

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

團隊合作獎

051810

非平衡系統之多體粒子集體行為相變研究：量
子電腦統計在有序參量分析之應用

學校名稱：慈濟學校財團法人慈濟大學附屬高級中學

作者： 高一 吳懿恩 高一 羅暉哲 高一 邱浩哲	指導老師： 柯政宏
---	------------------

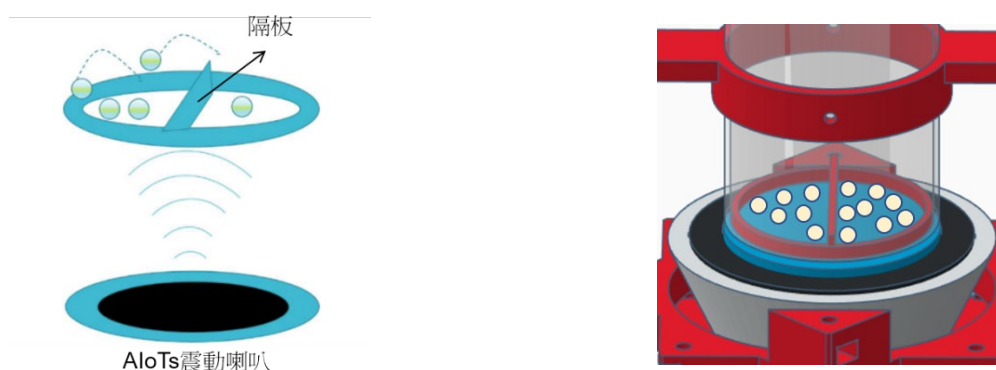
關鍵詞：相變、有序參量、量子電腦計算

摘要

我們設計一 AIoTs 物聯網相變實驗系統，觀察與分析多體粒子的彈跳運動行為，並以二分法來觀察系統在不同驅動電壓下的粒子數失衡參數 α 與有序參量 β ；在改變頻率實驗中，觀察到低驅動電壓下的粒子集體行為(collecting behavior)、臨近相變臨界點之粒子漸近行為(Approaching behavior)、與遠離相變臨界點之粒子漲落行為(Fluctuation behavior)皆與頻率有關，且臨界電壓隨頻率增加，呈現指數遞減，約在 6 Hz 後即趨於常數 3.6 eV，而高驅動電壓下之粒子漲落行為仍依然存在，而量子電腦計算結果說明，利用 26-Qubits 成功描述 20 個自旋粒子在控制旋轉閘(Controlled Rotate Y-gate)運算下的相變行為，並能完美擬合相變區間之漸進行為(Approaching behavior)。藉由本次科展所提出之實驗模型，可以在未來為凝體物理系統與相變實驗提供更豐富的研究課題與更廣闊的研究前景。

壹、研究動機

在一次偶然的美食節目中看見有經驗的大廚，在食物下鍋前，會先用手指澆灑水滴在鍋面，觀察水滴在鍋面是否跳動，以決定鍋面溫度與烹煮的時機；對此好奇，我們研究小組即上網尋找此物理現象為何？以了解到為什麼水滴在很燙的鍋子裡反而不會很快沸騰呢？發現原來是萊登佛羅斯特效應(Leidenfrost Effect)，水滴在高溫時底部會產生蒸氣，使其在鍋面懸浮跳動，其跳動的高度取決於鍋面的溫度。如此有趣的現象，引起我們想要科學化，有系統的研究粒子的跳躍與系統穩定的問題。因此，我們設計一個簡易的封閉 AIoTs 相變實驗系統，如圖一(a)所示，引入二分法(Dichotomy)概念[1]，將多體粒子放在可程式化的震動喇叭，並以隔板區分左右兩區，改變驅動喇叭電壓、頻率、與隔板高度，以觀察其粒子在不同實驗參數下，其在喇叭表面跳躍與在左右兩區兩邊之分佈數，如圖一(b)所示，並以此研究系統的相變與穩定度。



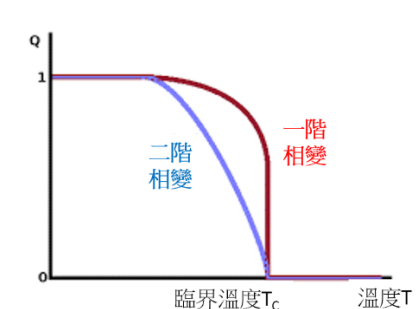
圖一：(a) 簡易的封閉 AIoTs 相變實驗系統，以隔板區分左右兩區並以喇叭震動粒子；(b) 觀察不同實驗參數下的粒子分布數。

