中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080401

分組史考特

學校名稱：彰化縣溪湖鎮媽厝國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳柚蓁	黃于婕
小六 陳禹璇	張振嘉
小六 李靖琳	
小六 施芊亦	
小五 程品瑜	
小五 吳樂恩	

關鍵詞：數對、分組

摘要

本研究在探討各小組成員最多$n(n \geq 1)$人，且符合分組條件的情況下，所構成班上學生人數之最大值及計數方法，藉由觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，進而發現各小組成員最多n人時所構成學生人數最大值之計數方法，其解法可分成唯一解、多重解，並發展出計數公式與應用如下：

一、在$n \times n(2 \leq n \leq 6)$的方格表，只有$5 \times 5$有多重解法，其他都為唯一解。

二、在$n \times n(n > 6)$的方格表，都有多重解法。

三、學生人數最大值之計數公式為，將$\left(\mathrm{n}\text{ 的平方}\right)$減掉$\left(\mathrm{n}\text{ 除以每一列}(x)\text{所得之餘數}\right)$，並分別求出當n為偶數$(2k)$與n為奇數$(2k+1)$之公式。

四、辦活動分組時，可藉由本研究所發現對參與學生的快速編碼法，以確定活動參與人數的最大值，進而用來準確預估最多可報名人數。

壹、 研究動機

在日常生活中很多時候都需要進行分組活動，像是育樂營的活動都會將參加者分成好幾個小隊進行活動與競賽；或是體育課時需要分組進行練習與比賽；又或是課堂上老師需要進行分組報告與討論等，我們察覺每次分組模式時常是將人數平均分進每一組，或是認識的人總在同一組，這樣的分法太過了無新意與單調了。

以分組報告來說，有些人適合成員少的小組討論，這樣成員能夠充分表達自己的想法，也不會因為各式各樣的想法使思緒混亂，可以有一個清晰明瞭的方向；有些人則適合成員多的團體討論，彼此提出想法與意見，這樣可以避免太過單一的想法，也或許可以藉由不同的思緒碰撞出新的火花，而若總是與熟識的朋友同一組，意見的交流可能也會較單一，所碰撞出的火花也會較小。

因次，我們很好奇有沒有特別的分法可以每次都與不同的人分在同一組，同時每個小組人數可以不同。有一天，老師根據我們的想法給了一個有趣的題目，題目是：遊戲分成上、下午兩個階段，要求每組最多四人（允許一個人單獨為一組）。當遊戲結束後，每位學生先報出自己上午所屬小組分別的成員人數，再報出下午所屬小組分別的成員人數。結果發現任意二位學生報出的數對都不相同，請問該班最多可能有多少位學生？這個問題引起大家討論，希望能從中找到更方便且快速的計數方法。

貳、 名詞釋義

一、**編碼法：**為了方便表示學生分組情形，我們將分組情形以數對$(x，y)$編碼表示在方格表中，用x表示該學生上午所屬小組人數，y則表示該生下午所屬小組人數，前一個數字為列，後一個數字為行，表格最下方為第一列，列數由下往上依序遞增至第n列，表格最左側為第一行，行數由左往右依序遞增至第n行，且每位學生皆有一個不重複的數對，如圖 2-1-1。

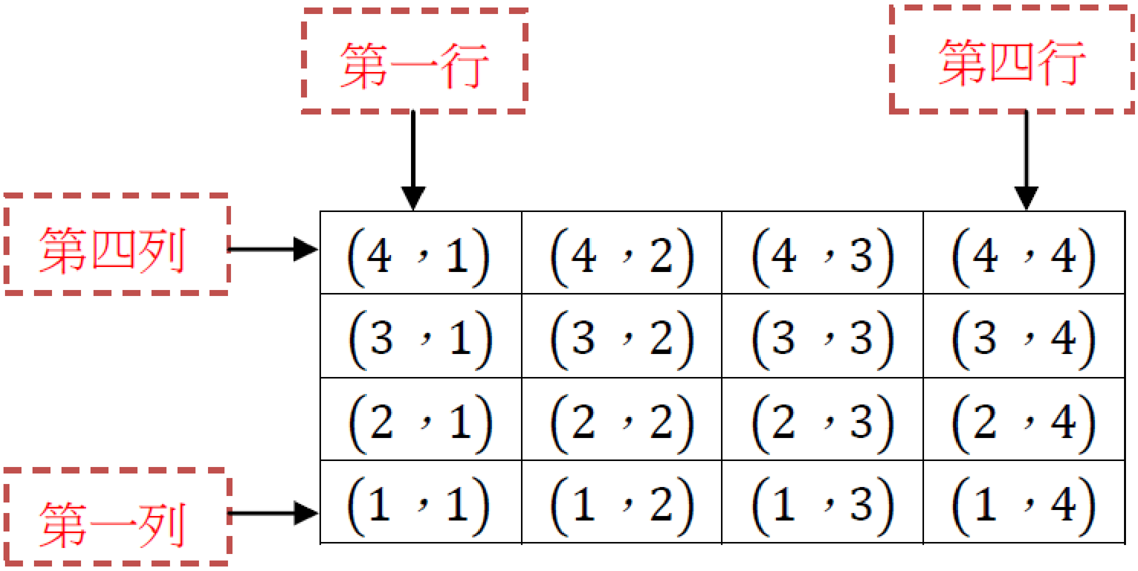


圖 2-1-1 以數對編碼法表示分組情形

二、$\boldsymbol{D_i^n}$：每組成員最多 n 人下，在第 i 列須刪除的數對數量，也就是 n 除以 i 後所留下的餘數，如D_5^6即是在每組最多6人下，第5列須刪除的數對數量，也就是說$6 \div 5 = 1 \ldots 1$，因此須刪除一個數對，即$D_5^6 = 1$。

參、 研究目的

一、發展在每組人數最多2 人、3 人、4 人⋯n 人的情況下，且任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值之計數方法。

二、探討在小組人數最多2、4、6⋯n(n為偶數)人的情況下，且任二位學生報出的數對不相同，其班上的學生人數之最大值。

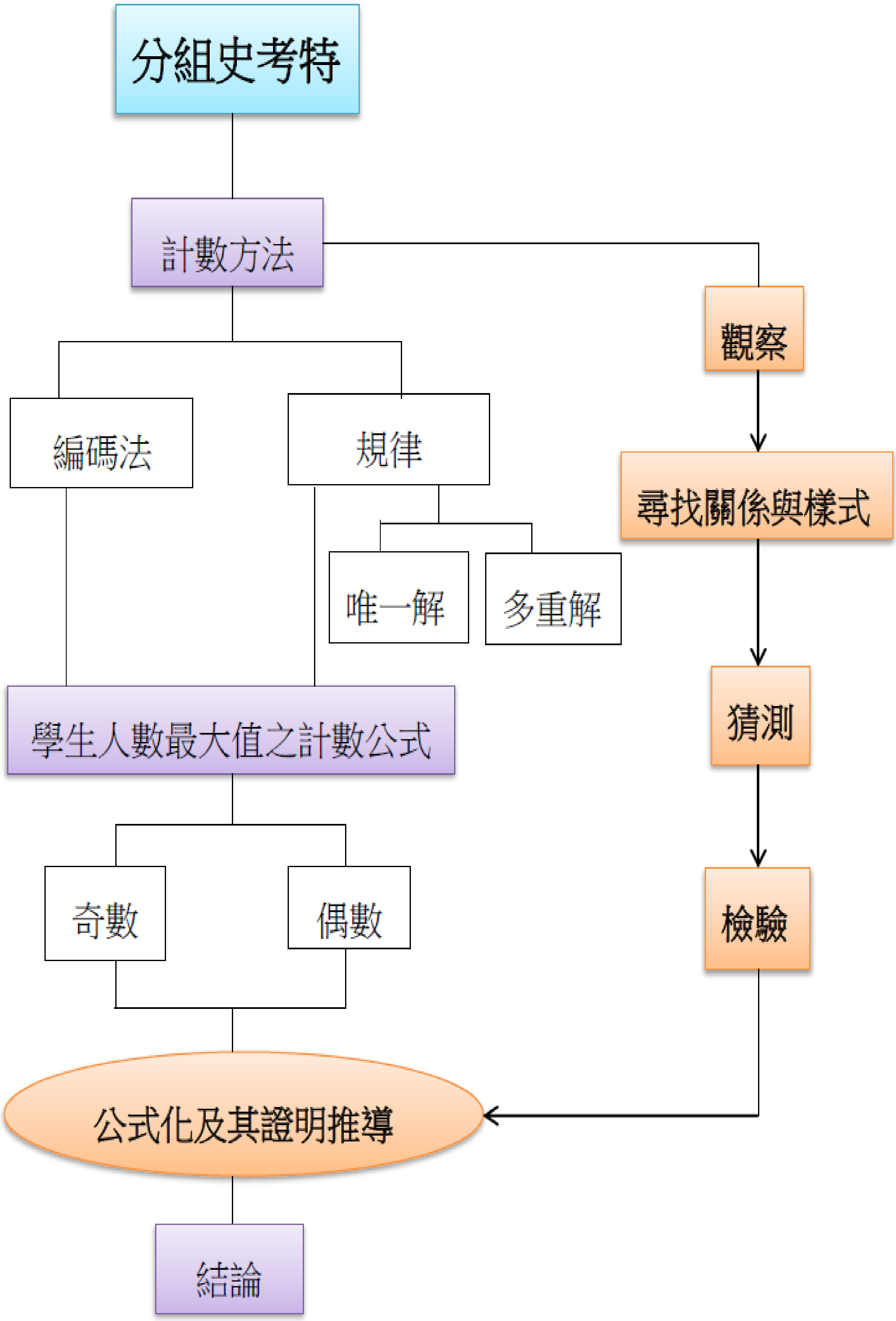
三、探討在小組人數最多3、5、7⋯n(n為奇數)人的情況下，且任二位學生報出的數對不相同，其班上的學生人數之最大值。

肆、 研究設備及器材

方格紙、電腦、筆、軟體ＷＯＲＤ。

伍、 研究過程或方法

一、研究架構與流程圖



二、研究過程

首先，針對在每組學生最多四人($n=4$)時，班上每位學生報出的數對都不相同，則學生最多有多少人，我們開始嘗試找到結果。在研究過程中，因為沒有系統的尋找方法導致直接將可能的組合全部寫出，使研究過程紛亂而找不到關聯性，此困境不利於進行研究，因此我們要找出有系統的方法來進行研究，所以我們將數對利用表格的方式來呈現。

(一) 發展在每組人數最多2 人、3 人、4 人⋯n 人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值之計數方法。

1. 觀察：

原始題目的敘述是：某班學生分組玩遊戲，遊戲分上午和下午兩個階段，學生可以在每個階段各參加一個小組（不能不參加，兩個階段的小組人數可以不同），要求每組最多四人（允許一個人單獨為一組）。當遊戲結束後，每位學生先報出自己上午所屬小組分別的成員人數，再報出下午所屬小組分別的成員人數。任意二位學生報出的數對都不相同（順序不同視為不相同，例如$(1,4)$與$(4,1)$不相同），請問該班最多有多少位學生？

我們由題目中得知，每位學生都會報出一組數對，且數對會對應到該位學生上午和下午所數的小組人數，因此第 i 列$(1 \leq i \leq 4)$的數對應該符合上午所屬小組的成員人數為 i 的學生報的數對，而這些學生的總數是 i 的倍數，即第 i 列中必須有 i 之倍數的數對，同理來說，第 i 行中有 i 之倍數的學生報數，即第 i 行中必須有 i 之倍數的數對。

2. 尋找關係與樣式：

了解題目的要求之後，我們開始嘗試找出符合題目之學生人數最大值，我們發現了編碼法，即將數對以方格表形式呈現，因此，數對最多的可能性為小組最多人數的平方，也就是$4\times4=16$，總共只有 16 個可能的數對，如圖 5-2-1 所示。

$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$

圖 5-2-1 符合題目可能的數對

我們發現在計算每一行列須要刪除的數對數時，每一行與每一列尚未刪除的數對量會等於題目限制的小組最多人數，只要把小組最多人數除以所在行列位置，若計算後有餘數產生，餘數則為需要刪除的數對量，即計算第一行與第一列須要刪除的數對量時，即$4 \div 1 = 4$；計算第二行與第二列須要刪除的數對量時，即$4 \div 2 = 2$；計算第四行與第四列須要刪除的數對量時，即$4 \div 4 = 1$，由於餘數皆為０，故不須刪除任何數對。

在計算第三列$(x = 3)$時，所有三人一組的學生總數必為 3 的倍數，也就是$4 \div 3 = 1 \ldots 1$，會產生餘數為１，因此第三列中的四個數對要刪除一個，也就是$D_3^4 = 1$。將需要刪除數對的行與列以顏色畫記，如圖 5-2-2 所示，我們發現在第三行與第三列有一個交集點，因此把$(3，3)$這一個數對刪除後，即可同時滿足第三行與第三列的條件。

$(4，1)$	$(4，2)$	$(4，3)$	$(4，4)$
$(3，1)$	$(3，2)$	$(3，3)$	$(3，4)$
$(2，1)$	$(2，2)$	$(2，3)$	$(2，4)$
$(1，1)$	$(1，2)$	$(1，3)$	$(1，4)$

圖 5-2-2 需要刪除數對的列與行

所以要計算學生人數最大值即先計算將可能的數對量，再減掉每一行的餘數量，也就是$16 - 1 = 15$，所以在每組最多 4 人的條件下，學生人數最多 15 人，且為唯一解法，如圖 5-2-3 所示。

$(4，1)$	$(4，2)$	$(4，3)$	$(4，4)$
$(3，1)$	$(3，2)$		$(3，4)$
$(2，1)$	$(2，2)$	$(2，3)$	$(2，4)$
$(1，1)$	$(1，2)$	$(1，3)$	$(1，4)$

圖 5-2-3 每組最多 4 人下符合條件後的學生人數

接著我們繼續討論當每組最多人數在2、3、5、6、7人的情況下構成班上的學生人數之最大值，並藉由方格表觀察結果。

(1) 每組最多 2 人$(n = 2)$

刪除每列不符合條件的數對數量，其計數過程如表 5-2-1，以數對方格表畫出刪掉數對後可能的結果為唯一解法，如圖 5-2-4。

所有可能的數對量有$2 \times 2 = 4$ 個，

每列數對刪除數量總計有 0 個，

總共學生人數最多有$4 - 0 = 4$位。

表 5-2-1 每組最多 2 人時每列刪除數對數量之計數過程

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量		刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^2	$2 \div 1 = 2$	0	D_2^2	$2 \div 2 = 1$	0

