

# 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

佳作

080402

方格告訴我的秘密 — 探討三角形的格線

學校名稱：臺中市豐原區瑞穗國民小學

作者： 小五 林晏宇	指導老師： 徐瑛黛
---------------	--------------

關鍵詞：格子點、鉛直和、水平和

## 摘要

本研究由探討三頂點在格子點上的任意三角形鉛直格線長總和與水平格線長總和關係出發，藉由各種計算法計算、觀察、推論、檢驗、修正、再檢驗、論證、推廣和應用的探究過程，發現格子點上任意三角形鉛直格線長總和、水平格線長總和與面積的關係為：面積=鉛直和<sup>1</sup>+邊在鉛直格線長 $\times 0.5$ =水平和<sup>2</sup>+邊在水平格線長 $\times 0.5$ ，並將此關係式推廣到簡單多邊形<sup>3</sup>，然後應用於地圖上求面積。

## 壹、研究動機

在和同學玩釘板時，想起在科學研習月刊[1]中發現一個有趣的數學題目，題目是：將整個平面用直線分成單位正方形，且橫線都是藍色，縱線都是紅色。選定三個正方形的頂點，圍成一個三角形，如圖1-1與圖1-2所示，請計算此兩圖中的三角形內部的紅線長總和與藍線長總和，各是多少呢？請問可以發現什麼？能解釋為什麼嗎？

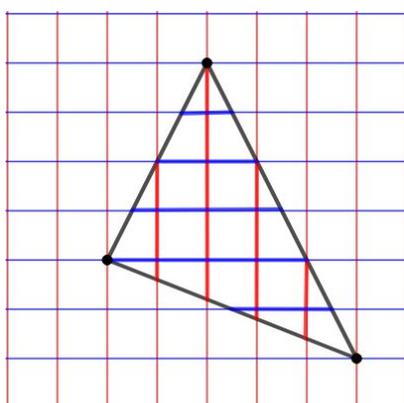


圖 1-1 原始題目示意圖

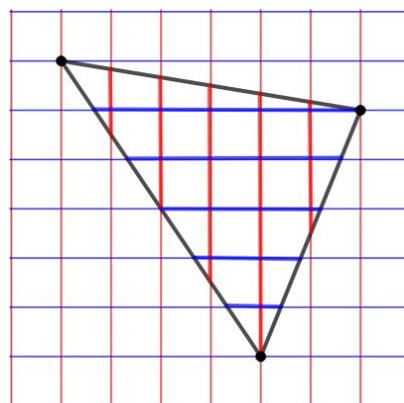


圖 1-2 原始題目示意圖

我用國民小學數學第 6 冊「數格子算面積」單元[2]中估算的方法，驚奇的發現圖1-1與圖1-2兩個三角形內部的紅線長總和與藍線長總和居然都相等！這使我好奇的想知道是湊巧嗎？有沒有其他計算方法？除了以上兩個三角形外，其他任意三角形也都有此特性嗎？經過嘗試後，發現能從中找到許多有趣的結果。於是，我開始進行「三角形中的格線」的研究，希望深入探討，了解其中奧秘。

<sup>1</sup> 請參閱名詞定義

<sup>2</sup> 請參閱名詞定義

<sup>3</sup> 請參閱名詞定義

## 貳、研究目的

基於以上的研究動機，本研究的研究目的為：

- 一、找出研究動機中問題的答案。
- 二、探討任意三角形是否也有同樣的結論。
- 三、修正研究動機中問題的結論使任意三角形皆滿足。
- 四、證明任意三角形皆滿足結論，並將此結論推廣到簡單多邊形與應用於地圖上求面積。

## 參、研究設備及器材

紙、筆、方格紙、方格膠板、直尺、剪刀、口紅膠、電腦、GeoGebra 繪圖軟體。

## 肆、研究過程及方法

一、名詞定義：

- (一) 鉛直和：三角形內部的方格線鉛直長總和。
- (二) 水平和：三角形內部的方格線水平長總和。
- (三) 邊在鉛直格線長：三角形邊落在鉛直格線的長度，  
如圖 1-3 紅線  $\overline{AC}$  的長度。

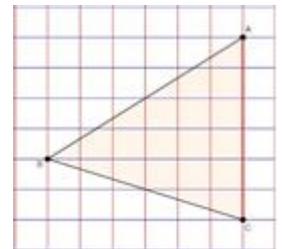


圖 1-3

- (四) 邊在水平格線長：三角形邊落在水平格線的長度，  
如圖 1-4 藍線  $\overline{AC}$  的長度。

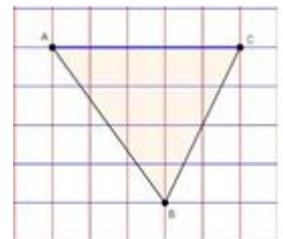


圖 1-4

- (五) 簡單多邊形：包含凸凹邊形，不能有洞。
- (六) 標準矩形：長、寬與  $x$ 、 $y$  軸平行的矩形，且頂點在格子點上。
- (七) 標準直角三角形：兩股與  $x$ 、 $y$  軸平行的直角三角形，且頂點在格子點上。

## 二、符號對照表：

$P_n$	簡單 $n$ 邊形， $n \geq 3$ 的正整數	$Q$	任意三角形		
$VL$	共用邊在鉛直格線長	$HL$	共用邊在水平格線長		
$V$	鉛直和	$V_{P_n}$	$P_n$ 的鉛直和	$V_Q$	$Q$ 的鉛直和
$H$	水平和	$H_{P_n}$	$P_n$ 的水平和	$H_Q$	$Q$ 的水平和
$VL$	邊在鉛直格線長	$VL_{P_n}$	$P_n$ 的邊在鉛直格線長	$VL_Q$	$Q$ 的邊在鉛直格線長
$HL$	邊在水平格線長	$HL_{P_n}$	$P_n$ 的邊在水平格線長	$HL_Q$	$Q$ 的邊在水平格線長
$A$	面積	$A_{P_n}$	$P_n$ 的面積	$A_Q$	$Q$ 的面積

## 三、文獻探討：

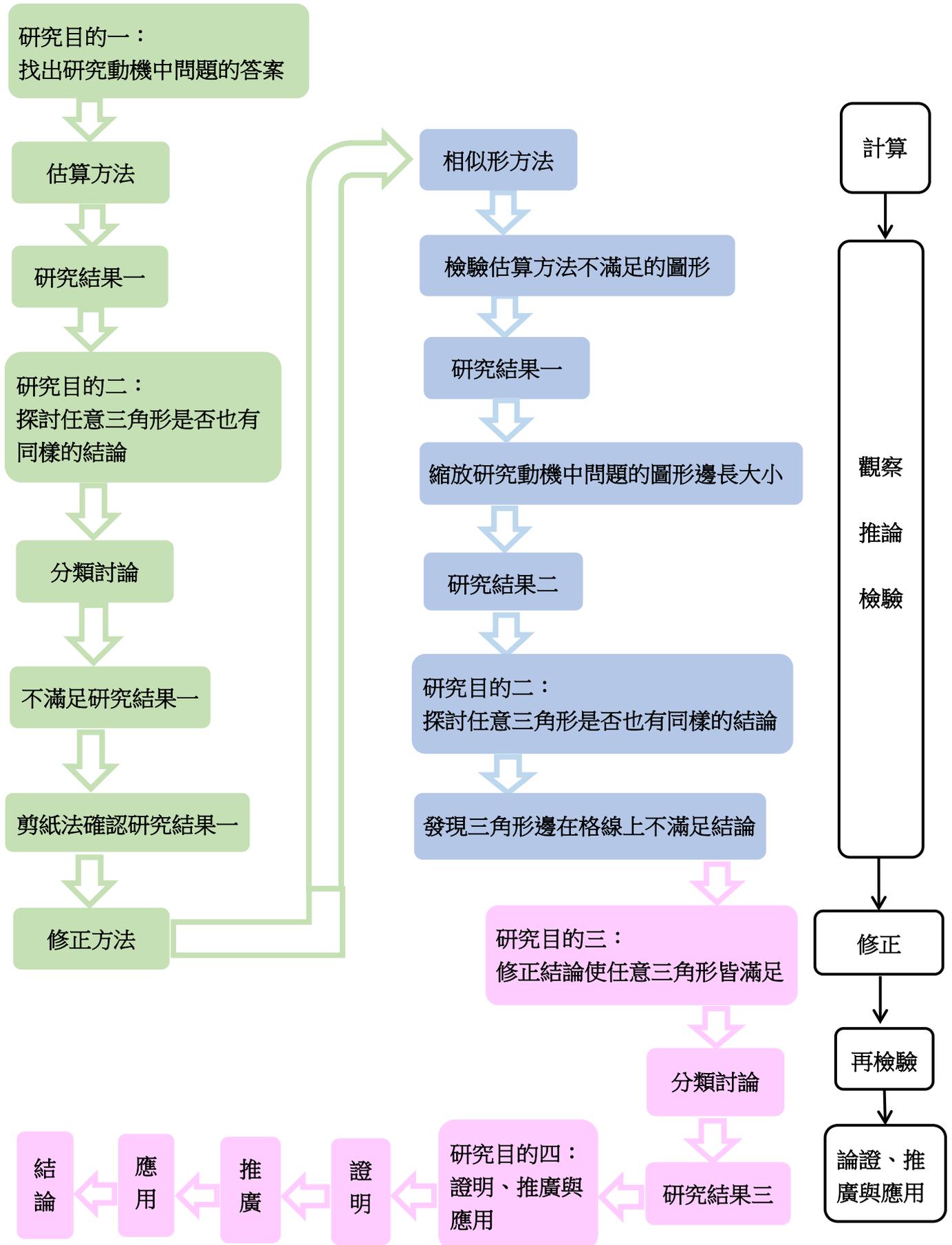
本研究由科學研習月刊中一道有趣的數學題目發展出「計算格子點上多邊形面積的方法」，並應用在地圖上求面積。首先，我利用科展作品資源網站「科展群傑廳」搜尋歷屆科展中並無類似的研究。另外，利用 google 搜索引擎搜尋發現了 1975 年高斯證明的測量員公式(surveyor's formula) [3]與 1899 年皮克提出的皮克定律(Pick's theorem) [4]，此兩種方法皆是與我的研究同一主題，但方法不同，分別說明比較如下：

(一) 測量員公式(Surveyor's formula)：先將格子點坐標化，再利用行列式計算多邊形面積，此方法並不局限於格子點上多邊形，是個很棒的方法，但「坐標化」與「行列式」均非小學學習領域，而我的研究結論只需「算格線長」較適合小學生計算操作。

(二) 皮克定律：是透過數格子點數計算格子點上多邊形面積的方法，這個方法只需「數格子點數」，也很適合小學生計算操作，但與我的方法「算格線長」並不同。此外，本研究為了計算和驗證需使用的數學知識，我參閱「史上最強圖解數學」[5]，將書中提到比與比例(p.44)、數列(p.62)、多邊形(p.94)、三角形的相似(p.102)的說明加以運用在本研究中，並利用求  $n$  邊形內角和時，可將  $n$  邊形切割成數個三角形的既有概念與

在維基百科中查得的數學歸納法[6]推廣證明。

#### 四、研究架構與流程圖 (綠色 → 藍色 → 粉紅)



五、以**估算方法**找出研究動機中問題的答案：

將整個平面用直線分成單位正方形，且橫線都是藍色，縱線都是紅色。選定三個正方形的頂點，圍成一個三角形，如圖 1-1 與圖 1-2 所示，請計算此兩圖中的三角形內部的紅線長總和與藍線長總和，各是多少呢？請問可以發現什麼？

由國民小學數學第 6 冊「數格子算面積」單元中估算方法的啟發[7]：我以一格為 1 單位，三角形內格線長完整的一格算 1 單位，不完整的格線長以 0.5 單位估算。

圖 1-1 計算如下：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)}=10\times 1+4\times 0.5=12$$

$$\text{水平和(藍線長總和)}=9\times 1+6\times 0.5=12$$

鉛直和 = 水平和

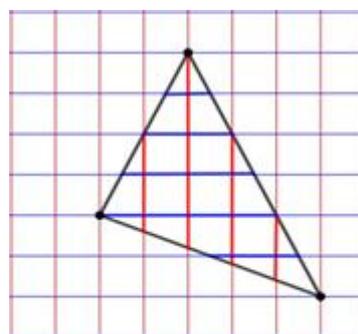


圖 1-1

圖 1-2 計算如下：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)}=12\times 1+8\times 0.5=16$$

$$\text{水平和(藍線長總和)}=12\times 1+8\times 0.5=16$$

鉛直和 = 水平和

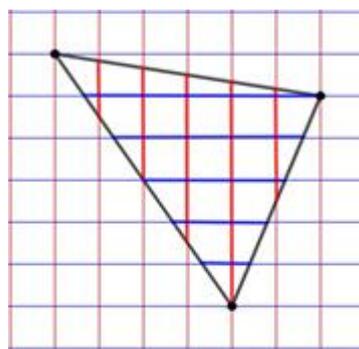


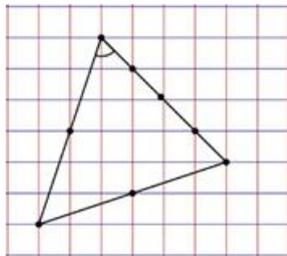
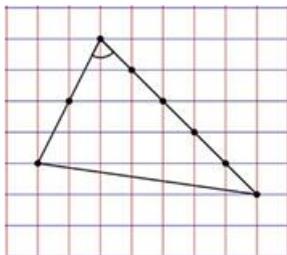
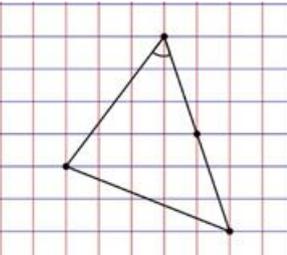
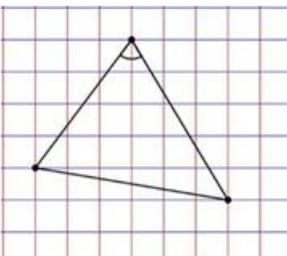
圖 1-2

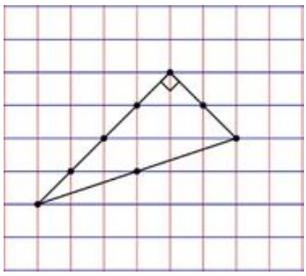
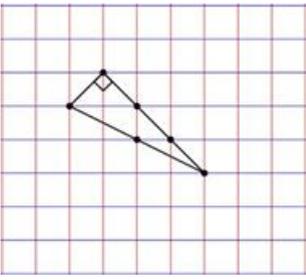
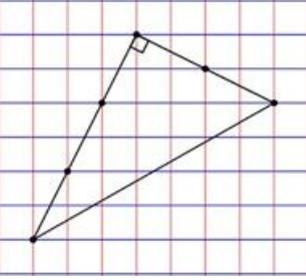
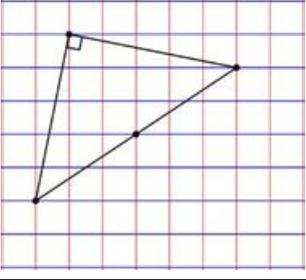
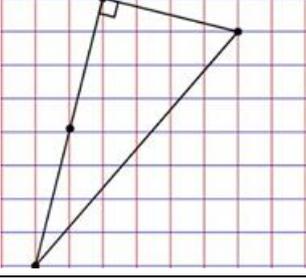
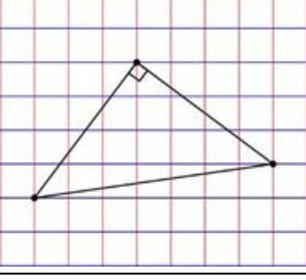
此兩個三角形的紅線長總和等於藍線長總和。

