變成圖形的有趣小遊戲，畫法是：先決定一組數字之後，在方格紙上，挑選一個位於橫線和縱線相互交叉的格子點來當作起點，沿著橫線或縱線，按照數字順序，接連畫出一段段數字所指定長度的線段。畫線方向則是輪流以向右、向上、向左、向下等方式，不斷逆時針方向旋轉，直到回到原點為止。

在「原來數學這麼美麗」這本書中，有介紹「數字翻筋斗」這個遊戲，又稱「數字轉轉彎」，不過書上只有講解畫法。我們對於圖形花樣與數字的關聯性，深感好奇。上網查詢科學教育館歷屆的科展資料，以及 Google 搜尋，都未發現有和這個主題相關的研究資料。因此我們便決定以數字翻筋斗來做為科展主題，深入探討，以找出數字組合與圖形之間的關聯性。

貳、研究目的

一、找出圖形花樣組合變化與數序的個數、數字組合間的關聯性。

二、找出圖形所具有的共通性質。

三、找出各次循環的位移向量，以及旋轉變換的結果。

四、找出回到原點所需循環次數之預測方法與證明。

五、找出圖形對稱中心的座標計算方法。

六、應用作圖軟體繪製可改變圖形花樣的互動遊戲。

參、研究設備及器材

一、研究與記錄用文具：紙張、方格紙、筆、直尺。

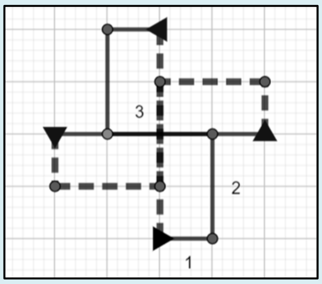
二、作圖與資料處理工具：電腦、文書處理軟體（Word）、幾何繪圖軟體（GeoGebra）、截圖軟體。

肆、研究計畫

一、名詞解釋及符號定義

1.數序：指的是以固定順序排列的幾個正整數，用來決定輪流要畫的各個線段長度。我們用「NS:」後面連接一串數字的符號，來代表「數序」。例如：NS: 1-2-3，表示由 1、2、3 所組成、個數為 3 的數序。畫圖時，先畫 1 個單位長的線段，再畫 2 個單位、3 個單位長的線段。如果還要再接著畫的話，又是從數字 1 開始下一輪。

2.原點與起點：「原點」指的是「在方格紙上一開始畫圖的起始點（O）」；而「起始點」指的是「每次要從頭開始畫數序第一個數的線段時，開始出發的點」。不管是原點或起始點，都是位於縱向粗線和橫向粗線相交的大格子點(單位點）上。



(圖 1) NS:1-2-3 圖形畫法示例

3.圖形畫法：(見圖 1 示例)

(1)從原點 O 向右出發，畫出第一個數字長度的線段。

(2)畫完一個數字，就逆時針旋轉 90 度，繼續畫下一個數字長度的線段。重複此步驟，直到輪完數序最後一個數字。

(3)如果輪完數序裡的數字，還沒有回到原點，就再從數序的第一個數字開始，畫下一次循環，直到回到原點 O 時，剛好數序也輪到最後一個數，便可結束而完成圖形。

為了研究分析上的需要，我們使用實線和虛線來區分奇數次和偶數次循環；將每 1 循環的起點位置，用三角形箭頭標示方向；並且只在第 1 次循環才標示出各線段長度，以利於辨識出圖形的數字組合。

4.循環次數：數序全部數字畫完 1 次，稱為「1 次循環」。而回到原點、結束畫圖所需要輪完幾次數序全部數字，就稱為「循環次數」。例如：如果輪完 2 次數序時，剛好回到原點，我們稱這個數序的循環次數就是 2。

5.位移向量與位置向量

①**位移向量**：以任意一點為起點，畫完一次循環時，終點位置與起點位置的座標變化值，也就是 X 軸和 Y 軸的座標變化值，稱為位移向量。位移向量用 $\overrightarrow{(X\text{ 軸變化值},\ Y\text{ 軸變化值})}$ 的符號來表示。

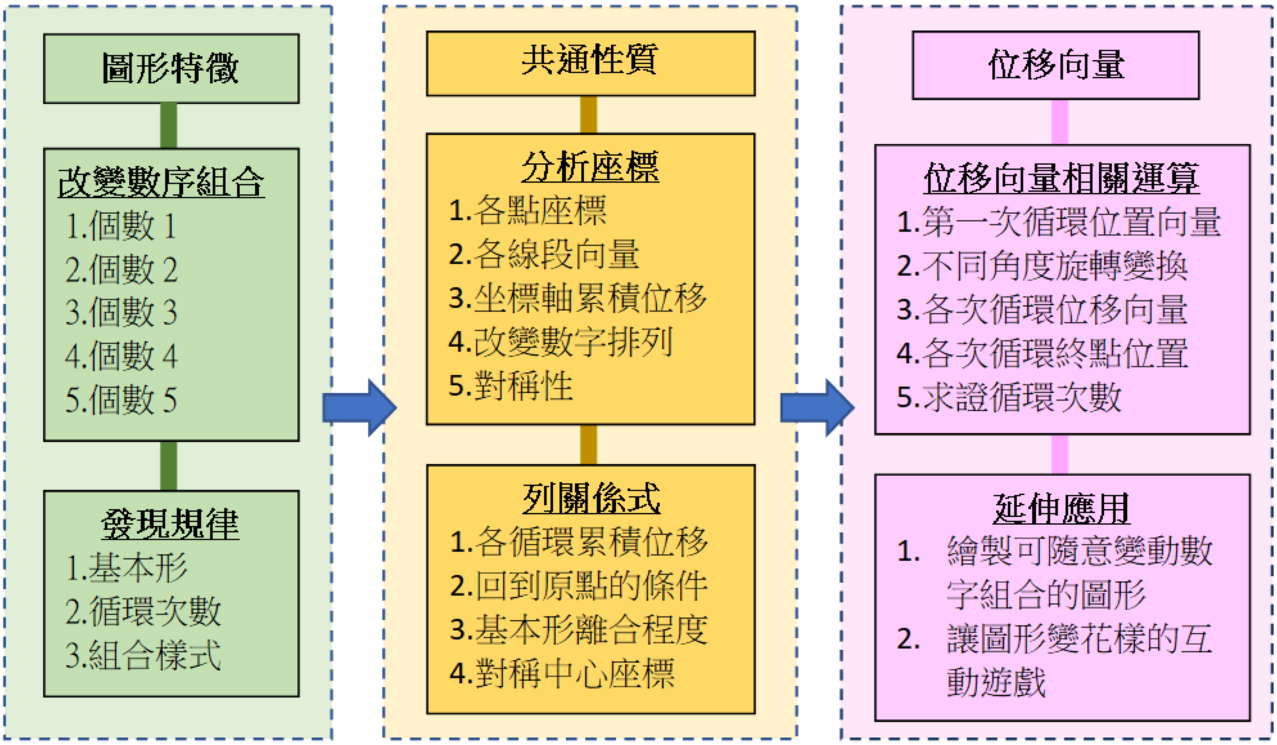
②**位置向量：**當一個位移向量的起點是原點時，位移向量的座標變化值剛好是終點座標，這個位移向量就稱為「位置向量」。因為第一次循環的起點是原點，所以第一次循環的

位移向量也是「位置向量」。

6.旋轉變換：將一次循環的位移向量，逆時針旋轉θ 度之後，產生下一次循環起點到終點的位移向量，我們稱為「旋轉變換」，用 $\xrightarrow[\text{(X 軸變化值, Y 軸變化值)}]{}{}^{90^\circ}$ 的符號來表示。例如：$\xrightarrow[\text{(N, M)}]{}{}^{90^\circ}$ 為將位移向量 $\xrightarrow[\text{(N, M)}]{}$，逆時針旋轉 90 度之後，變成另一個位移向量。所以旋轉變換是將位移向量進行旋轉的運算過程，變換結果也是一個位移向量。

7.對稱中心：以一個點為中心，將圖形旋轉 180 度以後，如果所產生的圖形會和原本的圖形相同、互相重疊，這樣的圖形稱為「點對稱圖形」，這個旋轉的中心點就稱為對稱中心。

二、研究架構圖



伍、研究過程與結果

研究一、改變數序個數或數字組合，能畫出什麼圖形？

(一)研究過程

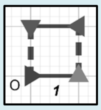
1. 試著用 1、2、3、…等不同數字，來組合成個數 1～5 的數序，看會畫出怎樣的圖形。主要是為了找出不同個數的數序，可以畫出哪些圖形樣式，如果已經發現樣式的規律性，就不需要再繼續嘗試畫出所有的數字組合情形。
2. 為了研究需要，使用實線和虛線來區分奇數次和偶數次循環；將每 1 次循環的起點位置，用三角形箭頭標示起始方向，並且只在第 1 次循環才標示出數字組合。
3. 改變數字排列方式，觀察圖形樣式會有什麼變化。
4. 找出圖形所具有的性質，並探討圖形特徵與數序的關係。