$(2，1)$	$(2，2)$
$(1，1)$	$(1，2)$

圖 5-2-4 每組最多 2 人下符合條件後的學生人數

(2) 每組最多 3 人$(n = 3)$

刪除每列不符合條件的數對數量，其計數過程如表 5-2-2，以數對方格表畫出刪掉數對後可能的結果為唯一解法，如圖 5-2-5。

所有可能的數對量有$3 \times 3 = 9$ 個

每列數對刪除數量總計有 1 個

總共學生人數最多有$9 - 1 = 8$位

表 5-2-2 每組最多 3 人時每列刪除數對數量之計數過程

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量		刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^3	$3 \div 1 = 3$	0	D_3^3	$3 \div 3 = 1$	0
D_2^3	$3 \div 2 = 1 \ldots 1$	1			

$(3，1)$	$(3，2)$	$(3，3)$
$(2，1)$		$(2，3)$
$(1，1)$	$(1，2)$	$(1，3)$

圖 5-2-5 每組最多 3 人下符合條件後的學生人數

(3) 每組最多 5 人$(\mathrm{n}=5)$

刪除每列不符合條件的數對數量，其計數過程如表 5-2-3，以數對方格表畫出刪掉數對後可能的結果為多重解法，如圖 5-2-6。

所有可能的數對量有$5\times5=25$ *個*，

每列數對刪除數量總計有$1+2+1=4$個，

總共學生人數最多有$25-4=21$位。

表 5-2-3 每組最多 5 人時每列刪除數對數量之計數過程

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量		刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^5	$5\div1=5$	0	D_4^5	$5\div4=1\ldots1$	1
D_2^5	$5\div2=2\ldots1$	1	D_5^5	$5\div5=1$	0
D_3^5	$5\div3=1\ldots2$	2			

解法一

(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)
(4，1)	(4，2)		(4，4)	(4，5)
(3，1)	(3，2)			(3，5)
(2，1)		(2，3)	(2，4)	(2，5)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)

解法二

(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)
(4，1)	(4，2)		(4，4)	(4，5)
(3，1)		(3，3)		(3，5)
(2，1)	(2，2)		(2，4)	(2，5)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)

圖 5-2-6 每組最多 5 人下符合條件後的學生人數

(4) 每組最多 6 人$(\mathrm{n}=6)$

刪除每列不符合條件的數對數量，其計數過程如表 5-2-4，以數對方格表畫出刪掉數對後可能的結果為唯一解法，如圖 5-2-7。

所有可能的數對量有$6\times6=36$ *個*

每列數對刪除數量總計有$2+1=3$個

總共學生人數最多有$36-3=33$位

表 5-2-4 每組最多 6 人時每列刪除數對數量之計數過程

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量		刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^6	$6\div1=6$	0	D_4^6	$6\div4=1\ldots2$	2
D_2^6	$6\div2=3$	0	D_5^6	$6\div5=1\ldots1$	1
D_3^6	$6\div3=2$	0	D_6^6	$6\div6=1$	0

(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)
(5，1)	(5，2)	(5，3)		(5，5)	(5，6)
(4，1)	(4，2)	(4，3)			(4，6)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)

圖 5-2-7 每組最多 6 人下符合條件後的學生人數

(5) 每組最多 7 人$(n = 7)$

刪除每列不符合條件的數對數量，其計數過程如表 5-2-5，以數對方格表畫出刪掉數對後可能的結果為多重解法，如圖 5-2-8。

所有可能的數對量有$7 \times 7 = 49$ 個

每列數對刪除數量總計有$1 + 1 + 3 + 2 + 1 = 8$個

總共學生人數最多有$49 - 8 = 41$位

表 5-2-5 每組最多 7 人時每列刪除數對數量之計數過程

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量		刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^7	$7 \div 1 = 7$	0	D_5^7	$7 \div 5 = 1 \ldots 2$	2
D_2^7	$7 \div 2 = 3 \ldots 1$	1	D_6^7	$7 \div 6 = 1 \ldots 1$	1
D_3^7	$7 \div 3 = 2 \ldots 1$	1	D_7^7	$7 \div 7 = 1$	0
D_4^7	$7 \div 4 = 1 \ldots 3$	3			

解法一

(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)
(6，1)	(6，2)	(6，3)		(6，5)	(6，6)	(6，7)
(5，1)	(5，2)		(5，4)		(5，6)	(5，7)
(4，1)		(4，3)		(4，5)		(4，7)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)		(3，6)	(3，7)
(2，1)	(2，2)	(2，3)		(2，5)	(2，6)	(2，7)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)

解法二

(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)		(6，7)
(5，1)	(5，2)	(5，3)			(5，6)	(5，7)
(4，1)	(4，2)				(4，6)	(4，7)
(3，1)	(3，2)	(3，3)		(3，5)	(3，6)	(3，7)
(2，1)		(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)

圖 5-2-8 每組最多 7 人下符合條件後的學生人數

3. 猜測：

由於每組最多人數的值愈來愈大，越來越難以方格表的方式進行計算，因此我們根據先前每組最多人數分別在2、3、5、6、7人的規律，並以每組最多在 8、9、10 人時猜測學生人數之最大值，其結果如表 5-2-6、表 5-2-7、表 5-2-8。

另外，我們根據2×2~7×7的方格表，發現只有5×5和7×7有多重解法，其他皆為唯一解。我們認為可能與須刪除數對的行列數及列刪除數對量最大值有關，當須刪除數對的行列數與某一列刪除數對量最大值相等，則可能具唯一解，若須刪除數對的行列數大於某一列刪除數對量最大值，則具多重解。並以表 5-2-6、表 5-2-7、表 5-2-8 猜測8×8、9×9、10×10皆為多重解。

表 5-2-6 猜測每組最多 8 人($n=8$)時學生人數之最大值

可能數對數量		$8\times 8=64$	
D_1^8	$8\div 1=8$	D_5^8	$8\div 5=1\ldots 3$
D_2^8	$8\div 2=4$	D_6^8	$8\div 6=1\ldots 2$
D_3^8	$8\div 3=2\ldots 2$	D_7^8	$8\div 7=1\ldots 1$
D_4^8	$8\div 4=2$	D_8^8	$8\div 8=1$
猜測：$n=8$	$8\times 8-2-3-2-1=56$		

表 5-2-7 猜測每組最多 9 人($n=9$)時學生人數之最大值

可能數對數量		$9\times 9=81$			
D_1^9	$9\div 1=9$	D_4^9	$9\div 4=2\ldots 1$	D_7^9	$9\div 7=1\ldots 2$
D_2^9	$9\div 2=4\ldots 1$	D_5^9	$9\div 5=1\ldots 4$	D_8^9	$9\div 8=1\ldots 1$
D_3^9	$9\div 3=3$	D_6^9	$9\div 6=1\ldots 3$	D_9^9	$9\div 9=1$
猜測：$n=9$		$9\times 9-1-1-4-3-2-1=69$			

表 5-2-8 猜測每組最多 10 人($n=10$)時學生人數之最大值

可能數對數量		$10\times 10=100$	
D_1^{10}	$10\div 1=10$	D_6^{10}	$10\div 6=1\ldots 4$
D_2^{10}	$10\div 2=5$	D_7^{10}	$10\div 7=1\ldots 3$
D_3^{10}	$10\div 3=3\ldots 1$	D_8^{10}	$10\div 8=1\ldots 2$
D_4^{10}	$10\div 4=2\ldots 2$	D_9^{10}	$10\div 9=1\ldots 1$
D_5^{10}	$10\div 5=2$	D_{10}^{10}	$10\div 10=1$
猜測：$n=10$	$10\times 10-1-2-4-3-2-1=87$		

4. 檢驗：

(1) 使用數對方格表檢驗每組最多８人時學生人數最大值之計數結果，如圖 5-2-9。

第一步驟：列出所有可能數對並劃記需刪除數對之行列

(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)	(7，8)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)	(6，7)	(6，8)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)

第二步驟：挑選出行與列可共同刪除之數對

(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)	(7，8)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)	(6，7)	(6，8)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)

第三步驟：刪除不符要求數對量後之可能結果

(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)		(7，8)
(6，1)	(6，2)		(6，4)		(6，6)	(6，7)	(6，8)
(5，1)	(5，2)		(5，4)			(5，7)	(5，8)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)			(3，7)	(3，8)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)

解法一

(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)		(7，6)	(7，7)	(7，8)
(6，1)	(6，2)		(6，4)	(6，5)		(6，7)	(6，8)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)				(5，8)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)
(3，1)	(3，2)		(3，4)		(3，6)	(3，7)	(3，8)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)

解法二

圖 5-2-9 8× 8數對方格表畫記過程與結果

結果：刪除數對後的 8× 8數對方格表數對量與我們的猜測最大值及解法相符。

(2) 使用數對方格表檢驗每組最多 9 人時學生人數最大值之計數結果，如圖 5-2-10。

第一步驟：列出所有可能數對並劃記需刪除數對之行列

(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)	(9，6)	(9，7)	(9，8)	(9，9)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)	(8，9)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)	(7，8)	(7，9)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)	(6，7)	(6，8)	(6，9)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)	(5，9)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)	(4，9)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)

第二步驟：挑選出行與列可共同刪除之數對

(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)	(9，6)	(9，7)	(9，8)	(9，9)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)	(8，9)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)	(7，8)	(7，9)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)	(6，7)	(6，8)	(6，9)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)	(5，9)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)	(4，9)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)

第三步驟：刪除不符要求數對量後之可能結果

(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)	(9，6)	(9，7)	(9，8)	(9，9)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)		(8，6)	(8，7)	(8，8)	(8，9)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)			(7，7)	(7，8)	(7，9)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)				(6，8)	(6，9)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)					(5，9)
(4，1)	(4，2)	(4，3)		(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)	(4，9)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)
(2，1)		(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)

解法一

(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)	(9，6)	(9，7)	(9，8)	(9，9)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)		(8，6)	(8，7)	(8，8)	(8，9)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)			(7，7)	(7，8)	(7，9)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)				(6，8)	(6，9)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)					(5，9)
(4，1)		(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)	(4，9)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)
(2，1)	(2，2)	(2，3)		(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)

解法二

圖 5-2-10 9×9數對方格表畫記過程與結果

結果：刪除數對後的9×9數對方格表數對量與我們的猜測最大值與解法相符。

(3) 使用數對方格表檢驗每組最多 10 人時學生人數最大值之計數結果，如圖 5-2-11。

第一步驟：列出所有可能數對並劃記需刪除數對之行列

(10，1)	(10，2)	(10，3)	(10，4)	(10，5)	(10，6)	(10，7)	(10，8)	(10，9)	(10，10)
(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)	(9，6)	(9，7)	(9，8)	(9，9)	(9，10)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)	(8，9)	(8，10)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)	(7，8)	(7，9)	(7，10)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)	(6，7)	(6，8)	(6，9)	(6，10)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)	(5，9)	(5，10)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)	(4，9)	(4，10)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)	(3，10)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)	(2，10)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)	(1，10)

第二步驟：挑選出行與列可共同刪除之數對

(10，1)	(10，2)	(10，3)	(10，4)	(10，5)	(10，6)	(10，7)	(10，8)	(10，9)	(10，10)
(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)	(9，6)	(9，7)	(9，8)	(9，9)	(9，10)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)	(8，6)	(8，7)	(8，8)	(8，9)	(8，10)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)	(7，6)	(7，7)	(7，8)	(7，9)	(7，10)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)	(6，7)	(6，8)	(6，9)	(6，10)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)	(5，9)	(5，10)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)	(4，9)	(4，10)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)	(3，10)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)	(2，10)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)	(1，10)

第三步驟：刪除不符要求數對量後之可能結果

(10，1)	(10，2)	(10，3)	(10，4)	(10，5)	(10，6)	(10，7)	(10，8)	(10，9)	(10，10)
(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)		(9，7)	(9，8)	(9，9)	(9，10)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)			(8，8)	(8，9)	(8，10)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)				(7，9)	(7，10)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)					(6，10)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)	(5，9)	(5，10)
(4，1)	(4，2)			(4，5)	(4，6)	(4，7)	(4，8)	(4，9)	(4，10)
(3，1)	(3，2)	(3，3)		(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)	(3，10)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)	(2，10)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)	(1，10)

解法一

(10，1)	(10，2)	(10，3)	(10，4)	(10，5)	(10，6)	(10，7)	(10，8)	(10，9)	(10，10)
(9，1)	(9，2)	(9，3)	(9，4)	(9，5)	(9，6)	(9，7)	(9，8)		(9，10)
(8，1)	(8，2)	(8，3)	(8，4)	(8，5)			(8，8)	(8，9)	(8，10)
(7，1)	(7，2)	(7，3)	(7，4)	(7，5)				(7，9)	(7，10)
(6，1)	(6，2)	(6，3)		(6，5)				(6，9)	(6，10)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)	(5，7)	(5，8)	(5，9)	(5，10)
(4，1)	(4，2)	(4，3)		(4，5)		(4，7)	(4，8)	(4，9)	(4，10)
(3，1)	(3，2)		(3，4)	(3，5)	(3，6)	(3，7)	(3，8)	(3，9)	(3，10)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)	(2，7)	(2，8)	(2，9)	(2，10)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)	(1，7)	(1，8)	(1，9)	(1，10)

解法二

圖 5-2-11 10×10數對方格表畫記過程與結果

結果：刪除數對後的10×10數對方格表數對量與我們的猜測最大值與解法相符。

由以上檢驗可知，在$n \times n$*的數對方格表上*所有可能數對量為$n \times n$*個*，透過刪減每一列不符合題目要求之數對量，也就是刪減每組最多人數(n)除以每一列(x)所得之餘數(D_x^n)，即$n \times n - (D_1^n + D_2^n + D_3^n + \cdots + D_{n-1}^n + D_n^n)$，便可以得到在每組學生最多$n$人時學生人數之最大值計數方法。

同時，我們也發現：在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$方格表其解法可分成唯一解與多重解，其結果如下：

(1) $\mathrm{n} \times \mathrm{n}(2 \leq n \leq 6)$的方格表中，只有$5 \times 5$為多重解法，其他皆為唯一解。

(2) $\mathrm{n} \times \mathrm{n}(n > 6)$的方格表中，都有多重解法。

5. 論證：

接下來，我們經過詳細討論後，針對上述猜測與檢驗的結果，提出我們的主張，也就是命題，並對此命題，提出我們的論證。

命題：

在$n \times n$的方格表中，進行分組活動，分成上下午兩個階段，每組最多n人(允許一個人單獨一組)，每位學生報出的數碼為(x, y)，其中x, y分別表示該學生在上午、下午所屬小組的人數，則必可找到分組方法，使得每位學生報出的數對(x, y)都不相同，且使得參與分組的學生總數達到最大值。