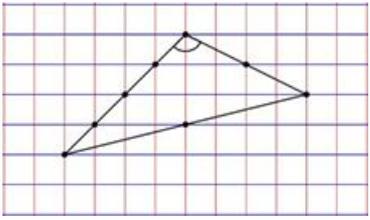
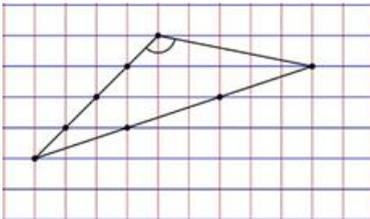
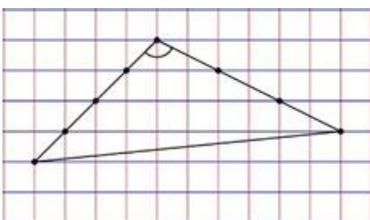
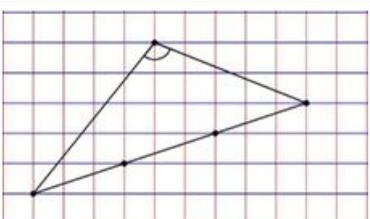
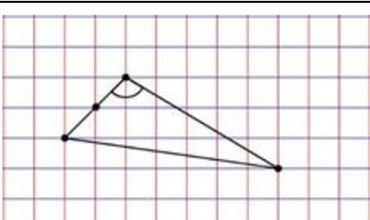
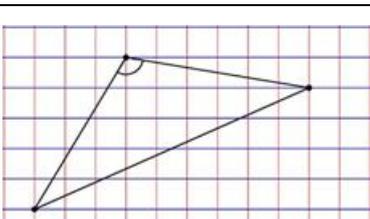
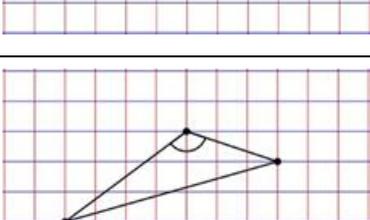
以**估算方法**解答了這個問題，讓我又產生了新的疑問，除了以上兩個三角形外，其他任意三角形也都有此特性嗎？

六、以估算方法測試任意三角形是否也有同樣的結論

以角度觀點分別測試銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形。因為邊上若有格子點，則不完整的格線長較少，估算的誤差亦會較小，所以用除了頂點以外，邊上有格子點通過的邊數進行舉例討論如下表：

角度	格子點通過的邊數	圖形	鉛直和	水平和	結論
銳角三角形	3 個邊有格子點 (圖 2-1)		$1 \times 14 + 0.5 \times 4 = 16$	$1 \times 14 + 0.5 \times 4 = 16$	相等
	2 個邊有格子點 (圖 2-2)		$1 \times 12 + 0.5 \times 6 = 15$	$1 \times 14 + 0.5 \times 2 = 15$	相等
	1 個邊有格子點 (圖 2-3)		$1 \times 10 + 0.5 \times 6 = 13$	$1 \times 9 + 0.5 \times 8 = 13$	相等
	三邊上無格子點 (圖 2-4)		$1 \times 9 + 0.5 \times 9 = 13.5$	$1 \times 10 + 0.5 \times 7 = 13.5$	相等

角度	格子點通過的邊數	圖形	鉛直和	水平和	結論
直角三角形	3 個邊有格子點 (圖 3-1)		$1 \times 6 + 0.5 \times 4 = 8$	$1 \times 8 + 0.5 \times 0 = 8$	相等
	2 個邊有格子點 (格子點在一股、一斜邊) (圖 3-2-1)		$1 \times 2 + 0.5 \times 2 = 3$	$1 \times 3 + 0.5 \times 0 = 3$	相等
	2 個邊有格子點 (格子點在兩股) (圖 3-2-2)		$1 \times 11 + 0.5 \times 8 = 15$	$1 \times 12 + 0.5 \times 6 = 15$	相等
	1 個邊有格子點 (格子點在斜邊) (圖 3-3-1)		$1 \times 9 + 0.5 \times 8 = 13$	$1 \times 10 + 0.5 \times 6 = 13$	相等
	1 個邊有格子點 (格子點在股) (圖 3-3-2)		$1 \times 13 + 0.5 \times 8 = 17$	$1 \times 12 + 0.5 \times 11 = 17.5$	不相等
	三邊上無格子點 (圖 3-4)		$1 \times 7 + 0.5 \times 11 = 12.5$	$1 \times 10 + 0.5 \times 5 = 12.5$	相等

角度	格子點通過的邊數	圖形	鉛直和	水平和	結論
鈍角三角形	3 個邊有格子點 (圖 4-1)		$1 \times 8 + 0.5 \times 8 = 12$	$1 \times 12 + 0.5 \times 0 = 12$	相等
	2 個邊有格子點 (格子點在鈍角的一邊及其對邊) (圖 4-2-1)		$1 \times 7 + 0.5 \times 10 = 12$	$1 \times 12 + 0.5 \times 0 = 12$	相等
	2 個邊有格子點 (格子點在鈍角的兩邊) (圖 4-2-2)		$1 \times 12 + 0.5 \times 12 = 18$	$1 \times 18 + 0.5 \times 0 = 18$	相等
	1 個邊有格子點 (格子點在鈍角的對邊) (圖 4-3-1)		$1 \times 10 + 0.5 \times 13 = 16.5$	$1 \times 14 + 0.5 \times 5 = 16.5$	相等
	1 個邊有格子點 (格子點在鈍角的一邊) (圖 4-3-2)		$1 \times 4 + 0.5 \times 9 = 8.5$	$1 \times 7 + 0.5 \times 2 = 8$	不相等
	三邊上無格子點 (圖 4-4-1)		$1 \times 9 + 0.5 \times 15 = 16.5$	$1 \times 13 + 0.5 \times 7 = 16.5$	相等
	三邊上無格子點 (圖 4-4-2)		$1 \times 2 + 0.5 \times 10 = 7$	$1 \times 5 + 0.5 \times 3 = 6.5$	不相等

發現鉛直和 $\neq$ 水平和的圖 3-3-2、圖 4-3-2、圖 4-4-2，為了確認是「鉛直和等於水平

和」的結論不正確，還是估算方法不適用，我決定進行實際的剪紙法，以確認結論是否正確。剪紙法的步驟為：

1. 將圖形描繪在方格紙上。
2. 依鉛直與水平方向分別著色與標記數字記號，避免黏貼時搞混淆。
3. 將剪好的鉛直與水平長條依編號黏貼在方格紙上。

我透過實際的剪紙法再確認如下：

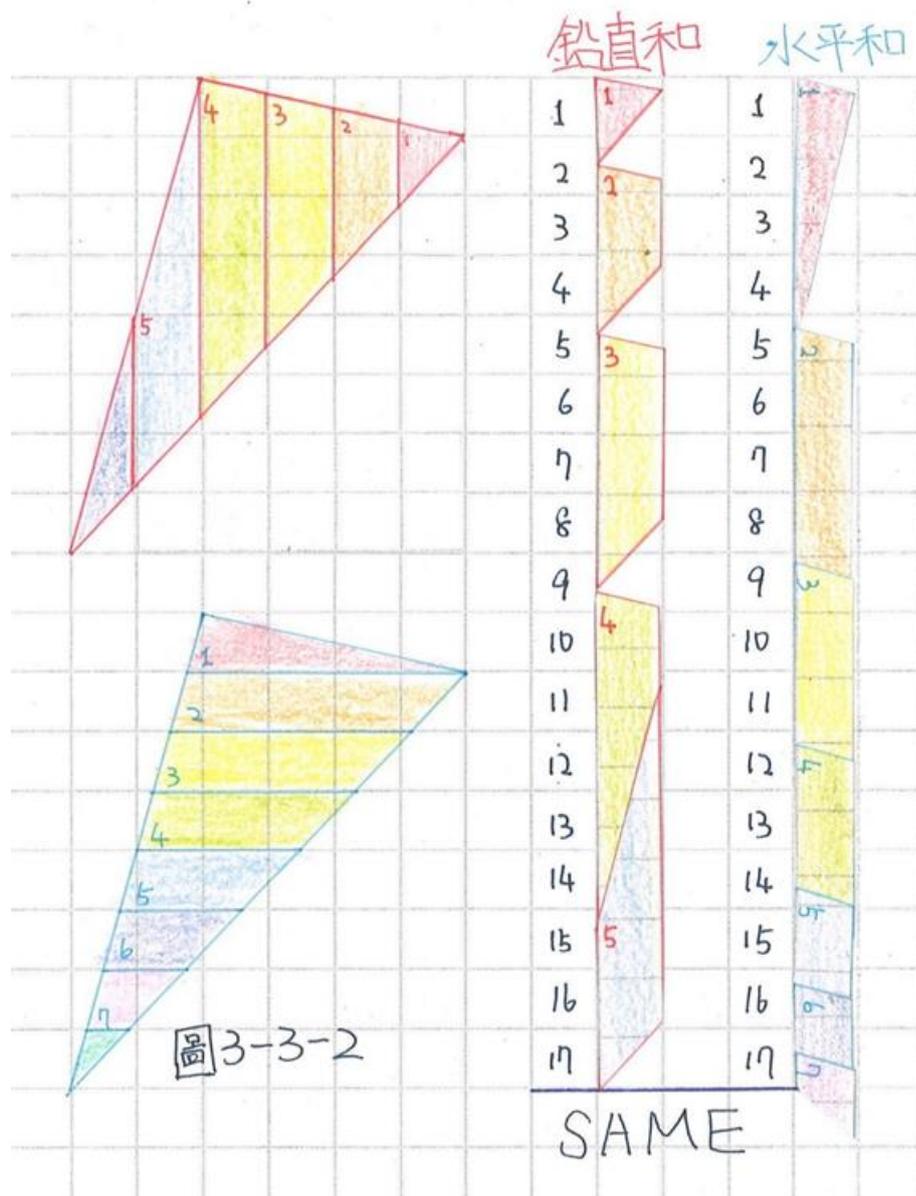


圖 3-3-2 剪紙法結果，鉛直和=水平和=17。

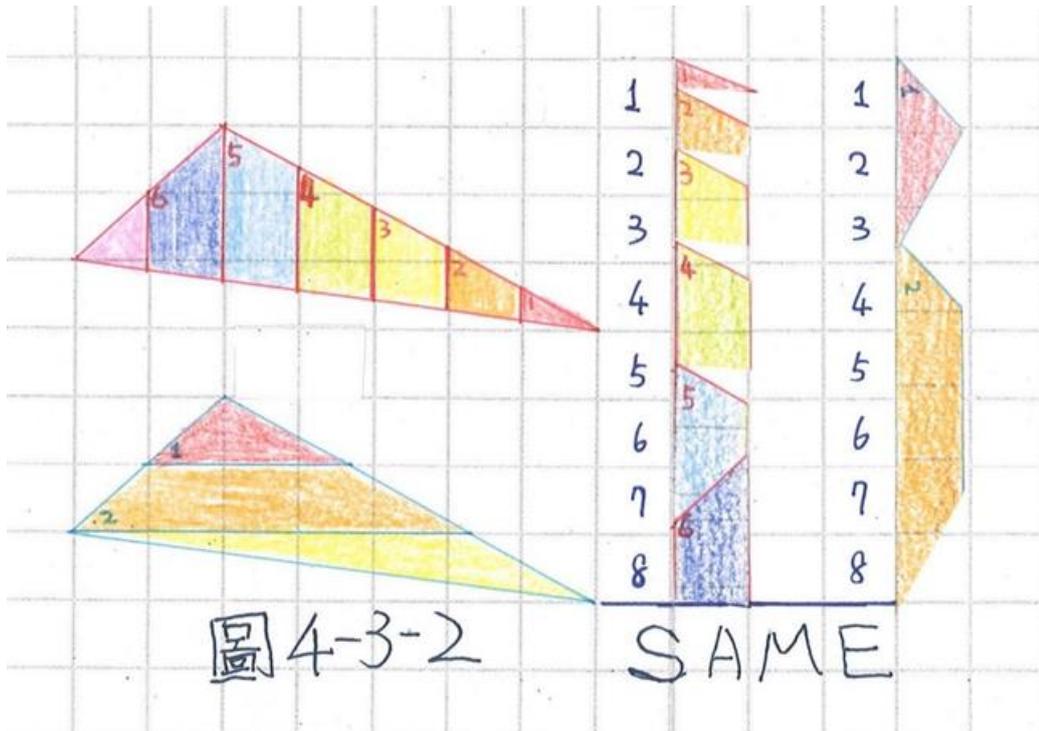


圖 4-3-2 剪紙法結果，鉛直和=水平和=8。

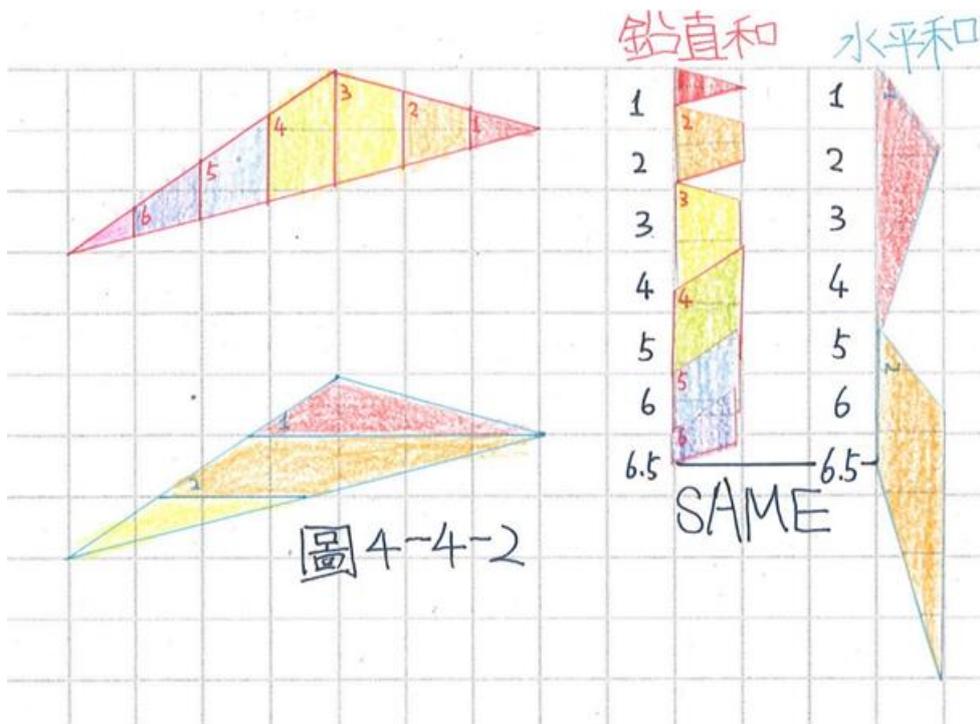
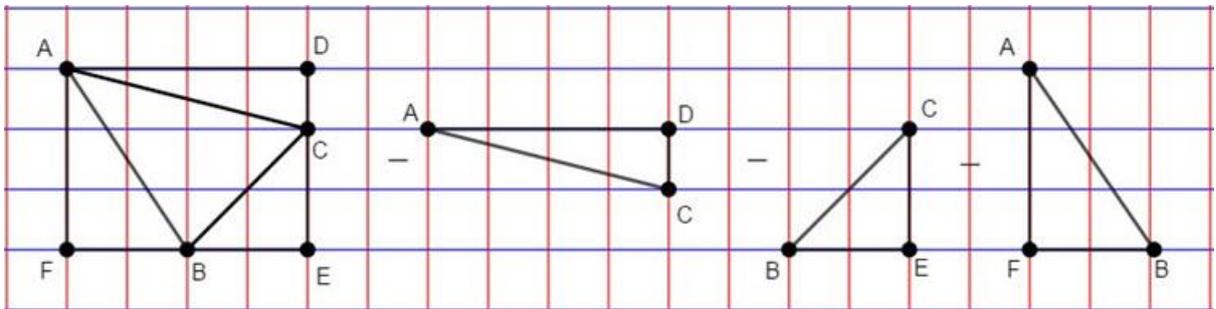