(二)研究結果

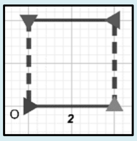
1.相同數字組成的數序

(1)個數 1

NS: 1

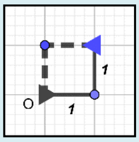


NS: 2

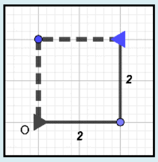


(2)個數 2

NS: 1-1

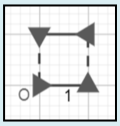


NS: 2-2



(3)個數 3

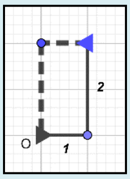
NS:1-1-1



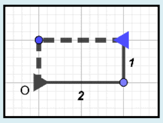
2.兩個相異數字組成的數序

(1)個數 2

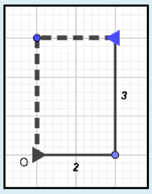
NS: 1-2



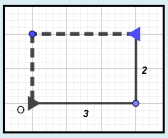
NS: 2-1



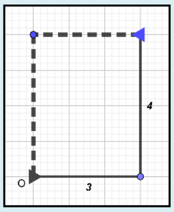
NS: 2-3



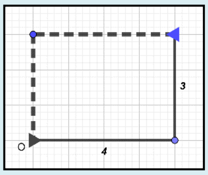
NS: 3-2



NS: 3-4

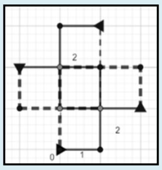


NS: 4-3

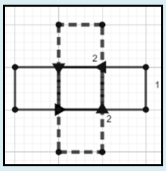


(2)個數 3

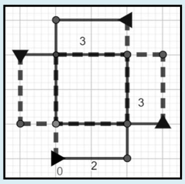
NS:1-2-2



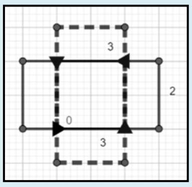
NS:2-1-2



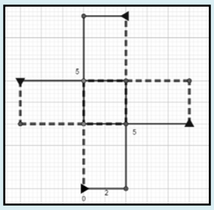
NS:2-3-3



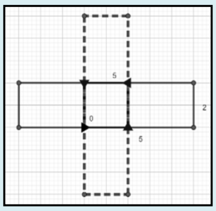
NS:3-2-3



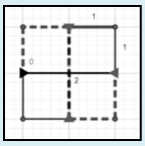
NS:2-5-5



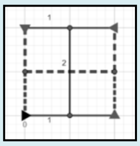
NS:5-2-5



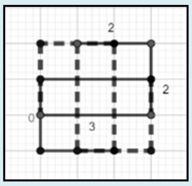
NS:2-1-1



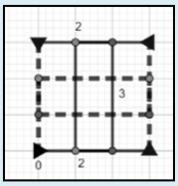
NS:1-2-1



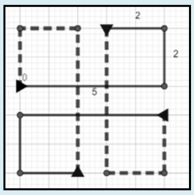
NS:3-2-2



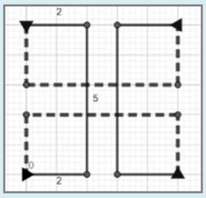
NS:2-3-2



NS:5-2-2

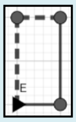


NS:2-5-2

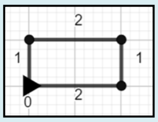


(3)個數 4

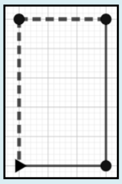
NS:1-2-1-2



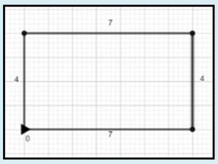
NS: 2-1-2-1



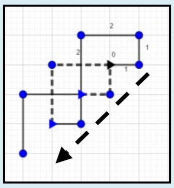
NS:3-5-3-5



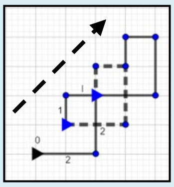
NS:7-4-7-4



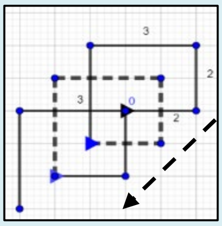
NS:1-1-2-2



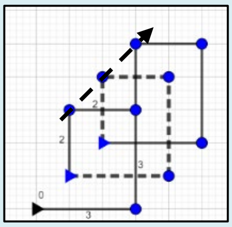
NS:2-2-1-1



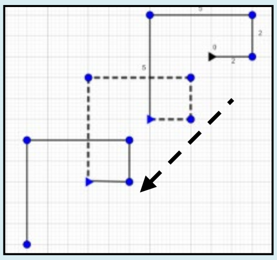
NS:2-2-3-3



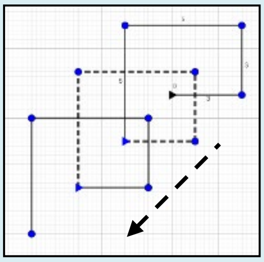
NS:3-3-2-2



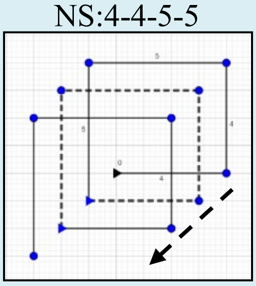
NS:2-2-5-5



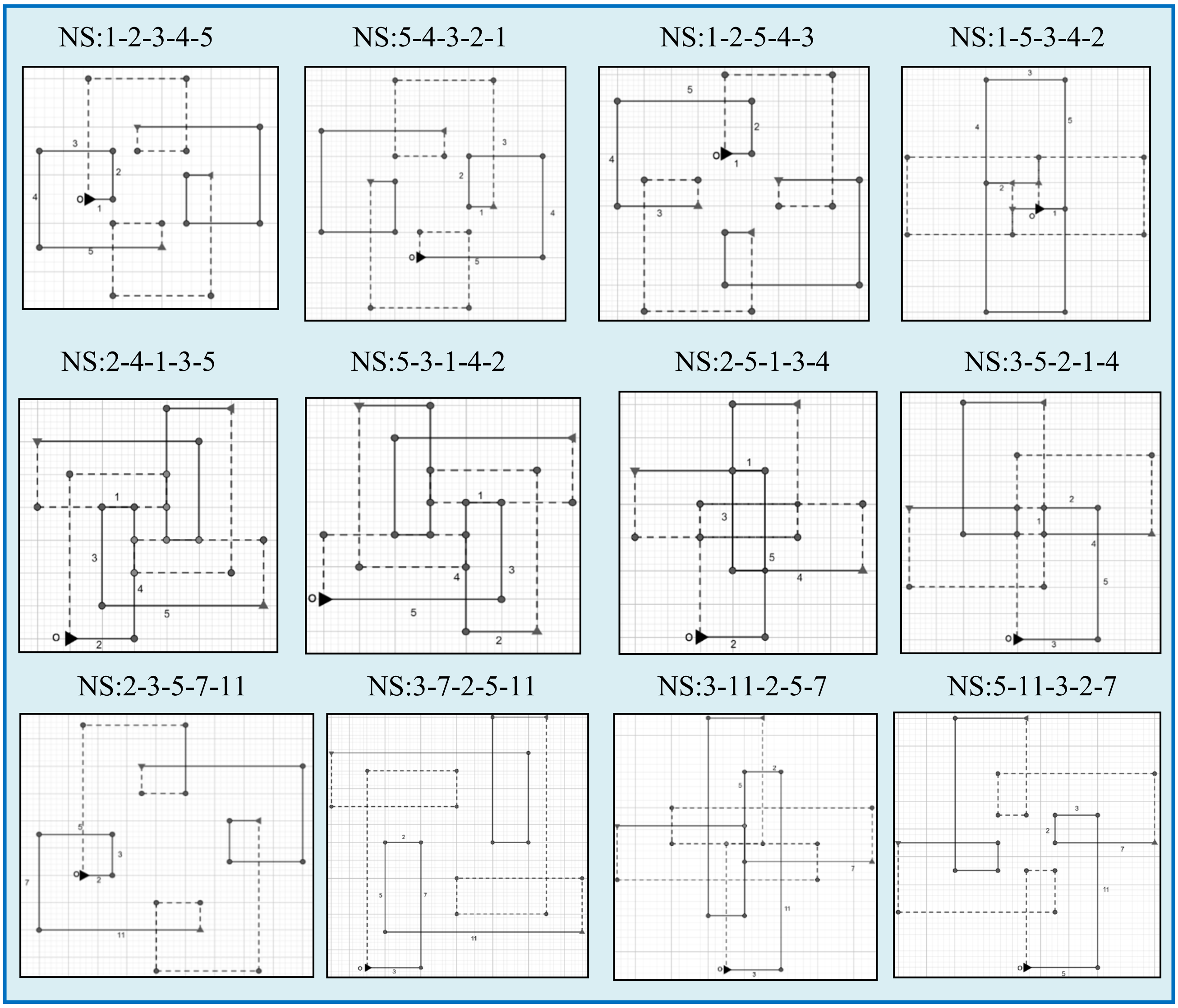
NS:3-3-5-5



NS:4-4-5-5



3.數序裡的每個數字都不同



(三)發現與討論

1.相同數字組成的數序

(1)圖形花樣：不管數序個數是多少，相同數字組成的數序，都會畫出正方形（基本形），且邊長為組成數序的數字。

分析：因為只有一個個數，代表每條線段長度都相同，加上每個內角都是 90°，所以畫出來的圖形就是正方形。

(2)循環次數：數序個數為 1 和 3 時，不論數字為何，都是循環 4 次後，就會回到原點而結束作圖。數序個數為 2 時，都是循環 2 次後，會回到原點而結束。

分析：從起點出發，要回到原點，至少要繞一圈、旋轉 360°。每畫完一個數字，就會旋轉 90°。至少要旋轉 4 次或 4 的倍數次，才能轉回最初的起始方向。

①個數為 1 的數序，$360° \div 90° = 4$，所以至少要 4 次循環，才回得去原點。

②個數為 2 的數序，$360° \div (90° \times 2) = 2$，所以至少要 2 次循環，才回得去原點。

③個數為 3 的數序，因為正方形有四個邊，畫完第 1 次的循環後，第 2 次循環只要畫完第 1 個數，就會回到原點、完成正方形的 4 個邊。後面畫出來的線段，只會

不斷重複疊加在原本畫出來的正方形上，直到畫完第 4 次循環的時候，就會畫滿 3 個正方形，正好回到原點結束。

將循環次數的計算過程列出來：

3 個數字×4 次循環=畫出 12 個邊長；

12 個邊長÷正方形 4 個邊=可以畫出 3 個重疊在一起的正方形。

以此類推，不管數序的數字是否相同，若能回到原點，循環次數的計算方法均為：

循環次數＝數序個數和 4 的最小公倍數÷數序個數

(3) 由相同數字組成的數序，只能畫出正方形，沒有其他的變化性，所以不需要再繼續探討更多個數的情形了。

結論 1-1-1：相同數字所組成的數序，不論組成數序的數字與個數是多少，都只能畫出一個正方形，且邊長等於數序中的數字。

結論 1-1-2：不管數序的數字是否相同，若能回到原點，循環次數的計算公式均如下：

循環次數＝數序個數和 4 的最小公倍數÷數序個數

2.兩個相異數字組成的數序

(1) **數序個數為 2，以及由「2 個相異數的組合、重複 2 次」組合成個數 4 的數序**：不論兩個數字為何，畫出來的圖形都是長方形，長邊為數序中較大的數，短邊為較小的數。且經過 2 次循環（個數 2）或 1 次循環（個數 4）後會回到原點。

分析：①因為有 2 個數字，每次都轉 90°，個數 2 一次循環共旋轉 180°。從起點出發，要回到原點，至少要旋轉 360°。而$360° \div 180° = 2$，所以至少要循環 2 的倍數次，才能回得去原點。如果是個數 4 的話，1 次循環就會旋轉 360°，剛好和一開始的方向相同。不論是個數 2 或個數 4，循環次數的計算方法，和結論 1-1-2 相同。

②個數 2 或重複 2 次組成個數 4 的數序，每間隔 1 個數字所畫的線段，剛好是旋轉 180°、會兩兩對稱。也就是會畫出對邊等長、且內角均為 90°的圖形。由於數序是兩個相異數字，數字一大一小，代表有不等長的邊。鄰邊不等長，且每個內角都是 90°，這樣的圖形就是長方形，較大數字是長邊、較小數字是短邊。

(2) **兩個相異數字組成個數≧3 的數序**

①數序個數為 3 或個數 5：不管是否有重複數字，畫出來的圖形，都是循環 4 次後，圖形就會回到原點而結束。

分析：

➢ 從旋轉角度來思考：

1. 一個循環有 3 個（或 5 個）數字×每次轉 90°＝一個循環共轉 270°（或比 360°多旋轉 90°）
2. 要旋轉 360°的整數倍，才會回到一開始的起始方向，
   一次循環相差角度 90°，$360° \div 90° = 4$，所以至少要經過 4 次循環，才能剛好轉回最初的起始方向。

- 從每次循環的起點位置來思考：

  比較畫圖時，每一條線段在方格線條上的移動情形，水平方向的線段和垂直方向的線段，都是經過 4 次循環之後，剛好可以回到原點的位置。

所以個數 3 和個數 5 的數序，經過 4 次循環之後就會回到原點，並轉回一開始的方向。而循環次數的計算方法，和結論 1-1-2 相同。

②「前兩數相同、後兩數相同」組成個數 4 的數序：會畫出一直無限循環、永遠回不去原點的圖形。數字排列不管是「前小後大」或「前大後小」，在畫出 1 或 2 次循環之後，就會繞出一個又一個的正方形。但是「前小後大」的圖形會逐漸往左下方偏移，最後在畫面左下方出界；而「前大後小」的圖形，則是會往右上方偏移，最後在畫面右上方出界。

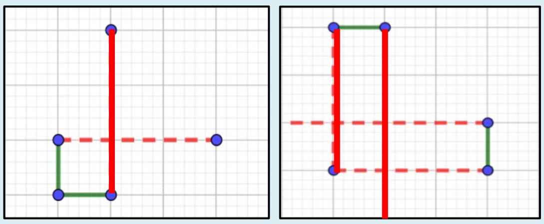
分析：

I. 前小、後大的數序，每一次循環的奇數條線段，會先向左移動前面的較小數，再向右移動後面的較大數；偶數條線段，會先向上移動前面的較小數，再向下移動後面的較大數。因為一次循環結束時，向左的線段比向右的長、向下的線段比向上的長，所以終點位置會比起點位置更偏向左下，繼續下一個循環，整個圖形會向左、向下偏移。

II. 相反的，前大、後小的數序，每畫完一次循環，終點位置就會比起點位置更偏向右上，繼續下一個循環，整個圖形會向右、向上偏移。

III. 因為個數為 4 的倍數時，一次循環雖然可以轉回原本方向，但是終點位置有可能無法回到原點，而數字的大小排列，會影響整個圖形的偏移方向。所以個數為 4 的倍數的數序，畫的圖形有可能永遠無法回到原點。

③最小數字所構成的矩形：數序個數≧3 時，畫出的圖形不再只是單純的正方形或長方形。但是拆解開來，還是可以發現每次循環都會出現 1 個以最小數字為邊長的長方形或正方形，我們稱這樣的矩形為「基本形」。如果最小數字（見圖 2 的綠色線段）連續出現 2 次（含在數序前後兩端、不同次循環會頭尾相接），基本形為正方形。如果較小數只出現 1 次，基本形則為長方形。



(圖 2) 最小數字構成基本形的關係圖

分析：

I. 每兩個相連的數字，會畫出一組互相垂直的鄰邊，間隔 1 個數字就會畫出相對平行的邊。4 個連續數字所畫出的線段，累積起來剛好繞完 1 圈、旋轉 360 度。不論最小數字在第幾位，前後相接的數都一定≧最小數字。所以不管其他數字為何，一定能以最小數字為其中一邊，和另外 3 條線段一起圍出一個矩形。

II. 矩形的邊長：一邊是最小數，另一邊則是「與最小數相鄰的數」或「與最小數前後一輪會相連接的數」兩者中較小的數。

III. 當數序中的最小數至少出現連續 2 個（含位於數序前後端、與前後輪會相接）時，由最小數所畫出的封閉區域，便會形成一個小正方形。否則，由最小數字所形成的矩形

則為長方形。

IV. 畫完 K 次循環、回到原點時，一定會出現 K 個由最小數字所形成的封閉矩形。

④由 5 個不同數字所組成個數 5 的數序：畫出來的圖形最外圍，都有 4 片向 4 個不同方向突出的扇葉狀圖案。

分析：

I. 因為每一次循環所畫出來的圖形樣式都一樣，而每一次循環，都可以畫出一個由最小數字所構成的基本形（矩形）。

II. 一次循環共畫出 5 條線段，至少會畫出圍繞一圈以上的圖案，而形成一片突出的扇葉圖案。

III. 畫完圖形共經過 4 次循環，所以整個圖形至少會出現 4 個長方形，以及 4 片突出的扇葉圖案。

結論 1-2-1：不同數字所組成的數序，不論組成數序的數字與個數是多少，圖形裡都會出現以最小數字其中一個邊長的矩形，我們稱之為「基本形」。

結論 1-2-2：相異數組成個數 2 的數序，圖形為一個長方形，邊長分別為數序中的兩個數字。

結論 1-2-3：由相異數字組成個數 3 或≧5 的數序，圖形排列花樣才會有較多樣的變化。

結論 1-2-4：當不同數字組成個數≧3 的數序，若最小數字出現 2 次且連續排列，則一次循環便會形成 1 個邊長為最小數的正方形；否則，一次循環便會畫出一個由最小數字為一邊長度的長方形。

結論 1-2-5：個數 4 的數序，若奇數位數字相同、偶數位數字相同，則會畫出長方形，循環次數為 1 次。其他情形則會畫出無法回到原點的圖形。

結論 1-2-6：個數 5 的數序，圖形外圍會形成 4 片向 4 個方向突出的扇葉狀圖案。

研究二、個數 3 以上的數序，圖形組合樣式，具有哪些規律性？

(一)研究過程

1. 將圖形分類，找出圖形所具有的性質，例如：循環次數、重複圖樣的排列組合樣式等。
2. 找出數序中，會影響重複圖樣排列組合樣式的因素。
3. 觀察數字的排列順序不同的數序，所畫出來的圖形，哪些性質會跟著改變？哪些性質仍維持相同？

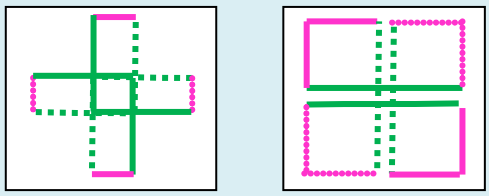
(二)研究結果與討論

1. 個數 3 的圖形組合樣式

(表 1)由兩個相異數組成個數為 3 的數序的圖形組合樣式分析表

組成數序	舉例	數字關係	圖形樣式	圖形分解	
				正方形	長方形
較小數出現 1 次	NS:1-2-2、NS:2-2-1、NS:2-1-2	較大數＝較小數×2	十字型	5 個正方形，邊長為 1	無
	NS:2-3-3、NS:3-3-2、NS:2-3-2	較大數＜較小數×2	十字型	1 個正方形，邊長為 1	4 個長方形，邊長為：2×1
	NS:2-5-5、NS:5-5-2、NS:2-5-2	較大數＞較小數×2	十字型	1 個正方形，邊長為 2	4 個長方形，邊長為：2×3
較小數出現 2 次	NS:1-1-2、NS:2-1-1、NS:1-2-1	較大數＝較小數×2	田字型	4 個正方形，邊長為 1	無
	NS:3-2-2、NS:2-2-3、NS:2-3-2	較大數＜較小數×2	九宮格	9 個正方形，邊長為 1	無
	NS:5-2-2、NS:2-2-5、NS:2-5-2	較大數＞較小數×2	X 型	(1)4 個不相鄰的正方形，邊長為 2 (2)4 個正方形以頂點相連接，正中心有 1 個正方形，邊長為 1	無

從表 1 可以發現，個數 3 的圖形組合樣式分類，與「較小數」出現次數，及「較大數」＞、＝、或＜「較小數」的 2 倍有關。



(圖 3)個數 3 基本形組合樣式分析圖

(1) 當「較小數」只出現 1 次：（圖 3 左粉紅色線段）圖形花樣都是在圖形的正中間有一個正方形，向 4 個方向各連接一個矩形，排成像一個「十字架」的圖案。

分析：

I. 如圖 3 左所示，較小數（粉紅色線段）會和兩個連續排列且較大的數（綠色線段）其中之一相連接，而形成一個長度較大數、寬度是較小數的長方形。另一個較大數就和下一次循環的最小數一起形成另一個相同大小的長方形。每 2 次循環所產生的 2 個矩形，會在旋轉中心互相重疊，因而在圖形的正中央就產生一個邊長為最小數的正方形。整個組合圖案呈現「十字型」。由長方形的長邊突出中心正方形的矩形，長＝較大數減去較小數、寬＝最小數。

II. 當「較大數」＝「較小數」x 2，突出中心重疊正方形的部分，長度＝較小數＝中心正方形的邊長。所以凸出的 4 個部分，剛好與正中央正方形大小相同。整體樣式就是：5 個相同大小的正方形、排列成「十字型」。

(2) 當「較小數」出現 2 次：（圖 3 右粉紅色線段）會產生 4 個邊長為較小數的正方形。而 4 個正方形彼此是否會相鄰而排成田字型，或是彼此分開在正中央在形成一個正方形，則與較大數和較小數的數值差距有關。

①若較大數＞較小數的 2 倍：則會有 4 個相同大小、邊長為較小數的正方形，彼此互相分開，正中央還有一個邊長為「較大數－2 倍較小數」的正方形，5 個正方形排列組合成「X 字型」。

②若較大數＝較小數的 2 倍：會有 4 個大小相同、邊長均為較小數的正方形，兩兩相鄰，組合成「田字型」。

③若較大數＜較小數的 2 倍：會有 9 個正方形，排列成「九宮格」的型式。

分析：

I. 如圖 3 右所示，每 1 組由 2 個較小數（如粉紅色線段），都會和前後相連接的 2 條較大數所畫的線段（綠色線段）一起圍出一個邊長為較小數的正方形。4 次循環、4 個較大數字所畫的 4 條線段，都會行經圖形的中央區域。

II. 當較大數>較小數 2 倍時：因為每 1 組由 2 個較小數所形成的小正方形，都會被較大數所畫的線段所分開，而較大數所畫的 4 條線段，在行經圖形的中央區域時，便會互相分開，在圖形正中央多圍出一個正方形，邊長為「較大數減 2 倍較小數」。正中央的正方形，分別和四個角落的正方形以頂點相交。整個組合圖案便呈現「X 字型」。當較大數＝較小數 3 倍時，正中心多產生的正方形，邊長＝「較大數減 2 倍較小數」＝最小數，剛好會形成 5 個大小相同的正方形。