證明：

我們使用的是運用$n \times n$方格表編碼再刪掉格子的分組方法，即先列出滿足條件的各行與各列的餘數量，而依條件所列的各列與各行的餘數量都必對應相等。

接著，我們依下列原則，在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$方格表中刪掉格子：

每一刪掉的格子，都要雙向的滿足此格子所在的列、行的餘數量一次，亦即此一被刪掉的格子，可達到滿足 2 個餘數量。如此，必可使參與分組的學生總數達到最大值。

以8×8方格表為例，將各列與各行須刪除的格子量標示在方格旁，並以顏色標記，如圖 5-2-12，列與行的餘數量都要雙重滿足，其要被滿足的餘數總量為$(2 + 3 + 2 + 1) \times 2$，即 16。

而我們刪掉的格子數量為 8，即黑點，如圖 5-2-13，又每一被刪掉的格子，都唯一對應到其本身所在位置的行與列，即可滿足該列與該行各 1 個餘數量，共滿足 2 個餘數量，$8 \times 2 = 16$，恰好滿足餘數總量 16。

若依被刪掉格子可對應到的餘數量分類，則可分為 3 類：

(1) 第一類，如圖 5-2-12 白色格子，對應到 0 個餘數量。

(2) 第二類，如圖 5-2-12 藍色格子，對應到 1 個餘數量。

(3) 第三類，如圖 5-2-12 橘色格子，對應到 2 個餘數量。

因此，可推知我們刪掉的格子量 8，為滿足餘數總量 16 的格子量之最小值。

若刪掉的格子量小於 8，則其所能滿足的餘數總量必小於 16，即必不能滿足餘數總量的需求。

又總格子數量為8×8，即 64，減掉被刪掉的格子量 8，可推知學生數的最大值為：$64 - 8 = 56$。

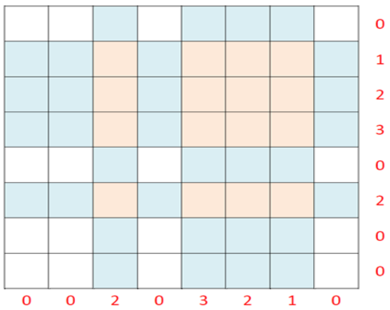


圖 5-2-12$8 \times 8$方格表須刪除格子之列與行

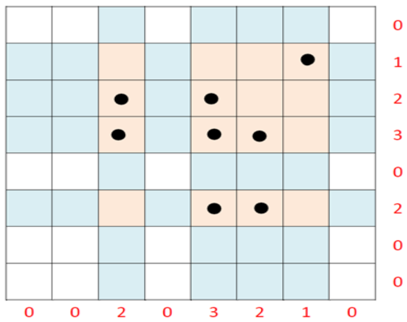


圖 5-2-13$8 \times 8$方格表刪掉的格子所在位置

(二) 探討在小組人數最多2、4、6、8⋯n(n 為偶數)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值。

1. 觀察：

由上述在每組最多人數為偶數($n = 2k$)時，也就是在 $n = 2$，$n = 4$、$n = 6$、$n = 8$、$n = 10$人下所得知每列須刪除的數對量，如表 5-2-9，我們發現在後半段從第 $k+1$ 列到第 $2k$ 列刪減數對量會逐漸遞減至 0 個，因此可以利用等差數列求和公式將原本的公式進行化減。

表 5-2-9 在$n = 2$、4、6、8、10下每列須刪除之數對量

n	2	4	6	8	10
可能數對	4	16	36	64	100
D_1^n	0	0	0	0	0
D_2^n	0	0	0	0	0
D_3^n		1	0	2	1
D_4^n		0	2	0	2
D_5^n			1	3	0
D_6^n			0	2	4
D_7^n				1	3
D_8^n				0	2
D_9^n					1
D_{10}^n					0

2. 尋找關係與樣式：

我們發現將n以$2k$的形式呈現後的關係如表 5-2-10，並計算學生人數最大值，其公式為：$2k \times 2k - (D_1^{2k} + D_2^{2k} + D_3^{2k} + \cdots + D_{2k-1}^{2k} + D_{2k}^{2k})$，計量結果如下所示。

表 5-2-10D_1^{2k} *到*D_{2k}^{2k}刪除數對量表

n	2	n	4	n	6	n	8	n	10
k	1	k	2	k	3	k	4	k	5
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0
		D_{2+1}^n	1 (2-1)	D_3^n	0	D_3^n	2	D_3^n	1
		D_{2+2}^n	0	D_{3+1}^n	2 (3-1)	D_4^n	0	D_4^n	2
				D_{3+2}	1	D_{4+1}^n	3 (4-1)	D_5^n	0
				D_{3+3}	0	D_{4+2}^n	2	D_{5+1}	4 (5-1)
						D_{4+3}^n	1	D_{5+2}^n	3
						D_{4+4}^n	0	D_{5+3}^n	2
								D_{5+4}^n	1
								D_{5+5}^n	0

(1) 當 n=4，則 k=2

$$4 \times 4 - (D_1^4 + D_2^4 + D_3^4 + D_4^4)$$
$$= 4 \times 4 - (0 + 0 + 1 + 0)$$
$$= 4 \times 4 - (1 + 0) \times 2 \div 2$$
$$= 4 \times 4 - (2 - 1 + 0) \times 2 \div 2$$
$$= 16 - 1$$
$$= 15$$

(2) n=6，則 k=3

$$6 \times 6 - (D_1^6 + D_2^6 + D_3^6 + D_4^6 + D_5^6 + D_6^6)$$
$$= 6 \times 6 - (0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0)$$
$$= 6 \times 6 - (2 + 0) \times 3 \div 2$$
$$= 6 \times 6 - (3 - 1 + 0) \times 3 \div 2$$
$$= 36 - 3$$
$$= 33$$

(3) n=8，則 k=4

$$\begin{aligned}&8\times 8-(D_1^8+D_2^8+D_3^8+D_4^8+D_5^8+D_6^8+D_7^8+D_8^8)\\&=8\times 8-(0+0+2+0+3+2+1+0)\\&=8\times 8-[2+(3+0)\times 4\div 2]\\&=8\times 8-[2+(4-1+0)\times 4\div 2]\\&=64-8\\&=56\end{aligned}$$

(4) n=10，則 k=5

$$\begin{aligned}&10\times 10-(D_1^{10}+D_2^{10}+D_3^{10}+D_4^{10}+D_5^{10}+D_6^{10}+D_7^{10}+D_8^{10}+D_9^{10}+D_{10}^{10})\\&=10\times 10-(0+0+1+2+0+4+3+2+1+0)\\&=10\times 10-[3+(4+0)\times 5\div 2]\\&=10\times 10-[3+(5-1+0)\times 5\div 2]\\&=100-13\\&=87\end{aligned}$$

由上列四個式子的總量變化與每組最多人數的關係，可推得學生人數最大值之公式：

$$\begin{aligned}&2k\times 2k-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1+0)\times k\div 2\right]\\&=4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div 2\right]\end{aligned}$$

3. 猜測：

由於每組最多人數的值愈來愈大，計算過程越來越雜亂，因此我們根據先前每組最多人數分別在 2、4、6、8、10 人的規律，並以每組最多在 12、14、16 人時猜測學生人數之最大值，其結果如表 5-2-11、表 5-2-12、表 5-2-13。

表 5-2-11 猜測每組人數最多在 12 人之學生人數最大值

n	k	$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div 2\right]$
12	6	$4k^2-[D_1^{12}+D_2^{12}+D_3^{12}+D_4^{12}+D_5^{12}+D_6^{12}+(k-1)\times k\div 2]$ $=12\times 12-[0+0+0+0+2+0+(6-1)\times 6\div 2]$ $=144-(2+15)$ $=144-17$ $=127$

表 5-2-12 猜測每組人數最多在 14 人之學生人數最大值

n	k	$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div 2\right]$
14	7	$4k^2-[D_1^{14}+D_2^{14}+D_3^{14}+D_4^{14}+D_5^{14}+D_6^{14}+D_7^{14}+(k-1)\times k\div 2]$ $=4\times 7\times 7-[0+0+2+2+4+2+0+(7-1)\times 7\div 2]$ $=196-(10+21)$ $=196-31$ $=165$

表 5-2-13 猜測每組人數最多在 16 人之學生人數最大值

n	k	$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div 2\right]$
16	8	$4k^2-[D_1^{16}+D_2^{16}+D_3^{16}+D_4^{16}+D_5^{16}+D_6^{16}+D_7^{16}+D_8^{16}+(k-1)\times k\div 2]$ $=4\times 8\times 8-[0+0+1+0+1+4+2+0+(8-1)\times 8\div 2]$ $=256-(8+28)$ $=256-36$ $=220$

4. 檢驗：

藉由表 5-2-1、5-2-2、5-2-3、5-2-4、5-2-5 已推得每列須刪除數對量與計算學生人數最大值方法，故將每組最多人數(n)在 12、14、16 人時每列須刪除數對量與學生最大值列成表 5-2-14 檢視。

表 5-2-14 n為 12、14、16下每列須刪除數對量與學生人數最大值之結果

n	12	n	14	n	16
k	6	k	7	k	8
可能數對	144	可能數對	196	可能數對	256
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0
D_3^n	0	D_3^n	2	D_3^n	1
D_4^n	0	D_4^n	2	D_4^n	0
D_5^n	2	D_5^n	4	D_5^n	1
D_6^n	0	D_6^n	2	D_6^n	4
D_{6+1}^n	5	D_7^n	0	D_7^n	2
D_{6+2}^n	4	D_{7+1}^n	6	D_8^n	0
D_{6+3}^n	3	D_{7+2}^n	5	D_{8+1}^n	7
D_{6+4}^n	2	D_{7+3}^n	4	D_{8+2}^n	6
D_{6+5}^n	1	D_{7+4}^n	3	D_{8+3}^n	5
D_{6+6}^n	0	D_{7+5}^n	2	D_{8+4}^n	4
		D_{7+6}	1	D_{8+5}^n	3
		D_{7+7}	0	D_{8+6}^n	2
				D_{8+7}^n	1
				D_{8+8}^n	0
學生人數	127	學生人數	165	學生人數	220

結果：第$\mathrm{k}+1$列到第$2\mathrm{k}$列每列須刪減的數對量從$\mathrm{k}-1$個遞減至 0 個，且計量結果與表 5-2-11、表 5-2-12、表 5-2-13 相符。

由以上論證可知，第$\mathrm{k}+1$列到第$2\mathrm{k}$列每列須刪減的數對量必定從$\mathrm{k}-1$個遞減至 0 個，並依等差數列求和公式推得：

$$D_{k+1}^{2k}+D_{k+2}^{2k}+\cdots+D_{2k}^{2k}=(k-1)+(k-2)+\cdots+1+0=(k-1)\times k\div 2$$

故在 n 為偶數下(n=2k)，學生人數最大值公式為：

$$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div 2\right]$$

(三) 探討在小組人數最多$3、5、7、9\cdots\mathrm{n}(\mathrm{n}$ 為奇數$)$人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值。

1. 觀察：

由上述在每組最多人數為奇數$(n=2k+1)$時，也就是在$n=3$、$n=5$、$n=7$、$n=9$人下所得知每列須刪除的數對量，如表 5-2-15，我們發現在後半段從第$\mathrm{k}+1$列到第$2k+1$列刪減數對量會逐漸遞減至 0 個，因此可以利用等差數列求和公式將原本的公式進行化減。

表 5-2-15 在$n=3$、5、7、9下每列須刪除之數對量

n	3	5	7	9
可能數對	9	25	49	81
D_1^n	0	0	0	0
D_2^n	1	1	1	1
D_3^n	0	2	1	0
D_4^n		1	3	1
D_5^n		0	2	4
D_6^n			1	3
D_7^n			0	2
D_8^n				1
D_9^n				0

2. 尋找關係與樣式：

我們發現將n以$2k+1$的形式呈現後的關係如表 5-2-16，並計算學生人數最大值，其公式：$(2k+1)\times(2k+1)-(D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_{2k}^{2k+1}+D_{2k+1}^{2k+1})$，計量結果如下所示。

表 5-2-16D_1^{2k+1}到D_{2k+1}^{2k+1}刪除數對量表

n	3	n	5	n	7	n	9
k	1	k	2	k	3	k	4
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_{1+1}^n	1	D_2^n	1	D_2^n	1	D_2^n	1
D_{1+2}^n	0	D_{2+1}^n	2	D_3^n	1	D_3^n	0
		D_{2+2}^n	1	D_{3+1}^n	3	D_4^n	1
		D_{2+3}^n	0	D_{3+2}^n	2	D_{4+1}^n	4
				D_{3+3}^n	1	D_{4+2}^n	3
				D_{3+4}^n	0	D_{4+3}^n	2
						D_{4+4}^n	1
						D_{4+5}^n	0

(1) 當 n=5，則 k=2

$$5\times5-\left(D_1^5+D_2^5+D_3^5+D_4^5+D_5^5\right)$$
$$=5\times5-(0+1+2+1+0)$$
$$=5\times5-[1+(2+0)\times3\div2]$$
$$=5\times5-[1+(2+0)\times(2+1)\div2]$$
$$=25-4$$
$$=21$$

(2) n=7，則 k=3

$$7\times7-(D_1^7+D_2^7+D_3^7+D_4^7+D_5^7+D_6^7+D_7^7)$$
$$=7\times7-(0+1+1+3+2+1+0)$$
$$=7\times7-[2+(3+0)\times4\div2]$$
$$=7\times7-[2+(3+0)\times(3+1)\div2]$$
$$=49-8$$
$$=41$$

(3) n=9，則 k=4

$$9\times 9-(D_1^9+D_2^9+D_3^9+D_4^9+D_5^9+D_6^9+D_7^9+D_8^9+D_9^9)$$

$$=9\times 9-(0+1+0+1+4+3+2+1+0)$$

$$=9\times 9-[2+(4+0)\times 5\div 2]$$

$$=9\times 9-[2+(4+0)\times(4+1)\div 2]$$

$$=81-12$$

$$=69$$

由上列三個式子的總量變化與每組最多人數的關係，我們發現從第$k+1$列到第$2k+1$列每列刪減數對量由k個遞減至 0 個，因此推得學生人數最大值之公式：

$$(2k+1)\times(2k+1)-\left[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+0)\times(k+1)\div 2\right]$$

$$=(2k+1)^2-\left[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2\right]$$