圖 4-4-2 剪紙法結果，鉛直和=水平和=6.5。

由上可知「鉛直和等於水平和」的結論依舊成立。推論估算方法會因不完整的格線長產生誤差，故此估算方法雖然較簡便，但無法確認問題結論，將尋求其他計算方法。

七、以相似形方法檢驗估算方法不滿足的圖形：

計算概念為以三角形頂點為界，將圖形補滿為矩形，先計算矩形內部總格線長，再運用相似形與比例式計算矩形內部三角形外總格線長，最後將矩形內部總格線長減矩形內部三角形外總格線長即求得三角形內部的總格線長。



(一) 圖 3-3-2 檢驗

鉛直和(紅線長總和)計算如下：

$$\text{由 } \triangle AD_1E_1 \sim \triangle ADB, \text{ 得 } 1:2 = a_1 : 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{由 } \triangle BF_1G_1 \sim \triangle BF_2G_2 \sim \triangle BF_3G_3 \sim \triangle BF_4G_4 \sim \triangle BF_5G_5 \sim \triangle BFC,$$

$$\text{得 } 1:2:3:4:5:6 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4 : b_5 : 7 \Rightarrow b_1 = \frac{7}{6}, b_2 = \frac{14}{6}, b_3 = \frac{21}{6}, b_4 = \frac{28}{6}, b_5 = \frac{35}{6}$$

$$\text{由 } \triangle AH_1I_1 \sim \triangle AH_2I_2 \sim \triangle AH_3I_3 \sim \triangle AHC, \text{ 得 } 1:2:3:4 = c_1 : c_2 : c_3 : 4 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{2}{4}, c_3 = \frac{3}{4}$$

$$\text{鉛直和(紅線長總和)} = 8 \times 5 - (a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + c_1 + c_2 + c_3)$$

$$= 40 - \left( 4 + \frac{7}{6} + \frac{14}{6} + \frac{21}{6} + \frac{28}{6} + \frac{35}{6} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) = 40 - 23 = 17$$

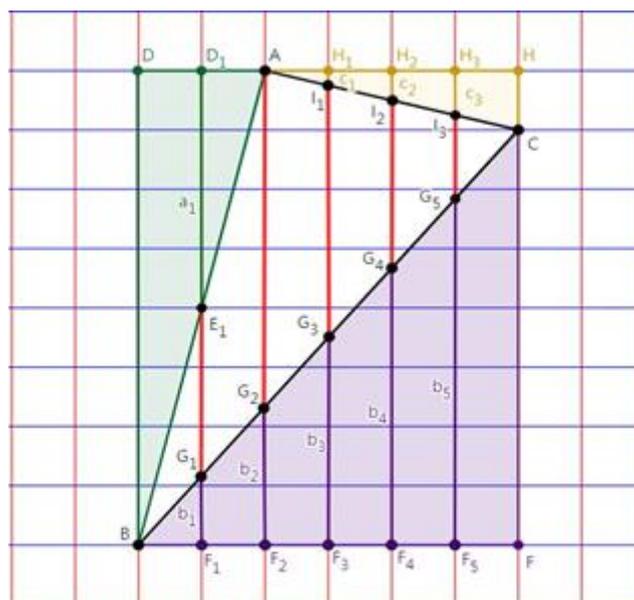


圖 3-3-2(鉛直和)

水平和(藍線長

總和)計算如下：

由  $\triangle BD_1E_1 \sim \triangle BD_2E_2 \sim \triangle BD_3E_3 \sim \triangle BD_4E_4 \sim \triangle BD_5E_5 \sim \triangle BD_6E_6 \sim \triangle BD_7E_7 \sim \triangle BDA$  ,

得  $1:2:3:4:5:6:7:8 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 : a_7 : 2$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{2}{4}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{4}, a_5 = \frac{5}{4}, a_6 = \frac{6}{4}, a_7 = \frac{7}{4}$$

由  $\triangle CF_1G_1 \sim \triangle CF_2G_2 \sim \triangle CF_3G_3 \sim \triangle CF_4G_4 \sim \triangle CF_5G_5 \sim \triangle CF_6G_6 \sim \triangle CFB$  ,

$$\text{得 } 1:2:3:4:5:6:7 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4 : b_5 : b_6 : 6 \Rightarrow b_1 = \frac{6}{7}, b_2 = \frac{12}{7}, b_3 = \frac{18}{7}, b_4 = \frac{24}{7}, b_5 = \frac{30}{7}, b_6 = \frac{36}{7}$$

水平和(藍線長總和)  $= 6 \times 7 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6)$

$$= 42 - \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{6}{7} + \frac{12}{7} + \frac{18}{7} + \frac{24}{7} + \frac{30}{7} + \frac{36}{7} \right) = 42 - 25 = 17$$

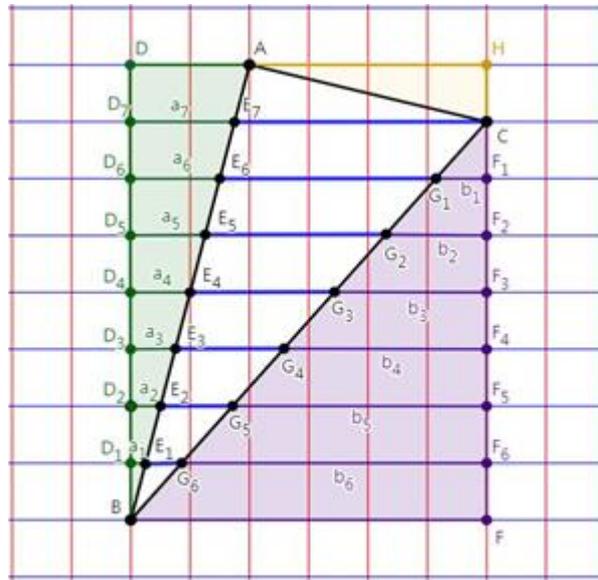


圖 3-3-2 (水平和)

得圖 3-3-2 三角形的鉛直和等於水平和，亦與剪紙法結果相同。

## (二) 圖 4-3-2 檢驗

同前(一)圖 3-3-2 檢驗，以相似形方法用相似形概念列出比例式，求出不完整格線長度，即可得：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)} = 3 \times 6 - (a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4) = 18 - 10 = 8$$

$$\text{水平和(藍線長總和)} = 7 \times 2 - (a_1 + c_1 + c_2) = 14 - 6 = 8$$

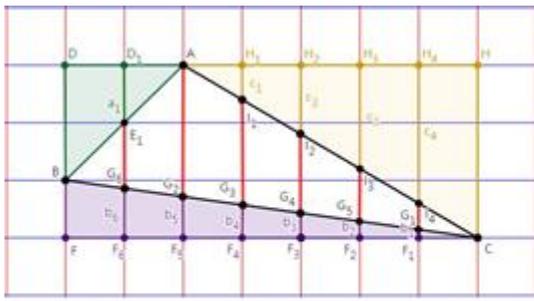


圖 4-3-2(鉛直和)

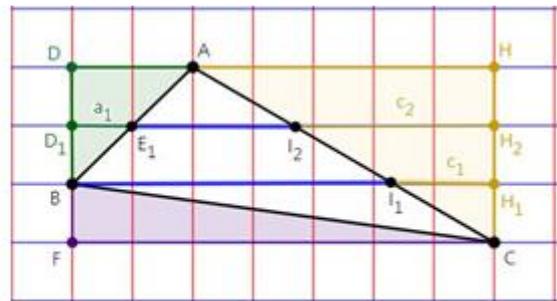


圖 4-3-2 (水平和)

得圖 4-3-2 三角形的鉛直和等於水平和，亦與剪紙法結果相同。

(三) 圖 4-4-2 檢驗

同前 (一) 圖 3-3-2 檢驗，以相似形方法用相似形概念列出比例式，求出不完整格線長度，即可得：

鉛直和(紅線長總和)

$$=8 \times 5 - (a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + c_1 + c_2 + c_3) = 40 - 23 = 17$$

水平和(藍線長總和)

$$=6 \times 7 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) = 42 - 25 = 17$$

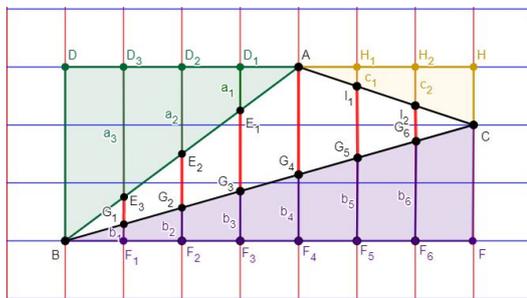


圖 4-4-2(鉛直和)

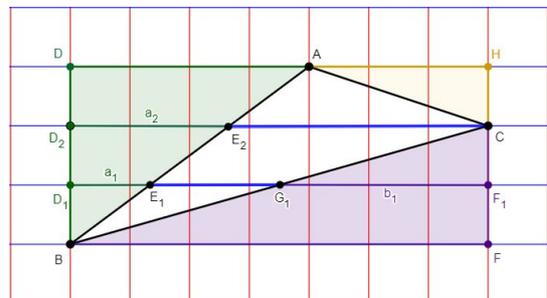


圖 4-4-2 (水平和)

得圖 4-4-2 三角形的鉛直和等於水平和，亦與剪紙法結果相同。

由相似形方法準確的算出鉛直和與水平和，檢驗了估算方法不滿足的圖 3-3-2、圖 4-3-2、圖 4-4-2，並得到「鉛直和等於水平和」這個結論。接著，我想用相似形方法試看改變研究動機中問題條件，看看有什麼好玩的特性？

八、縮放研究動機中問題的圖形邊長大小

首先，以圖 3-3-2 檢驗時的相似形法再次精準計算研究動機中問題的鉛直和與水平和，以確認估算法中的鉛直和與水平和。

研究動機中問題一：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)} = 6 \times 4 - (a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + c_1 + c_2) = 24 - 12 = 12$$

$$\text{水平和(藍線長總和)} = 5 \times 5 - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) = 25 - 13 = 12$$

得圖 1-1 三角形的紅線長總和等於藍線長總和，即鉛直和=水平和=12。

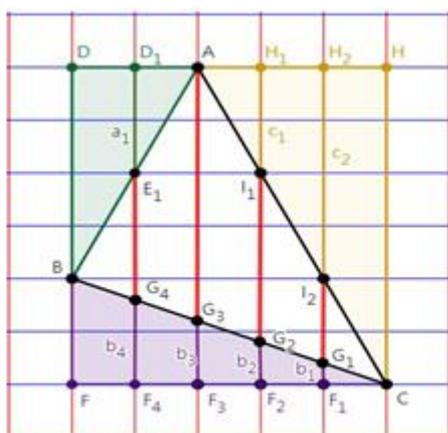


圖 1-1(鉛直和)

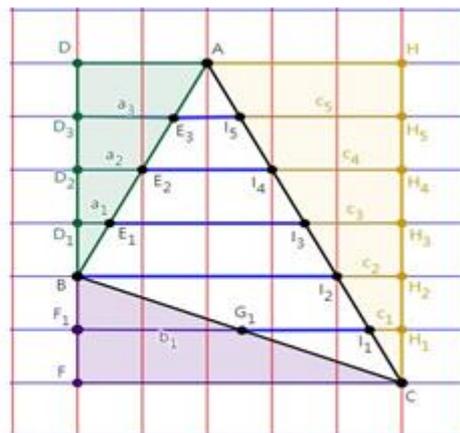


圖 1-1(水平和)

研究動機中問題二：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)} = 6 \times 5 - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) = 30 - 14 = 16$$

$$\text{水平和(藍線長總和)} = 6 \times 5 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 30 - 14 = 16$$

得圖 1-2 三角形的紅線長總和等於藍線長總和，即鉛直和=水平和=16。

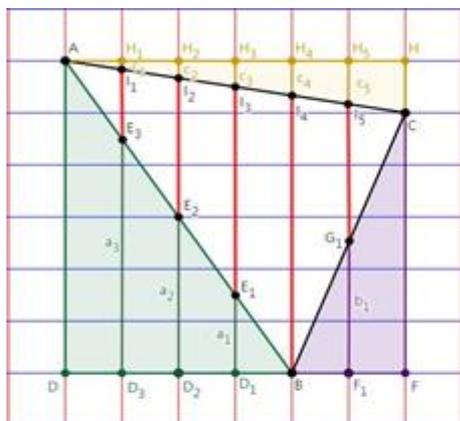


圖 1-2(鉛直和)

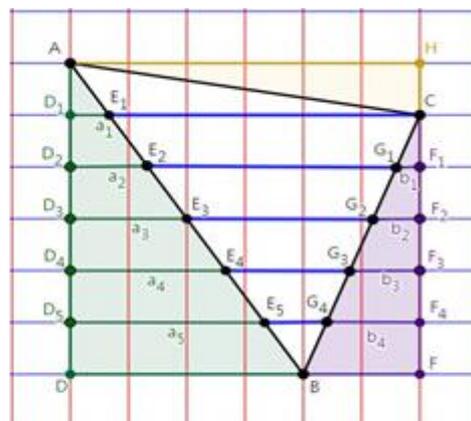


圖 1-2(水平和)

(一) 將圖形邊長變為 2 倍

依然以一格為 1 單位，將圖形邊長變為 2 倍。

1. 研究動機中問題一之圖 1-1(鉛直和)、圖 1-1(水平和)分別轉為圖 5-1(鉛直和)、圖 5-1(水平和)，使用圖 3-3-2 檢驗時相同的相似形法計算，得：

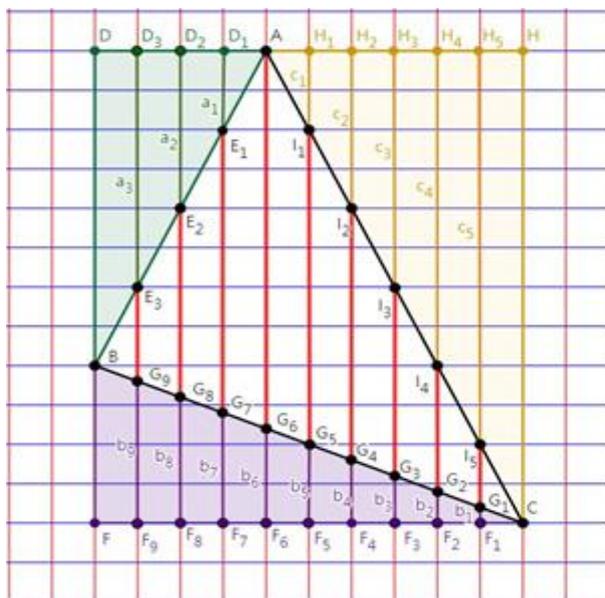


圖 5-1(鉛直和)

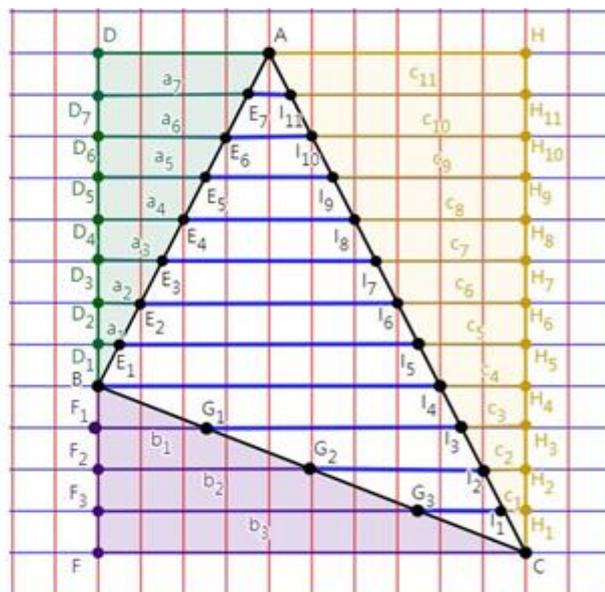


圖 5-1(水平和)

鉛直和(紅線長總和)

$$=12 \times 9 - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$$

$$=108 - (2 + 4 + 6 + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{8}{5} + \frac{10}{5} + \frac{12}{5} + \frac{14}{5} + \frac{16}{5} + \frac{18}{5} + 2 + 4 + 6 + 8 + 10)$$

$$=108 - 60 = 48 = 12 \times 4$$

=原鉛直和×4

水平和(藍線長總和)

$$=10 \times 11 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11})$$

$$=110 - (\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2} + \frac{5}{2} + \frac{10}{2} + \frac{15}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2} + \frac{8}{2} + \frac{9}{2} + \frac{10}{2} + \frac{11}{2})$$

$$=110 - 62 = 48 = 12 \times 4$$

=鉛直和(紅線長總和)