貳、 研究目的

此簡易 AIoTs 相變實驗系統與凝體物理中的磁自旋排列與量子電腦的相關概念類似，我們分別說明如下：

一、凝體物理的相變

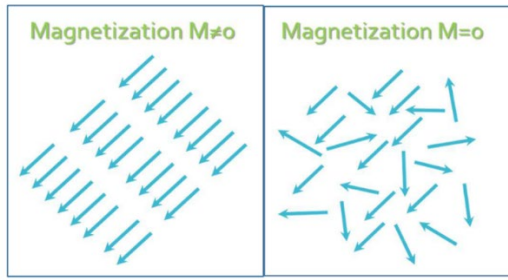
在凝體物理世界中，相變廣泛存在於自然界，並受眾多因素影響，如空間維度、溫度、磁場、晶格缺陷等。數學家保羅·埃倫費斯特是首位提出利用自由能(Free energy)的微分來分類自然界所觀察到相變性分類[2]：如果自由能對某一個熱力學量(如溫度、磁場)的一次微分，呈現不連續態，則稱為一階相變(First order phase transition)；如果一次微分結果表現出連續態，而二次微分出現不連續或發散，則為二階相變(Second order phase transition)。另外存在一種特殊的相變，其自由能對某一個熱力學量可無限微分，相變中也沒有對稱性自發破缺。這種無窮級相變研究，則獲得 2016 年諾貝爾物理學獎，稱為 Kosterlitz—Thouless 相變[3]，主要伴隨著成對拓撲電荷分離為自由電荷(如二維超流中的渦流和晶體中的位錯)。此類相變表現出類似二階相變的「冪次律」特性，所以和二階相變一起統稱為連續相變。所有的這類相變都可以透過一個共同的理論架構來闡述，此架構即為「有序參量」(order parameter)的概念[4]。



圖二：為描述連續性相變系統中，當高於相變溫度時，系統的序參數保持為零，而當低於相變溫度時，系統的序參數則會隨溫度的降低而連續性地持續增大。

例如在磁學中，有序參數與原子磁偶極的排列有關，有序參數可用來探討巨觀的磁化強度。如圖二所示，在所謂的連續性相變系統中，當高於相變溫度時，系統的有序參數保持為零，而當低於相變溫度時，系統的序參數則會隨溫度的降低而連續性地持續增大。在連續性相變系統中，其相變溫度即稱為臨界溫度 T_c ，當系統呈現一階相變的有序參量，其相變區間較趨於階梯函數(Step function)，而二階相變系統則須用冪次定律來做描述。

我們也可以藉由量測系統磁化強度隨溫度的改變，來研究系統相變，如磁性統中(如圖三所示)，即呈現出磁鐵中的微觀「有序」的概念，當系統呈現為鐵磁態時，磁偶極在低溫呈現同向排列以致造成在巨觀上的磁化強度合不為零(Macroscopic magnetization, $M \neq 0$)；反之，當系統在順磁態時，磁偶極則因高溫破壞，致使排列呈現凌亂，其巨觀上的磁化強度總和為零($M=0$)。



圖三：磁性系統中的微觀「有序」的概念，當系統呈現為鐵磁態時，其巨觀上的自發性磁化強度合不為零($M \neq 0$)；高溫則破壞磁偶極交作用時，致使磁排列呈現凌亂，其在巨觀上的磁化強度總和為零($M=0$)，呈現順磁性。

由統計物理中得知，系統的平衡態及相變點的位置都可以用理論來預測，而且連續相變在相變點附近的漸近行為可以用簡單的「冪次定律」來表示，如圖二之磁系統，其當系統溫度高於臨界溫度 $T > T_c$ 時，其磁化強度 $M=0$ ($T > T_c$)，而低於臨界溫度 $T < T_c$ 時，其磁化強度隨溫度關係為 $M \sim (T_c - T)^\beta$ ，而其中冪次指數 β 可以通過重整化群理論或實驗來量測得到，我們稱為有序參量。相反，一級相變缺乏普適性，並且其隨溫度變化過程在微觀上涉及大量粒子的聯動，往往由於觀察系統之原子分子太小，運動太快，並在三維液體固體內部而難以觀測，從而導致一級相變的微觀機制與過程仍存很多未解的難題。

而在本次 AIoT 相變實驗中，改變喇叭驅動電壓即是對應到凝態物理中的溫度，其激發粒子跳躍的動能 K_E 與喇叭的震動速率 \vec{v}^2 成正比，其關係式可以寫成：

$$K_E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \propto A^2 f^2, \quad (1)$$