3. 猜測：

我們根據先前每組最多人數分別在3、5、7、9人的規律，並以每組最多在 11 人時猜測第 6 列到第 11 列每列刪減數對量必由 5 個遞減至 0 個；每組最多在 13 人時猜測第 7 列到第 13 列每列刪減數對量必由 6 個遞減至 0 個；每組最多在 15 人時猜測第 8 列到第 15 列每列刪減數對量必由 7 個遞減至 0 個並計算學生人數之最大值，其結果如表 5-2-17、表 5-2-18、表 5-2-19。

表 5-2-17 猜測每組人數最多在 11 人之學生人數最大值

n	k	$(2k+1)^2-\left[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2\right]$
11	5	$11^2-[D_1^{11}+D_2^{11}+D_3^{11}+D_4^{11}+D_5^{11}+(5+1)\times 5\div 2]$ $=121-[0+1+2+3+1+6\times 5\div 2]$ $=121-(7+15)$ $=121-22$ $=99$

表 5-2-18 猜測每組人數最多在 13 人之學生人數最大值

n	k	$(2k+1)^2-\left[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2\right]$
13	6	$13^2-[D_1^{13}+D_2^{13}+D_3^{13}+D_4^{13}+D_5^{13}+D_6^{13}+(6+1)\times 6\div 2]$ $=169-[0+1+1+1+3+1+7\times 6\div 2]$ $=169-(7+21)$ $=169-28$ $=141$

表 5-2-19 猜測每組人數最多在 15 人之學生人數最大值

n	k	$(2k+1)^2-\left[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2\right]$
15	7	$15^2-\left[D_1^{15}+D_2^{15}+D_3^{15}+D_4^{15}+D_5^{15}+D_6^{15}+D_7^{15}+(7+1)\times 7\div 2\right]$ $=225-[0+1+0+3+0+3+1+8\times 7\div 2]$ $=225-(8+28)$ $=225-36$ $=189$

4. 檢驗：

藉由表 5-2-1、5-2-2、5-2-3、5-2-4、5-2-5 已推得每列須刪除數對量與計算學生人數最大值方法，故將每組最多人數(n)在 11、13、15 人時每列須刪除數對量與學生最大值列成表 5-2-20 檢視。

表 5-2-20 n 為 11、13、15 下每列須刪除數對量與學生人數最大值之結果

n	11	n	13	n	15
k	5	k	6	k	7
可能數對	121	可能數對	169	可能數對	225
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_2^n	1	D_2^n	1	D_2^n	1
D_3^n	2	D_3^n	1	D_3^n	0
D_4^n	3	D_4^n	1	D_4^n	3
D_5^n	1	D_5^n	3	D_5^n	0
D_{5+1}^n	5	D_6^n	1	D_6^n	3
D_{5+2}^n	4	D_{6+1}^n	6	D_7^n	1
D_{5+3}^n	3	D_{6+2}^n	5	D_{7+1}^n	7
D_{5+4}^n	2	D_{6+3}^n	4	D_{7+2}^n	6
D_{5+5}^n	1	D_{6+4}^n	3	D_{7+3}^n	5
D_{5+6}^n	0	D_{6+5}^n	2	D_{7+4}^n	4
		D_{6+6}^n	1	D_{7+5}^n	3
		D_{6+7}^n	0	D_{7+6}^n	2
				D_{7+7}^n	1
				D_{7+8}^n	0
學生人數	99	學生人數	141	學生人數	189

結果：第$k+1$列到第$2k+1$列每列須刪減的數對量從k個遞減至個，且計量結果與表 5-2-17、表 5-2-18、表 5-2-19 相符。

由以上論證可知，第$k+1$列到第$2k+1$列每列須刪減的數對量必定從k個遞減至 0 個，並依等差數列求和公式推得：

$$D_{k+1}^{2k+1}+D_{k+2}^{2k+1}+\cdots+D_{2k+1}^{2k+1}=k+(k-1)+\cdots+1+0=(k+1)\times k\div 2$$

故在 n 為奇數下$(\mathrm{n}=2k+1)$，學生人數最大值公式為：

$$(2k+1)^2-\left[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2\right]$$

陸、 研究結果

綜合上述的研究，我們得到下列的結果：

一、發展在每組人數最多2 人、3 人、4 人⋯n 人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值之計數方法。

(一) 我們藉由快速編碼法將數對對應在$n\times n$的數對方格表上，所有可能數對量為$n\times n$個，透過刪減每一列不符合題目要求之數對量，也就是刪減每組最多人數(n)除以每一列(x)所得之餘數(D_x^n)，即$n\times n-(D_1^n+D_2^n+D_3^n+\cdots+D_{n-1}^n+D_n^n)$，便可以得到在每組學生最多$n$人時學生人數之最大值計數方法。

(二) 在探討班上的學生人數之最大值之計數方法時，發現其解法可分成唯一解與多重解，結果如下：

(1) 在$\mathrm{n}\times\mathrm{n}(2\le n\le 6)$的方格表，只有$5\times 5$有多重解法，其他都為唯一解，如圖 6-1-1、圖 6-1-2。

2×2

(1，2)	(2，2)
(1，1)	(2，1)

3×3

(1，3)	(2，3)	(3，3)
(1，2)		(3，2)
(1，1)	(2，1)	(3，1)

4×4

(1，4)	(2，4)	(3，4)	(4，4)
(1，3)	(2，3)		(4，3)
(1，2)	(2，2)	(3，2)	(4，2)
(1，1)	(2，1)	(3，1)	(4，1)

6×6

(1，6)	(2，6)	(3，6)	(4，6)	(5，6)	(6，6)
(1，5)	(2，5)	(3，5)		(5，5)	(6，5)
(1，4)	(2，4)	(3，4)			(6，4)
(1，3)	(2，3)	(3，3)	(4，3)	(5，3)	(6，3)
(1，2)	(2，2)	(3，2)	(4，2)	(5，2)	(6，2)
(1，1)	(2，1)	(3，1)	(4，1)	(5，1)	(6，1)

圖 6-1-1 在$\mathrm{n}\times\mathrm{n}(2\le n\le 6)$*的方格表中*，$2\times 2$、$3\times 3$、$4\times 4$、$6\times 6$ *皆為唯一解*

5 × 5									
解法一					解法二				
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
(1,4)	(2,4)		(4,4)	(5,4)	(1,4)	(2,4)		(4,4)	(5,4)
(1,3)		(3,3)		(5,3)	(1,3)	(2,3)			(5,3)
(1,2)	(2,2)		(4,2)	(5,2)	(1,2)		(3,2)	(4,2)	(5,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)

圖 6-1-2 在$n \times n(2 \le n \le 6)$*的方格表中*，$5 \times 5$ *為多重解法*

(2) 在$n \times n(n > 6)$的方格表，都有多重解法，如圖 6-1-3、圖 6-1-4、圖 6-1-5、圖 6-1-6。

7 × 7													
解法一							解法二						
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)
(1,6)	(2,6)	(3,6)		(5,6)	(6,6)	(7,6)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)		(7,6)
(1,5)	(2,5)		(4,5)		(6,5)	(7,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)			(6,5)	(7,5)
(1,4)		(3,4)		(5,4)		(7,4)	(1,4)	(2,4)				(6,4)	(7,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)		(6,3)	(7,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)		(5,3)	(6,3)	(7,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)		(5,2)	(6,2)	(7,2)	(1,2)		(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)

8 × 8															
解法一								解法二							
(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)	(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)		(8,7)	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)		(6,7)	(7,7)	(8,7)
(1,6)	(2,6)		(4,6)		(6,6)	(7,6)	(8,6)	(1,6)	(2,6)		(4,6)	(5,6)		(7,6)	(8,6)
(1,5)	(2,5)		(4,5)			(7,5)	(8,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)				(8,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)			(7,3)	(8,3)	(1,3)	(2,3)		(4,3)		(6,3)	(7,3)	(8,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)

圖 6-1-3 在$n \times n(n > 6)$*的方格表中*，7×7、8×8 *為多重解法*

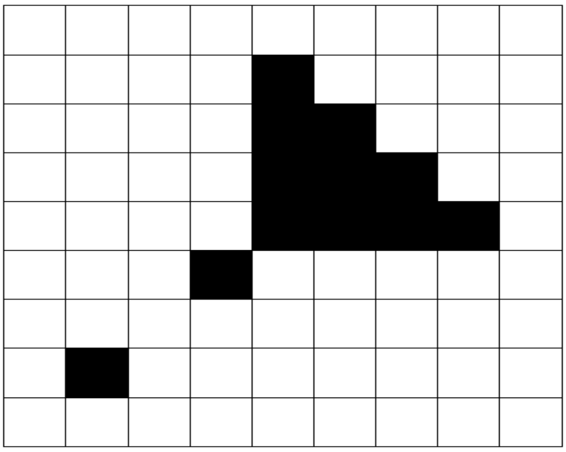
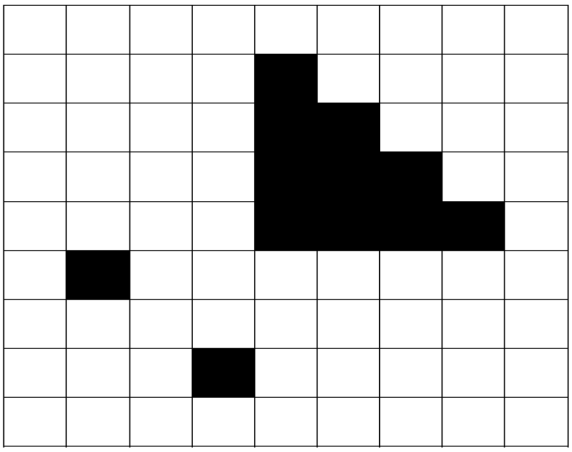
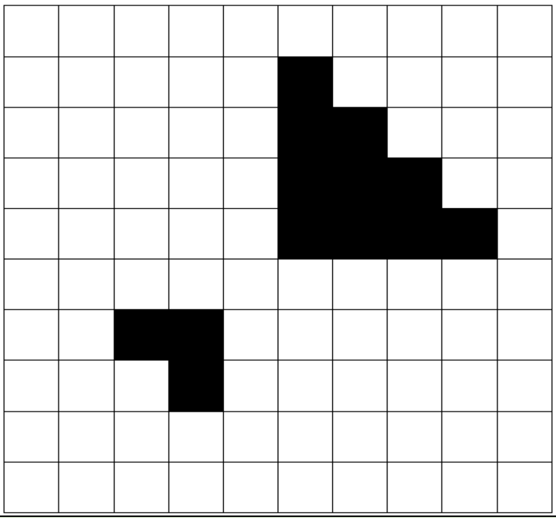
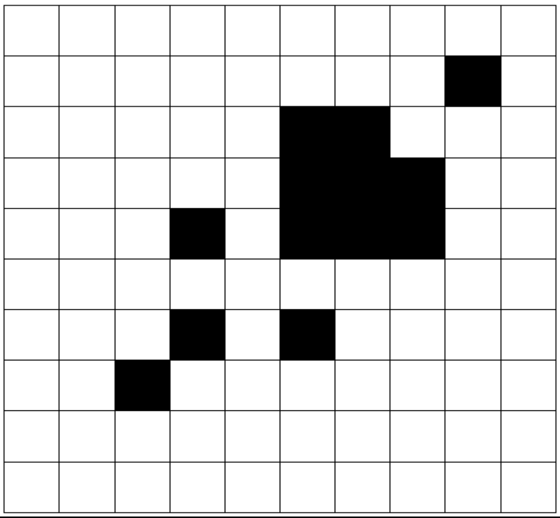
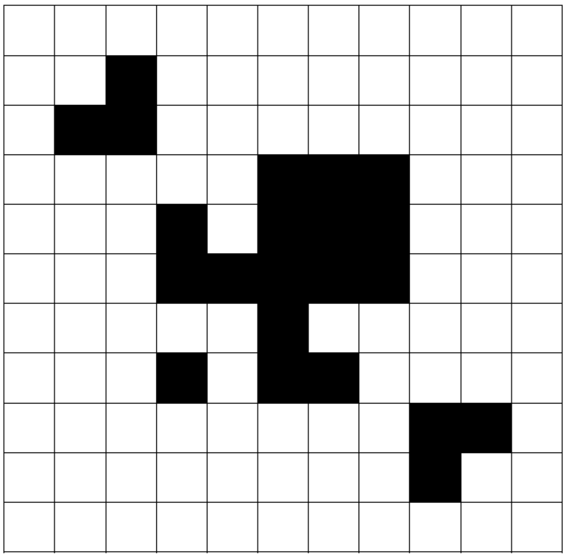
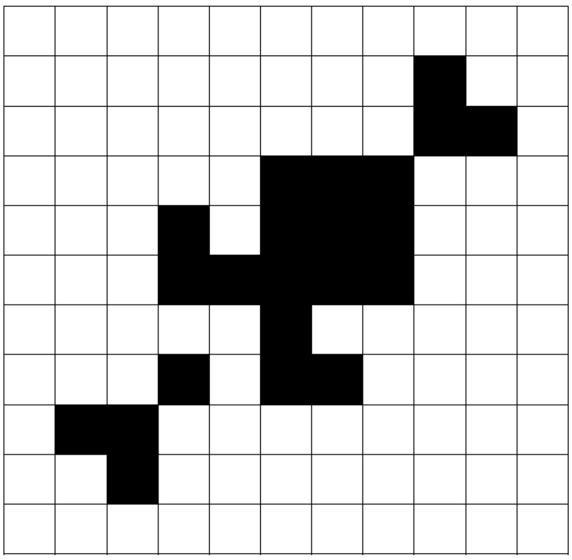
9×9	
解法一	解法二
	
10×10	
解法一	解法二
	
11×11	
解法一	解法二
	

圖 6-1-4 在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}(n > 6)$的方格表中，$9 \times 9$、$10 \times 10$、$11 \times 11$ 為多重解法