=原水平和×4

得研究動機中問題一之圖形邊長變為 2 倍，三角形的鉛直和依然等於水平和，但總和變為 4 倍。

2. 研究動機中問題二之圖 1-2(鉛直和)、圖 1-2(水平和)分別轉為圖 5-2(鉛直和)、

圖 5-2(水平和)，使用圖 3-3-2 檢驗時相同的相似形法計算，得：

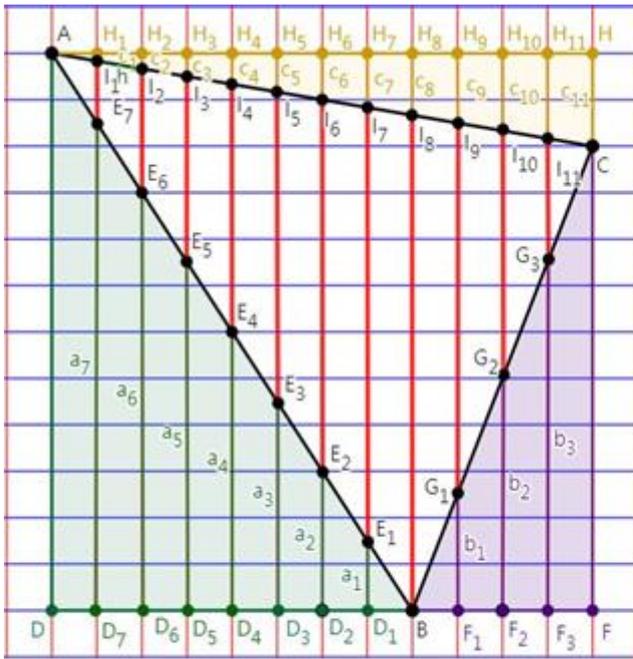


圖 5-2(鉛直和)

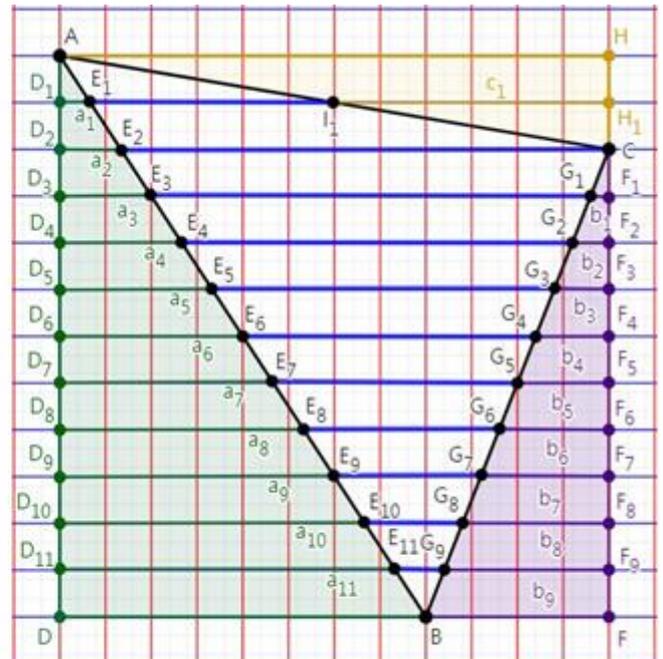


圖 5-2(水平和)

鉛直和(紅線長總和)

$$\begin{aligned}
 &= 12 \times 11 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11}) \\
 &= 1132 - \left( \frac{3}{2} + \frac{6}{2} + \frac{9}{2} + \frac{12}{2} + \frac{15}{2} + \frac{18}{2} + \frac{21}{2} + \frac{5}{2} + \frac{10}{2} + \frac{15}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} + \frac{7}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} + \frac{10}{6} + \frac{11}{6} \right) \\
 &= 132 - 68 = 64 = 16 \times 4
 \end{aligned}$$

=原鉛直和×4

水平和(藍線長總和)

$$\begin{aligned}
 &= 12 \times 11 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} \\
 &\quad + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + c_1) \\
 &= 132 - \left( \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{6}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} + \frac{12}{3} + \frac{14}{3} + \frac{16}{3} + \frac{18}{3} + \frac{20}{3} + \frac{22}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{8}{5} + \frac{10}{5} + \frac{12}{5} + \frac{14}{5} + \frac{16}{5} + \frac{18}{5} + 6 \right) \\
 &= 132 - 68 = 64 = 16 \times 4
 \end{aligned}$$

=鉛直和(紅線長總和)

=原水平和×4

得研究動機中問題二之圖形邊長變為 2 倍，三角形的鉛直和依然等於水平和，但總和變為 4 倍。

(二) 將圖形邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍

依然以一格為 1 單位，將圖形邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍。

研究動機中問題之圖 1-1、圖 1-2 當圖形邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍時，三角形的三頂點無法剛好落在格子點上，故另外繪圖 6-1，再將圖 6-1 邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍得圖 6-2 如下：

在格子點上，故另外繪圖 6-1，再將圖 6-1 邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍得圖 6-2 如下：

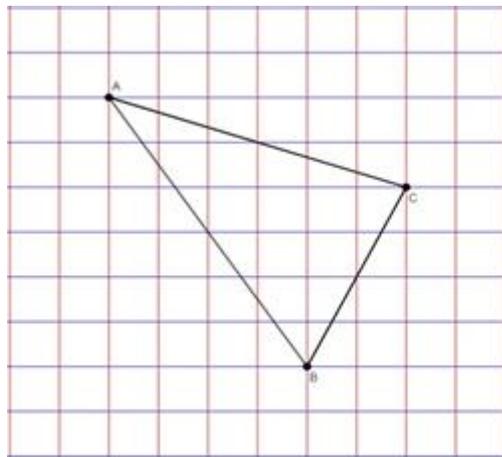


圖 6-1

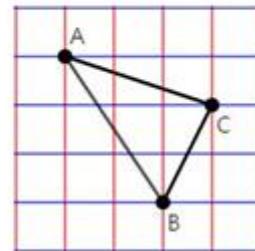


圖 6-2

使用圖 3-3-2 檢驗時相同的相似形法計算，得：

1. 圖 6-1 如下：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)} = 6 \times 5 - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) = 30 - 16 = 14$$

$$\text{水平和(藍線長總和)} = 6 \times 5 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1) = 30 - 16 = 14 = \text{鉛直和}$$

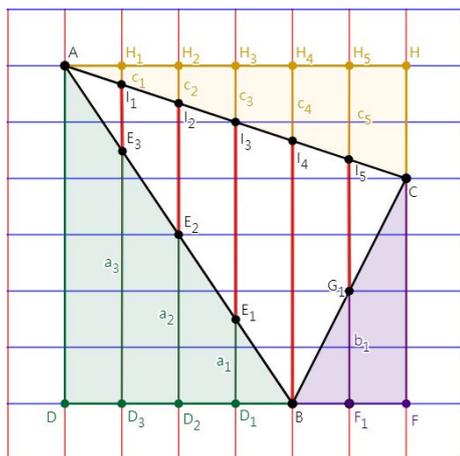


圖 6-1(鉛直和)

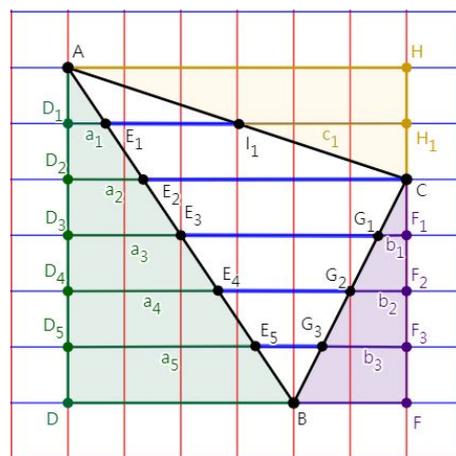


圖 6-1(水平和)

得圖 6-1 滿足鉛直和等於水平和結論。

2. 圖 6-2 (圖形邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍) 如下：

$$\text{鉛直和} = 3 \times 2 - (a_1 + c_1 + c_2) = 6 - 2.5 = 3.5 = 14 \times \frac{1}{4} = \text{圖 6-1 鉛直和} \times \frac{1}{4}$$

$$\text{水平和} = 3 \times 2 - (a_1 + a_2 + b_1) = 6 - 2.5 = 3.5 = 14 \times \frac{1}{4} = \text{鉛直和} = \text{圖 6-1 鉛直和} \times \frac{1}{4}$$

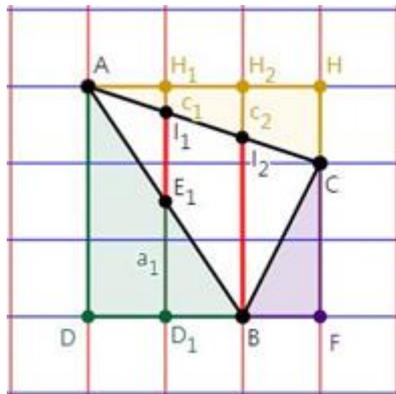


圖 6-2(鉛直和)

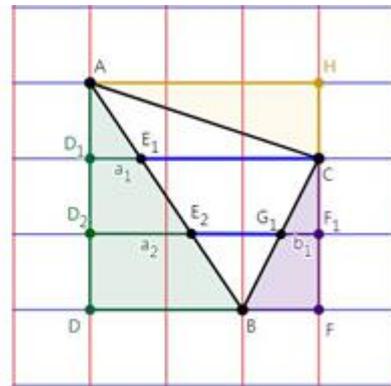


圖 6-2(水平和)

得圖 6-1 之邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍，三角形的鉛直和依然等於水平和，但總和變為  $\frac{1}{4}$  倍。

結論：觀察（一）圖形邊長變為 2 倍，鉛直和與水平和變為  $4 = 2^2$  倍與（二）圖形邊長變為  $\frac{1}{2}$  倍，鉛直和與水平和變為  $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$  倍，發現這個變化量和長度改變時面積變化量相同，所以推論鉛直和與水平和可能跟面積有某種關係。接下來想探究跟面積是否真的有關？有什麼關係？

### 九、計算研究動機中問題的面積

計算方法為以三角形頂點為界，將圖形補滿為矩形，先計算矩形面積，再扣除周圍直角三角形面積，即求得三角形的面積。

（一）研究動機中問題一：

圖 1-1 三角形面積計算如下：

$$\begin{aligned} & \Delta ABC \text{ 面積} \\ &= \text{矩形 } DFCH - \Delta ABD \text{ 面積} - \Delta BCF \text{ 面積} - \Delta ACH \text{ 面積} \\ &= 6 \times 5 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 5 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 30 - 4 - 5 - 9 \\ &= 12 = \text{鉛直和} = \text{水平和} \end{aligned}$$

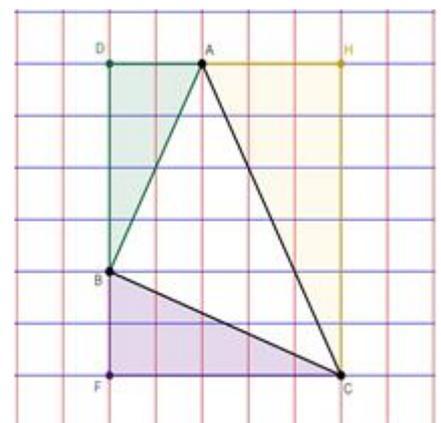


圖 1-1(面積)

(二) 研究動機中問題二：

圖 1-2 三角形面積計算如下：

$$\begin{aligned} & \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= \text{矩形 } ADFH - \triangle ABD \text{ 面積} - \triangle BCF \text{ 面積} - \triangle ACH \text{ 面積} \\ &= 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 5 - \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 36 - 12 - 5 - 3 \\ &= 16 = \text{鉛直和} = \text{水平和} \end{aligned}$$

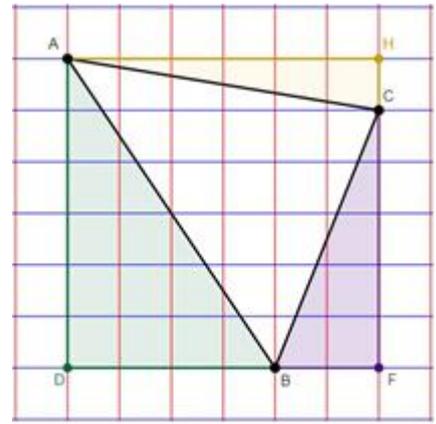


圖 1-2(面積)

結論：發現研究動機中問題的三角形面積=鉛直和=水平和

## 十、三角形邊在格線上

(一) 驚奇的發現

發現「面積 = 鉛直和 = 水平和」後，我開心地請同學任意畫一個頂點在格子點上的三角形，正想分享這個發現時，竟意外發現同學畫的這個三角形(圖 7-1 邊在鉛直格線上) 鉛直和 ≠ 水平和。

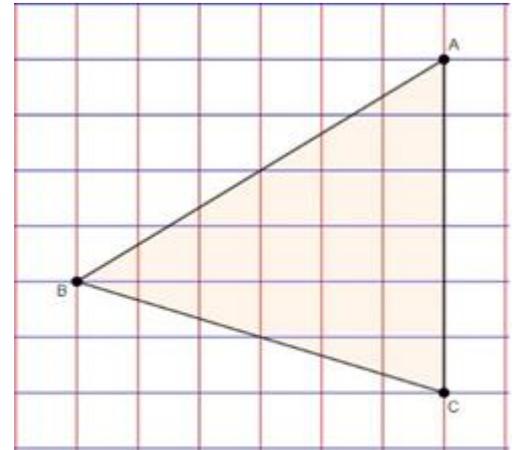


圖 7-1 邊在鉛直格線上

計算如下：

由  $\triangle AD_1E_1 \sim \triangle AD_2E_2 \sim \triangle AD_3E_3 \sim \triangle AD_4E_4$

$\sim \triangle AD_5E_5 \sim \triangle ADB$ ，

得  $1:2:3:4:5:6 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : 4$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{6}{3}, a_4 = \frac{8}{3}, a_5 = \frac{10}{3}$$

由  $\triangle CF_1G_1 \sim \triangle CF_2G_2 \sim \triangle CF_3G_3 \sim \triangle CF_4G_4$

$\sim \triangle CF_5G_5 \sim \triangle CFB$ ，

得  $1:2:3:4:5:6 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4 : b_5 : 2$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{2}{3}, b_3 = \frac{3}{3}, b_4 = \frac{4}{3}, b_5 = \frac{5}{3}$$

鉛直和

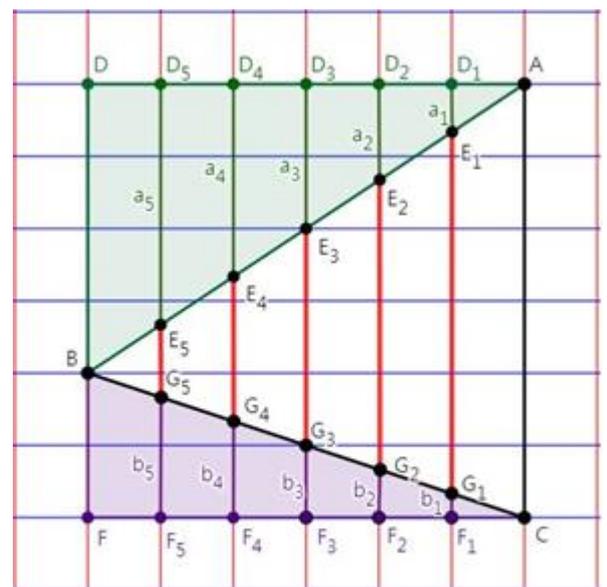


圖 7-1(鉛直和)

$$\begin{aligned}
&=6 \times 5 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) \\
&=30 - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{6}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right) \\
&=30 - 15 = 15
\end{aligned}$$