因為喇叭的震動速率 \vec{v} 為震動振幅 A 與頻率 f 相乘，所以其激發粒子跳躍的動能 K_E 可寫成：

$$K_E \propto A^2 f^2, \quad (2)$$

所以，在此實驗中，輸入可控制的震動頻率激發喇叭、量測精準喇叭振幅與電壓關係，則是此次實驗的關鍵。而理論計算此系統之有序參量，我們可以參考凝態物理統計法，在粒子總數為 N 的系統中，分別量測左邊的粒子數 N_1 與右邊的粒子數 N_2 ，並統計多次實驗的量測數，分別取其平均值 $\bar{N}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_j$ 與 $\bar{N}_2 = N - \bar{N}_1$ ，並定義其歸一化下的差值 α 作為失衡參數 (imbalance parameter)，如下式：

$$\alpha = \frac{|N_1 - N_2|}{|N_1 + N_2|} \quad (3)$$

此 α 失衡參數，其值趨近於1，表示系統趨近於集體行為，而介於 $\alpha>0$ 與 $\alpha<1$ 之間，則表示系統趨於相變區間，此情形就如凝體物理中的磁化強度 $M = \frac{(N_+ - N_-)}{V} \mu_B$ ，即磁化強度正比於自旋向上的個數 N_+ 與自旋向下的個數 N_- 的差值 $(N_+ - N_-)$ ；而固定頻率下的喇叭振幅(或說驅動電壓)即是溫度，我們可以認為當量測系統喇叭振幅 A 接近於臨界振幅(A_C)時，失衡參數 α 則趨近於0；而而介於 $\alpha>0$ 與 $\alpha<1$ 之間，臨界振幅(A_C)時， α 失衡參數隨振幅改變成幕次指數的關係，如下所示：

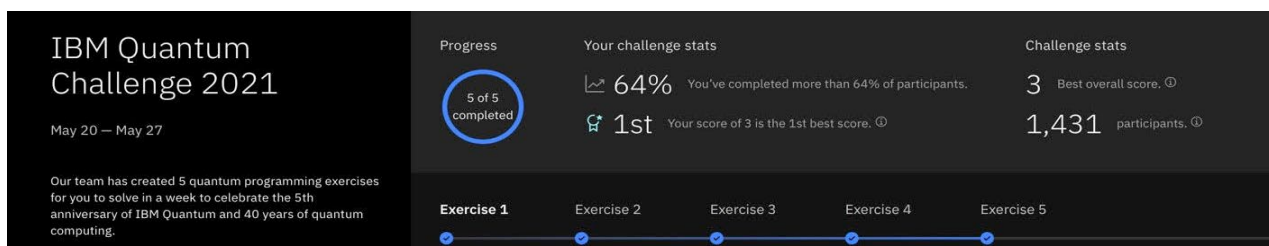
$$\alpha = \alpha_0 |A^2 - A_C^2|^\beta \quad (4)$$

而其中幕次指數 β 即可用來定義我們 AIoTs 相變實驗的有序參量，並藉此研究不同參數下粒子的相變行為改變之關係。

如上所述，在自然界中，仍存在很多狀態處於非平衡態系統，包括物理、化學、生命現象，這些系統往往難以去定義其自由能，但是很多現象還是可以藉由定義有序參量，如研究集體定向運動中的集體運動速度、自發相分離中粒子密度變化、圖形生成中存在的周期性等。並藉由調節系統控制之參數以改變有序參量，當有序參量與系統變數相關性呈現奇異性時，系統則處於類似於平衡下的相變，如一級相變的不連續或連續相變中的「幕次律」特性等，我們稱其為非平衡相變。與平衡態相變相比，非平衡相變中細緻平衡易被打破，因而會產生很多平衡態相變中不存在的現象，如持續的能量耗散等；這對基礎研究和技術非常重要，但相關的了解目前還很有限，而相關的科普實驗也很缺乏。