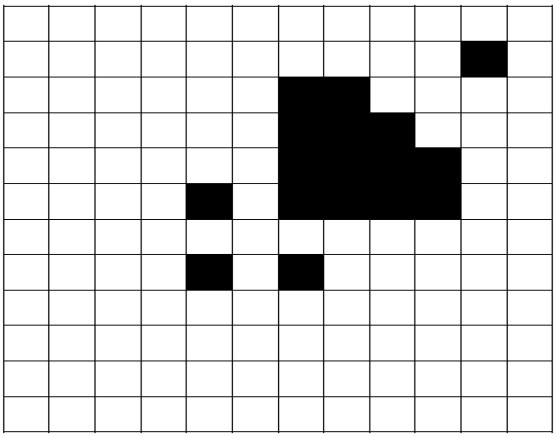
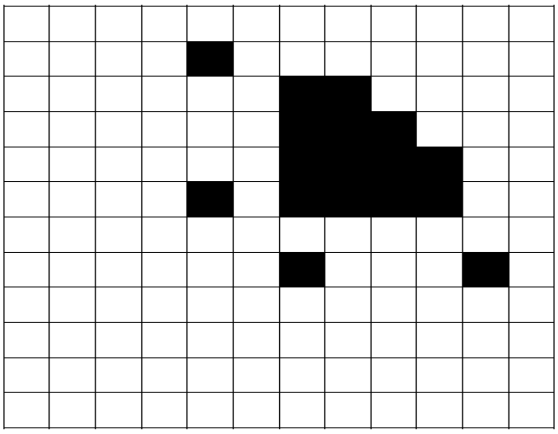
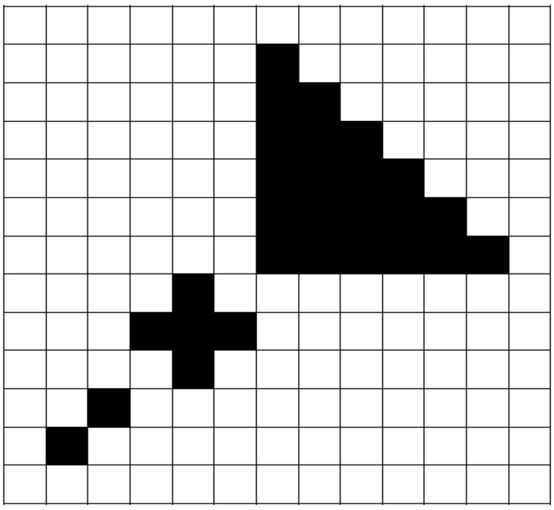
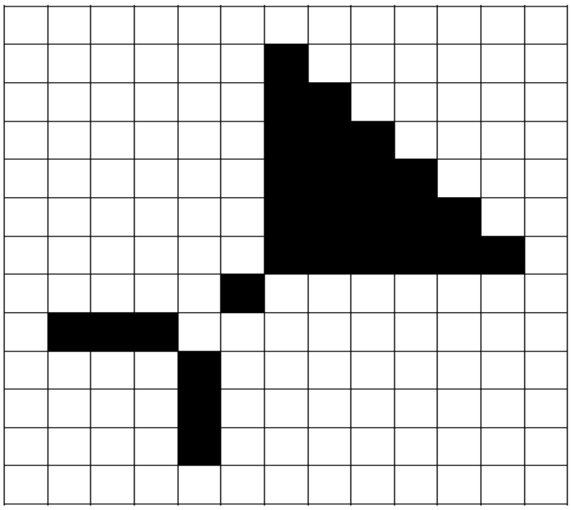
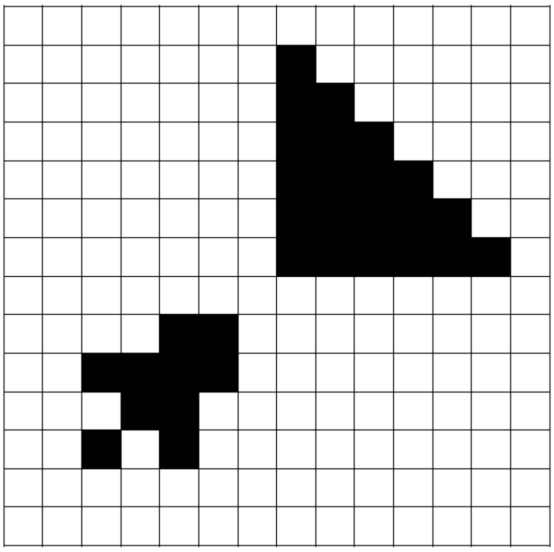
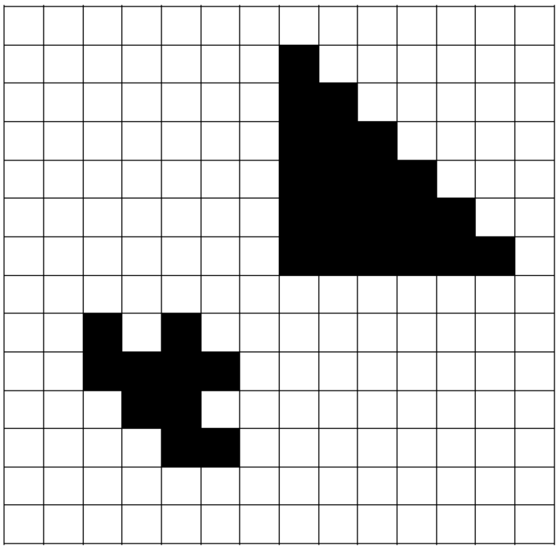
12×12	
解法一	解法二
	
13×13	
解法一	解法二
	
14×14	
解法一	解法二
	

圖 6-1-5 在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}(n > 6)$的方格表中，$12 \times 12$、$13 \times 13$、$14 \times 14$ 為多重解法

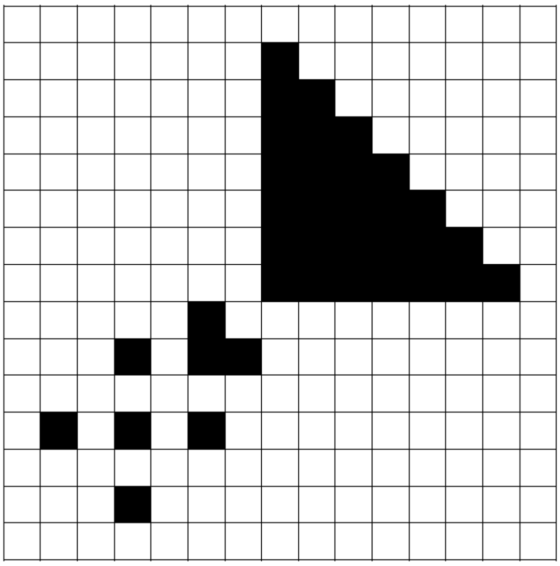
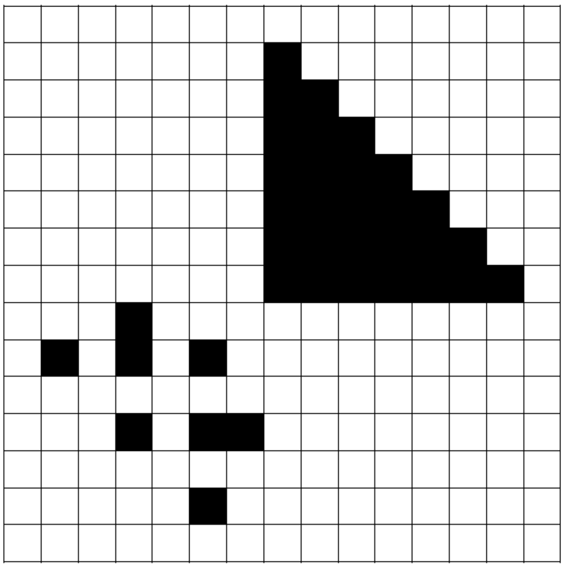
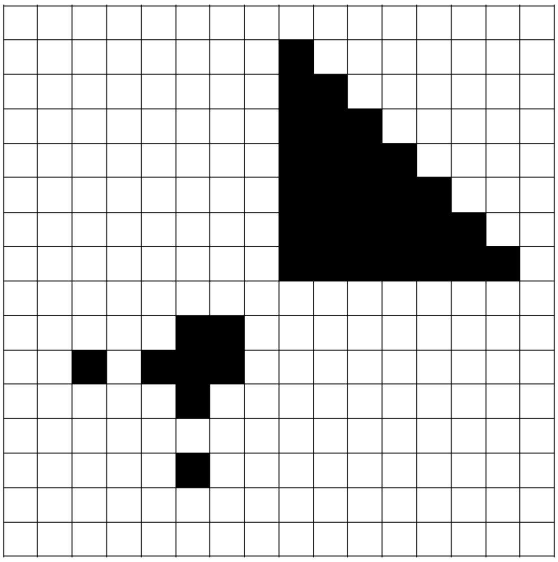
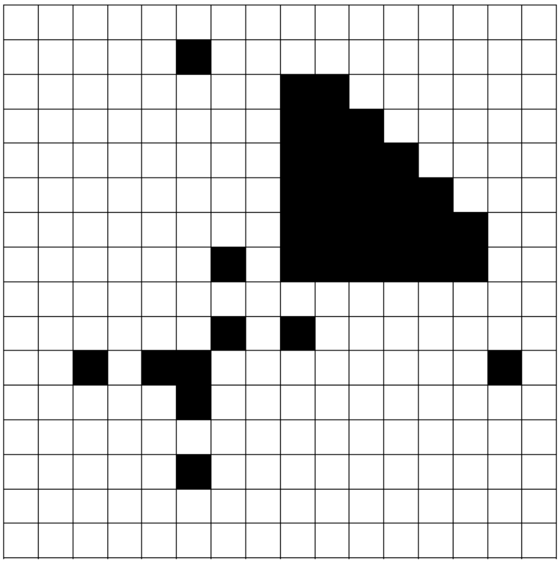
15×15	
解法一	解法二
	
16×16	
解法一	解法二
	

圖 6-1-5 在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}(n > 6)$的方格表中，$15 \times 15$、$16 \times 16$ 為多重解法

二、探討在小組人數最多2、4、6、8⋯n(n 為偶數)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則$n=2$、4、6、8、10、12、14、16下班上的學生人數之最大值如表 6-2-1。

表 6-2-1 $n=2$、4、6、8、10、12、14、16下學生人數最大值

n	2	4	6	8	10	12	14	16
可能數對	4	16	36	64	100	144	196	256
D_1^n	0	0	0	0	0	0	0	0
D_2^n	0	0	0	0	0	0	0	0
D_3^n		1	0	2	1	0	2	1
D_4^n		0	2	0	2	0	2	0
D_5^n			1	3	0	2	4	1
D_6^n			0	2	4	0	2	4
D_7^n				1	3	5 (6-1)	0	2
D_8^n				0	2	4	6 (7-1)	0
D_9^n					1	3	5	7 (8-1)
D_{10}^n					0	2	4	6
D_{11}^n						1	3	5
D_{12}^n						0	2	4
D_{13}^n							1	3
D_{14}^n							0	2
D_{15}^n								1
D_{16}^n								0
學生人數	4	15	33	56	87	127	165	220

若要繼續推算下去，我們發現在n為偶數$(n = 2k)$時，從第$k + 1$列到第$2k$列須刪除數對數會從$k - 1$個遞減到 0 個，依等差數數列求和公式得到：

$$(k - 1 + 0) \times k \div 2 = (k - 1) \times k \div 2，$$

故在n為偶數$(n = 2k)$時，則班上的學生人數最大值之計數公式為：

$$4k^2 - \left[D_1^{2k} + D_2^{2k} + \cdots + D_k^{2k} + (k - 1) \times k \div 2\right]$$

三、探討在小組人數最多3、5、7、9⋯n(n 為奇數)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則$n = 3$、5、7、9、11、13、15下班上的學生人數之最大值如表 6-3-1。

表 6-3-1 $n = 3$、5、7、9、11、13、15下學生人數最大值

n	3	5	7	9	11	13	15
可能數對	9	25	49	81	121	169	225
D_1^n	0	0	0	0	0	0	0
D_2^n	1	1	1	1	1	1	1
D_3^n	0	2	1	0	2	1	0
D_4^n		1	3	1	3	1	3
D_5^n		0	2	4	1	3	0
D_6^n			1	3	5	1	3
D_7^n			0	2	4	6	1
D_8^n				1	3	5	7
D_9^n				0	2	4	6
D_{10}^n					1	3	5
D_{11}^n					0	2	4
D_{12}^n						1	3
D_{13}^n						0	2
D_{14}^n							1
D_{15}^n							0
學生人數	8	21	41	69	99	141	189

若要繼續推算下去，我們發現在n為奇數$(n = 2k + 1)$時，從第$k + 1$列到第$2k + 1$列須刪除數對數會從k個遞減到 0 個，依等差數數列求和公式得到：

$$(k + 0) \times (k + 1) \div 2 = (k + 1) \times k \div 2，$$

故在n為奇數$(n = 2k + 1))$時，則班上的學生人數最大值之計數公式為：

$$(2k + 1)^2 - \left[D_1^{2k+1} + D_2^{2k+1} + \cdots + D_k^{2k+1} + (k + 1) \times k \div 2\right]$$

四、快速編碼法：

我們進行分組活動時，運用$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$方格表編碼，再刪掉最少格子的方法。由上述研究結果，可推知運用此方法的結果，不只可確認參與學生人數的最大值，而且每一個號碼可唯一對應一位學生，因此，此結果可被運用在真實生活的分組活動，即藉由快速編碼法的結果，可讓參與活動的學生得到一個唯一的碼號，且可由每組最多n人(允許一個人單獨一組)，準確的快速推知可參與學生人數的最大值，並進而用來準確預估最多可報名人數。

柒、結論

本研究在探討小組成員最多 n 人的情況下所構成班上學生人數之最大值及計數方法，我們藉由觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、在探討每組人數最多2 人、3 人、4 人⋯n 人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，如何找出班上的學生人數之最大值之計數方法時，我們運用快速編碼法找到計數方法與公式。

二、在探討每組人數最多2 人、3 人、4 人⋯n 人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值之計數方法時，發現其解法可分成唯一解與多重解。

(一) 在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}(2 \leq n \leq 6)$的方格表，只有$5 \times 5$有多重解法，其他都為唯一解。

(二) 在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}(n > 6)$的方格表，都有多重解法。

三、找到在小組人數最多2、4、6⋯n(n 為偶數，$\mathrm{n} = 2\mathrm{k}$)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則學生人數最大值之計數公式為：

$$4k^2 - \left[D_1^{2k} + D_2^{2k} + \cdots + D_k^{2k} + (k-1) \times k \div 2\right]$$

四、找到在小組人數最多3、5、7⋯n(n 為奇數，$\mathrm{n} = 2\mathrm{k}+1$)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則學生人數最大值之計數公式為：

$$(2k+1)^2 - \left[D_1^{2k+1} + D_2^{2k+1} + \cdots + D_k^{2k+1} + (k+1) \times k \div 2\right]$$