由  $\triangle BD_1E_1 \sim \triangle BD_2E_2 \sim \triangle BD_3E_3 \sim \triangle BDA$

$$\text{得 } 1:2:3:4 = a_1 : a_2 : a_3 : 6 \Rightarrow a_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{6}{2}, a_3 = \frac{9}{2}$$

由  $\triangle BF_1G_1 \sim \triangle BFC$ ，得  $1:2 = b_1 : 6 \Rightarrow b_1 = \frac{6}{2} = 3$

水平和

$$\begin{aligned}
&=6 \times 5 - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1) = 30 - \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{2} + \frac{9}{2} + 3\right) \\
&=30 - 12 = 18 \neq 15
\end{aligned}$$

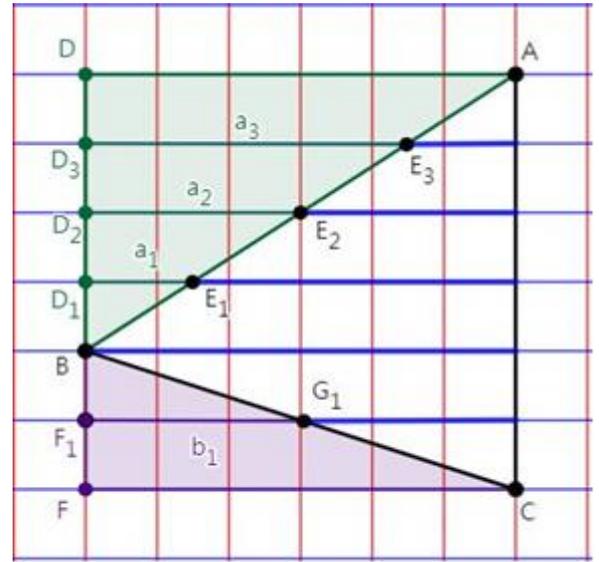


圖 7-1(水平和)

鉛直和  $\neq$  水平和

我趕緊算面積，計算如下： $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

得面積 = 水平和  $\neq$  鉛直和，並觀察圖 7-1(鉛直和)，推論可能是因為  $\overline{AC}$  邊在鉛直格線上，故須修正結論。我觀察：

$$\text{面積} - \text{鉛直和} = \text{水平和} - \text{鉛直和} = 18 - 15 = 3 \quad (\text{鉛直和少}3)$$

$\overline{AC}$  邊在鉛直格線上長為 6 單位

$$\Rightarrow \text{鉛直和減少的}3 \text{ 分配給邊在鉛直格線上每一單位，計算為 } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

推論若邊在格線上也要列入計算，每一單位計算為 0.5。假設結論修正為：

$$\text{面積} = \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5$$

令面積為  $A$ ，鉛直和為  $V$ ，水平和為  $H$ ，邊在鉛直格線長為  $VL$ ，邊在水平格線長為  $HL$ ，則

$$A = V + \frac{1}{2}VL = H + \frac{1}{2}HL \quad \dots\dots\dots (1) \text{式}$$

(二) 舉例測試

接著，我測試了一些例子，分別為圖 7-2 邊在水平格線上、圖 7-3 邊同時在鉛直格線與水平格線上。

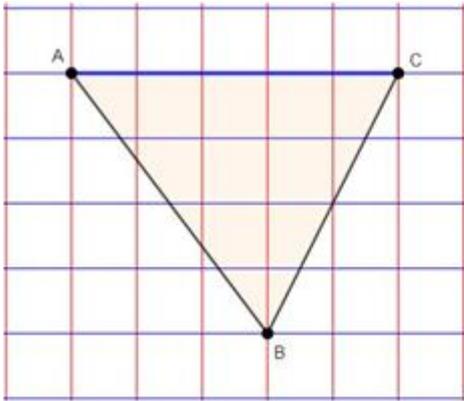


圖 7-2 邊在水平格線上

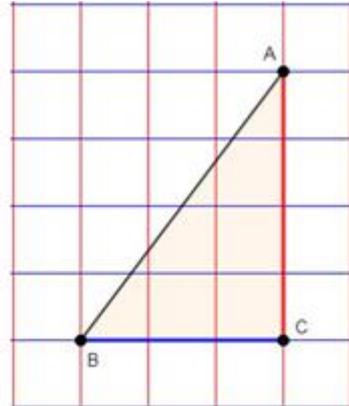


圖 7-3 邊同時在鉛直格線與水平格線上

1. 圖 7-2 邊在水平格線上計算如下：

由  $\triangle BD_1E_1 \sim \triangle BD_2E_2 \sim \triangle BDA$ ，

$$\text{得 } 1:2:3 = a_1 : a_2 : 4 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = \frac{8}{3}$$

由  $\triangle BF_1G_1 \sim \triangle BFC$ ，

$$\text{得 } 1:2 = b_1 : 4 \Rightarrow b_1 = \frac{4}{2} = 2$$

鉛直和 + 邊在鉛直格線長  $\times 0.5$

$$= 4 \times 4 - (a_1 + a_2 + b_1) + 0$$

$$= 16 - \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 2\right) = 16 - 6 = 10$$

由  $\triangle AD_1E_1 \sim \triangle AD_2E_2 \sim \triangle AD_3E_3 \sim \triangle ADB$ ，

$$\text{得 } 1:2:3:4 = a_1 : a_2 : a_3 : 3 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{6}{4}, a_3 = \frac{9}{4}$$

由  $\triangle CF_1G_1 \sim \triangle CF_2G_2 \sim \triangle CF_3G_3 \sim \triangle CFB$ ，

$$\text{得 } 1:2:3:4 = b_1 : b_2 : b_3 : 2 \Rightarrow b_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{2}{2}, b_3 = \frac{3}{2}$$

水平和 + 邊在水平格線長  $\times 0.5$

$$= 5 \times 3 - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3) + 5 \times 0.5$$

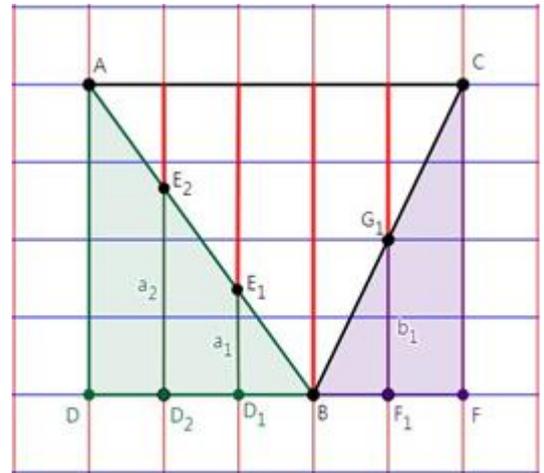


圖 7-2(鉛直和)

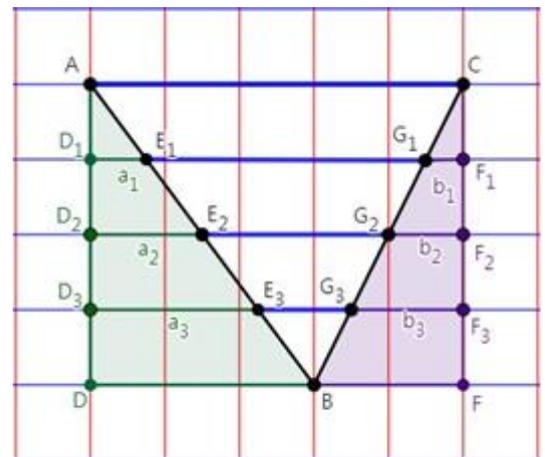


圖 7-2(水平和)

$$=15 - \left(\frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2}\right) + 2.5 = 10$$

$$\Delta ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$$

得面積=鉛直和+邊在鉛直格線長 $\times 0.5$  =水平和+邊在水平格線長 $\times 0.5$

2. 圖 7-3 邊同時在鉛直格線與水平格線上計算如下：

由  $\Delta BC_1A_1 \sim \Delta BC_2A_2 \sim \Delta BCA$ ，

$$\text{得 } 1:2:3 = \overline{A_1C_1} : \overline{A_2C_2} : 4 \Rightarrow \overline{A_1C_1} = \frac{4}{3}, \overline{A_2C_2} = \frac{8}{3}$$

鉛直和+邊在鉛直格線長 $\times 0.5$

$$= \overline{A_1C_1} + \overline{A_2C_2} + \overline{AC} \times 0.5 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 4 \times 0.5 = 6$$

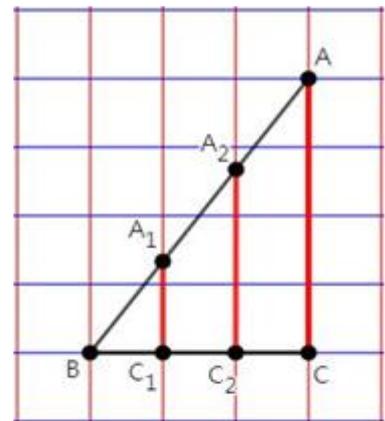


圖 7-3(鉛直和)

由  $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2 \sim \Delta AB_3C_3 \sim \Delta ABC$ ，

$$\text{得 } 1:2:3:4 = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2} : \overline{B_3C_3} : 3$$

$$\Rightarrow \overline{B_1C_1} = \frac{3}{4}, \overline{B_2C_2} = \frac{6}{4}, \overline{B_3C_3} = \frac{9}{4}$$

水平和+邊在水平格線長 $\times 0.5$

$$= \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \overline{B_3C_3} + \overline{BC} \times 0.5 = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{9}{4} + 3 \times 0.5 = 6$$

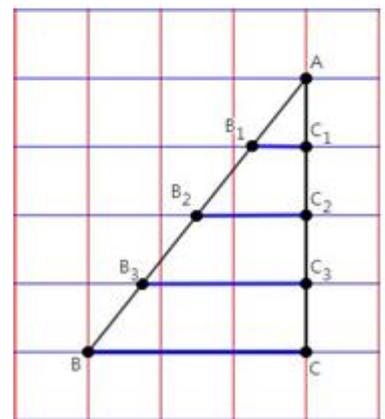
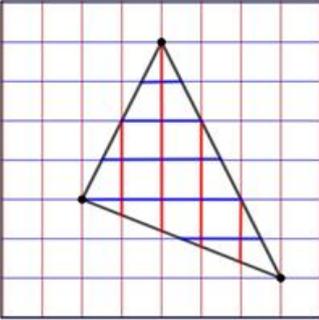
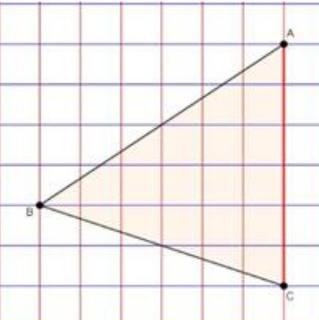
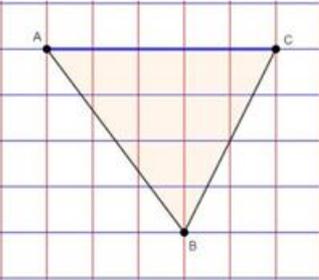
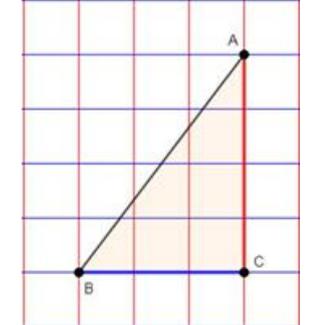


圖 7-3(水平和)

$$\Delta ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

得面積=鉛直和+邊在鉛直格線長 $\times 0.5$  =水平和+邊在水平格線長 $\times 0.5$

進行了一些舉例都滿足此結論，整理如下表：

	圖形	$A = V + \frac{1}{2}VL = H + \frac{1}{2}HL$	$VL$ 與 $HL$
邊不在格線上 (圖 1-1)		滿足	$VL = HL = 0$
邊在鉛直格線上 (圖 7-1)		滿足	$VL = 0$
邊在水平格線上 (圖 7-2)		滿足	$HL = 0$
邊同時在鉛直格線與水平格線上 (圖 7-3)		滿足	$VL \neq 0$ $HL \neq 0$

## 伍、研究結果

- 一、找出研究動機中問題的答案為格子點上的三角形鉛直和=水平和。
- 二、對任意「邊不在格線上」的格子點上三角形有面積=鉛直和=水平和的結論。
- 三、對任意格子點上的三角形結論修正為：

$$\text{面積} = \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5$$

## 陸、討論

### 一、證明任意三角形皆滿足

由前面觀察得知，任意三角形可以看成一個外接標準矩形，扣掉多個標準直角三角形。如圖 8-1：

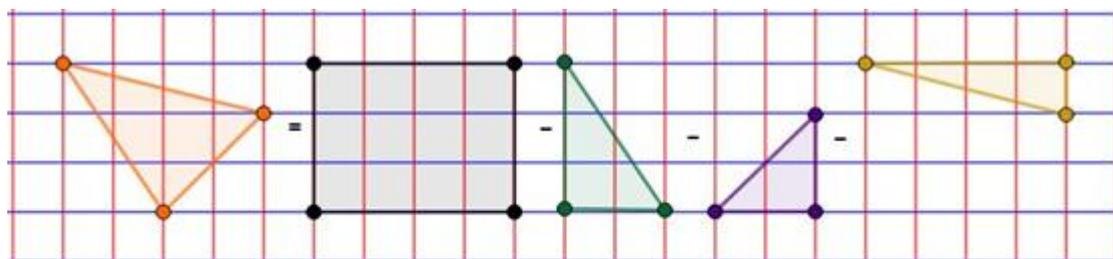


圖 8-1

所以我將證明分成三個部份：

1. 標準矩形滿足(1)式
2. 標準直角三角形滿足(1)式
3. 如果標準矩形與標準直角三角形都滿足(1)式，則標準矩形扣除標準直角三角形的三角形也滿足(1)式，故任意三角形滿足(1)式。

此處(1)式為面積=鉛直和+邊在鉛直格線長 $\times 0.5$  =水平和+邊在水平格線長 $\times 0.5$ 。

#### (一) 證明：標準矩形滿足(1)式

令標準矩形頂點  $C$  為原點，長為  $a$ ，寬為  $b$ ，因為四頂點皆在格子點上，故  $a$ 、 $b$  皆為正整數。

標準矩形  $ABCD$  面積  $=ab$

鉛直和+邊在鉛直格線長 $\times 0.5$  (如圖 8-2)

$$=b \times 0.5 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{a-1} + b \times 0.5$$

$$=b + b \times (a-1) = b + ab - b = ab$$

水平和+邊在水平格線長 $\times 0.5$  (如圖 8-3)

$$=a \times 0.5 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{b-1} + a \times 0.5$$

$$=a + a \times (b-1) = a + ab - a = ab$$

得面積=鉛直和+邊在鉛直格線長 $\times 0.5$

$$=水平和+邊在水平格線長 $\times 0.5 = ab$$$

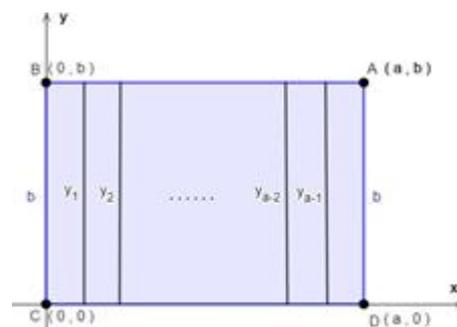


圖 8-2

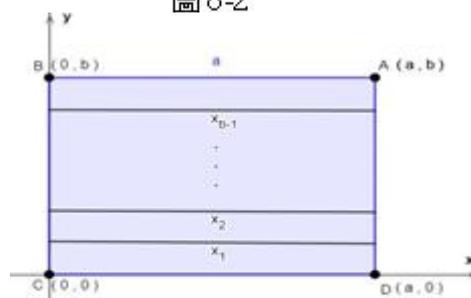


圖 8-3

(二) 證明：標準直角三角形滿足(1)式

在不失一般性下，令標準直角三角形  $\triangle ABC$  的  $\angle B$  為原點，兩股為  $a$ 、 $b$ ，因為三頂點皆在格子點上，故  $a$ 、 $b$  皆為正整數，如圖 8-4。