III. 當較大數＝較小數的 2 倍時：較大數所畫的 4 條線段，行經圖形的中央區域時，剛好等於 2 次循環所畫的正方形邊長相接的長度，所以每 2 個小正方形之間會無間隔，整個組合圖案便呈現是 4 個正方形所排成的「田字型」。

IV. 當較大數＜較小數 2 倍時，每 2 個小正方形之間，無法被行經圖形的中央區域的較大數所畫的線段所分開，而會互相重疊。所以 4 個邊長為最小數的正方形，便會互相重疊而排列呈類似「九宮格」的圖形。

(3) 個數 3 的圖形花樣，和數序數字的大小及出現次數有關，但是和數字的排列順序無關。只要組成數序的數字不變，就算改變數字排列順序，畫出來的圖形花樣都一樣，只是起點不同而已。關於這個特性的原因，我們後面會再進一步利用各點位置變化分析來討論。

結論 2-1-1：由兩個相異數字組成個數＝3 的數序，會畫出邊長為最小數字的 4 個小矩形，這 4 個小矩形間的排列組合情形，與「較小數」出現次數，及「較大數」＞、＝、或＜「較小數」的 2 倍有關。

(1)較小數只出現 1 次時：4 個矩形互相重疊，在正中間多產生一個正方形，組合成「十字型」。

(2)較小數出現 2 次，且較大數＞較小數的 2 倍時：4 個小正方形互相分開，在正中央還有一個正方形，5 個正方形排列組合成「X 字型」

(3)較小數出現 2 次，且較大數＝較小數的 2 倍時：4 個小正方形兩兩相鄰，組合成「田字型」。

(4)較小數出現 2 次，且較大數＜較小數的 2 倍時：4 個正方形會互相重疊，形成「九宮格」的圖案。

2. 個數 4 的圖形組合樣式

(1) 個數 4 如果會畫出回不到原點的圖形，連續幾次循環所產生的矩形，彼此是否會相鄰、重疊、或是分開，與較大數和較小數的數值差距有關。

分析：

I. 較大數＞較小數時（見圖 4 上示例 NS:2-2-5-5）：

(1)第二次第 1 條短邊（紅色線段）和第三次循環的第 1 條短邊（紅色線段）都是橫向走，而這兩條邊相加，小於第二次循環的第 3 條長邊（粉紅色線段）。

(2)第二次循環的第 2 條短邊（綠色線段）和第三次循環的第 2 條短邊（綠色線段）都是縱向走。這兩條邊相加，和(1)一樣，也小於第二次循環的第 4 條長邊（藍色線段）。

(3)綜合上面 2 點，第二次循環和第三次循環中，被 2 個連續排列最小數字所圍成的正方形（黃色和橘色），因為 2 個正方形邊長相加＜較長的邊，所以正方形會被較長的線段所分開。

II. 較大數＝較小數的 2 倍時（見圖 4 中示例 NS:1-1-2-2）

(1)第二次第 1 條短邊（紅色線段）和第三次循環的第 1 條短邊（紅色線段）都是橫向走，而這兩條邊相加，和第二次循環的第 3 條長邊（粉紅色線段）等長。

(2)第二次循環的第 2 條短邊（綠色線段）和第三次循環的第 2 條短邊（綠色線段）都是縱向走。這兩條邊相加，和第二次循環的第 4 條長邊（藍色線段）等長。

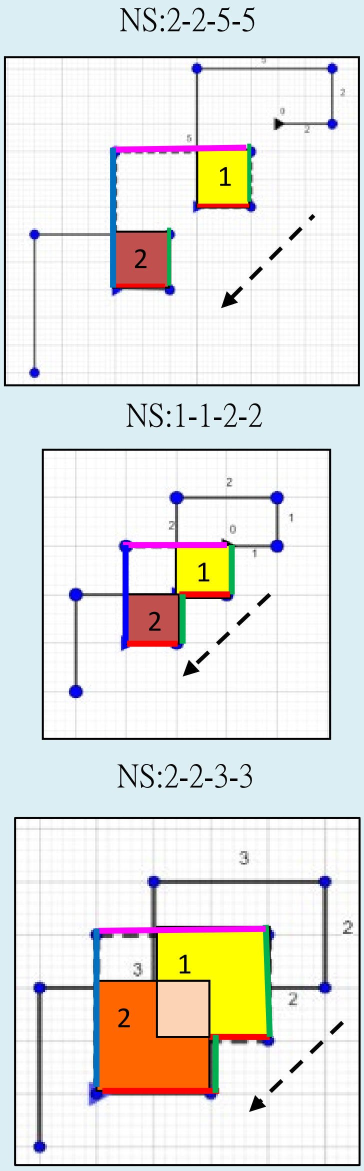
(3)綜合上面 2 點，第二次循環和第三次循環中，被 2 個連續排列最小數字所圍成的正方形（黃色和橘色），因為 2 個正方形邊長相加＝較長的邊，所以兩個正方形剛好可以相鄰，彼此的頂點相交。

III. 較大數＜較小數時（見圖 4 中示例 NS:2-2-3-3）

(1)第三次循環的第 1 條短邊（紅色線段）都是橫向走，而這兩條邊相加，大於第二次循環的第 3 條長邊（粉紅色線段）。

(2)第二次循環的第 2 條短邊（綠色線段）和第三次循環的第 2 條短邊（綠色線段）都是縱向走。第二次循環的第 4 條長邊（藍色線段）＞這兩條短邊相加。

(3)綜合上面 2 點，第二次循環和第三次循環中，被 2 個連續排列最小數字所圍成的正方形（黃色和橘色），因為較長的邊＜2 個正方形邊長相加，所以正方形會互相重疊。



(圖 4)個數 4 的矩形排列圖

3.個數 5 的圖形組合樣式

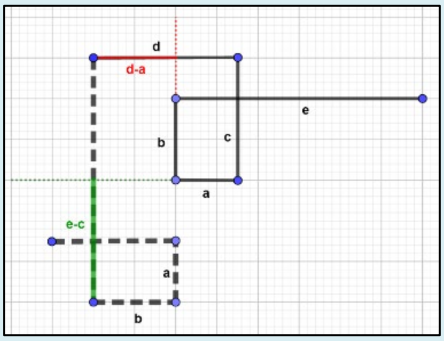
經過 4 次循環回到原點，每次循環由最小數字為一邊所形成的矩形，彼此之間是否會相鄰、重疊、或是分開，與數序中的數值差距有關。

分析：

以 NS:e-b-a-c-d 這組數序來看，令$a \le b \le c$，且$a < d$、$a < e$，那麼 a、b 為較小數。如圖 5 所示，在同一次循環中，a 與 d、e 互相平行；b 的對邊為 c，並且和下一次循

環的 e 互相平行。

I. 矩形彼此會分開的原因：當第 2 次循環時，第 1 輪的 d 邊會與在第 2 輪形成第 2 個矩形的長邊 b 互相平行，兩個線段間的距離，是否大於第二個矩形的長邊 b，決定了兩個矩形彼此能否分開。若$d-a>b$（圖 5 中的紅色線段），則矩形彼此一定會分開。



(圖 5)NS:e-b-a-c-d基本形關係圖

II. 矩形彼此會相鄰的原因：當第 2 次循環時，第 1 輪的 d 邊會與在第 2 輪形成第 2 個矩形的長邊 b 互相平行，兩個線段間的距離，是否大於第二個矩形的長邊 b，決定了兩個矩形彼此能否分開。若$d-a=b$，則矩形彼此可能會相鄰。

III. 矩形彼此會重疊的原因：當第 2 次循環時，第 1 輪的 d 邊會與在第 2 輪形成第 2 個矩形的長邊 b 互相平行，兩個線段間的距離，是否大於第二個矩形的長邊 b，決定了兩個矩形彼此能否分開。若$d-a<b$，則矩形彼此可能會重疊。

IV. 綜合上面所述，任 2 次循環所形成的矩形，彼此是否相鄰、重疊或分開，要綜合考慮與矩形短邊 a 平行的下一輪 e，以及和矩形長邊 b 平行的同一輪 d，比較 d、e 兩數與數序中其他數字的大小關係：

以 NS:*e-b-a-c-d* 這組數序來看，令$a\leq b\leq c$，且$a<d$、$a<e$，那麼 a、b 為較小數，d 和 e 是不構成矩形、與矩形長寬各間隔 1 個數字且與長寬互相平行的邊。

- 當$d>a+b$，或$e>a+c$時，矩形彼此會分開。
- 當$d=a+b$時，若$e\leqq a+c$，則矩形會相鄰。
- 當$d<a+b$時，若$e\leqq a+c$，則矩形會重疊。

V. 綜合個數 4 和個數 5，分析決定基本形是否相鄰、重疊或分開的因素，可以在進一步歸納，都是看「與構成矩形的 2 個數字（矩形的長和寬）各間隔 1 個位數的連續 2 個數字」＜、＝、或＞由最小數字構成矩形的 2 個邊長和（最小數字＋與最小數字前後相連兩數中較小的數字）。我們可以得到以下結論：

結論 2-1-2： 由兩個以上相異數字組成個數≧4 的數序時，每次循環均會畫出邊長為最小數字的基本形矩形。基本形彼此的離合程度，視「與最小數字相間隔 1 位數字的連續 2 個數字」，是否＜、＝、或＞由最小數字構成矩形的 2 個邊長和（最小數字＋與最小數字前後相連兩數中較小的數字）而決定。

- 當「與矩形長和寬各間隔 1 個位數的數字」中，只要有 1 個數字＞矩形兩邊和時，矩形彼此會分開。
- 當「與矩形長和寬各間隔 1 個位數的數字」中，有 1 個數字＝矩形兩邊和，且

另一個數字≦矩形兩邊和時，則矩形會相鄰。

➢ 當「與矩形長和寬各間隔 1 個位數的數字」中，只要有 1 個數字＜矩形兩邊和，且另一個數字≦矩形兩邊和時，則矩形會重疊。

4.圖形的對稱性：

(1)點對稱圖形：能回到原點的圖形，才是封閉圖形。將能回到原點的圖形旋轉 90 度或 180 度以後，圖形會相同，所以具有旋轉對稱性。

①循環次數為 2 的數序：個數 2 的數序所畫圖形，旋轉 180 度之後，就能變成相同圖案。所以是一個點對稱圖形。我們可以進一步歸納出來：個數為偶數但非 4 的倍數的數序，都是點對稱圖形，對稱中心在 2 個起點連線的中點。

②循環次數為 4 的數序：個數 3 和個數 5 的數序，所畫圖形旋轉 90 度之後，就能變成相同圖案。所以是一個具有 4 階（90 度、180 度、270 度）旋轉對稱性的圖形，也是點對稱圖形。我們可以進一步歸納出來：個數為奇數的數序，都是具有 4 階旋轉對稱性的圖形。對稱中心在 4 個起點之間的中心位置，也在第 1 個起點和第 3 個起點連線的中點、第 2 個起點和第 4 個起點連線的中點。

結論 2-2-1：能回到原點的圖形，都是點對稱圖形。

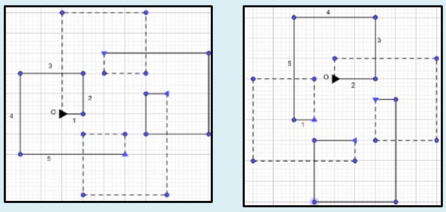
結論 2-2-2：個數為偶數但非 4 的倍數的數序，對稱中心在 2 個起點連線的中點。

結論 2-2-3：個數為奇數的數序，除了是點對稱圖形，也是具有 4 階旋轉對稱性的圖形。對稱中心在 4 個起點之間的中心位置，也在第 1 個起點和第 3 個起點連線的中點、第 2 個起點和第 4 個起點連線的中點。

(2)改變數字排列：從表 1，以及觀察個數 4 和個數 5 改變數序數字順序時所畫的圖形，可以發現到：

①數字前後關係不變：起點不同、但圖形相同。如果數字前後排列關係不變，只是改變數序的起始數字，畫出的圖案，經過旋轉（或不用旋轉）之後，圖形會相同，只是起點不同而已。個數 3 的數序，如：NS:1-2-2、NS:2-2-1、NS:2-1-2，和個數 5 的數序，（如圖 6 所示），僅變換起始數字，圖形看起來都一樣，只是起點不一樣。而個數 4 的數序，如：NS:1-1-2-2、NS:2-2-1-1，經過旋轉 180 度之後，便會變成僅有差 2 條線段、起點不同的相同圖案。

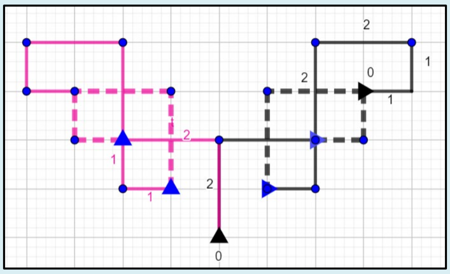
NS:1-2-3-4-5　　NS: 2-3-4-5-1



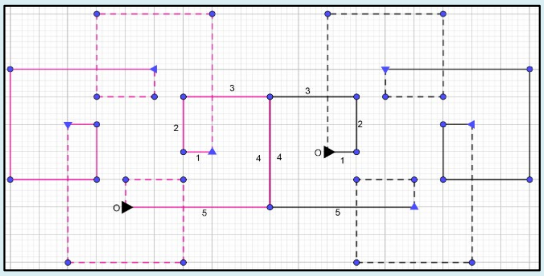
(圖 6)改變起始數字比較圖

②數字排列前後相反：兩組數序如果順序前後完全相反，畫的圖形會互為線對稱圖形。

NS:1-1-2-2　　NS: 2-2-1-1



NS: 5-4-3-2-1　　NS:1-2-3-4-5



(圖 7)數字排列順序相反的圖形對照圖

分析：不論個數是多少的數序，只要構成數序的數字不變、每個數字兩端與之相接的數字關係不變，就算改變數序的起始數字，或是將數字排列順序顛倒過來，畫出來的圖案都會一樣，或是畫出反向（翻轉背面會相同）的圖形，只是起點位置不同而已。因為改變數序的起始位置或整組數序的先後順序，各線段彼此之間的連接關係（相交角度與長度）依然會相同，所以仍會畫出相同的圖案。

結論 2-3-1：如果數字前後排列關係不變，只是改變數序的起始數字，畫出的圖案，經過旋轉（或不用旋轉）之後，圖形會相同，只是起點不同而已。

結論 2-3-2：兩組數序如果順序前後完全相反，畫的圖形會互為線對稱圖形。

研究三、分析圖形座標變化，找出與圖形共通性質有關的關係式。

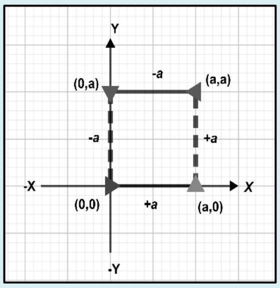
(一)研究過程

1. 用代數組成不同個數的數序，標示圖形各點座標，觀察各點座標值與數字的關係，看看能否發現有什麼規律性。
2. 分析各線段 x 軸和 y 軸的線段長度和方向的變化情形。
3. 分析各循環 x 軸和 y 軸的累積位移長度。
4. 找出圖形與座標相關的共通性質，並列出關係式。

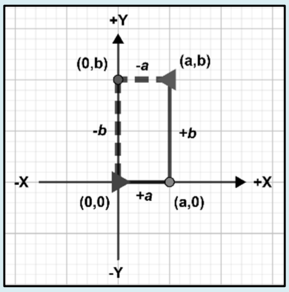
(二)研究結果

1.圖形各點座標

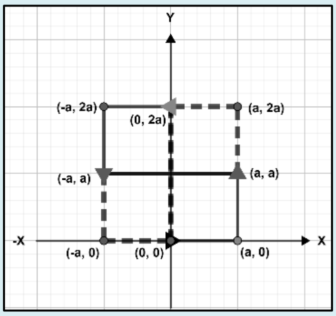
(1)個數 1　NS:a



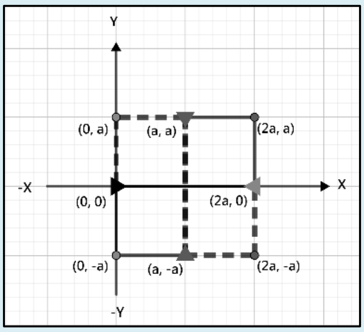
(2)個數 2　NS:a-b



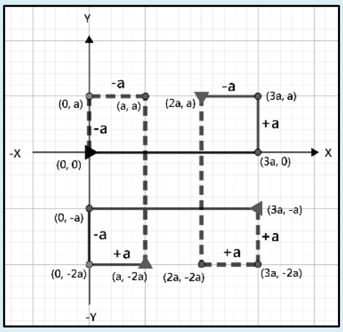
(3)個數 3　NS:a-a-2a



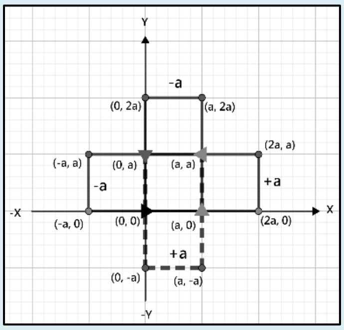
NS:2a-a-a



NS:3a-a-a



NS:2a-a-2a



2.各線段長度與方向分析表

(1)數序個數為 1（NS:a）

循環次數	1	2	3	4
線段長度	a	a	a	a
線段方向	+x	+y	-x	-y

(2)數序個數為 2（NS:a-b）

循環次數	1		2	
線段長度	a	b	a	b
線段方向	+x	+y	-x	-y

(3)個數 3 的數序 (NS:a-b-c)