五、此研究的結果可應用在各種活動的進行上，如無法進行均分的人數下，亦可適用在活動前的準備，在確保符合本研究分組的條件下，藉由本研究所發現對參與學生的快速編碼法，以確定活動參與人數的最大值，並進而用來準確預估最多可報名人數。

捌、參考文獻資料

一、2017 國際中小學數學能力檢測(IMAS)-小學中年級第一輪檢測試題第 25 題

【評語】080401

本作品由日常生活中的分組活動出發，探討每次都與不同的人分在同一組，學生人數之最大值及計數方法，主題饒富趣味。以下是評審委員的綜和評析：

1. 作者引入類似矩陣列表的方法來推導公式，直接切入問題，構想不錯；歷經觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，得出學生人數最大值之計數公式，思路明確清晰。美中不足的是作者所得到的公式其實是成員人數的上界，還需要更進一步的說明才能論證所得的上界是真的最大值。

2. 建議作者可應用研究結果，以幾個實例說明「辦活動分組時，可藉由本研究所發現對參與學生的快速編碼法，以確定活動參與人數的最大值，進而用來準確預估最多可報名人數。」此舉將更有助於提高本研究的應用價值。

作品簡報

分組史考特

組別：國小組
科別：數學科

壹、研究動機

- **研究動機：**

　　在日常生活中很多時候都需要進行分組活動，像是育樂營的活動都會將參加者分成好幾個小隊進行活動與競賽，或是體育課時需要分組進行練習與比賽，我們察覺每次分組模式時常是將人數平均分進每一組，或是認識的人總在同一組，這樣的分法太過了無新意與單調了，因此，我們很好奇有沒有特別的分法可以每次都與不同的人分在同一組，同時每個小組人數可以不同。

- **研究問題：**

　　遊戲分成上、下午兩個階段，要求每組最多 n 人（允許一個人單獨為一組）。當遊戲結束後，每位學生先報出自己上午所屬小組分別的成員人數，再報出下午所屬小組分別的成員人數。結果發現任意二位學生報出的數對都不相同，請問該班最多可能有多少位學生？

貳、名詞釋義

- **編碼法：**為了方便表示學生分組情形，我們將分組情形以數對(x ， y)編碼表示在方格表中，用 x 表示該學生上午所屬小組人數， y 則表示該生下午所屬小組人數，前一個數字為列，後一個數字為行，表格最下方為第一列，列數由下往上依序遞增至第n列，表格最左側為第一行，行數由左往右依序遞增至第n行，且每位學生皆有一個不重複的數對，如圖2-1-1。

	第一行			第四行
第四列	(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)
	(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)
	(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)
第一列	(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)

圖 2-1-1 以數對編碼法表示分組情形

- D_i^n：每組成員最多 n 人下，因為第 i 列$(1 \leq$ i $\leq n)$的數對應該符合上午所屬小組的成員人數為 i 的學生報的數對，即第 i 列中必須有 i 之倍數的數對，同理第 i 行中必須有 i 之倍數的數對，所以在第 i 列須刪除的數對數量為 n 除以 i 後所留下的餘數，如D_3^4即是在每組最多4人下，第3列須刪除的數對數量，也就是說$4 \div 3 = 1 \ldots 1$，因此須刪除一個數對，即$D_3^4 = 1$。

(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)
(3，1)	(3，2)		(3，4)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)

圖 5-2-3 每組最多 4 人下符合條件後的學生人數

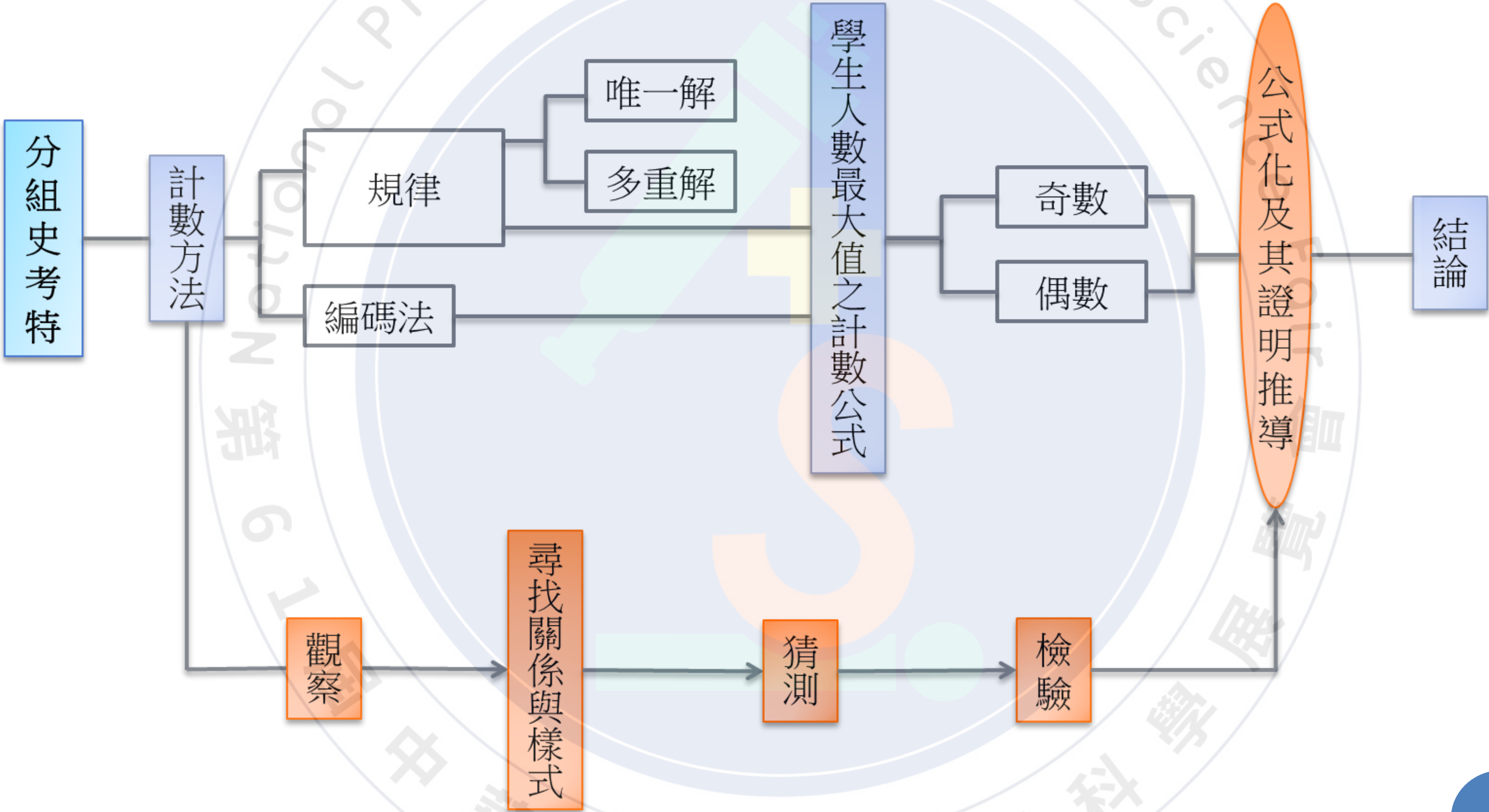
參、研究目的

1. 發展在每組人數最多2人、3人、4人⋯n人的情況下，且任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值之計數方法。
2. 探討在小組人數最多2、4、6⋯n(n為偶數)人的情況下，且任二位學生報出的數對不相同，其班上的學生人數之最大值。
3. 探討在小組人數最多3、5、7⋯n(n為奇數)人的情況下，且任二位學生報出的數對不相同，其班上的學生人數之最大值。

肆、研究設備及器材

伍、研究過程或方法

- 研究架構與流程圖



研究方法－發展在每組人數最多2人、3人、4人⋯n人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值之計數方法。

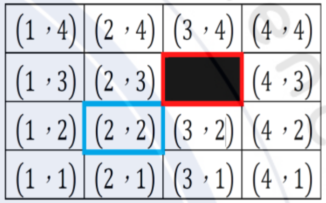
- **觀察**：每位學生都會報出一組數對，且數對會對應到該位學生上午和下午所數的小組人數，因此第 i 列($1 \le i \le n$)的數對應該符合上午所屬小組的成員人數為 i 的學生報的數對，而這些學生的總數是 i 的倍數，即第 i 列中必須有 i 之倍數的數對，同理來說，第 i 行中有 i 之倍數的學生報數，即第 i 行中必須有 i 之倍數的數對。
- 以每組最多4人($n = 4$)為例：

(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)

圖 5-2-1 符合題目可能的數對

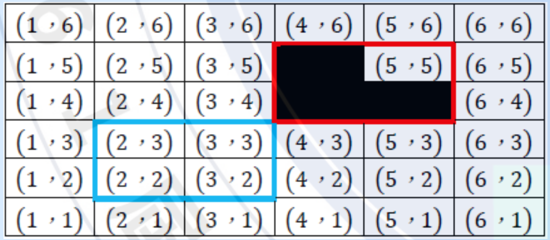
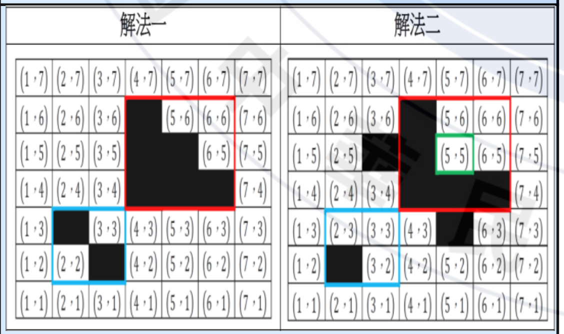
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)
(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)

圖 5-2-2 需要刪除數對的列與行



	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^4	$4 \div 1 = 4$	0
D_2^4	$4 \div 2 = 2$	0
D_3^4	$4 \div 3 = 1 \ldots 1$	1
D_4^4	$4 \div 4 = 1$	0
人數最大值	$4 \times 4 - 1 = 15$	

- **尋找關係與樣式**：

n	刪除數對量	快速編碼法
5	(see below)	
6	(see below)	
7	(see below)	

n = 5

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^5	$5 \div 1 = 5$	0
D_2^5	$5 \div 2 = 2 \ldots 1$	1
D_3^5	$5 \div 3 = 1 \ldots 2$	2
D_4^5	$5 \div 4 = 1 \ldots 1$	1
D_5^5	$5 \div 5 = 1$	0
人數最大值	$5 \times 5 - 4 = 21$	

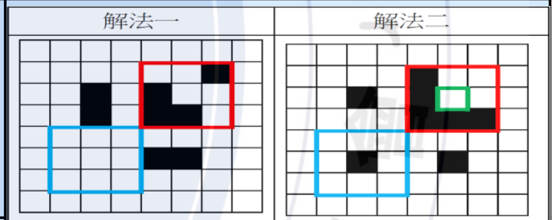
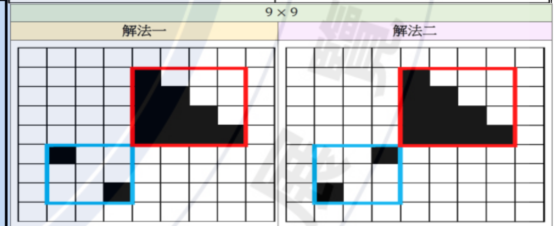
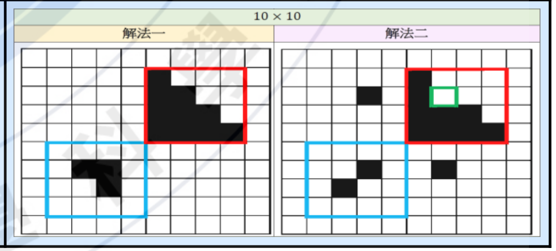
n = 6

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^6	$6 \div 1 = 6$	0
D_2^6	$6 \div 2 = 3$	0
D_3^6	$6 \div 3 = 2$	0
D_4^6	$6 \div 4 = 1 \ldots 2$	2
D_5^6	$6 \div 5 = 1 \ldots 1$	1
D_6^6	$6 \div 6 = 1$	0
人數最大值	$6 \times 6 - 3 = 33$	

n = 7

	刪除數對之計算公式	每列刪除數對數量
D_1^7	$7 \div 1 = 7$	0
D_2^7	$7 \div 2 = 3 \ldots 1$	1
D_3^7	$7 \div 3 = 2 \ldots 1$	1
D_4^7	$7 \div 4 = 1 \ldots 3$	3
D_5^7	$7 \div 5 = 1 \ldots 2$	2
D_6^7	$7 \div 6 = 1 \ldots 1$	1
D_7^7	$7 \div 7 = 1$	0
人數最大值	$7 \times 7 - 8 = 41$	

- **猜測與檢驗**

n	猜測	檢驗
8	(see below)	
9	(see below)	
10	(see below)	

n = 8

可能數對數量		$8 \times 8 = 64$	
D_1^8	$8 \div 1 = 8$	D_5^8	$8 \div 5 = 1 \ldots 3$
D_2^8	$8 \div 2 = 4$	D_6^8	$8 \div 6 = 1 \ldots 2$
D_3^8	$8 \div 3 = 2 \ldots 2$	D_7^8	$8 \div 7 = 1 \ldots 1$
D_4^8	$8 \div 4 = 2$	D_8^8	$8 \div 8 = 1$
猜測：$n = 8$	$8 \times 8 - 2 - 3 - 2 - 1 = 56$		

n = 9

可能數對數量		$9 \times 9 = 81$			
D_1^9	$9 \div 1 = 9$	D_4^9	$9 \div 4 = 2 \ldots 1$	D_7^9	$9 \div 7 = 1 \ldots 2$
D_2^9	$9 \div 2 = 4 \ldots 1$	D_5^9	$9 \div 5 = 1 \ldots 4$	D_8^9	$9 \div 8 = 1 \ldots 1$
D_3^9	$9 \div 3 = 3$	D_6^9	$9 \div 6 = 1 \ldots 3$	D_9^9	$9 \div 9 = 1$
猜測：$n = 9$	$9 \times 9 - 1 - 1 - 4 - 3 - 2 - 1 = 69$				