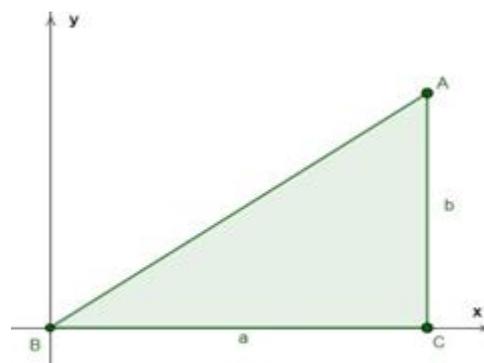


圖 8-4

$$\text{標準直角三角形 } \triangle ABC \text{ 面積} = a \times b \div 2 = \frac{1}{2}ab$$

由  $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle A_2BC_2 \sim \dots \sim \triangle A_{a-1}BC_{a-1} \sim \triangle ABC$ ，

得  $1 : 2 : \dots : a-1 : a = y_1 : y_2 : \dots : y_{a-1} : b$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{b}{a}, y_2 = \frac{2 \times b}{a}, \dots, y_{a-1} = \frac{(a-1) \times b}{a}$$

鉛直和+邊在鉛直格線長  $\times 0.5$  (如圖 8-5)

$$= y_1 + y_2 + \dots + y_{a-1} + b \times 0.5$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{2 \times b}{a} + \dots + \frac{(a-1) \times b}{a} + b \times 0.5$$

$$= [1 + 2 + \dots + (a-1)] \times \frac{b}{a} + b \times \frac{1}{2} = \frac{[1 + (a-1)] \times (a-1)}{2} \times \frac{b}{a} + b \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{a \times (a-1)}{2} \times \frac{b}{a} + b \times \frac{1}{2} = \frac{(a-1) \times b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{ab - b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}ab$$

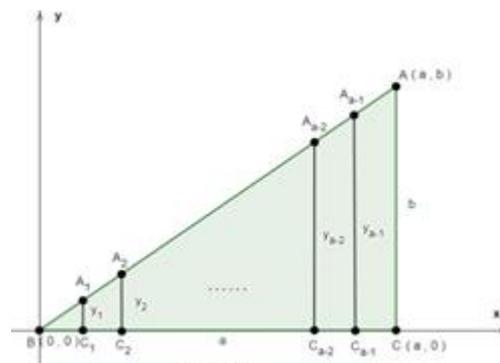


圖 8-5

由  $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \dots \sim \triangle AB_{b-1}C_{b-1} \sim \triangle ABC$ ，

得  $1 : 2 : \dots : b-1 : b = x_1 : x_2 : \dots : x_{b-1} : a$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a}{b}, x_2 = \frac{2 \times a}{b}, \dots, x_{b-1} = \frac{(b-1) \times a}{b}$$

水平和+邊在水平格線長  $\times 0.5$  (如圖 8-6)

$$= x_1 + x_2 + \dots + x_{b-1} + a \times 0.5$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{2 \times a}{b} + \dots + \frac{(b-1) \times a}{b} + a \times 0.5$$

$$= [1 + 2 + \dots + (b-1)] \times \frac{a}{b} + a \times \frac{1}{2} = \frac{[1 + (b-1)] \times (b-1)}{2} \times \frac{a}{b} + a \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{b \times (b-1)}{2} \times \frac{a}{b} + a \times \frac{1}{2} = \frac{(b-1) \times a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{ab - a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2}ab$$

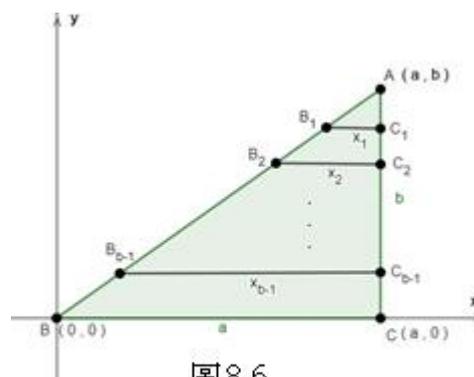


圖 8-6

$$\text{得面積} = \text{鉛直和+邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和+邊在水平格線長} \times 0.5 = \frac{1}{2}ab$$

(三) 證明：如果標準矩形與標準直角三角形都滿足(1)式，則標準矩形扣除標準直角三角

形的三角形也滿足(1)式，故任意三角形滿足(1)式。

在不失一般性下，任意三角形與標準矩形依兩者頂點的重合情形可分為：三頂點重合、兩頂點重合、一頂點重合。我們分別以下面四種可能的情形進行說明：

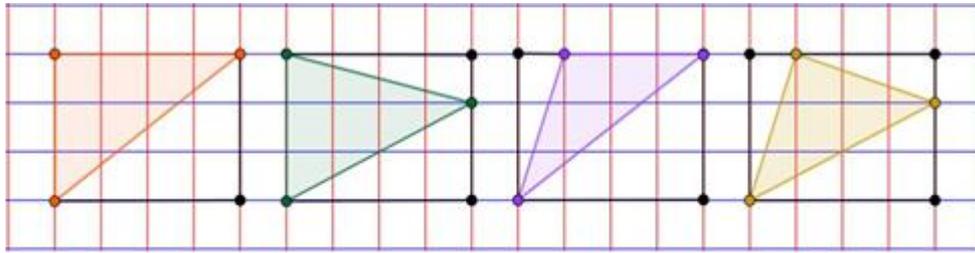


圖 8-7.1

圖 8-7.2

圖 8-7.3

圖 8-7.4

1. 圖 8-7.1 為標準直角三角形，由（二）已得證明。
2. 如圖 8-8，標準矩形  $BCDE$  扣除兩標準直角三角形  $\triangle ABC$  與  $\triangle ADE$  為  $\triangle ABE$ 。

由  $BCDE$  為標準矩形與  $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$  為標準直角三角形，得

$$\begin{aligned} \text{矩形 } BCDE \text{ 面積} &= \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 \\ &= a(b+e) = ab + ae \end{aligned}$$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 = \frac{1}{2}ab$$

$$\triangle ADE \text{ 面積} = \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 = \frac{1}{2}ae$$

$$(1) \triangle ABE \text{ 面積} = \text{矩形 } BCDE \text{ 面積} - \triangle ABC \text{ 面積} - \triangle ADE \text{ 面積} = ab + ae - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ae$$

$$\begin{aligned} (2) \triangle ABE \text{ 鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 &= \text{矩形 } BCDE \text{ 鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 \\ &\quad - (\triangle ABC \text{ 鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5) \\ &\quad - (\triangle ADE \text{ 鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5) \\ &= ab + ae - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ae \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \triangle ABE \text{ 水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 &= \text{矩形 } BCDE \text{ 水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 \\ &\quad - (\triangle ABC \text{ 水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5) \\ &\quad - (\triangle ADE \text{ 水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5) \\ &= ab + ae - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ae \end{aligned}$$

得  $\triangle ABE$  面積 = 鉛直和 + 邊在鉛直格線長  $\times 0.5$  = 水平和 + 邊在水平格線長  $\times 0.5$

故圖 8-7.2 滿足(1)式

3. 如圖 8-9，標準矩形  $ACBE$  扣除兩標準直角三角形  $\triangle ABC$  與  $\triangle BDE$  為  $\triangle ABD$ ，

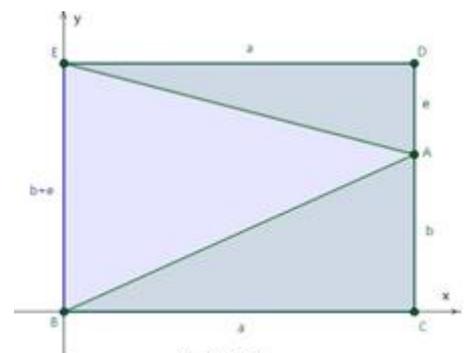


圖 8-8

同前圖 8-8 計算方法，得：

$$\begin{aligned} \Delta ABD \text{ 面積} &= \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 \\ &= \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae \end{aligned}$$

故  $\Delta ABD$  滿足(1)式，即圖 8-7.3 滿足(1)式

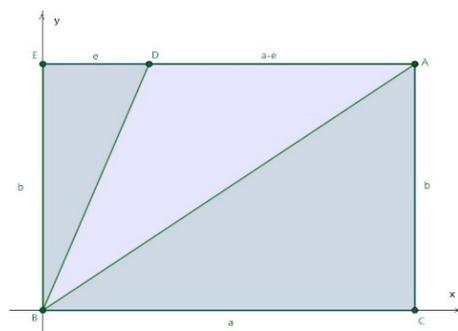


圖 8-9

4. 如圖 8-10，標準矩形  $BCDE$  扣除三個標準直角三角形  $\Delta ABC$ 、

$\Delta ADF$  與  $\Delta BEF$  為  $\Delta ABF$ ，同前圖 8-8 計算方法，得：

$$\begin{aligned} \Delta ABF \text{ 面積} &= \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 \\ &= \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 = \frac{1}{2}af - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bd \end{aligned}$$

故  $\Delta ABF$  滿足(1)式，即圖 8-7.4 滿足(1)式

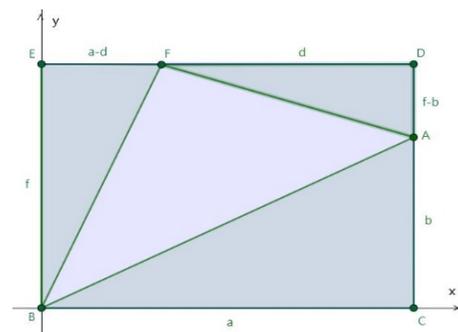


圖 8-10

由圖 8-7.1、圖 8-7.2、圖 8-7.3、圖 8-7.4 滿足(1)式得證 (三)。

由 (一)、(二)、(三) 得證任意三角形滿足

面積 = 鉛直和 + 邊在鉛直格線長  $\times 0.5$  = 水平和 + 邊在水平格線長  $\times 0.5$ 。

發現任意三角形皆滿足此結論(1)式後，我想試試簡單多邊形或是旅遊會用到的地圖—不規則形狀，看看(1)式是否依然成立？以便進行後續的推廣與應用。

## 二、是否能推廣至簡單多邊形？

因為簡單多邊形可切割為數個共邊的三角形[5]，如圖 9-1，所以只要證明「如果共邊的簡單  $n$  邊形  $P_n$  與任意三角形  $Q$  都滿足(1)式，則兩者合併的簡單  $n+1$  邊形  $P_{n+1}$  也滿足(1)式」，即可將(1)式推廣至簡單多邊形。例如圖 9-2 為  $n=4$ 。

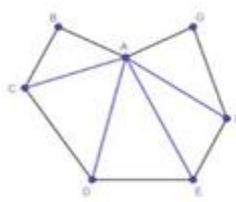


圖 9-1

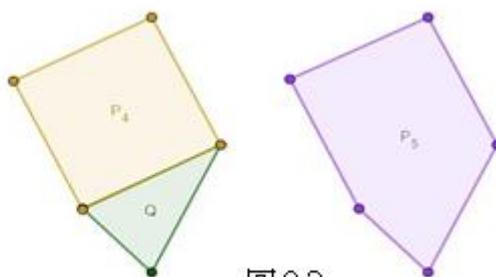


圖 9-2

令  $A_{P_n}$ 、 $V_{P_n}$ 、 $H_{P_n}$ 、 $VL_{P_n}$ 、 $HL_{P_n}$  分別為簡單  $n$  邊形  $P_n$  的面積、鉛直和、水平和、邊在鉛直格

線長、邊在水平格線長； $A_Q$ 、 $V_Q$ 、 $H_Q$ 、 $VL_Q$ 、 $HL_Q$  分別為任意三角形  $Q$  的面積、鉛直和、水平和、邊在鉛直格線長、邊在水平格線長； $VL$ 、 $HL$  分別為共邊落在鉛直格線長與共邊落在水平格線長。

我先以  $n=3$  去推論「如果共邊的簡單 3 邊形  $P_3$  與任意三角形  $Q$  都滿足(1)式，則兩者合併的簡單 3+1 邊形  $P_4$  也滿足(1)式」，如下：

若  $n=3$ ， $P_3$  與  $Q$  為任意三角形，由前面證明知  $P_3$  與  $Q$  皆滿足(1)式，得

$$A_{P_3} = V_{P_3} + \frac{1}{2}VL_{P_3} = H_{P_3} + \frac{1}{2}HL_{P_3}, \quad A_Q = V_Q + \frac{1}{2}VL_Q = H_Q + \frac{1}{2}HL_Q$$

$$\Rightarrow (1) A_{P_4} = A_{P_3} + A_Q = V_{P_3} + \frac{1}{2}VL_{P_3} + V_Q + \frac{1}{2}VL_Q = H_{P_3} + \frac{1}{2}HL_{P_3} + H_Q + \frac{1}{2}HL_Q$$

$$(2) V_{P_4} + \frac{1}{2}VL_{P_4} = V_{P_3} + \frac{1}{2}(VL_{P_3} - VL) + V_Q + \frac{1}{2}(VL_Q - VL) + VL = V_{P_3} + \frac{1}{2}VL_{P_3} + V_Q + \frac{1}{2}VL_Q$$

$$(3) H_{P_4} + \frac{1}{2}HL_{P_4} = H_{P_3} + \frac{1}{2}(HL_{P_3} - HL) + H_Q + \frac{1}{2}(HL_Q - HL) + HL = H_{P_3} + \frac{1}{2}HL_{P_3} + H_Q + \frac{1}{2}HL_Q$$

$$\Rightarrow A_{P_4} = V_{P_4} + \frac{1}{2}VL_{P_4} = H_{P_4} + \frac{1}{2}HL_{P_4}$$

$\Rightarrow n=4$  滿足(1)式

接著，以數學歸納法[6]證明「簡單  $n$  邊形  $P_n$  滿足(1)式」，如下：

1. 若  $n=3$ ，因為  $P_3$  為任意三角形，所以由前面證明知  $P_3$  滿足(1)式，命題成立。
2. 設  $n=k \geq 3$ ，命題成立，則  $P_k$  滿足(1)式，得  $A_{P_k} = V_{P_k} + \frac{1}{2}VL_{P_k} = H_{P_k} + \frac{1}{2}HL_{P_k}$
3. 若  $n=k+1 > 3$ ，因為任意三角形  $Q$  也滿足(1)式，得  $A_Q = V_Q + \frac{1}{2}VL_Q = H_Q + \frac{1}{2}HL_Q$ ，則

$$\Rightarrow (1) A_{P_{k+1}} = A_{P_k} + A_Q = V_{P_k} + \frac{1}{2}VL_{P_k} + V_Q + \frac{1}{2}VL_Q = H_{P_k} + \frac{1}{2}HL_{P_k} + H_Q + \frac{1}{2}HL_Q$$

$$(2) V_{P_{k+1}} + \frac{1}{2}VL_{P_{k+1}} = V_{P_k} + \frac{1}{2}(VL_{P_k} - VL) + V_Q + \frac{1}{2}(VL_Q - VL) + VL = V_{P_k} + \frac{1}{2}VL_{P_k} + V_Q + \frac{1}{2}VL_Q$$

$$(3) H_{P_{k+1}} + \frac{1}{2}HL_{P_{k+1}} = H_{P_k} + \frac{1}{2}(HL_{P_k} - HL) + H_Q + \frac{1}{2}(HL_Q - HL) + HL = H_{P_k} + \frac{1}{2}HL_{P_k} + H_Q + \frac{1}{2}HL_Q$$

$$\Rightarrow A_{P_{k+1}} = V_{P_{k+1}} + \frac{1}{2}VL_{P_{k+1}} = H_{P_{k+1}} + \frac{1}{2}HL_{P_{k+1}}$$