循環次數	1			2			3			4		
線段長度	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
線段方向	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y

(4)個數 4 的數序 (NS:a-b-c-d)

循環次數	1				2				3			
線段長度	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
線段方向	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y

(5)數序個數為 5（NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5）

循環次數	1					2					3					4				
線段長度	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
線段方向	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y

(6)數序個數為 6（NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5-a_6）

循環次數	1						2					
線段長度	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
線段方向	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y

(三)發現與討論

1.起點方向的變化

(1)第一次循環：不論個數為何，第一次循環都是向+x 軸出發。

(2)起點方向的變化次數，分成下列幾種情形：

①改變 2 次方向的數序：當數序的個數為偶數，且非 4 的倍數，起點方向只會在+x 軸和-x 的方向輪流變換。

分析：個數 2 和個數 6 的數序共通性，個數都是為非 4 的倍數的偶數，因為一次循環會旋轉 90 度×數序個數，會比 360 度多轉 180 度。所以下一次循環時，起點方向要比原本方向多轉 180 度，而朝向相反方向。2 次循環結束，再進行下一次循環時，就會和一開始的方向相同了。所以個數是偶數但非 4 的倍數的數序，各次循環的起點方向，都是會改變 2 次，分別朝向最初的起點方向，和相反方向。

②改變 4 次方向的數序：個數 3 和個數 5，它們的共通性是均為奇數。

分析：因為一次循環會旋轉 90 度×數序個數，會比 360 度多轉 90 度，或是多旋轉 270 度（等於比 360 度少轉 90 度），4 次循環結束，再進行下一次循環時，和 360 度就相差了 90×4＝360 度，又會和一開始的方向相同了。而這 4 次循環的起點，都會朝向不同方向。例如：個數 3 的 4 次循環，起點依序朝向+x、-y、-x、+y，而個數 5 的 4 次起點方向，則是+x、+y、-x、-y。所以個數為奇數的數序，各次循環的起點方向，都會朝向 4 個不同方向。

③不改變方向的數序：數序個數為 4 的倍數時，一次循環結束，再進行下一次循環時，共旋轉 90 度×數序個數 4 的倍數，等於旋轉 360 度的整數倍。所以，第二次循環還是會和一開始相同的方向。

結論 3-1-1：不論個數為何，第一次循環都是向+x 軸方向出發。

結論 3-1-2：起點方向的變化次數，分成下列幾種情形：

(1) 改變 2 次方向：當數序的個數為偶數，且非 4 的倍數，起點方向只會在+x 軸和-x 的方向輪流變換。

(2) 改變 4 次方向：當數序個數為奇數，各次循環的起點會朝向 4 個不同方向。

(3) 不改變方向的數序：數序個數為 4 的倍數時，起點都朝向同一個方向。

2.各次循環終點位置的座標值變化

(1)個數 1（NS:a）：

第一次循環到第四次循環結束回到終點時，X 軸、Y 軸位置的偏移數值，分別是：

- X 軸的變化情形＝第一次循環（a）＋第二次循環（0）＋第三次循環（－a）＋第四次循環（0）＝0
- Y 軸的變化情形也是加減數序中的數字＝第一次循環（0）＋第二次循環（a）＋第三次循環（0）＋第四次循環（－a）= 0。

仔細觀察算式，可以發現到：X 軸和 Y 軸的位置偏移值，都是加減數序中的數字，只是數字出現在第幾次循環，以及正負值不同而已。不管是 X 軸或 Y 軸，前一半（前 2 次循環）的計算值，和後一半（前 2 次循環）的數值（代數符號）相同，但正負值相反、剛好抵銷。所以 4 次循環剛可以回到原點。

(2)個數 2（NS:a-b）：

第 1 次循環到第二次循環回到終點時，X 軸、Y 軸位置的偏移數值，分別是：

- X 軸的變化情形＝第一次循環（a－b）＋第二次循環（b－a）= 0
- Ｙ軸的變化也是加減數序中的數字＝第一次循環（b－a）＋第二次循環（a－b）= 0。

仔細觀察算式，可以發現到：X 軸和 Y 軸的位置偏移值，都是加減數序中的全部數字，只是數字出現在第幾次循環，以及正負值不同而已。不管是 X 軸或 Y 軸，前一半（前 2 次循環）的計算值，和後一半（前 2 次循環）的數值（代數符號）相同，但正負值相反、剛好抵銷。所以 2 次循環剛可以回到原點。

(3)個數 3（NS:a-b-c）：

第 1 次循環到第四次循環回到終點時，X 軸、Y 軸位置的偏移數值，分別是：

- X 軸的變化情形＝第一次循環（a-c）＋第二次循環（b）＋第三次循環（-a+c）＋第四次循環（-b）＝0
- Ｙ軸的變化情形也是加減數序中的數字＝第一次循環（b）＋第二次循環（-a+c）＋第三次循環（-b）＋第四次循環（a-c）= 0

仔細觀察算式，可以發現到：X 軸和 Y 軸的位置偏移值，都是加減數序中的全部數字，只是數字出現在第幾次循環，以及正負值不同而已。不管是 X 軸或 Y 軸，前一半（前 2 次循環）的計算值，和後一半（前 2 次循環）的數值（代數符號）相同，但正負值相反、剛好抵銷。所以 4 次循環剛可以回到原點。

(4)個數 4（NS:a-b-c-d）：

第 1 次循環之後，會回到原來的出發方向，X 軸、Y 軸位置的偏移數值，分別是：

- X 軸的變化情形＝第一次循環（a-c），後面第 2、3、4 次循環，因為數序皆與第一次循環一樣，所以 X 座標累積偏移值＝（a-c）×循環幾次
- Ｙ軸的變化情形＝第一次循環（b-d）；同理，Y 軸的累積偏移值＝（b-d）×循環幾次

仔細觀察算式，可以發現到：X 軸的位置偏移值，只有加減數序中第 1 和 3 個數字，而 Y 軸的位置偏移值，只有加減數序中的第 2 和 4 個數字。不管是 X 軸或 Y 軸，只有當 4 個數都一樣，或是第 1 和 3 個數字相同、且第 2 和 4 個數字相同時，才能一次循環就回到原點。其他時候因為 X 軸或 Y 軸的位置偏移值無法完全抵銷，所以永遠也無法回到原點。

(5)個數 5（NS:a-b-c-d-e）：

第一次循環到第四次循環回到終點時，X 軸、Y 軸位置的偏移數值，分別是：

- X 軸的變化情形＝第一次循環(a-c+e)＋第二次循環(-b+d)＋第三次循環(-a+c-e)＋第四次循環（b-d）＝0
- Ｙ軸的變化情形也是加減數序中的數字＝第一次循環(b-d)＋第二次循環(a-c+e)＋第三次循環（-b+d）＋第四次循環（-a+c-e）= 0

仔細觀察算式，可以發現到：X 軸和 Y 軸的位置偏移值，都是加減數序中的全部數字，只是數字出現在第幾次循環，以及正負值不同而已。不管是 X 軸或 Y 軸，前一半（前 2 次循環）的計算值，和後一半（前 2 次循環）的數值（代數符號）相同，但正負值相反、剛好抵銷。所以 4 次循環剛可以回到原點。

(6)個數 6（NS:a-b-c-d-e-f）：

第一次循環到第二次循環回到終點時，X 軸、Y 軸位置的偏移數值，分別是：

- X 軸的變化情形＝第一次循環（a-c+e）＋第二次循環（-a+c-e）＝0，經過兩次循環就會互相抵消。
- Y 軸的變化情形＝第一次循環（b-d+f）＋第二次循環（-b+d-f）= 0，經過兩次循環就會互相抵消。

仔細觀察算式，可以發現到：X 軸的位置偏移值，只有加減數序中的奇數位數字，而 Y 軸的位置偏移值只有加減數序中的偶數位數字。不過各座標軸所要加減的數字，依據出現在不同次的循環，正負值會反。不管是 X 軸或 Y 軸，前一半（第 1 次）循環的計算值，和後一半（第 2 次）循環的數值（代數符號）相同，但正負值相反、剛好抵銷。所以 2 次循環剛可以回到原點。

結論 3-2-1：能回到原點的數序，不管是 X 軸或 Y 軸位置的偏移數值，前一半循環的座標偏移數值，和後一半循環的座標偏移數值相同，但正負相反、剛好抵銷。

結論 3-2-2：個數 4 的數序，只有當 4 個數都一樣，或是第 1 和 3 個數字相同、且第 2 和 4 個數字相同時，才能一次循環就回到原點。其他時候，因為 X 軸或 Y 軸的位置偏移值無法完全抵銷，而無法回到原點。

3. 起點方向改變次數與循環次數的關係

從上面 2 點的發現，可以總結：可以回到原點的數序，X 軸、Y 軸偏移值剛好可以回到原點的次數，和起點方向的改變次數相同。我們可以得到下面的結論：

結論 3-3-1：能回到原點的數序，循環次數＝起點方向的改變次數。

4. 圖形對稱中心的座標

依據結論 2-2-1：所有能回到原點的圖形，都是點對稱圖形。我們可以找到旋轉 180 度所需要的循環次數，以及畫完前面所說循環次數時的終點位置，將此一終點位置座標除以 2，就可以得到中心點位置的座標了。

計算不同數序對稱中心座標

1. 數序個數為 1（NS:a_1）：已知數序個數 1，4 次循環會回到原點。因此只要找到第二次循環的終點位置，座標為（a_1,a_1），再將此座標除以 2，可以得到對稱中心座標為（$\frac{a_1}{2}$ ，$\frac{a_1}{2}$）。
2. 數序個數為 2（NS:a_1-a_2）：已知數序個數 2，2 次循環回到原點。因此只要找到第一次循環的終點位置，座標為（a_1,a_2），再將此座標除以 2，可以得到對稱中心座標為（$\frac{a_1}{2}$ ，$\frac{a_2}{2}$）。
3. 數序個數為 3（NS:a_1-a_2-a_3）：已知數序個數 3，4 次循環回到原點。因此只要找到第二次循環的終點位置，座標為$(a_1 - a_3 + a_2，a_2 - a_1 + a_3)$，再將此座標除以 2，

可以得到對稱中心座標為（$\frac{a_1-a_3+a_2}{2}$ ，$\frac{a_2-a_1+a_3}{2}$）。

4. 數序個數為 4（NS:a_1-a_2-a_1-a_2）：已知數序個數 4，有可能無法回到原點。能循環 1 次就回到原點的條件，是 4 個數都一樣，或奇數為數字相同、且偶數為數字相同，故數序為：NS:a_1-a_2-a_1-a_2，才可一次循環回到原點。只要找到畫完一半數序數字的位置，也就是畫完第 2 個數的終點位置，座標為（a_1,a_2），再將此座標除以 2，可以得到對稱中心座標為（$\frac{a_1}{2}$ ，$\frac{a_2}{2}$）。

5. 數序個數為 5（NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5）：已知數序個數 5，4 次循環 4 次回到原點。因此只要找到第二次循環的終點位置，座標為（$a_1-a_3+a_5-a_2+a_4$,$a_2-a_4+a_1-a_3+a_5$），再將此座標除以 2，可以得到對稱中心座標為（$\frac{a_1-a_3+a_5-a_2+a_4}{2}$ ，$\frac{a_2-a_4+a_1-a_3+a_5}{2}$）。

6. 數序個數為 6（NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5-a_6）：從前面的討論，我們知道數序個數為 6 時循環 2 次回到原點。因此只要找到第二次循環的終點位置，座標為（$a_1-a_3+a_5$,$a_2-a_4+a_6$），再將此座標除以 2，可以得到對稱中心座標（$\frac{a_1-a_3+a_5}{2}$ ，$\frac{a_2-a_4+a_6}{2}$）。

結論 3-4-1：圖形對稱中心座標計算方法：找出旋轉 180 度以後的終點位置座標，再÷ 2 。

研究四、探討圖形的位移向量與相關性質

已知

根據圖形畫法說明：要依照數序的數字排列，依序畫出指定長度線段；一次循環結束，要接著下一次循環，每一次循環轉的角度也相同。所以畫完一次循環，下一次循環又會畫出來相同的圖形，只是圖形會旋轉某個角度。可以得知：

①每一次的循環，都是重複同樣的畫圖模式。
②畫完一次循環，旋轉了「數字個數×90 度」之後，下一次循環又會畫出來相同的圖形。
③下一次循環的起點，就是前一次循環的終點。
④每一次循環，起點到終點的移動距離和方向，變化差異都相同。只是從起點開始的畫圖方向會不同而已。
⑤每一次循環，起點方向改變次數，與循環次數相同。（依據結論 3-3-1）

猜想

不管每一次的循環中，到底畫了哪些線段，只要知道第一次循環起點（原點 O）到終點的位置差異，以及下一次循環的起點方向要旋轉多少角度，就可以利用「起點→終點」的位置差異，直接找到第二次循環的終點位置。重複利用「起點→終點的位置差異」和「下一次循環的起點方向要旋轉多少角度」，就可以找到回到終點所需要的「循環次數」了。

定義

因為第一次循環的起點是原點，所以第一次循環的位移向量又稱為「位置向量」，等於終點位置的座標值，我們用 (N, M) 來表示終點座標。

令「位置向量」為$\overrightarrow{(N,M)}$，

令$\xrightarrow[(N,\ M)]{}{}^{90^\circ}$為位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$經過旋轉 90 度後的結果（新位移向量）。

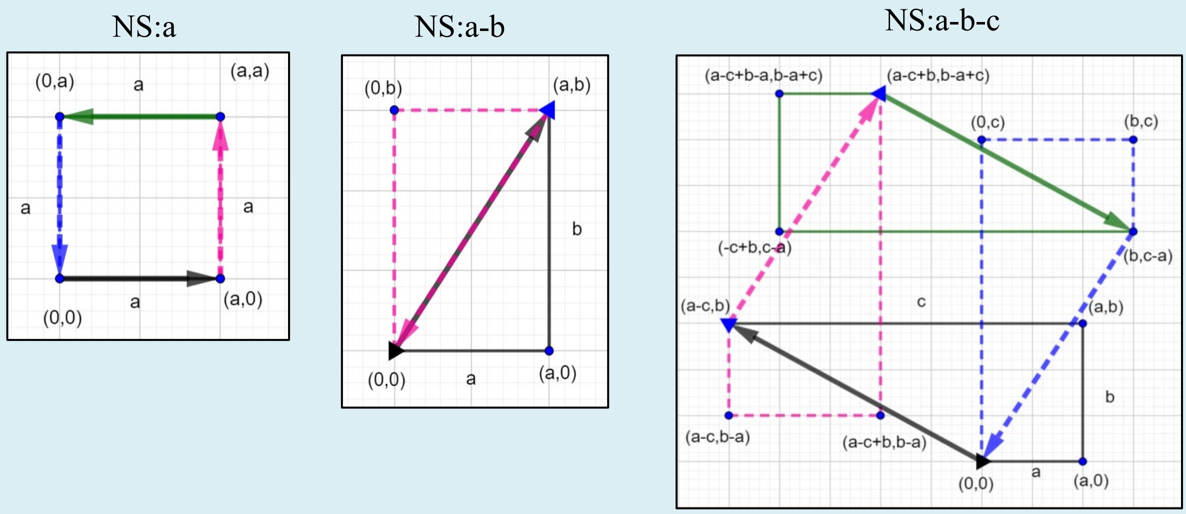
研究四-1：確認每一次循環的位移向量是否都相同

(一)研究方法

1. 我們試著把數序的數字換成代數，找出每一次循環結束時的終點座標，計算出畫完各次循環所產生的「位移向量」，也就是起點到終點的 X 軸和 Y 軸的座標變化值。
2. 確認各次循環的位移向量是否相同。