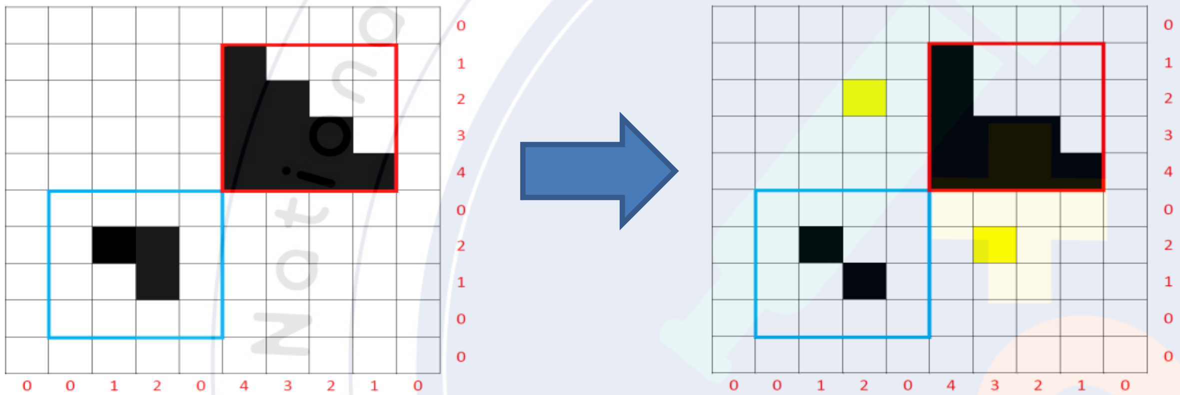
n = 10

可能數對數量		$10 \times 10 = 100$	
D_1^{10}	$10 \div 1 = 10$	D_6^{10}	$10 \div 6 = 1 \ldots 4$
D_2^{10}	$10 \div 2 = 5$	D_7^{10}	$10 \div 7 = 1 \ldots 3$
D_3^{10}	$10 \div 3 = 3 \ldots 1$	D_8^{10}	$10 \div 8 = 1 \ldots 2$
D_4^{10}	$10 \div 4 = 2 \ldots 2$	D_9^{10}	$10 \div 9 = 1 \ldots 1$
D_5^{10}	$10 \div 5 = 2$	D_{10}^{10}	$10 \div 10 = 1$
猜測：$n = 10$	$10 \times 10 - 1 - 2 - 4 - 3 - 2 - 1 = 87$		

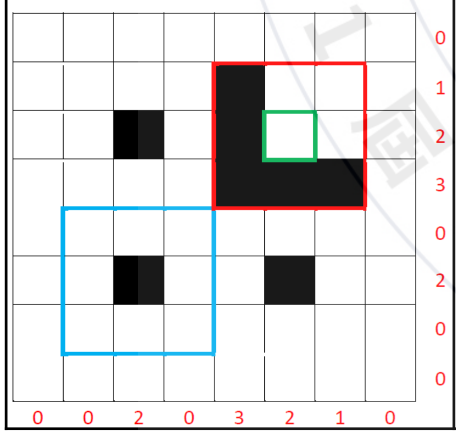
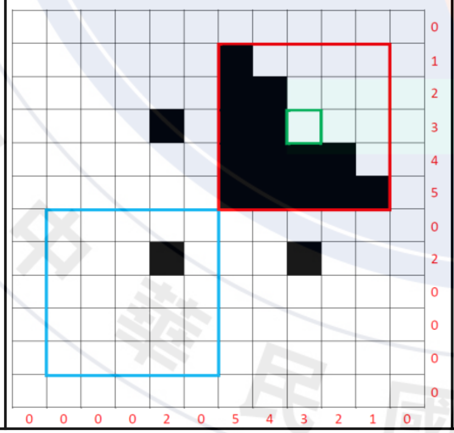
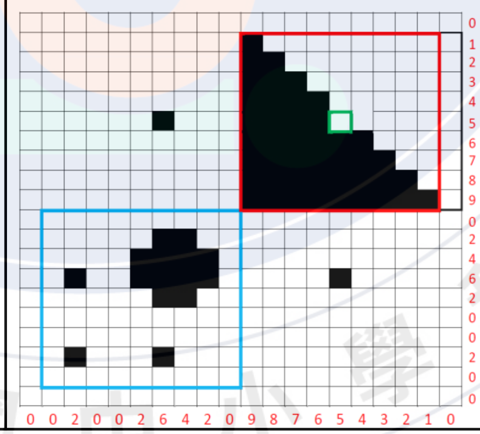
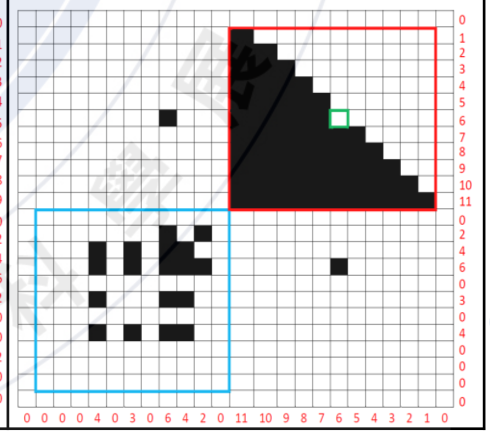
每組學生最多n人時學生人數之最大值計數方法，即$n \times n - (D_1^n + D_2^n + D_3^n + \cdots + D_{n-1}^n + D_n^n)$

快速編碼法

- 以10 × 10為例，將方格表分為紅框區與藍框區：
- 紅框區：處理商等於 1 的餘數，刪除數對以樓梯型呈現。
- 藍框區：處理商大於 1 的餘數，由大而小處理餘數。
- 當從紅框填補一個洞，則須在非紅、藍兩框處挖兩個洞，如下圖所示。



- 特殊情形：當藍框區最大的餘數大於非 0 餘數的個數時，則為特殊情形。
- 當碰到特殊情形，則須要從樓梯型借一個當2個時，請從樓梯的中間開始借，如下圖所示：

8×8	12×12	20×20	24×24
			

論證

- **命題：**

　　在$n \times n$的方格表中，進行分組活動，分成上下午兩個階段，每組最多n人(允許一個人單獨一組)，每位學生報出的數碼為(x, y)，其中x, y分別表示該學生在上午、下午所屬小組的人數，則必可找到分組方法，使得每位學生報出的數對(x, y)都不相同，且使得參與分組的學生總數達到最大值。

- **證明：**

　　運用$n \times n$方格表編碼再刪掉格子的分組方法，即先列出滿足條件的各行與各列的餘數量，而依條件所列的各列與各行的餘數量都必對應相等。

- **依下列原則，在n × n方格表中刪掉格子：**

　　每一刪掉的格子，都要雙向的滿足此格子所在的列、行的餘數量一次，亦即此一被刪掉的格子，可達到滿足2個餘數量。如此，必可使參與分組的學生總數達到最大值。

論證

- 以8×8方格表為例，將各列與各行須刪除的格子量標示在方格旁，並以顏色標記，如圖5-2-12，列與行的餘數量都要雙重滿足，其要被滿足的餘數總量為$(2+3+2+1)\times2$，即16。
- 我們刪掉的格子數量為8，即黑點，如圖5-2-13，又每一被刪掉的格子，都唯一對應到其本身所在位置的行與列，即可滿足該列與該行各1個餘數量，共滿足2個餘數量，$8\times2=16$，恰好滿足餘數總量16。
- **依被刪掉格子可對應到的餘數量分類，則可分成3類：**

1. 第一類，如圖5-2-12白色格子，對應到0個餘數量。
2. 第二類，如圖5-2-12藍色格子，對應到1個餘數量。
3. 第三類，如圖5-2-12橘色格子，對應到2個餘數量。

- 因此，可推知我們刪掉的格子量8，為滿足餘數總量16的格子量之最小值。
- 若刪掉的格子量小於8，則其所能滿足的餘數總量必小於16，即必不能滿足餘數總量的需求。
- 又總格子數量為8×8，即64，減掉被刪掉的格子量8，可推知學生數的最大值為：$64-8=56$。

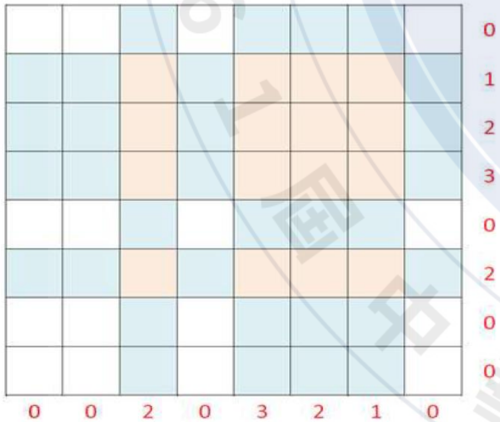


圖 **5-2-12**8×8方格表須刪除格子之列與行

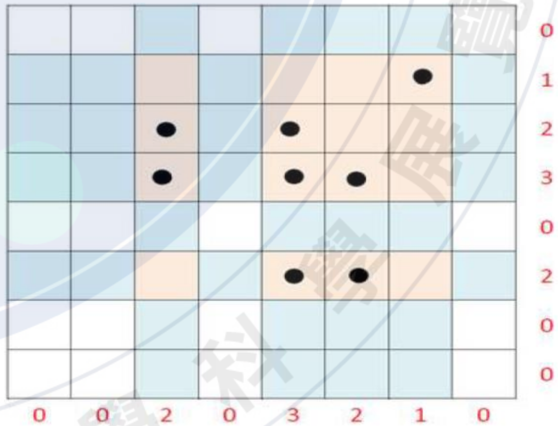


圖 **5-2-13**8×8方格表刪掉的格子所在位置

研究方法一 探討在小組人數最多2、4、6、8…n(n為偶數)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值。

觀察：

表5-2-9 在n = 2、4、6、8、10下每列須刪除之數對量

n	2	4	6	8	10
可能數對	4	16	36	64	100
D_1^n	0	0	0	0	0
D_2^n	0	0	0	0	0
D_3^n		1	0	2	1
D_4^n		0	2	0	2
D_5^n			1	3	0
D_6^n			0	2	4
D_7^n				1	3
D_8^n				0	2
D_9^n					1
D_{10}^n					0

尋找關係與樣式：

表 5-2-10 D_1^{2k}到D_{2k}^{2k}刪除數對量表

n	2	n	4	n	6	n	8	n	10
k	1	k	2	k	3	k	4	k	5
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0
		D_{2+1}^n	1 (2-1)	D_3^n	0	D_3^n	2	D_3^n	1
		D_{2+2}^n	0	D_{3+1}^n	2 (3-1)	D_4^n	0	D_4^n	2
				D_{3+2}	1	D_{4+1}^n	3 (4-1)	D_5^n	0
				D_{3+3}	0	D_{4+2}^n	2	D_{5+1}	4 (5-1)
						D_{4+3}^n	1	D_{5+2}^n	3
						D_{4+4}^n	0	D_{5+3}^n	2
								D_{5+4}^n	1
								D_{5+5}^n	0

(1)當n=4，則k=2

$$4\times4-(D_1^4+D_2^4+D_3^4+D_4^4)$$
$$=4\times4-(0+0+1+0)$$
$$=4\times4-(1+0)\times2\div2$$
$$=4\times4-(2-1+0)\times2\div2$$
$$=16-1$$
$$=15$$

(2) 當n=6，則k=3

$$6\times6-\left(D_1^6+D_2^6+D_3^6+D_4^6+D_5^6+D_6^6\right)$$
$$=6\times6-(0+0+0+2+1+0)$$
$$=6\times6-(2+0)\times3\div2$$
$$=6\times6-(3-1+0)\times3\div2$$
$$=36-3$$
$$=33$$

(3) 當 n=8，則k=4

$$8\times8-\left(D_1^8+D_2^8+D_3^8+D_4^8+D_5^8+D_6^8+D_7^8+D_8^8\right)$$
$$=8\times8-(0+0+2+0+3+2+1+0)$$
$$=8\times8-[2+(3+0)\times4\div2]$$
$$=8\times8-[2+(4-1+0)\times4\div2]$$
$$=64-8$$
$$=56$$

(4) 當 n=10，則k=5

$$10\times10-\left(D_1^{10}+D_2^{10}+D_3^{10}+D_4^{10}+D_5^{10}+D_6^{10}+D_7^{10}+D_8^{10}+D_9^{10}+D_{10}^{10}\right)$$
$$=10\times10-(0+0+1+2+0+4+3+2+1+0)$$
$$=10\times10-[3+(4+0)\times5\div2]$$
$$=10\times10-[3+(5-1+0)\times5\div2]$$
$$=100-13$$
$$=87$$

猜測：

表 5-2-11 猜測每組人數最多在 12 人之學生人數最大值

n	k	$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div2\right]$
12	6	$4k^2-[D_1^{12}+D_2^{12}+D_3^{12}+D_4^{12}+D_5^{12}+D_6^{12}+(k-1)\times k\div2]$ $=12\times12-[0+0+0+0+2+0+(6-1)\times6\div2]$ $=144-(2+15)$ $=144-17$ $=127$

表 5-2-12 猜測每組人數最多在 14 人之學生人數最大值

n	k	$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div2\right]$
14	7	$4k^2-[D_1^{14}+D_2^{14}+D_3^{14}+D_4^{14}+D_5^{14}+D_6^{14}+D_7^{14}+(k-1)\times k\div2]$ $=4\times7\times7-[0+0+2+2+4+2+0+(7-1)\times7\div2]$ $=196-(10+21)$ $=196-31$ $=165$

表 5-2-13 猜測每組人數最多在 16 人之學生人數最大值

n	k	$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div2\right]$
16	8	$4k^2-[D_1^{16}+D_2^{16}+D_3^{16}+D_4^{16}+D_5^{16}+D_6^{16}+D_7^{16}+D_8^{16}+(k-1)\times k\div2]$ $=4\times8\times8-[0+0+1+0+1+4+2+0+(8-1)\times8\div2]$ $=256-(8+28)$ $=256-36$ $=220$

檢驗：

表 5-2-14 n為 12、14、16下每列須刪除數對量與學生人數最大值之結果

n	12	n	14	n	16
k	6	k	7	k	8
可能數對	144	可能數對	196	可能數對	256
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_2^n	0	D_2^n	0	D_2^n	0
D_3^n	0	D_3^n	2	D_3^n	1
D_4^n	0	D_4^n	2	D_4^n	0
D_5^n	2	D_5^n	4	D_5^n	1
D_6^n	0	D_6^n	2	D_6^n	4
D_{6+1}^n	5	D_7^n	0	D_7^n	2
D_{6+2}^n	4	D_{7+1}^n	6	D_8^n	0
D_{6+3}^n	3	D_{7+2}^n	5	D_{8+1}^n	7
D_{6+4}^n	2	D_{7+3}^n	4	D_{8+2}^n	6
D_{6+5}^n	1	D_{7+4}^n	3	D_{8+3}^n	5
D_{6+6}^n	0	D_{7+5}^n	2	D_{8+4}^n	4
		D_{7+6}	1	D_{8+5}^n	3
		D_{7+7}	0	D_{8+6}^n	2
				D_{8+7}^n	1
				D_{8+8}^n	0
學生人數	127	學生人數	165	學生人數	220