$\Rightarrow n=k+1$  滿足(1)式，命題成立。

由數學歸納法得本命題成立，故本研究的方法可以推廣至簡單多邊形。

### 三、是否可以應用於求地圖上的面積？

將(1)式推廣到簡單多邊形後，我想起曾經和阿公到台中公園散步時，阿公說：「台中公園這麼大，如果要量公園面積不知怎麼量？」我想公園四周的道路都是直線，因此公園是個被道路圍成的簡單多邊形，於是，我決定將研究結論應用於求台中公園面積。



圖 10-1

(一) 首先，我先下載 google map 上台中公園的地圖，依公園四周道路畫出直線，得成簡單多邊形的台中公園圖形，如圖 10-1。

(二) 接著，透過方格膠板(1 單位長為實際 20 公尺)將台中公園圖形畫在方格紙上，如圖 10-2。

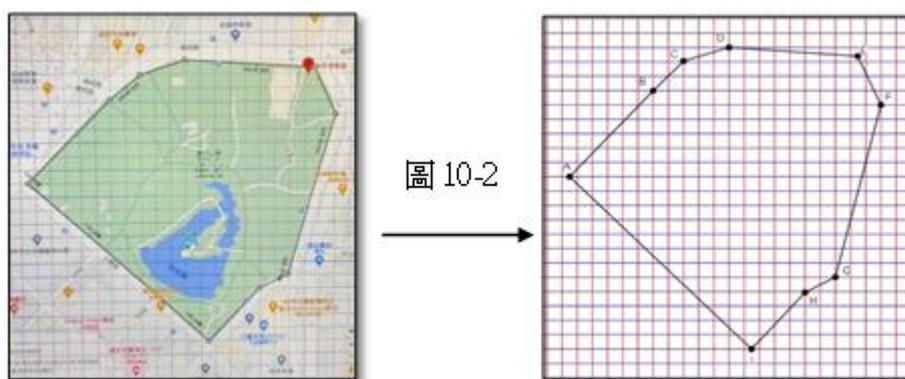


圖 10-2

(三) 將格子縮小  $\frac{1}{2}$  倍 (1 單位長為實際 10 公尺)，使台中公園所形成的簡單多邊形頂點都在格子點上，如圖 10-3。

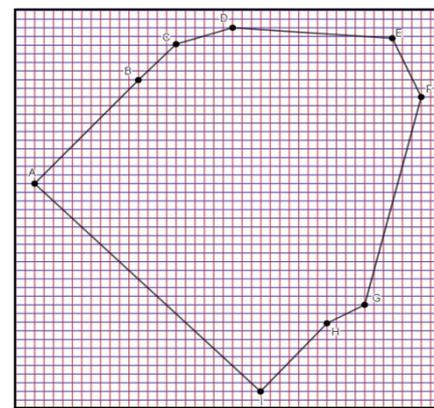


圖 10-3

(四) 用簡潔的估算法計算出鉛直和後，因為台中公園所形成的簡單多邊形並無邊在鉛直格線上，所以得面積=鉛直和  
 $=1042 \times 1 + 40 \times 0.5 = 1062$  (1 單位長為 10 公尺)，故台中公園面積約為 106200 平方公尺。

(五) 在網路上查得台中公園實際面積約為 108724 平方公尺，

與我計算結論相差 6524 平方公尺，誤差約 2.3%。以統計學來說，屬於可接受的範圍，故本推廣應用在地圖上面積的估算，是可接受，並符合小學生可操作的簡便方法。後續的研究或許可以多比對幾個不同的地圖面積資料，確認誤差值的範圍，再以此誤差來推論實際面積的範圍，進而得到更準確的面積估算值。

## 柒、結論

這次的研究，從科學月刊的一道題目開始，由於格子點上的三角形鉛直和等於水平和引發了我的研究興趣，我透過各種計算法計算、觀察、推論、檢驗、修正、再檢驗、論證、推廣和應用的探究過程，獲得主要研究結果如下：

- 一、科學月刊中的原命題，格子點上的三角形鉛直和=水平和。
- 二、使用估算法計算三角形鉛直和與水平和雖然簡便，但易產生誤差。相對而言，相似形方法雖然計算較繁複，但卻能精準地算出三角形鉛直和與水平和。
- 三、對任意「邊不在格線上」的格子點上三角形有**面積=鉛直和=水平和**的結論。
- 四、對任意格子點上的三角形結論修正為：

$$\text{面積}=\text{鉛直和}+\text{邊在鉛直格線長}\times 0.5=\text{水平和}+\text{邊在水平格線長}\times 0.5$$

- 五、此結論可推廣到簡單多邊形，並應用於估算地圖上面積。
- 六、未來研究方向：目前此結論除了格子點上的任意三角形外，也可推廣到格子點上的簡單多邊形。但若圖形為格子點上有洞的多邊形，如圖 11-1，是否依然滿足此結論？或者會有什麼新的規律呢？另外，若將圖形推廣到非格子點上多邊形或三維空間多面體，會有什麼發現呢？這些都是未來可以研究的方向。

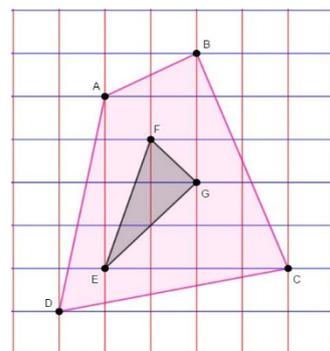


圖 11-1

研究過程中我畫了好幾百個三角形，訓練了耐心與毅力，但其中我覺得最重要的是觀察與思考，這樣才能在數百個三角形中逐漸找到討論的脈絡與發現修正方法，並找出正確結論，這一路的研究真是讓我經歷了一趟數學有趣的探索之旅。

## 捌、參考資料及附錄

- 一、游森棚（2015）。三角形中的格線。《科學研習月刊》。第 54 卷第 1 期，49。
- 二、康軒文教事業（2019）。《國小數學第 6 冊第 8 單元數格子算面積》。新北市：康軒。
- 三、吳作樂，吳秉翰（2017）。《圖解向量與解析幾何》。台北市：五南。
- 四、蔡聰明（1994）。談求面積的 Pick 公式。《科學月刊》。第 25 第 10，749。
- 五、數學能力開發研究會（2017）。《史上最強圖解數學》。新北市：漢湘。
- 六、數學歸納法。《維基百科》。取自 [zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BD%92%E7%BA%B3%E6%B3%95](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BD%92%E7%BA%B3%E6%B3%95)
- 七、林天相（2015）。國小數學 1-5-3 數格子算面積。《學習吧》。取自 [www.learnmode.net/flip/video/5978](http://www.learnmode.net/flip/video/5978)

## 【評語】 080402

本作品從科學研習月刊的一道數學題出發，探討三頂點在格子點上的任意三角形，其內部以及邊上所包含之鉛直格線長總和與水平格線長總和及此三角形面積之間的關係。以下是評審委員對此作品的建議與評析：

1. 作者歷經估算法、剪紙法、相似形法，發現格子點上任意三角形鉛直格線長總和與水平格線長總和相等，整個研究歷程清晰呈現、段落分明，值得讚許。
2. 作品「以具體實例台中公園來說明如何將本研究應用於估算地圖上面積」強化了本研究成果的可應用性！
3. 建議作者應從兩邊都在格線上的格點三角形出發，討論鉛直格線長總和與水平格線長總和以及斜邊上所合格點數的關係，這樣應可得到更完整的結果。

## 作品簡報



方格告訴我的秘密~  
探討三角形的格線

國小組 數學科



## 摘要



本篇研究由科學研習月刊中一道「計算三角形內格線長總和」的題目出發，最後竟然發現一種新的計算格子點上簡單多邊形<sup>1</sup>面積的方法，即：

$$\text{面積} = \text{鉛直和}^2 + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和}^3 + \text{邊在水平格線長} \times 0.5,$$

並將此關係式應用於地圖上求面積。

- 1 請參閱名詞定義(五)
- 2 請參閱名詞定義(一)
- 3 請參閱名詞定義(二)



## 研究動機

在和同學玩釘板時，想起在科學研習月刊<sup>[1]</sup>中發現一個有趣的數學題目，題目是：如圖1-1與圖1-2所示，請計算此兩圖中的三角形內部的紅線長總和與藍線長總和，各是多少呢？請問可以發現什麼？

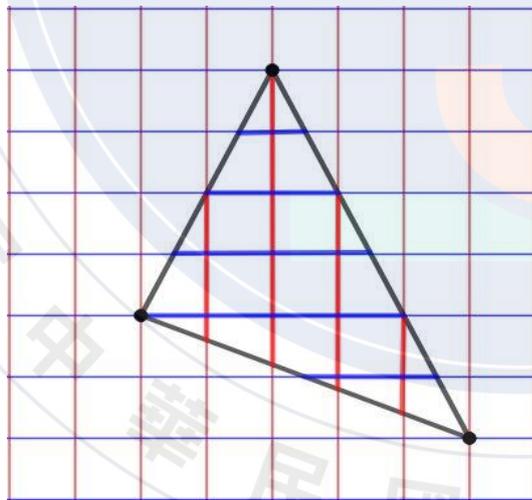


圖 1-1

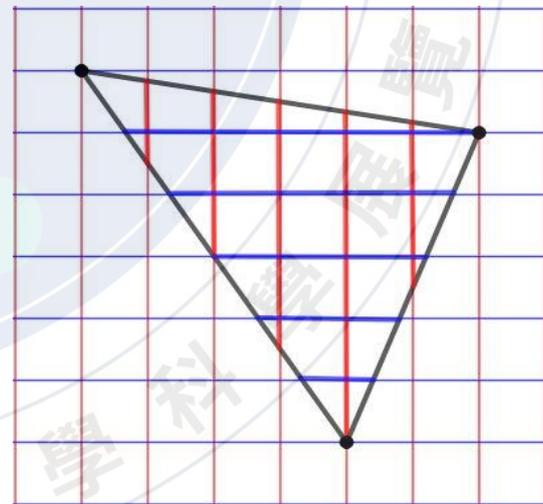


圖 1-2



# 研究架構與流程圖



## 以估算法找出研究動機中問題的答案

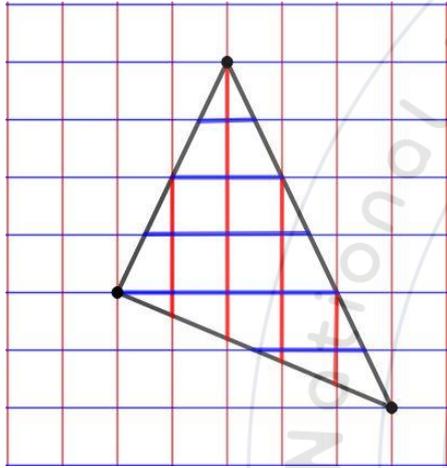


圖 1-1

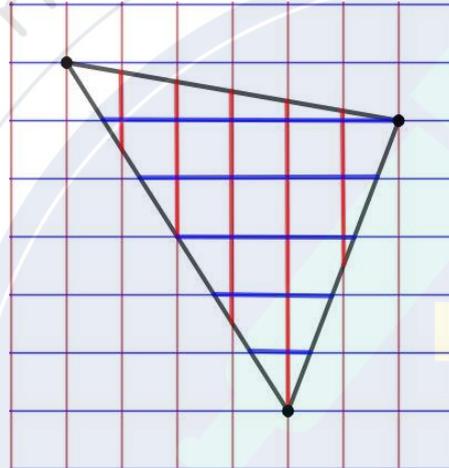


圖 1-2

估算法

圖 1-1 計算如下：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)} = 1 \times 10 + 0.5 \times 4 = 12$$

$$\text{水平和(藍線長總和)} = 1 \times 9 + 0.5 \times 6 = 12$$

鉛直和 = 水平和

圖 1-2 計算如下：

$$\text{鉛直和(紅線長總和)} = 1 \times 12 + 0.5 \times 8 = 16$$

$$\text{水平和(藍線長總和)} = 1 \times 12 + 0.5 \times 8 = 16$$

鉛直和 = 水平和

此兩個三角形的紅線長總和等於藍線長總和。

## 以估算法測試任意三角形是否也有同樣的結論

為了想確認估算法結論是否正確，我以角度觀點分別測試銳角、直角、鈍角三角形。又因為邊上若有格子點，則不完整的格線長較少，估算的誤差亦會較小，所以輔以「邊上有格子點通過的邊數」進行舉例討論如下：



# 以估算法測試任意三角形是否也有同樣的結論



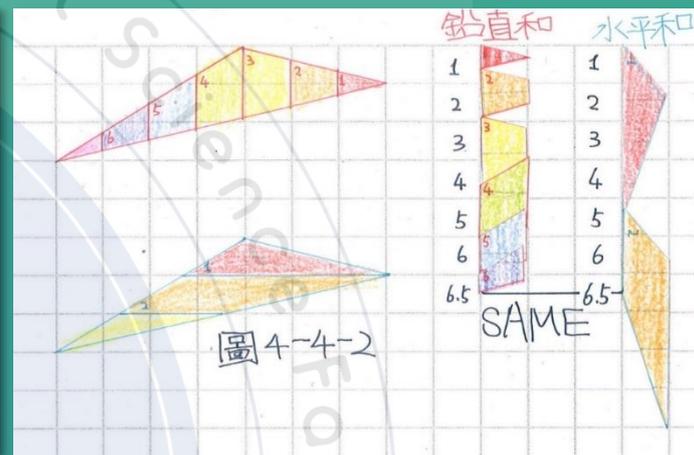
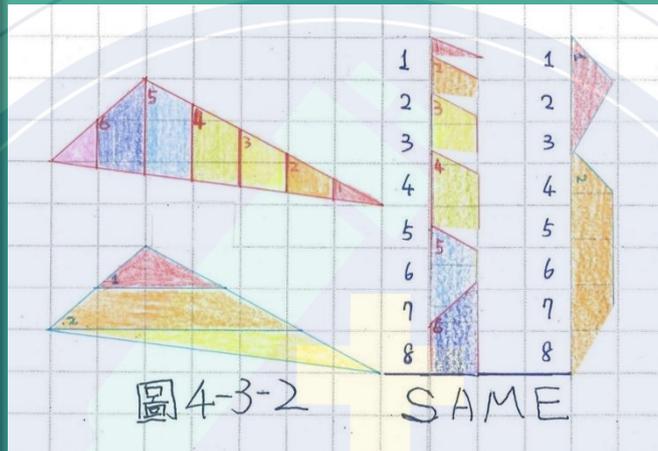
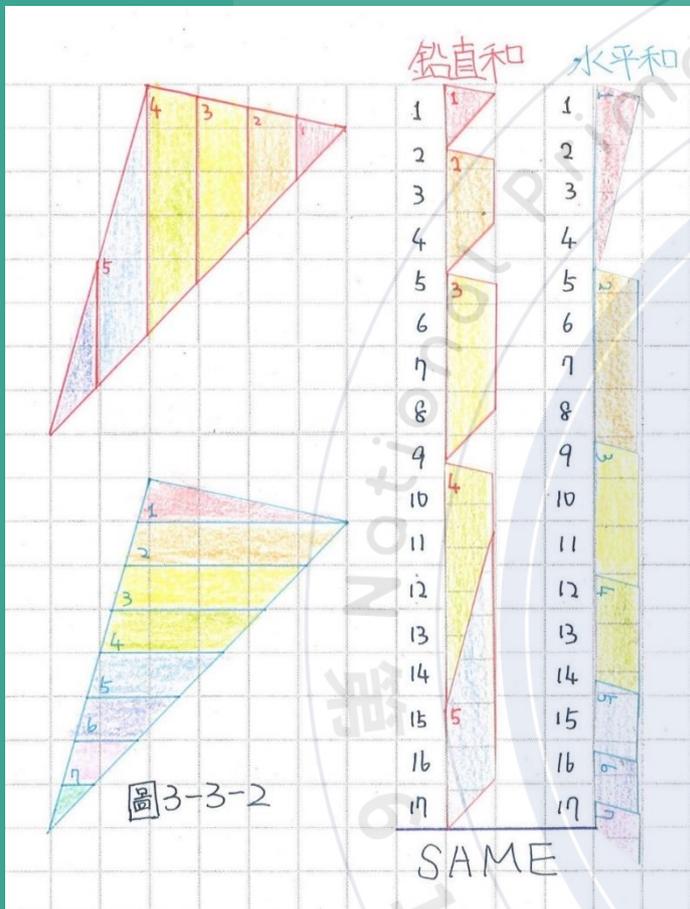
角度	銳角三角形			
格子點通過的邊數	3個邊有格子點	2個邊有格子點	1個邊有格子點	三邊上無格子點
圖形				
結論	相等	相等	相等	相等