(二)研究圖表

1.個數 1～個數 3 各次循環的起點座標（如圖 8 所示），以及個數 3 的座標變化值（見表 2）。



(圖 8)個數 1～個數 3 的各點座標和座標變化值

(表 2)個數 3 各次循環的起點和終點座標與變化值

數序個數	3							
起始方向差異	逆時針旋轉 270 度							
循環次數	第一次		第二次		第三次		第四次	
座標軸	X 軸	Y 軸	X 軸	Y 軸	X 軸	Y 軸	X 軸	Y 軸
終點位置座標值	a-c	b	a-c+b	b-a+c	b	c-a	0	0
終點座標換代號	N_1＝a-c	M_1＝b	N_1+M_1	M_1-N_1	M_1	$-N_1$	0	0
起點位置座標值	0	0	a-c	b	a-c+b	b-a+c	b	c-a
起點座標換代號	0	0	N_1	M_1	N_1+M_1	M_1-N_1	M_1	$-N_1$
位移向量(N, M)	N_1	M_1	M_1	$-N_1$	$-N_1$	-M_1	$-M_1$	N_1
$\xrightarrow[(N,\ M)]{}{}^{270^\circ}$	M	$-N$	M	$-N$	M	-N	M	$-N$

備註：因為前一次循環的終點，是下一次循環的起點，故相同顏色區塊表示是同一個點。

(三)研究發現

1. 各次循環產生的位移向量，都是「位置向量」值 N_1、M_1 改變正負值後的不同組合。
2. 將每次的向量位移，都用$\overrightarrow{(N,M)}$來表示的話，可以發現：不管原本的向量位移值是如何，經過逆時針旋轉 270 度，都會變成$\overrightarrow{(M,\ -N)}$。我們將之寫成$\overrightarrow{(N,\ M)}^{270^\circ}=\overrightarrow{(M,\ -N)}$。

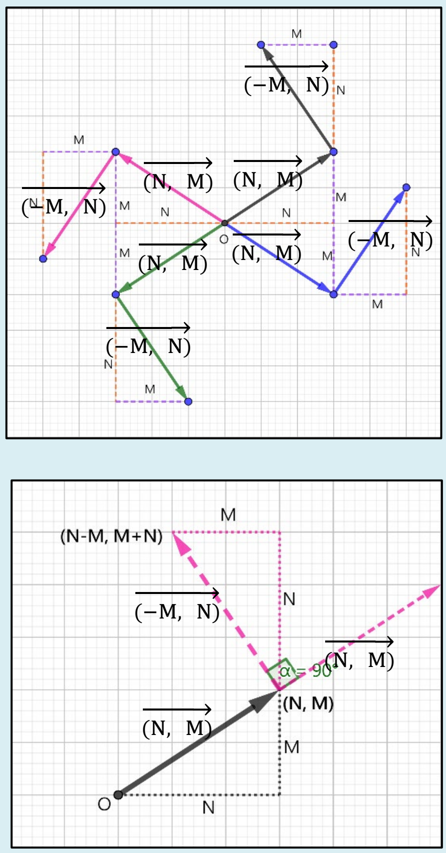
結論 4-1-1：各次循環產生的位移向量，都是「位置向量（記做$\overrightarrow{(N,M)}$）」的值 N_1、M_1，改變正負值後的不同組合。

研究四-2：探究位移向量經不同角度的旋轉變換結果

(一)研究方法

1. 將位移向量旋轉 90 度、180 度、270 度，找出不同旋轉變換角度，會得到怎樣的位移向量。
2. 用同樣的角度，重複做旋轉變換，觀察幾次循環之後，終點位置剛好會回到原點。

(二)研究結果



(圖 9)位置向量與位移向量變化圖

1. 求$\overrightarrow{(N,\ M)}^{90^\circ}$，及相關性質

若位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$不在第一象限，觀察圖 9 上，在四個象限中，位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$旋轉 90 度後的變化值都會一樣。因為同一個顏色的位移向量，起始的 X 軸的座標變化值 N，經過旋轉 90 度之後，都會和下一個位移向量的 Y 軸的變化值相同、但正負相反；起始的 Y 軸的座標變化值 N，經過旋轉 90 度之後，都會和下一個位移向量的 Y 軸的變化值相同、正負相同。故以下均以第一象限的變化為代表來做討論。

(1) 如圖 9 下所示，位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$旋轉 90 度之後，X 軸的座標變化值是-M，Y 軸的座標變化值是+N。

所以$\overrightarrow{(N,\ M)}^{90^\circ}=\overrightarrow{(-M,N)}$。

(2)利用$\overrightarrow{(N,\ M)}^{90^\circ}=\overrightarrow{(-M,N)}$來找出下一次循環的位移向量：

第三次循環的位移向量：$\xrightarrow[(-M,\ N)]{}^{90^\circ}=\overrightarrow{(-N,-M)}$

第四次循環的位移向量為：$\xrightarrow[(-N,-M)]{}^{90^\circ}=\overrightarrow{(M,-N)}$

第五次循環的位移向量為：$\xrightarrow[(-M,\ N)]{}^{90^\circ}=\overrightarrow{(N,M)}$，又回到和第一次循環相同的位移向量。

所以只要得知第一次循環的位置向量$\overrightarrow{(N,M)}$，可以利用$\xrightarrow[(N,\ M)]{}^{90^\circ}=\overrightarrow{(-M,N)}$，來求出各次循環的位移向量。

(3)下一次循環的終點位置計算方法為：

$(N,M)+\xrightarrow[(N,\ M)]{}^{90^\circ}=(N,M)+\overrightarrow{(-M,N)}=(N-M,M+N)$，代表第二次循環結束時，終點所在位置座標為$(N-M,M+N)$。

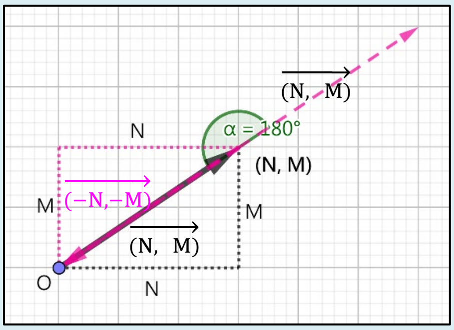
我們還可以繼續計算出後續循環結束時的終點位置，分別為：

第三次循環：$(N-M,M+N)+\xrightarrow[(-M,N)]{}^{90^\circ}=(N-M,M+N)+\overrightarrow{(-N,-M)}=(-M,N)$

第四次循環：$(-M,N)+\xrightarrow[(-N,-M)]{}^{90^\circ}=(-M,N)+\overrightarrow{(M,-N)}=(0,0)$，剛好回到原點。

2. 求$\xrightarrow[(N,\ M)]{}^{180^\circ}$，及相關性質

(1)如圖 10 所示，位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$旋轉 180 度之後， X 軸的座標變化值是-N，Y 軸的座標變化值是-M。所以$\xrightarrow[(N,\ M)]{}^{180^\circ}=\overrightarrow{(-N,-M)}$。



(圖 10)位置向量旋轉 180 度變換圖

(2)利用$\xrightarrow[(N,\ M)]{}^{180^\circ}=\overrightarrow{(-N,-M)}$找出下一次循環的位移向量：

第三次循環的位移向量：$\xrightarrow[(-N,-M)]{}^{180^\circ}=\overrightarrow{(N,M)}$，又回到和第一次循環相同的位移向量。

所以只到得知第一次循環的位置向量$\overrightarrow{(N,M)}$，就可以利用$\xrightarrow[(N,M)]{}^{180^\circ}=\overrightarrow{(-N,-M)}$，來求出各次循環的位移向量。

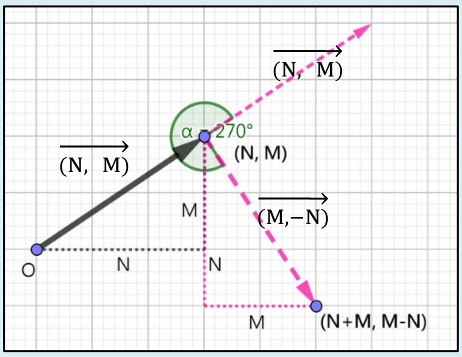
(3)下一次循環的終點位置計算方法為：

$(N,M)+\xrightarrow[(N,\ M)]{}^{180^\circ}=(N,M)+\overrightarrow{(-N,-M)}$

$=(N-N,M-M)=(0,0)$，剛好回到原點。

3.求$\xrightarrow[(N,\ M)]{}^{270^\circ}$，及相關性質

(1)如圖 11 所示，位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$旋轉 270 度之後， X



(圖 11)位置向量旋轉 270 度變換圖

軸的座標變化值是+M，Y 軸的座標變化值是－N。

所以$\underset{(\mathrm{N},\ \mathrm{M})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = \overrightarrow{(M,-N)}$。

(2)利用$\underset{(\mathrm{N},\ \mathrm{M})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = \overrightarrow{(M,-N)}$找出下一次循環的位移向量：

第三次循環的位移向量：$\underset{(\mathrm{M},-\mathrm{N})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = \overrightarrow{(-N,-M)}$

第四次循環的位移向量：$\underset{(-\mathrm{N},-\mathrm{M})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = \overrightarrow{(-M,+N)}$

第五次循環的位移向量為：$\underset{(-\mathrm{M},\mathrm{N})}{\longrightarrow}^{90^\circ} = \overrightarrow{(N,M)}$，又回到和第一次循環相同的位移向量。

所以只到得知第一次循環的位置向量$\overrightarrow{(N,M)}$，就可以利用$\underset{(\mathrm{N},\mathrm{M})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = \overrightarrow{(M,-N)}$，來求出各次循環的位移向量。

(3)下一次循環的結束位置計算方法為：

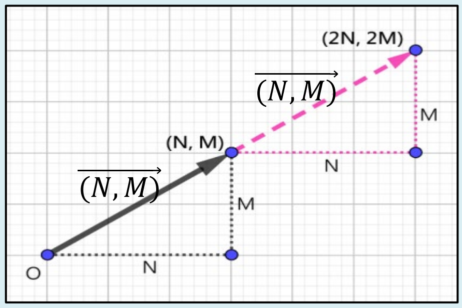
$$(\mathrm{N},\mathrm{M}) + \underset{(\mathrm{N},\ \mathrm{M})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = (\mathrm{N},\mathrm{M}) + \overrightarrow{(M,-N)} = (\mathrm{N}+\mathrm{M},\mathrm{M}-\mathrm{N})$$

我們還可以繼續計算出後續循環的終點位置，分別為：

第三次循環：$(\mathrm{N}+\mathrm{M},\mathrm{M}-\mathrm{N}) + \underset{(+\mathrm{M},-\mathrm{N})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = (\mathrm{N}+\mathrm{M},\mathrm{M}-\mathrm{N}) + \overrightarrow{(-N,-M)} = (\mathrm{M},-\mathrm{N})$

第四次循環：$(\mathrm{M},-\mathrm{N}) + \underset{(-\mathrm{N},-\mathrm{M})}{\longrightarrow}^{270^\circ} = (\mathrm{M},-\mathrm{N}) + \overrightarrow{(-M,+N)} = (0,0)$，剛好回到原點。

4.求$\underset{(\mathrm{N},\ \mathrm{M})}{\longrightarrow}^{0^\circ}$，及相關性質



(圖 12 位置向量旋轉 0 度變換圖

(1)如圖 12 所示，位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$旋轉 0 度之後， X 軸的座標變化值是+N，Y 軸的座標變化值是+M。所以$\underset{(\mathrm{N},\ \mathrm{M})}{\longrightarrow}^{0^\circ} = \overrightarrow{(N,M)}$。所以下一次循環的位移向量還是相同。

(2)下一次循環的終點位置計算方法為：

$$(N,M) + \underset{(\mathrm{N},\mathrm{M})}{\longrightarrow}^{0^\circ} = (N,M) + \overrightarrow{(N,M)} = (2N,2M)$$

我們還可以繼續計算出後續循環的終點位置，分別為：

第三次循環：$(N+N,M+M) + \underset{(\mathrm{N},\mathrm{M})}{\longrightarrow}^{0^\circ} = (N+N,M+M) + \overrightarrow{(N,M)} = (3N,3M)$

第四次循環：$(3N,3M) + \underset{(\mathrm{N},\mathrm{M})}{\longrightarrow}^{0^\circ} = (3N,3M) + \overrightarrow{(N,M)} = (4N,4M)$

只有當$N=0$且$M=0$時，第一次循環的終點位置為(0,0)，一次循環就可以回到原點。其他情形下，只要 N 或 M 其中之一≠0，就永遠無法回到原點。

結論 4-2-1：利用第一次循環的位置向量，加上不同角度的旋轉變換，可以計算得出下列各種數值：

(1) 各次循環的位移向量

(2) 各次循環的終點位置座標

(3) 找出能否回到原點，和回到原點的循環次數

研究四-3：從位移向量與旋轉變換角度，求證數序的循環次數。

猜想

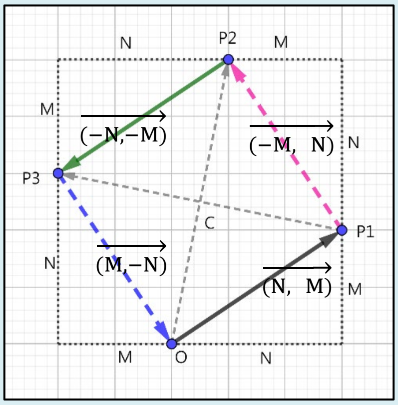
1. 將數序個數除以 4，從餘數得知每兩次循環之間要多旋轉幾次 90 度（餘數×90 度），找出起始方向差異的旋轉角度。
2. 利用「位移向量」與「旋轉角度」，證明經過幾次循環必能回到原點，或是無法回到原點。

證明

(1)個數除以 4 餘 1 的數序：經過 4 次循環、累加 4 次位移向量（經過 90 度的旋轉變換 3 次），便可回到原點。每畫完一次循環，會比 360 度又多旋轉 90 度。

I. （對照圖 13）在進行下一次循環之前，都要先經過「逆時針旋轉 90 度」的旋轉變換。

II. 每一次循環的位移向量，其長度都是相同的，每次旋轉 90 度，經過 4 次循環後，就會剛好回到原點，形成一個封閉的正方形。所以數序個數為 4 的倍數餘 1 時，循環次數為 4 次。



(圖 13)位移向量旋轉 90 度變化圖

(2)個數除以 4 餘 2 的數序：經過 2 次循環、累加 2 次位移向量（經過 180 度的旋轉變換 1 次），便可回到原點。

I. 每畫完一次循環，會比 360 度又多旋轉 180 度。

II. （見圖 10）在進行下一次循環之前，都要先經過「逆時針旋轉 180 度」的旋轉變換。

III. 每一次循環的位移向量，其長度相同，但方向相反，每次旋轉 180 度，經過 2 次循環後，就會剛好回到原點，形成兩條重疊在一起、但方向相反的向量。所以數序個數為 4 的倍數餘 2 時，循環次數為 2 次。

(3)個數除以 4 餘 3 的數序：經過 4 次循環、累加 4 次位移向量（經過 270 度的旋轉變換 3 次），便可回到原點。

I. 每畫完一次循環，會比 360 度又多旋轉 270 度（等於順時針旋轉 90 度）。

II. 在進行下一次循環之前，都要先經過「順時針旋轉 90 度」的旋轉變換，如同將圖 13 的粉紅色、綠色、藍色箭頭方向都顛倒過來。

III. 每一次循環的位移向量，其長度都是相同的，每次旋轉 90 度，經過 4 次循環後，就

會剛好回到原點，形成一個封閉的正方形。所以數序個數為 4 的倍數餘 3 時，循環次數為 4 次。

(4)個數為 4 的整數倍的數序：

I. 因為$\xrightarrow[(N,\ M)]{}{}^{0^\circ} = \overrightarrow{(N,M)}$。前面在求$\xrightarrow[(N,\ M)]{}{}^{0^\circ}$的下一次終點位置時，已經討論過，當$N = 0$且$M = 0$時，第一次循環的終點位置＝原點(0, 0)＋$\overrightarrow{(N,M)}$＝(0,0)，因此，一次循環就可以回到原點。