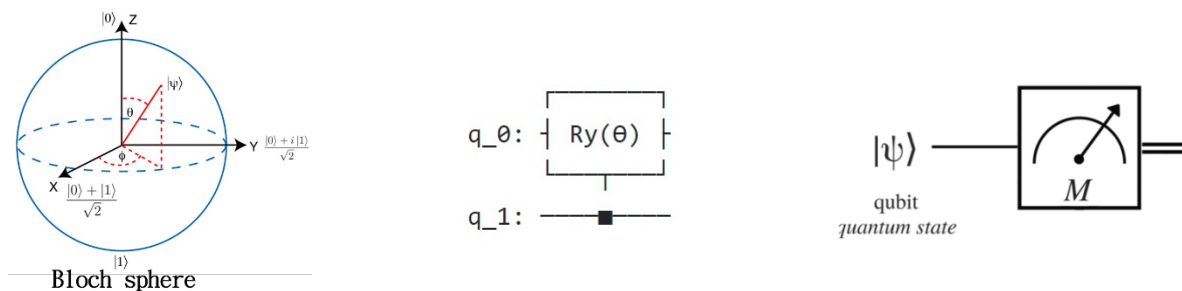
二、量子電腦計算在非平衡系統的應用

量子電腦入門為本學期高中的專題課程的選修內容，我們研究小組也共同修習此課程，所用教材為美國高中量子計算模組課程(Quantum Computing as a High School Module) [5]，並學習使用 IBM Qiskit 來繪製量子電路[6]，也於今年五月 20~27 日參加 IBM Quantum Challenge 2021 全球排序賽，如圖四所示，在為期八天的五大量子電腦挑戰賽，我們整體獲得最高分數與世界各國菁英並列第一，為台灣最佳的成績之一。



圖四: IBM Quantum Challenge 2021 排序賽。

基於此經驗，在此科展研究進行中，我們發現研究粒子的跳躍與相變同時也可以表示成一種隨機性，且觀察到並不是每次的測量都能得到同樣的數據，若是能將量子電腦的布洛球(Block Sphere)中之自旋向上 $|0\rangle$ 與自旋向上 $|1\rangle$ 概念應用於實驗中的左右二分法，如圖五(a)所示，並調製不同的驅動激發能如圖五(b)控制旋轉 CRY 運算)驅動布洛赫球自旋與量子量測(如圖五(c)來計算我們的實驗，也許此概念是可行的。



圖五：(a) 量子電腦布洛球圖示; (b) 控制旋轉運算; (c) 量子量測。

在專題學習過程中，我們同時也了解在理想的量子情況下，所產生的理想隨機性是不是真正不確定的，並且由於量子測量的結果，重複出現相同圖案或數據並沒有任何相關性，因此我們也在研究中尋找如何產生量子隨機[7-8]，並整合出幾項量子電腦關鍵技術與 IBM Q 實際條件，我們開發出一套量子電路，用來解釋此實驗，其關鍵條件為：

- (一)量子隨機亂數產生器(Quantum Random Number Generators, QRNGs)：製造一量子隨機亂數產生器 [6]，以模擬多體粒子(或說布洛求)之相變系統。
- (二)量子量測(Quantum measurement)：假設在一歐幾里德（或主要是二維空間）空間中，並利用控制旋轉 Y-Gate 運算，可避掉虛數空間的運算，以旋轉自旋至實數空間，來進行多種操作測量，圖五(c)所示，例如測量系統長度和角度。
- (三)量子統計(Quantum histogram)：利用大量的量子量測次數，以統計不同驅動激發能下的自旋向上 $|0\rangle$ 與自旋向上 $|1\rangle$ 的分佈，以解決實驗中量測之不確定性，我們實際利用 qasm simulator 量子電腦操作，可以約可在同步量測一百萬次(million shots)，並統計分佈數。
- (四)IBMQ qasm simulator qubits 限制：此為 Qiskit 量子電腦模擬器，其為採用古典電腦(如 Intel 系統)模擬量子電腦，操作上限為 32 量子位元 (32-Qubits)，我們在評估量子電路模擬前，預估約需要二十個量子位元(20-Qubits)來產生粒子數，五個量子位元(5-Qubits Counters)來統計(五個二進位，如 00000 為表示 1，11111 與 01111 分別為 $1+2+4+8+16=31$ 與 $1+2+4+8=15$)、一個量子位元(1-Qubit)來控制 Y-