角度	格子點通過的邊數	圖形	結論
直角三角形	3個邊有格子點		相等
	2個邊有格子點 (格子點在股與斜邊)		相等
	2個邊有格子點 (格子點在兩股)		相等
	1個邊有格子點 (格子點在斜邊)		相等
	1個邊有格子點 (格子點在股)		不相等
	1個邊有格子點 (格子點在股)		不相等
	三邊上無格子點		相等

角度	格子點通過的邊數	圖形	結論
鈍角三角形	3個邊有格子點		相等
	2個邊有格子點 (格子點在鈍角的一邊及其對邊)		相等
	2個邊有格子點 (格子點在鈍角的兩邊)		相等
	1個邊有格子點 (格子點在鈍角的對邊)		相等
	1個邊有格子點 (格子點在鈍角的一邊)		不相等
	3個邊上無格子點		相等
	3個邊上無格子點		不相等
	3個邊上無格子點		不相等



# 以剪紙法確認估算法不滿足的例子

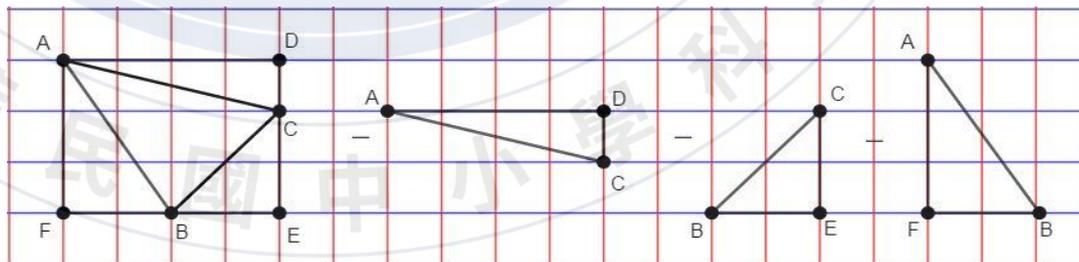


透過剪紙法確認估算法不滿足的例子皆吻合「鉛直和等於水平和」的結論。



# 以相似形法檢驗估算法不滿足的圖形

相似形法的計算概念為：





# 以相似形法檢驗估算法不滿足的圖形

### 檢驗圖 3-3-2

相似形法

鉛直和(紅線長總和)計算如下：

$$\text{由 } \triangle AD_1E_1 \sim \triangle ADB, \text{ 得 } 1:2 = a_1:8 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$\text{由 } \triangle BF_1G_1 \sim \triangle BF_2G_2 \sim \triangle BF_3G_3 \sim \triangle BF_4G_4 \sim \triangle BF_5G_5 \sim \triangle BFC,$$

$$\text{得 } 1:2:3:4:5:6 = b_1:b_2:b_3:b_4:b_5:7$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{7}{6}, b_2 = \frac{14}{6}, b_3 = \frac{21}{6}, b_4 = \frac{28}{6}, b_5 = \frac{35}{6}$$

$$\text{由 } \triangle AH_1I_1 \sim \triangle AH_2I_2 \sim \triangle AH_3I_3 \sim \triangle AHC,$$

$$\text{得 } 1:2:3:4 = c_1:c_2:c_3:1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{2}{4}, c_3 = \frac{3}{4}$$

鉛直和(紅線長總和)

$$= 8 \times 5 - (a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + c_1 + c_2 + c_3) = 17$$

水平和(藍線長總和)計算方法如上鉛直和，

得水平和(藍線長總和) = 17

故圖 3-3-2 三角形鉛直和 = 水平和 = 17，亦與剪紙法結果相同。

檢驗圖 4-3-2 與圖 4-3-3 亦有相同結論。

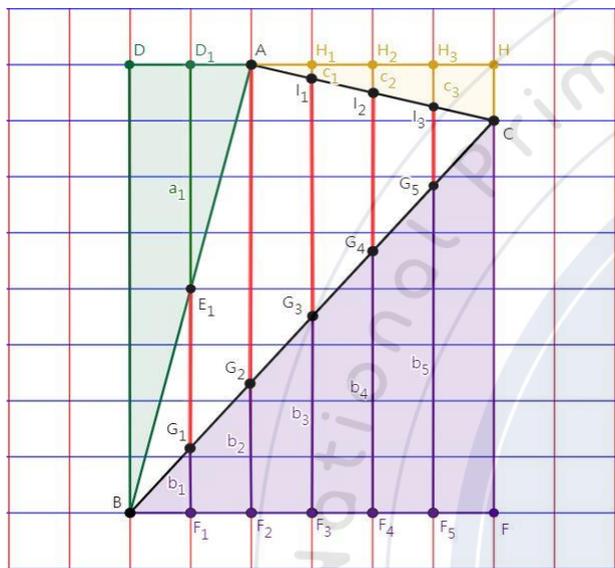


圖 3-3-2(鉛直和)

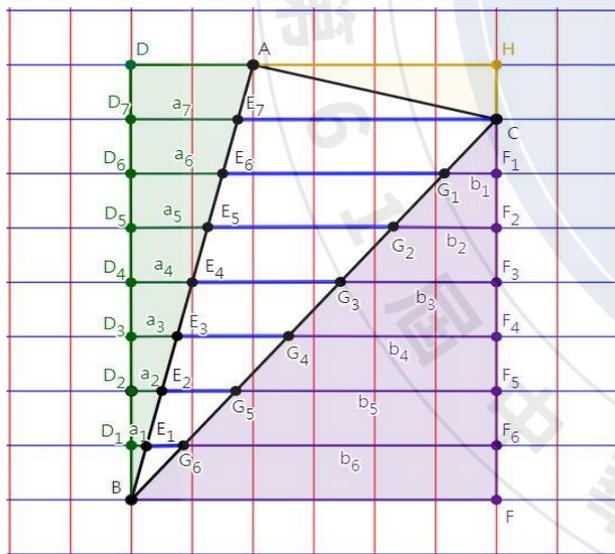


圖 3-3-2 (水平和)

# 縮放研究動機中問題的圖形邊長大小



研究動機中問題一		鉛直和 =12 =48 × $\frac{1}{4}$	相等
		水平和 =12 =48 × $\frac{1}{4}$	
研究動機中問題二		鉛直和 =16 =64 × $\frac{1}{4}$	相等
		水平和 =16 =64 × $\frac{1}{4}$	

以一格為1單位

邊長放大2倍



鉛直、水平和變大4倍

邊長縮小 $\frac{1}{2}$ 倍

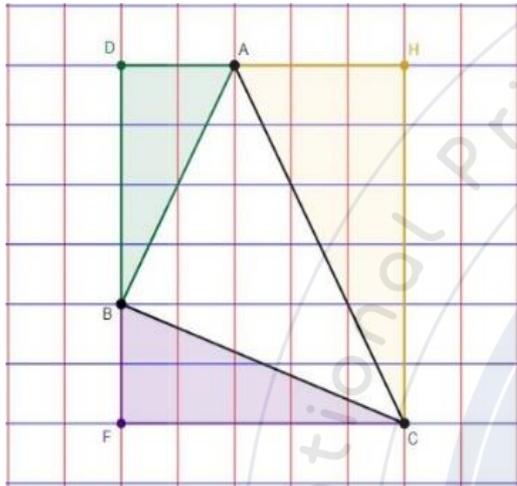


鉛直、水平和變小 $\frac{1}{4}$ 倍

研究動機中問題一		鉛直和 =48 =12 × 4	相等
		水平和 =48 =12 × 4	
研究動機中問題二		鉛直和 =64 =16 × 4	相等
		水平和 =64 =16 × 4	



# 計算研究動機中問題的面積



問題一(面積)

(一) 研究動機中問題一：

圖 1-1  $\Delta ABC$  面積

$$= \text{矩形 } DFCH - \Delta ABD \text{ 面積} - \Delta BCF \text{ 面積} - \Delta ACH \text{ 面積}$$

$$= 12 = \text{鉛直和} = \text{水平和}$$

(二) 研究動機中問題二：

同圖 1-1 求法，得圖 1-2  $\Delta ABC$  面積 = 16 = 鉛直和 = 水平和

結論：發現研究動機中問題的三角形 **面積 = 鉛直和 = 水平和**



# 三角形邊在格線上

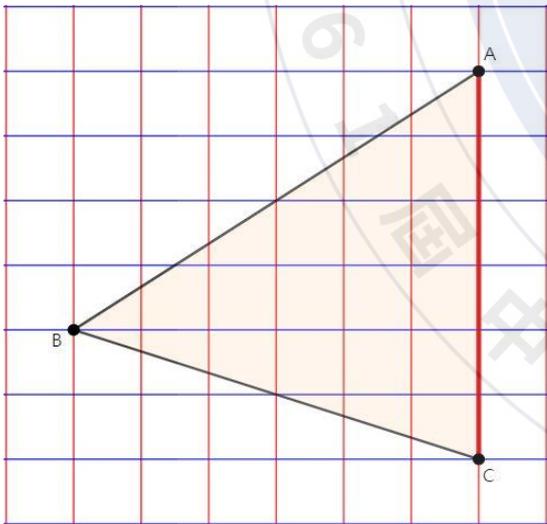


圖 7-1 邊在鉛直格線上

以 **相似形法** 計算，得鉛直和 = 15  $\neq$  水平和 = 18

$$\Delta ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18 \Rightarrow \text{面積} = \text{水平和} \neq \text{鉛直和}$$

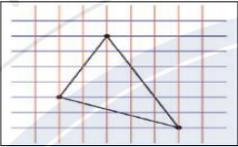
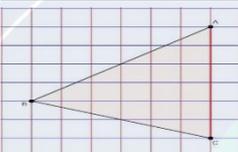
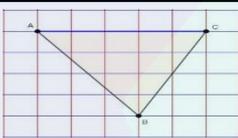
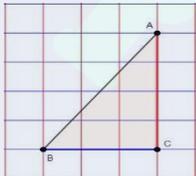
$$\text{鉛直和減少的3分配給邊在鉛直格線 } \overline{AC} \text{ 上的6單位} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

假設結論修正：

$$\text{面積} = \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5$$

$$= \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5 \quad \dots (1)$$

# 測試各類邊在格線上三角形是否也滿足結論(1)式

	圖形	$A = V + \frac{1}{2}VL = H + \frac{1}{2}HL$	VL與HL
無邊在格線上 (圖1-1)		$12 = 12 + 0 = 12 + 0 \Rightarrow$ 滿足	$VL = HL = 0$
邊在鉛直格線上 (圖7-1)		$18 = 18 + 0 = 15 + 3 \Rightarrow$ 滿足	$VL = 0$
邊在水平格線上		$10 = 7.5 + 2.5 = 10 + 0 \Rightarrow$ 滿足	$HL = 0$
邊同時在鉛直格線與 水平格線上		$6 = 4 + 2 = 4.5 + 1.5 \Rightarrow$ 滿足	$VL \neq 0$ $HL \neq 0$

4 請參閱符號對照表

# 證明任意三角形皆滿足結論(1)式

由前面觀察得知，任意三角形可以看成一個外接標準矩形，扣掉數個標準直角三角形，如圖8-1，所以我將證明分成三個部份：

1. 標準矩形滿足(1)式
2. 標準直角三角形滿足(1)式
3. 如果標準矩形與標準直角三角形都滿足(1)式，則標準矩形扣除標準直角三角形的三角形也滿足(1)式。

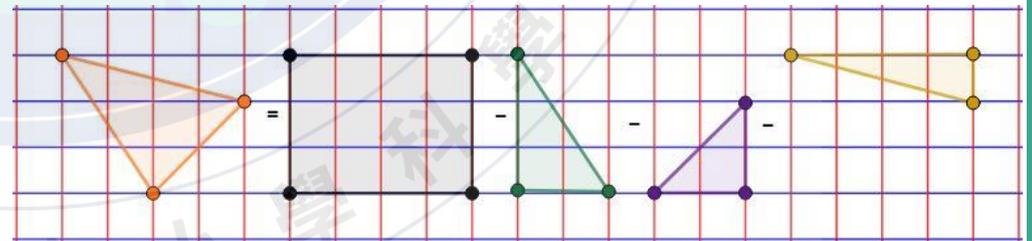


圖 8-1



# 推廣至簡單多邊形

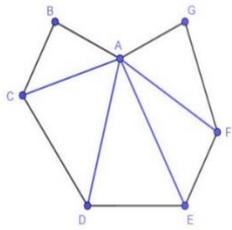


圖9-1 [2]

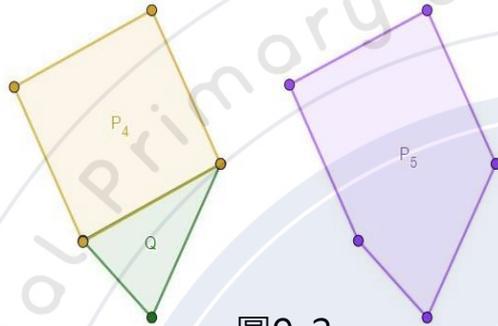


圖9-2



以數學歸納法<sup>[3]</sup>證明推廣至簡單多邊形



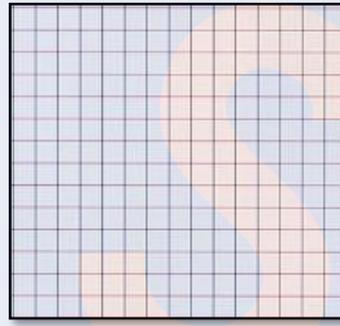
# 應用於求地圖上的面積



步驟1



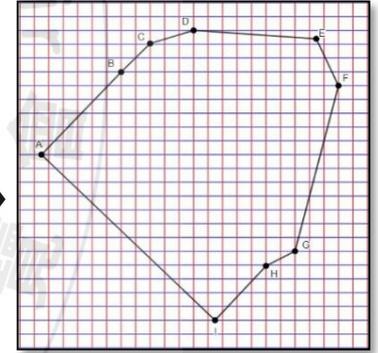
+



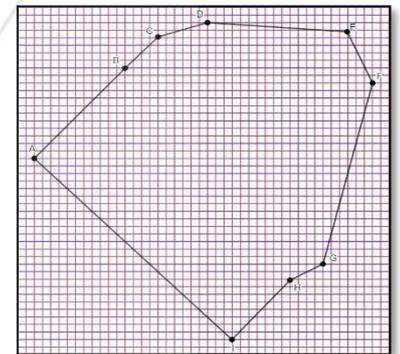
=



步驟2



步驟3



步驟3再細分格子，使台中公園所形成的簡單多邊形頂點都在格子點上，最後，步驟4用簡潔的估算法計算出鉛直和後，即得台中公園面積，且誤差只有2.3%。



# 應用於估算各地面積



地點	地圖	實際面積	估算面積	誤差
台中公園		108724 $m^2$	106200 $m^2$	2.30%
中正紀念堂		250000 $m^2$	246800 $m^2$	1.28%
故宮南院		703334 $m^2$	691875 $m^2$	1.63%



## 結論

- 一、科學月刊中的原命題，格子點上的三角形面積=鉛直和=水平和。
- 二、對任意格子點上的三角形結論修正為：

$$\text{面積} = \text{鉛直和} + \text{邊在鉛直格線長} \times 0.5 = \text{水平和} + \text{邊在水平格線長} \times 0.5$$

- 三、此結論可推廣到簡單多邊形，並應用於估算地圖上面積。



## 參考文獻

- 一、游森棚 (2015)。三角形中的格線。科學研習月刊。第54卷第1期，49。
- 二、蔡聰明 (1994)。談求面積的Pick公式。科學月刊。第25第10，749。
- 三、數學歸納法。維基百科。取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BD%92%E7%BA%B3%E6%B3%95>