II. 其他情形下，只要 N 或 M 其中之一≠0，經過 K 次循環，終點座標等於(N×K,M×K)，所以就永遠無法回到原點。

結論 4-3-1：利用第一次循環的位置向量$\overrightarrow{(N,\ M)}$，加上不同角度的旋轉變換，可以證明循環次數：

(1) 個數除以 4 餘 1 或餘 3 的數序：位置向量做逆時針旋轉 90 度或 270 度（等於順時針旋轉 90 度）的旋轉變換，經 4 次循環必能回到原點。

(2) 個數除以 4 餘 2 的數序：位置向量做 180 度旋轉變換，經 2 次循環必能回到原點。

(3) 個數為 4 整數倍的數序：只有當$N = 0$且$M = 0$時，一次循環必能回到原點。否則無法回到原點。

研究四-4：從位移向量與旋轉變換，來尋找對稱中心。

猜想

從位移向量可以看出每次循環起始位置與終點的距離和方向。因此當圖形可以返回原點畫完時，位移向量會圍出一個封閉圖形，或會形成一條直線，也就是說：圖形會繞著旋轉 180 度後所產生位移向量的中心點旋轉，此中心點就是圖形的對稱中心。

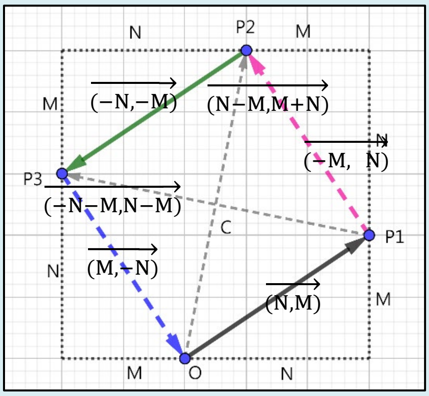
(一)研究方法

點對稱圖形是旋轉 180 度以後會相同，找出旋轉 180 度的位移向量，此長度的一半，就是旋轉的中心點，也就是對稱中心座標。

(二)研究結果

1.個數除以 4 餘 1 的數序

(1) 從圖 14 可以看出，四個顏色表示四次循環，剛好可以連成一個正方形，而從 O 到 P2 的位移向量，以



(圖 14) 旋轉 90 度對稱中心關係圖

及 P1 到 P3 的位移向量，會形成一個交叉點，交叉點的位置(C 點)，剛好為圖形的對稱中心，同時也是兩個位移向量的中心點。

(2) 因此我們可以利用 O 到 P2 的位移向量÷2，來找出對稱中心。

(3) 旋轉對稱中心的計算方法為：位置向量＋旋轉 90 度後的位移向量，再除以 2＝

$\overrightarrow{(N,M)}+\overrightarrow{(-M,N)}\div\mathbf{2}$，得出：對稱中心的座標＝$(\frac{\boldsymbol{N-M}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{M+N}}{\mathbf{2}})$。

2.個數除以 4 餘 2 的數序

(1) 從圖 12 可以看出，兩次位移向量，大小相等，但方向相反，因此 O 到 P1 的中心(C 點)為旋轉中心。

(2) 因此我們可以利用 O 到 P1 的位移向量（也就是位置向量）÷2，來找出對稱中心。

(3) 旋轉對稱中心的計算方法為：位置向量除以 2＝$\overrightarrow{(N,M)}\div 2$，得出對稱中心的座標＝

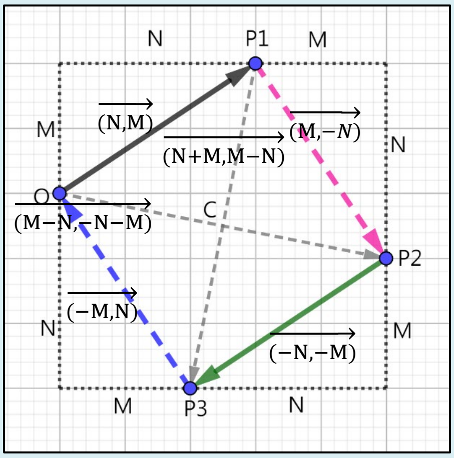
$(\frac{N}{2},\frac{M}{2})$。

3. 個數除以 4 餘 3 的數序

(1) 從圖 15 可以看出，四個顏色表示四次循環，剛好可以連成一個正方形，而從 O 到 P2 的位移向量，以及 P1 到 P3 的位移向量，會形成一個交叉點，交叉點的位置(C 點)，剛好為圖形的對稱中心，同時也是兩個位移向量的中心點。

(2) 因此我們可以利用 O 到 P2 的位移向量÷2，來找出對稱中心。

(3) 旋轉對稱中心的計算方法：位置向量+旋轉 90 度後的位移向量，除以 2=$\overrightarrow{(N,M)}+\overrightarrow{(M,-N)}\div 2$，得出對稱中心的座標＝$(\frac{M+N}{2},\frac{M+N}{2})$。

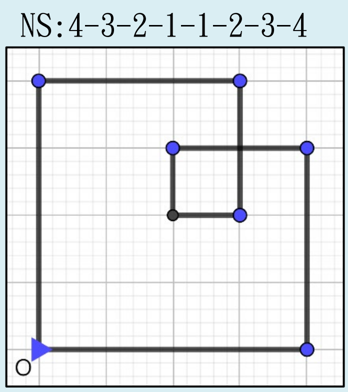


(圖 15)旋轉 270 度對稱中心關係圖

4.個數除以 4 餘 0 的數序

(1) 如果 M 或 N≠0，各次循環的圖形，會往同樣的方向移動，而離原點越來越遠，因此不會有對稱中心。

(2) 如果 N,M 均＝0，則一次循環並可回到原點。但是畫出的圖形，不一定就是點對稱圖形。如圖 18 所示，一個個數為 8 的數序，一次循環就回到原點而結束圖形，但是因為不是點對稱圖形，所以沒有對稱中心。就算是有對稱中心的圖形，因為 N,M 均＝0，無法得知圖形旋轉 180 度以後的中心位置，所以個數除以 4 餘 0 的數序，不能用位移向量來計算對稱中心位置。



(圖 16) NS: 4-3-2-1-1-2-3-4 的圖形

結論 4-4-1：利用第一次循環的位置向量$\overrightarrow{(N,M)}$，加上不同角度的旋轉變換，可推算對稱中心：

(1) 個數除以 4 餘 1 的數序，對稱中心的座標為$(\frac{N-M}{2},\frac{M+N}{2})$。

(2) 個數除以 4 餘 2 的數序，對稱中心的座標為$(\frac{N}{2},\frac{M}{2})$。

(3) 個數除以 4 餘 3 的數序，對稱中心的座標為$(\frac{M+N}{2},\frac{M+N}{2})$。

(4) 個數除以 4 餘 0 的數序，不一定是點對稱圖形，無法利用位置向量來推算圖形是否有對稱中心。

研究五：延伸應用－繪製互動遊戲

已知

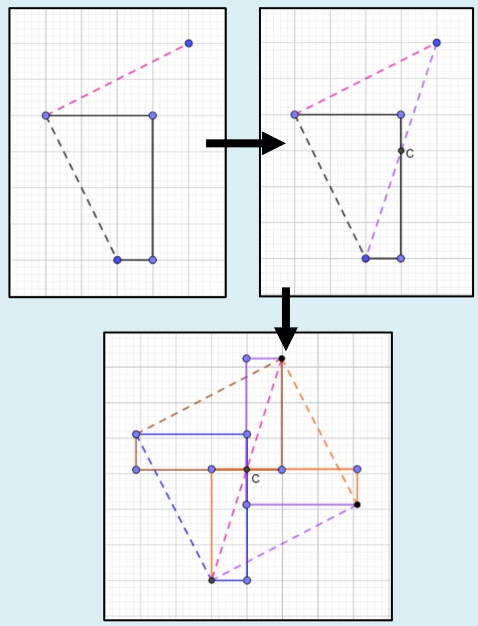
只要求出第一次循環的位移向量，就可以推算出後續循環的位移向量以及終點位置。

按照此研究發現，我們進一步試看看：是否可以利用 Geogebra 繪圖軟體，畫完第一次循環的圖形，將第一次圖形的各點，經過旋轉變換，就畫出其他次循環，最後畫出能回到原點的完整圖形。

試畫圖形

以個數 3 的數序為例，作圖程序如下（圖 17）：

1. 畫出第一次循環：依序畫出彼此互相垂直的三條垂直線。在第 3 條垂直線上取 1 個點，當作第一次循環的終點。
2. 畫出第一次循環的位置向量，再將位置向量旋轉（個數× 90°）後，找出第二次循環的位移向量（圖 17 上面兩圖的粉紅色虛線），以及第二次循環的終點位置。
3. 畫出原點到第二次循環終點的位移向量，求此位移向量的中心點，便是圖形的對稱中心（C 點）。
4. 以對稱中心為旋轉中心點，將第一次循環的各點做不同角度的旋轉（90 度、180 度和 270），就可以找出其他次循環的各點位置。
5. 依序將各點連線，就能畫完整個圖形。
6. 畫出來的完整圖形（見圖 17 下），只要拉動第一次循環的三個點，就可以讓圖形產生變化。



(圖 17)繪製可變花樣圖形的過程

應用

1. 觀察看看將線段長度變動（改變數字大小）之後，可以會變化出怎樣的圖形。

2. 挑戰看看：要如何改變第一次循環的線段長度（數序的數字大小），才能夠變化出各種指定組合的圖案，例如：X 字型、田字形、十字形、九宮格形⋯等。
3. 套用同樣的作圖方法，我們還可以畫出其他數序個數的圖形，只要改變第一次循環的線段長度，就能隨意變化圖形花樣。

看到我們的研究發現，最後能應用變成一個可以互動、讓圖形變花樣的互動畫圖遊戲，讓人可以隨意操作、觀察，更能體會到「數字翻筋斗」圖形變花樣的樂趣！

陸、結論

綜合我們的研究，得到下列的結論：

(一)不同個數的數序，會畫出來的圖形特徵如下：

1. 個數 1 的數序，經過 4 次循環之後，會回到原點，畫出一個邊長為數序數字的正方形。
2. 個數 2 的數序，經過 2 次循環之後，會回到原點，畫出一個邊長為數序序數字的正方形（兩數相同時）或長方形（兩數不同時）。
3. 個數≧3 的數序，畫完幾次循環，就會以最小數字為邊長，畫出至少與循環次數相同個數的矩形（正方形或長方形）。
   (1) 若最小數字連續出現兩次（含位於數序的前後兩端），則畫出邊長為最小數字的正方形。
   (2) 若最小數字前後連接與之不同的數字，則畫出長方形。長方形的寬為最小數字，長度則為與最小數字相連接的兩數中較小的數字。
   (3) 由最小數字所構成的矩形，彼此間會互相重疊、相鄰、或分開的情形，與構成數序的數字間彼此的大小差異有關。決定矩形彼此會分開、相鄰、或是重疊，主要的判斷依據是：不構成矩形的其他數字，＞、＝、或＜矩形的兩邊和。

(二)圖形能否回到原點：除了個數為 4 的倍數的數序有可能會無法回到原點之外，其他個數的數序，畫完 2 次或 4 次循環之後，都一定可以回到原點。

1. 能回到原點的數序，圖形起點朝向不同的方向數，就是循環次數。
2. 個數為奇數的數序，循環次數為 4。
3. 個數為偶數、且非 4 的倍數的數序，循環次數為 2。
4. 個數為 4 的數序，只有當奇數位相同、且偶數位相同時，才能經過 1 次循環回到原點。

(三)圖形所具有的對稱性質如下：

1. 所有能回到原點畫完的圖形，都是點對稱圖形。經過幾次循環能畫完，就是具有幾階的旋轉對稱性，且對稱中心會在幾個起點的正中心。
2. 數字順序相反的兩組數序，畫出來的圖形，互為線對稱圖形。
3. 數字排列先後連接的相對順序不變，只改變數序的起始數字，所畫出的圖形，除了起點位置不同之外，經過旋轉之後會得到相同的圖形。

(四)找出不同個數的數序，圖形對稱中心座標的計算方法：

1. 數序個數為 1：以 NS:a_1來代表，對稱中心的座標是（$\frac{a_1}{2}$ ，$\frac{a_1}{2}$）。
2. 數序個數為 2：以 NS:$a_1 - a_2$來代表，圖形對稱中心的座標是（$\frac{a_1}{2}$ ，$\frac{a_2}{2}$）。
3. 數序個數為 3：以 NS:$a_1 - a_2$-a_3來代表，圖形的對稱中心座標是（$\frac{a_1-a_3+a_2}{2}$ ，$\frac{a_2-a_1+a_3}{2}$）。
4. 數序個數為 4：如果 1 次循環就可以回到原點，以 NS:a_1-a_2-a_1-a_2來代表，則圖形的對稱中心座標是（$\frac{a_1}{2}$ ，$\frac{a_2}{2}$）。
5. 數序個數為 5：以 NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5來代表，圖形的對稱中心座標是($\frac{a_1-a_3+a_5-a_2+a_4}{2}$ ，$\frac{a_2-a_4+a_1-a_3+a_5}{2}$）。
6. 數序個數為 6：以 NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5-a_6來代表，圖形的對稱中心座標是（$\frac{a_1-a_3+a_5}{2}$ ，$\frac{a_2-a_4+a_6}{2}$）。

(六)位移向量的計算與應用：利用第一次循環起點到終點的位移向量$\overrightarrow{(N,M)}$，可推算出下列性質：

1.經過不同角度的旋轉變化，可以找出其他次循環的位移向量。

(1)每次循環會經過 90 度的旋轉變化：第二次循環的位移向量為$\overrightarrow{(-M,N)}$；第三次循環的位移向量為$\overrightarrow{(-N,-M)}$；第四次循環的位移向量為$\overrightarrow{(M,-N)}$；第五次循環的位移向量為$\overrightarrow{(N,M)}$，回到和第一次循環相同。

(2)每次循環會經過 180 度的旋轉變化：第二次循環的位移向量為$\overrightarrow{(-N,-M)}$；第三次循環的位移向量為$\overrightarrow{(N,M)}$，回到和第一次循環相同。

(3)每次循環會經過 270 度的旋轉變化：第二次循環的位移向量為$\overrightarrow{(M,-N)}$；第三次循環的位移向量為$\overrightarrow{(-N,-M)}$；第四次循環的位移向量為$\overrightarrow{(-M,+N)}$；第五次循環的位移向量為$\overrightarrow{(N,M)}$，回到和第一次循環相同。

(4)每次循環會經過 360 度整數倍的旋轉變化：每一次循環的位移向量都是$\overrightarrow{(N,M)}$。只有當$N = 0$且$M = 0$時，第一次循環的終點位置為(0,0)，一次循環就可以回到原點。其他情形下，只要 N 或 M 其中之一≠0，就永遠無法回到原點。