故在n為偶數下(n=2k)，學生人數最大值公式為：$4k^2-\left[D_1^{2k}+D_2^{2k}+\cdots+D_k^{2k}+(k-1)\times k\div2\right]$

研究方法一

探討在小組人數最多3、5、7、9⋯n(n為奇數)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值。

觀察：

表 5-2-15 在n = 3、5、7、9下每列須刪除之數對量

n	3	5	7	9
可能數對	9	25	49	81
D_1^n	0	0	0	0
D_2^n	1	1	1	1
D_3^n	0	2	1	0
D_4^n		1	3	1
D_5^n		0	2	4
D_6^n			1	3
D_7^n			0	2
D_8^n				1
D_9^n				0

尋找關係與樣式：

表 5-2-16 D_1^{2k+1}到D_{2k+1}^{2k+1}刪除數對量表

n	3	n	5	n	7	n	9
k	1	k	2	k	3	k	4
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_{1+1}^n	1	D_2^n	1	D_2^n	1	D_2^n	1
D_{1+2}^n	0	D_{2+1}^n	2	D_3^n	1	D_3^n	0
		D_{2+2}^n	1	D_{3+1}^n	3	D_4^n	1
		D_{2+3}^n	0	D_{3+2}^n	2	D_{4+1}^n	4
				D_{3+3}^n	1	D_{4+2}^n	3
				D_{3+4}^n	0	D_{4+3}^n	2
						D_{4+4}^n	1
						D_{4+5}^n	0

(1) 當n=3，則k=1

$$
\begin{aligned}
&3\times 3-(D_1^3+D_2^3+D_3^3)\\
&=3\times 3-(0+1+0)\\
&=3\times 3-(1+0)\times 2\div 2\\
&=3\times 3-(1+0)\times(1+1)\div 2\\
&=9-1\\
&=8
\end{aligned}
$$

(2) 當n=5，則k=2

$$
\begin{aligned}
&5\times 5-(D_1^5+D_2^5+D_3^5+D_4^5+D_5^5)\\
&=5\times 5-(0+1+2+1+0)\\
&=5\times 5-[1+(2+0)\times 3\div 2]\\
&=5\times 5-[1+(2+0)\times(2+1)\div 2]\\
&=25-4\\
&=21
\end{aligned}
$$

(3) 當n=7，則k=3

$$
\begin{aligned}
&7\times 7-(D_1^7+D_2^7+D_3^7+D_4^7+D_5^7+D_6^7+D_7^7)\\
&=7\times 7-(0+1+1+3+2+1+0)\\
&=7\times 7-[2+(3+0)\times 4\div 2]\\
&=7\times 7-[2+(3+0)\times(3+1)\div 2]\\
&=49-8\\
&=41
\end{aligned}
$$

(4) 當n=9，則k=4

$$
\begin{aligned}
&9\times 9-(D_1^9+D_2^9+D_3^9+D_4^9+D_5^9+D_6^9+D_7^9+D_8^9+D_9^9)\\
&=9\times 9-(0+1+0+1+4+3+2+1+0)\\
&=9\times 9-[2+(4+0)\times 5\div 2]\\
&=9\times 9-[2+(4+0)\times(4+1)\div 2]\\
&=81-12\\
&=69
\end{aligned}
$$

猜測：

表 5-2-17 猜測每組人數最多在 11 人之學生人數最大值

n	k	$(2k+1)^2-[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2]$
11	5	$11^2-[D_1^{11}+D_2^{11}+D_3^{11}+D_4^{11}+D_5^{11}+(5+1)\times 5\div 2]$ $=121-[0+1+2+3+1+6\times 5\div 2]$ $=121-(7+15)$ $=121-22$ $=99$

表 5-2-18 猜測每組人數最多在 13 人之學生人數最大值

n	k	$(2k+1)^2-[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2]$
13	6	$13^2-[D_1^{13}+D_2^{13}+D_3^{13}+D_4^{13}+D_5^{13}+D_6^{13}+(6+1)\times 6\div 2]$ $=169-[0+1+1+1+3+1+7\times 6\div 2]$ $=169-(7+21)$ $=169-28$ $=141$

表 5-2-19 猜測每組人數最多在 15 人之學生人數最大值

n	k	$(2k+1)^2-[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2]$
15	7	$15^2-[D_1^{15}+D_2^{15}+D_3^{15}+D_4^{15}+D_5^{15}+D_6^{15}+D_7^{15}+(7+1)\times 7\div 2]$ $=225-[0+1+0+3+0+3+1+8\times 7\div 2]$ $=225-(8+28)$ $=225-36$ $=189$

檢驗：

表 5-2-20 n 為 11、13、15 下每列須刪除數對量與學生人數最大值之結果

n	11	n	13	n	15
k	5	k	6	k	7
可能數對	121	可能數對	169	可能數對	225
D_1^n	0	D_1^n	0	D_1^n	0
D_2^n	1	D_2^n	1	D_2^n	1
D_3^n	2	D_3^n	1	D_3^n	0
D_4^n	3	D_4^n	1	D_4^n	3
D_5^n	1	D_5^n	3	D_5^n	0
D_{5+1}^n	5	D_6^n	1	D_6^n	3
D_{5+2}^n	4	D_{6+1}^n	6	D_7^n	1
D_{5+3}^n	3	D_{6+2}^n	5	D_{7+1}^n	7
D_{5+4}^n	2	D_{6+3}^n	4	D_{7+2}^n	6
D_{5+5}^n	1	D_{6+4}^n	3	D_{7+3}^n	5
D_{5+6}^n	0	D_{6+5}^n	2	D_{7+4}^n	4
		D_{6+6}^n	1	D_{7+5}^n	3
		D_{6+7}^n	0	D_{7+6}^n	2
				D_{7+7}^n	1
				D_{7+8}^n	0
學生人數	99	學生人數	141	學生人數	189

故在n為奇數下$(n=2k+1)$，學生人數最大值公式為：$(2k+1)^2-[D_1^{2k+1}+D_2^{2k+1}+\cdots+D_k^{2k+1}+(k+1)\times k\div 2]$

陸、研究結果

一、在探討班上的學生人數之最大值之計數方法時，發現其解法可分成唯一解與多重解，結果如下：

1. **在$n \times n (2 \le n \le 6)$的方格表，只有$5 \times 5$有多重解法，其他都為唯一解**，如圖6-1-1、圖6-1-2。

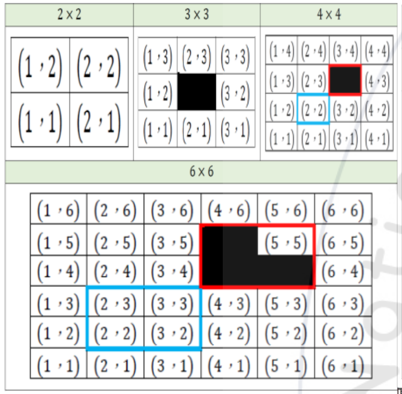


圖 6-1-1 在n x n(2 ≤ n ≤ 6)的方格表中，2x2、3x3、4x4、6x6 皆為唯一解

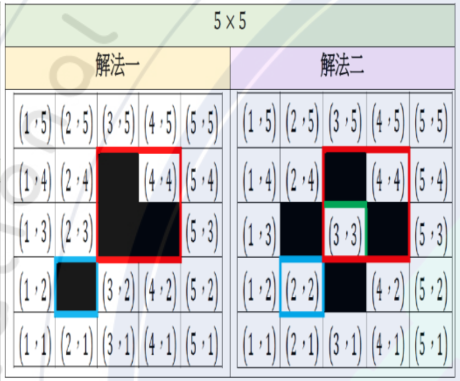


圖 6-1-2 在n x n(2 ≤ n ≤ 6)的方格表中，5x5 為多重解法

2. **在$n \times n (n > 6)$的方格表，都有多重解法**，如圖6-1-3、圖6-1-4、圖6-1-5、圖6-1-6。

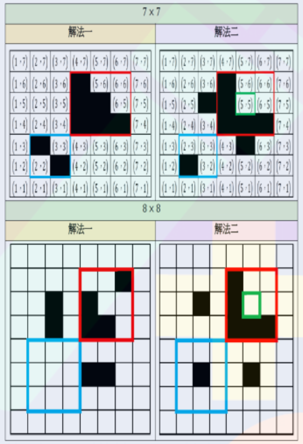


圖 6-1-3 在n x n(n > 6)的方格表中，7x7、8x8 為多重解法

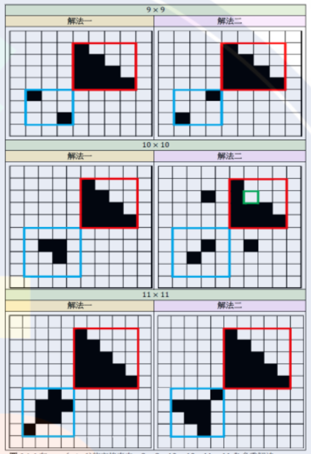


圖 6-1-4 在n x n(n > 6)的方格表中，9x9、10x10、11x11 為多重解法

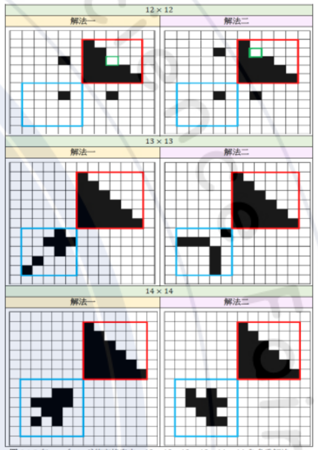


圖 6-1-5 在n x n(n > 6)的方格表中，12x12、13x13、14x14 為多重解法

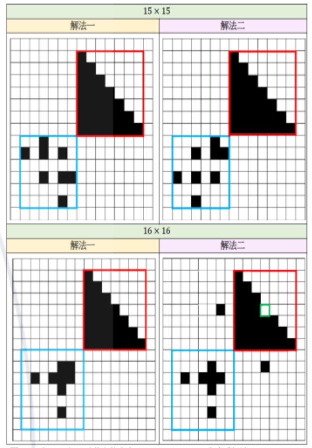


圖 6-1-5 在n x n(n > 6)的方格表中，15x15、16x16 為多重解法

二、發展在小組人數最多n(n為偶數)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則$n = 2$、4、6、8、10、12、14、16下班上的學生人數之最大值如表6-2-1。

公式：$4k^2 - [D_1^{2k} + D_2^{2k} + \cdots + D_k^{2k} + (k-1) \times k \div 2]$

表 **6-2-1** n = 2、4、6、8、10、12、14、16下學生人數最大值

n	2	4	6	8	10	12	14	16
可能數對	4	16	36	64	100	144	196	256
D_1^n	0	0	0	0	0	0	0	0
D_2^n	0	0	0	0	0	0	0	0
D_3^n		1	0	2	1	0	2	1
D_4^n		0	2	0	2	0	2	0
D_5^n			1	3	0	2	4	1
D_6^n			0	2	4	0	2	4
D_7^n				1	3	5 (6-1)	0	2
D_8^n				0	2	4	6 (7-1)	0
D_9^n					1	3	5	7 (8-1)
D_{10}^n					0	2	4	6
D_{11}^n						1	3	5
D_{12}^n						0	2	4
D_{13}^n							1	3
D_{14}^n							0	2
D_{15}^n								1
D_{16}^n								0
學生人數	4	15	33	56	87	127	165	220

三、發展在小組人數最多n(n為奇數)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則$n = 3$、5、7、9、11、13、15下班上的學生人數之最大值如表6-3-1。

公式：$(2k+1)^2 - [D_1^{2k+1} + D_2^{2k+1} + \cdots + D_k^{2k+1} + (k+1) \times k \div 2]$

表 6-3-1 n = 3、5、7、9、11、13、15下學生人數最大值

n	3	5	7	9	11	13	15
可能數對	9	25	49	81	121	169	225
D_1^n	0	0	0	0	0	0	0
D_2^n	1	1	1	1	1	1	1
D_3^n	0	2	1	0	2	1	0
D_4^n		1	3	1	3	1	3
D_5^n		0	2	4	1	3	0
D_6^n			1	3	5	1	3
D_7^n			0	2	4	6	1
D_8^n				1	3	5	7
D_9^n				0	2	4	6
D_{10}^n					1	3	5
D_{11}^n					0	2	4
D_{12}^n						1	3
D_{13}^n						0	2
D_{14}^n							1
D_{15}^n							0
學生人數	8	21	41	69	99	141	189

四、快速編碼法

柒、研究結論

一. 在探討每組人數最多2人、3人、4人⋯n人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，如何找出班上的學生人數之最大值之計數方法時，我們運用快速編碼法找到計數方法與公式。

二. 在探討每組人數最多2人、3人、4人⋯n人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則班上的學生人數之最大值之計數方法時，發現其解法可分成唯一解與多重解。

(一) 在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}(2 \leq n \leq 6)$的方格表，只有$5 \times 5$有多重解法，其他都為唯一解。

(二) 在$\mathrm{n} \times \mathrm{n}(n > 6)$的方格表，都有多重解法。

三. 找到在小組人數最多2、4、6⋯n(n為偶數，$\mathrm{n} = 2\mathrm{k}$)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則學生人數最大值之計數公式為：

$$4k^2 - \left[D_1^{2k} + D_2^{2k} + \cdots + D_k^{2k} + (k-1) \times k \div 2\right]$$

四. 找到在小組人數最多3、5、7⋯n(n為奇數，$\mathrm{n} = 2\mathrm{k} + 1$)人的情況下，任二位學生報出的數對不相同，則學生人數最大值之計數公式為：

$$(2k+1)^2 - \left[D_1^{2k+1} + D_2^{2k+1} + \cdots + D_k^{2k+1} + (k+1) \times k \div 2\right]$$

五. 此研究的結果可應用在各種活動的進行上，如無法進行均分的人數下，亦可適用在活動前的準備，在確保符合本研究分組的條件下，藉由本研究所發現對參與學生的快速編碼法，以確定活動參與人數的最大值，並進而用來準確預估最多可報名人數。

捌、參考文獻資料

一、2017國際中小學數學能力檢測(International Mathematics Assessments for Schools , IMAS)-小學中年級第一輪檢測試題第25題