2.經過不同角度的旋轉變化，可以找出其他次循環的終點位置座標。

3.利用位移向量和旋轉變換角度，可以證明不同數序個數的循環次數，並算出對稱中心座標。

(七)繪製互動遊戲：

1.用 GeoGebra 作圖軟體，只要畫出第一次循環的圖形，找出位置向量，再經過旋轉變換、找出對稱中心、旋轉各點等作圖程序，就可以繪出一個完整的圖形。

2.改變第一次循環的各個線段長度，便可以變換出不同的圖形花樣，成為一個可以隨意改變數序組合來觀察圖形花樣變化的互動遊戲。

柒、參考資料

1.安娜·維特曼著、愛德華．謝佛頓、伊凡．希喜繪圖、畢馨云翻譯（2017）。原來數學這麼漂亮：30 種激發創意的手繪練習。台北市：小天下出版。

【評語】080409

從一個有趣的數字變圖形的小遊戲出發，基於理解遊戲背後所隱含的數學奧妙，展現了一段充滿趣味又兼具美麗的數學探索之旅。本作品嘗試找出圖形花樣與數字組合間的關聯性並歸納其共通性質。作者善用數學工具，藉由數序先將既有的圖形畫法對應到平面座標的幾何圖案，然後利用向量的座標、平移與旋轉變換解析圖案的類型，循序漸進地進行探究並獲致了一些結果。最後應用研究發現，設計一個可以互動，讓圖形變花樣的互動畫圖遊戲，進而提升了作品的應用價值。另外，團隊回應能力佳。整體而言，這是一件值得肯定的作品。

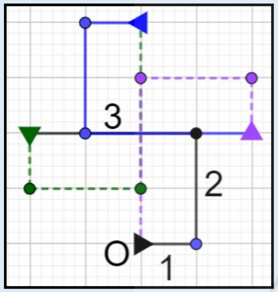
作品簡報

數字翻筋斗圖形花樣大解碼

組別：國小組

科別：數學科

研究主題與研究目的



NS:1-2-3畫法示例

1. 圖形特徵與數字組合的關係
2. 圖形共通性質
3. 位移向量、旋轉變換、循環次數、對稱中心座標

研究架構

圖形特徵

改變數序組合
1.個數 1
2.個數 2
3.個數 3
4.個數 4
5.個數 5

發現規律
1.基本形
2.循環次數
3.組合樣式

共通性質

分析座標
1.各點座標
2.各線段向量
3.坐標軸累積位移
4.改變數字排列
5.對稱性

列關係式
1.各循環累積位移
2.回到原點的條件
3.基本形離合程度
4.對稱中心座標

位移向量

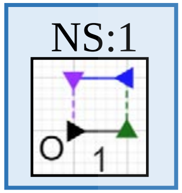
位移向量相關運算
1.第一次循環位置向量
2.不同角度旋轉變換
3.各次循環位移向量
4.各次循環終點位置

延伸應用
1.證明循環次數
2.繪製讓圖形變花樣的互動遊戲

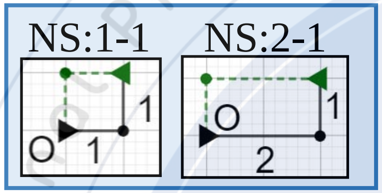
研究一、改變數序的個數或數字組合

1.不同個數

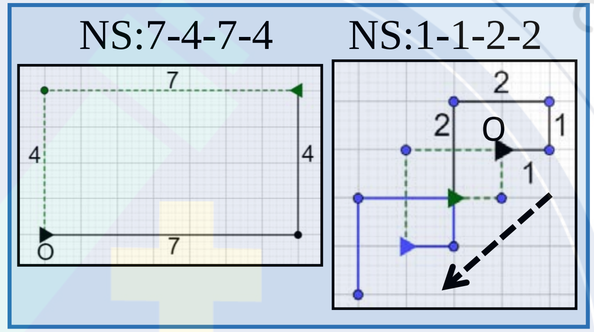
(1)個數1



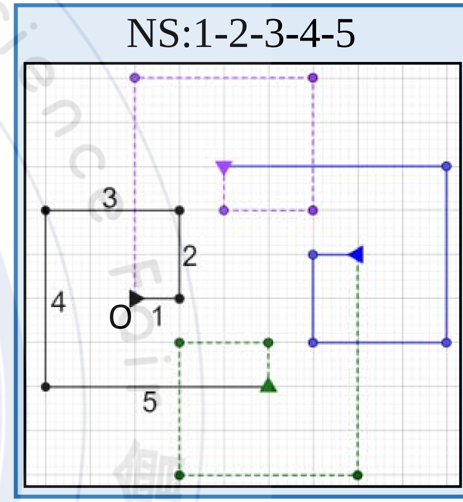
(2)個數2



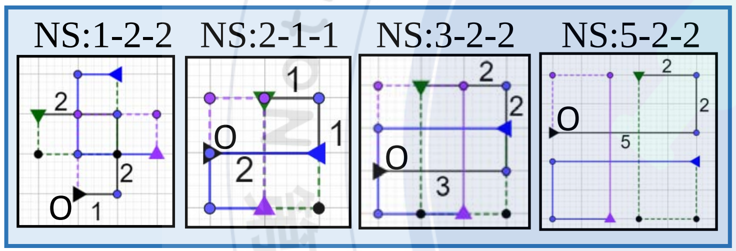
(4) 個數4



(5) 個數5：4片扇葉狀

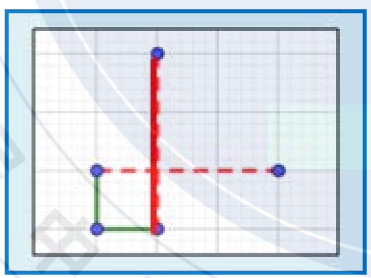


(3)個數3



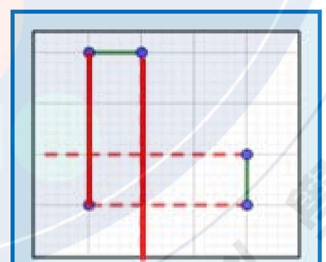
2. 基本形

(1) 連續2個相同數字



正方形(邊長＝數字)

(2)不同數字



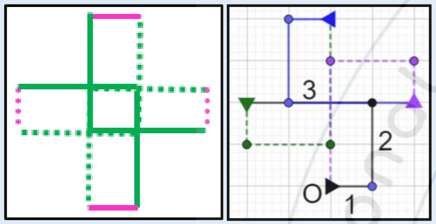
長方形(最小數字為一邊)

3. 循環次數計算方法：數序個數和4的最小公倍數÷個數

研究二、個數3以上的圖形組合樣式

1. 個數＝3

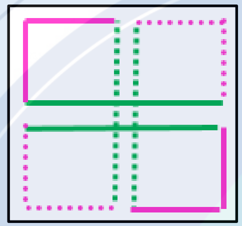
(1)最小數出現1次



十字形　飛鏢形

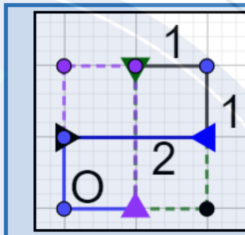
(2)最小數出現2次

①較大數＞較小數×2



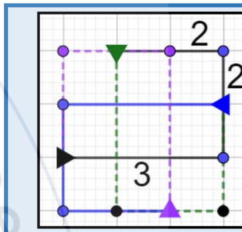
X字型

②較大數＝較小數×2



田字型

③較大數＜較小數×2



九宮格

2. 個數≥4：「不構成矩形的數字」vs.「最小數字及其相鄰數字」

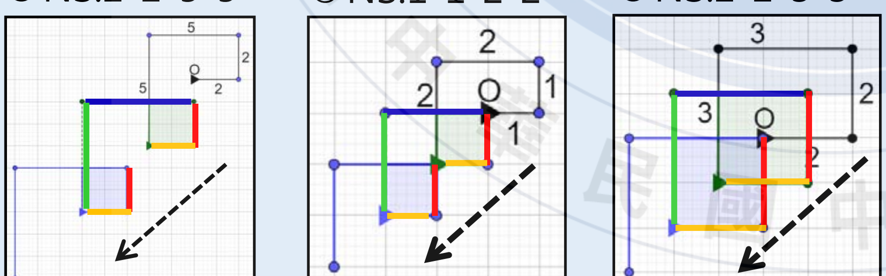
(1)個數4：矩形(長×2或寬×2) vs. 對邊

①長×2或寬×2＜對邊：矩形分開

②長×2或寬×2 兩者之一＝對邊、另一≦對邊：矩形相鄰

③長×2或寬×2 兩者之一＞對邊、另一≧對邊：矩形重疊

① NS:2-2-5-5　② NS:1-1-2-2　③ NS:2-2-3-3



(2)個數5 (NS:e-b-a-c-d)

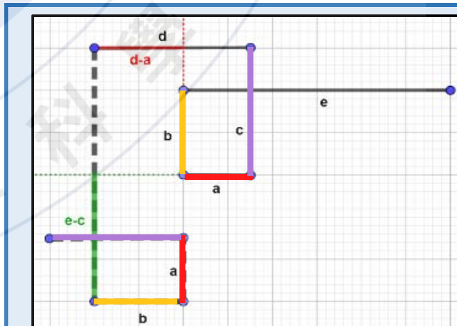
令a≦b≦c，且a＜d、a＜e，則

a、b為矩形兩邊，d平行a、e平行b

①d ＞a+b或e＞a+c：矩形分開

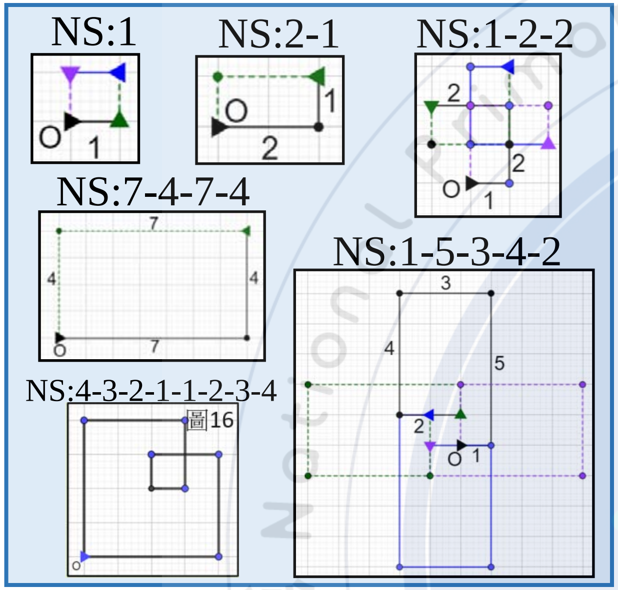
②d ＝ a+b且e ≦a+c：矩形相鄰

③d ＜ a+b且e ≦a+c：矩形重疊



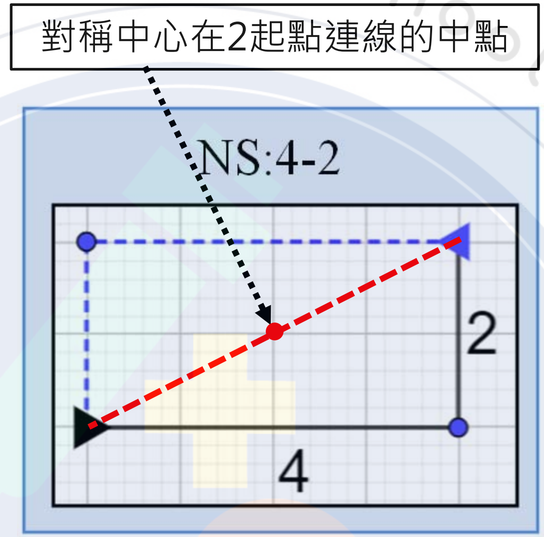
3.能回原點都是點對稱

（4倍個數除外）

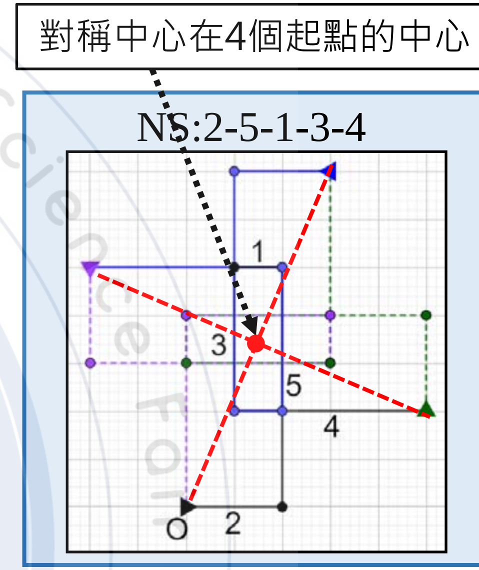


4.對稱中心位置

(1)個數偶數但非4的倍數

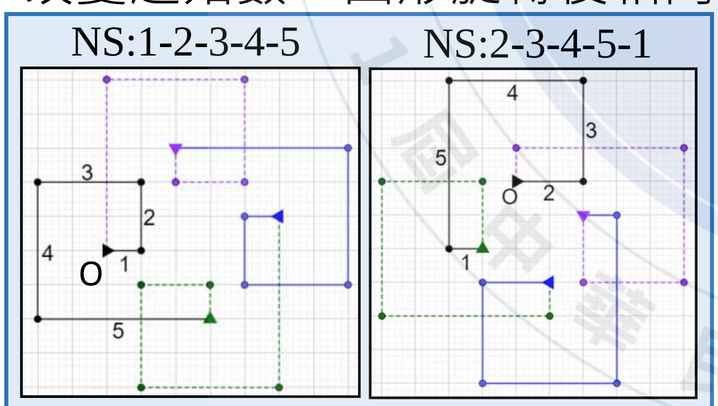


(2)個數奇數：4階對稱性

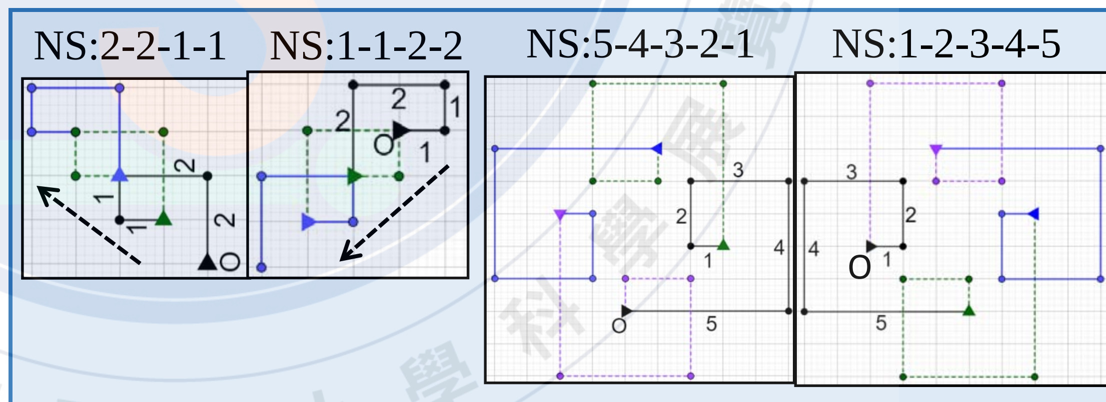


5.數字前後排列關係不變

改變起始數，圖形旋轉後相同



6.數序順序前後相反：互為線對稱

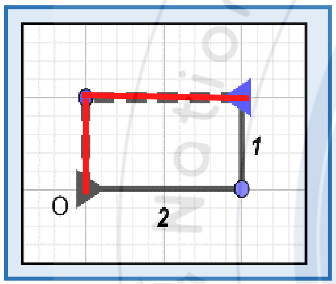


研究三、 圖形座標的共通性質

(一)起點方向

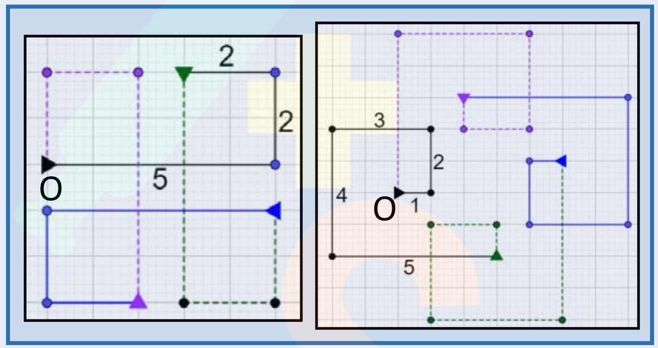
1. 改變次數

(1)個數偶數但非4倍



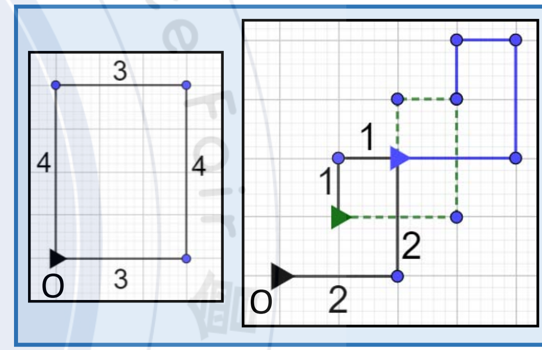
改變2次方向
(+x軸和-x輪流 變換)

(2)個數為奇數



改變4次方向
(朝向4個不同方向)

(3)個數為4的整數倍



不會改變方向

2. 第一次循環：都是朝向+x軸

3. 循環次數 = 起點方向的改變次數（能回到原點的數序）

(二)終點位置座標累積偏移值

1. 個數÷ 4 ≠0

|前一半循環| = |後一半循環| ，正負相反、互相抵銷，可回到原點。

(1)個數1(NS:a)

循環次數	1	2	3	4
線段長度	a	a	a	a
線段方向	+x	+y	-x	-y

(2)個數2(NS:a-b)

1		2	
a	b	a	b
+x	+y	-x	-y

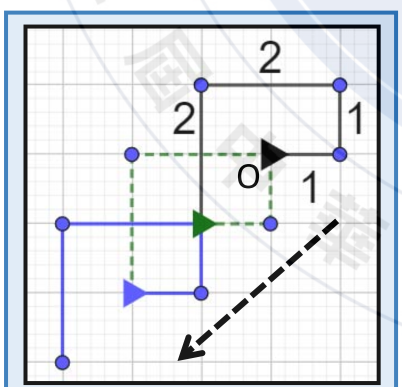
(3)個數3 (NS:a-b-c)

1			2			3			4		
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y	+x	+y	-x	-y

2. 個數÷ 4 = 0

(1)除以4餘數相同的位數總和，餘1 = 餘3且餘2 = 餘0，一次循環回原點。

(2)其他時候，因X或Y軸的位置偏移值無法完全抵銷，而回不到原點。



NS:a-b-c-d

X座標累積偏移值 = (a-c) ×循環幾次

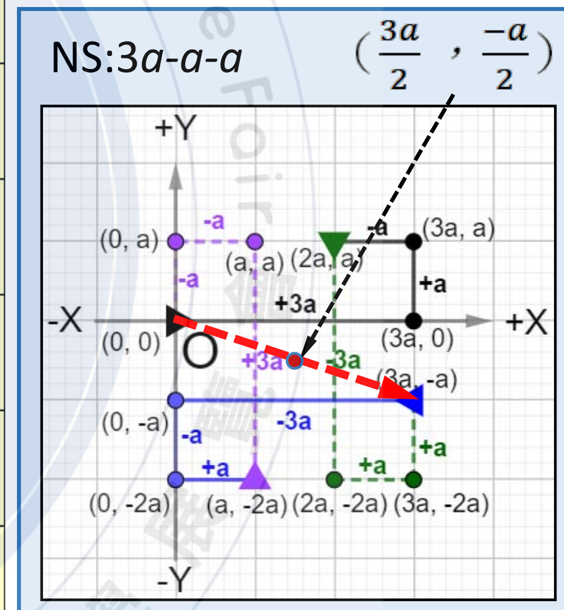
Y軸的累積偏移值 = (b-d) ×循環幾次

(三)圖形對稱中心座標

1.計算方法：起點方向旋轉180度後的座標，除以2

2.不同個數對稱中心座標

數序個數	數序代號	對稱中心座標
1	NS:a_1	$\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{2}\right)$
2	NS:a_1-a_2	$\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right)$
3	NS:a_1-a_2-a_3	$\left(\frac{a_1-a_3+a_2}{2}, \frac{a_2-a_1+a_3}{2}\right)$
4	NS:a_1-a_2-a_1-a_2	$\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right)$
5	NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5	$\left(\frac{a_1-a_3+a_5-a_2+a_4}{2}, \frac{a_2-a_4+a_1-a_3+a_5}{2}\right)$
6	NS:a_1-a_2-a_3-a_4-a_5-a_6	$\left(\frac{a_1-a_3+a_5}{2}, \frac{a_2-a_4+a_6}{2}\right)$



研究四、圖形的位移向量與相關性質

【猜想】 第一次循環起點到終點位置差異 + 下一次循環的旋轉角度 → 各次循環的終點位置 → 推論循環次數或對稱中心

(一) 各次循環的位移向量是否相同

【研究方法】 換成代數 → 找出各次循環的終點座標 → 計算所產生的位移向量

1.**位移向量**：是位置向量的數值組合，變換X軸或Y軸、改變正負值。

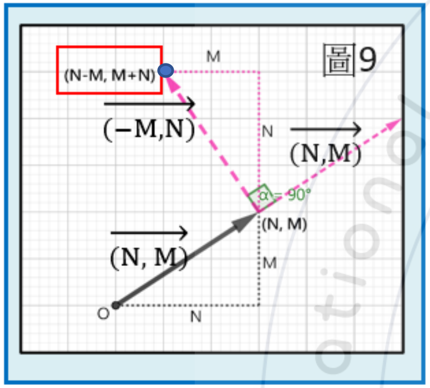
2.**旋轉變換**：相同角度，運算方式相同。

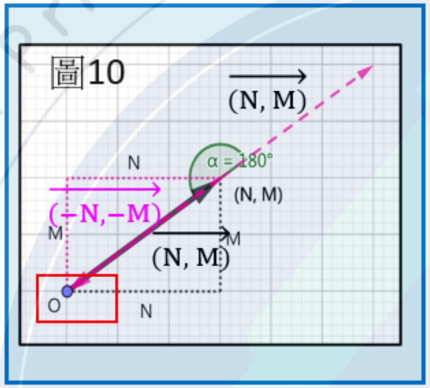
數序個數	3							
起始方向差異	逆時針旋轉 270 度							
循環次數	第一次		第二次		第三次		第四次	
座標軸	X 軸	Y 軸	X 軸	Y 軸	X 軸	Y 軸	X 軸	Y 軸
終點位置座標值	a-c	b	a-c+b	b-a+c	b	c-a	0	0
終點座標換代號	N_1 = a-c	M_1 = b	N_1+M_1	M_1-N_1	M_1	$-N_1$	0	0
起點位置座標值	0	0	a-c	b	a-c+b	b-a+c	b	c-a
起點座標換代號	0	0	N_1	M_1	N_1+M_1	M_1-N_1	M_1	$-N_1$
位移向量 $\overrightarrow{(N,M)}$	N_1	M_1	M_1	$-N_1$	$-N_1$	$-M_1$	$-M_1$	N_1
$\overrightarrow{(N,\ M)}^{270°}$	M	$-N$	M	$-N$	M	$-N$	M	$-N$

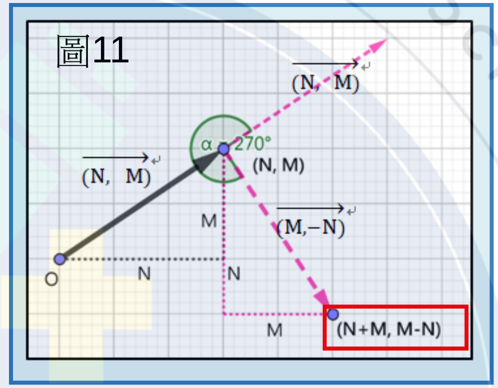
將向量位移用 $\overrightarrow{(N,\ M)}$ 表示 → 逆時針旋轉270度都會變成 $\overrightarrow{(M,\ -N)}$ 記做 → $\overrightarrow{(N,\ M)}^{270°} = \overrightarrow{(M,\ -N)}$

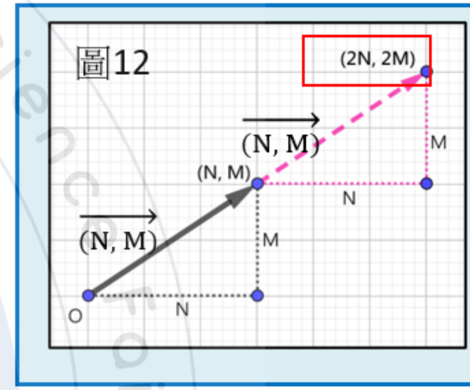
(二) 位移向量的不同角度旋轉變換

1. $\overrightarrow{(N,\ M)}^{90^\circ} = \overrightarrow{(-M, N)}$
2. $\overrightarrow{(N,\ M)}^{180^\circ} = \overrightarrow{(-N, -M)}$
3. $\overrightarrow{(N,\ M)}^{270^\circ} = \overrightarrow{(M, -N)}$
4. $\overrightarrow{(N,\ M)}^{0^\circ} = \overrightarrow{(N, M)}$









2. 利用第一次循環的位置向量，加上不同角度的旋轉變換，可計算得到：

(1) 各次循環的位移向量

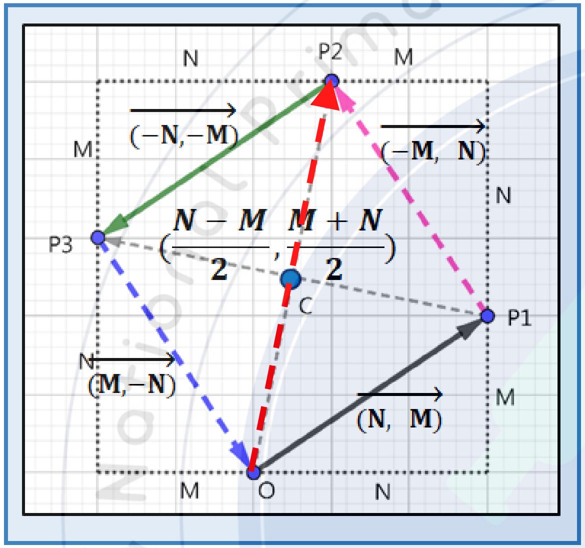
(2) 各次循環的終點位置座標

(3) 找出能否回到原點，和回到原點的循環次數

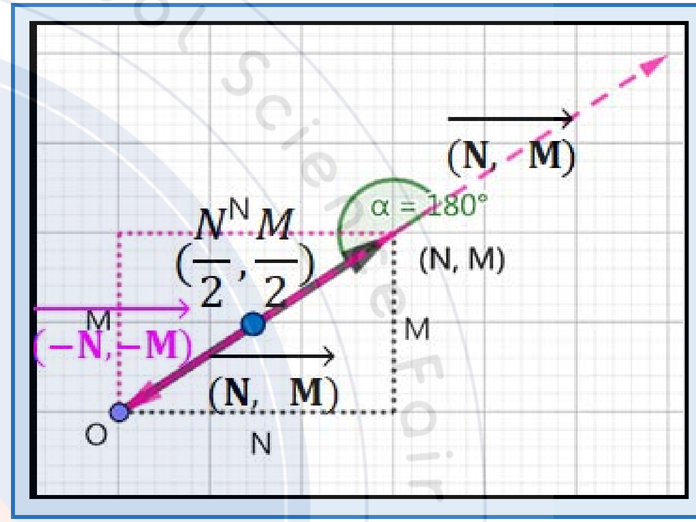
(三) 位移向量 + 旋轉變換，求證循環次數、計算對稱中心

【數序個數÷ 4】

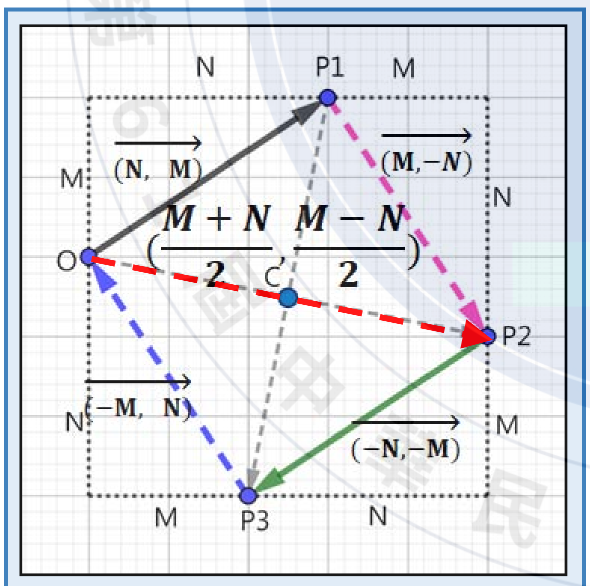
1. 餘1



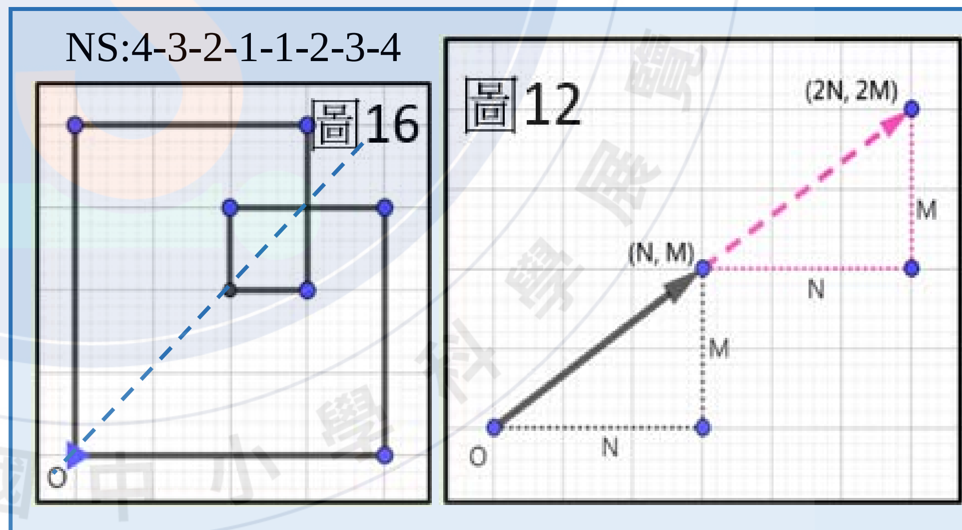
2. 餘2



3. 餘3



4. 餘0：無法利用位移向量計算對稱中心



結論

(一) 圖形特徵

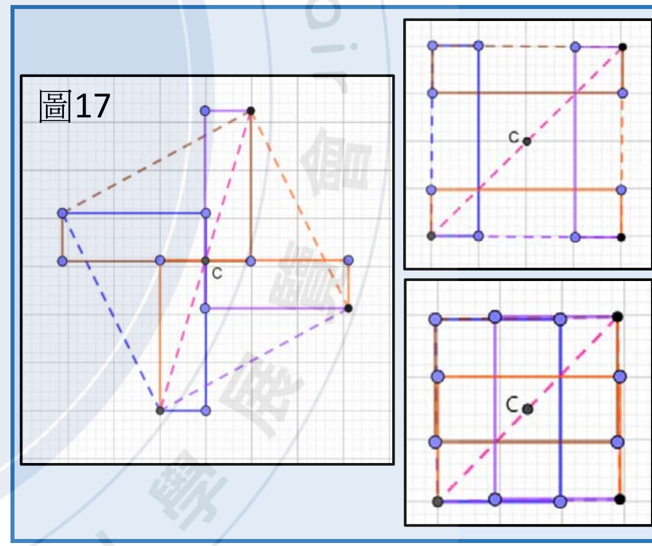
1. 個數1、2：畫出1個矩形。
2. 個數≥3：一次循環可畫一基本形(矩形)，可判斷基本形的組合樣式。
3. 個數非4整數倍：可畫回原點，均為點對稱圖形。
4. 數字順序相反：互為線對稱圖形。
5. 數字先後關係不變：改變起始數字，圖形旋轉後會相同。

(二) 循環次數：由個數除以4的餘數所決定。

(三) 位移向量與旋轉變換：

1. 可推算各次循環的位移向量和終點座標。
2. 可證明循環次數。
3. 可推算對稱中心座標。

(四) 應用：可變換圖形花樣的互動遊戲。



參考資料

◆ 安娜·維特曼著、愛德華．謝佛頓、伊凡．希喜繪圖、畢馨云翻譯（2017）。原來數學這麼漂亮：30種激發創意的手繪練習。台北市：小天下出版。