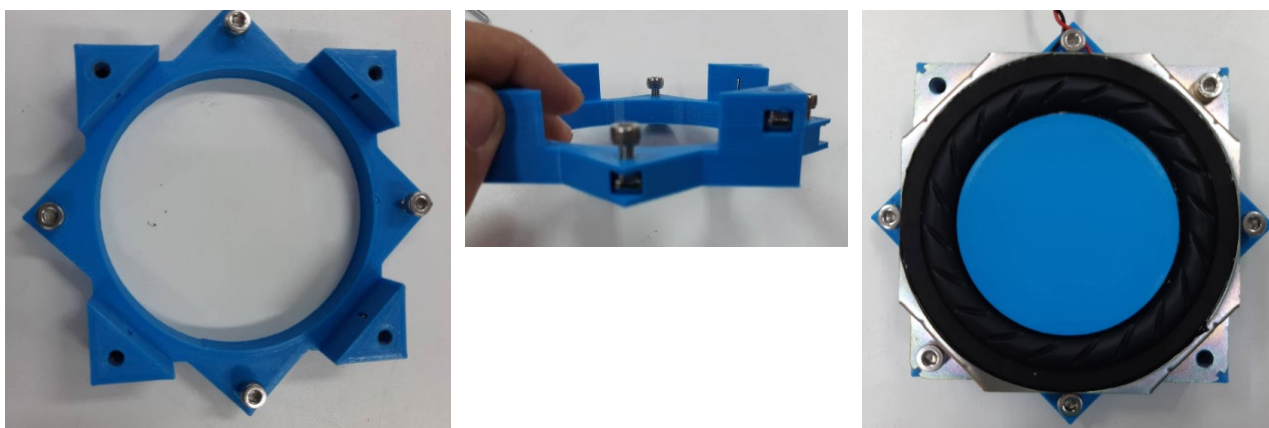
Gate 運算((Controlled Rotate Y-gate operator)、與五個量子量測(不須占用 Qubit)，合計共 26 個量子位元，恰好可以符合本次研究的需求。(我們使用的是免費的線上開放量子電腦，目前最高操作上限為 65-Qubits 的實體 IBM 量子電腦: ibmq_Brooklyn 與 ibmq_Manhattan，但需要付費)

綜合上述兩項研究目的，我們利用 3D 列印與物聯網技術，設計與自製一套物聯網相變實驗設備，以觀察多體粒子在外加激發動能下之跳躍行為，利用調制外加驅動能量去激發動能，以觀察其發生連續性相變的特性；例如系統的不穩定性如何造成粒子集體行為 (collecting behavior) 的改變、進而導致相變的出現，以及粒子的動能激發程度如何造成系統的巨觀變化，用以觀察其系統之有序參量。

參、 研究設備及器材

一、研究設備設計與 3D 列印

本次實驗，我們使用 Tinker CAD 軟體設計與 Snapmaker 3D 列印機製造此 AIoTs 相變實驗系統，首先尋找幾種簡易喇叭(半徑 5~20 cm 皆有)，最後測試直徑 5 cm 的喇叭適合在 5~12 V 直流電壓中驅動，並設計一喇叭裝載底座，如圖六(a)所示，考慮到喇叭表面水平的重要性，我們在四個角落處加入 M4 螺絲與鋁擠條 M4 固定滑塊四個，如圖六(b)所示，用來調整水平;而圖六(c)則為裝載完成圖；其中，為修飾喇叭表面之不平整，我們列印一 5 cm 圓盤黏於其上。



圖六：(a) 喇叭裝載底座；(b) M3 螺絲與鋁擠條固定滑塊用來調整水平；(c) 喇叭裝載完成圖。

由於，此為一封閉空間實驗設備，我們裁切一直徑為 $D=5\text{ cm}$ x 高為 $H=8\text{ cm}$ 之透明壓克力圓柱，並設計一安裝支撐架，如圖七(a)，其設計理念為要支撐透明壓克力圓柱，但不能頂到喇

叭，以影響到其振幅；其中二分法所需的 3D 列印圓柱隔板，如圖七(b)所示，其中間隔板高度為 5.74 mm；整體列印件的實驗組合完成圖如七(c)。



圖七：(a) 支撐透明壓克力圓柱支架；(b) 透明壓克力圓柱與 3D 列印圓柱隔板；(c) 3D 印件的實驗組合圖。

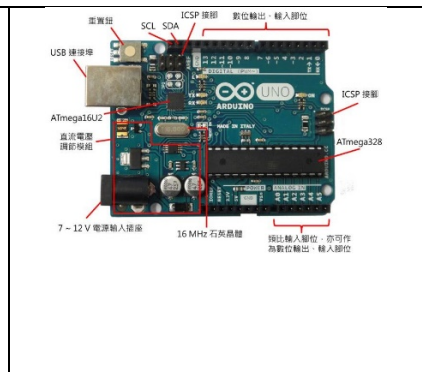
二、物聯網電路與零件

為確保實驗之穩定性，我們設計一物聯網 AIoTs 電路(Arduino)、PWM 脈衝頻率函數調節器、L289N 訊號放大器、與可手調式電源供應器，來驅動喇叭，其 Arduino Uno 之設計定時器與電路組裝圖則顯示於圖八，相關程式碼則列於附件一，實驗設備所用經費約在千元以下，其相關零件清單詳列於表一：

表一：物聯網 AIoTs 電路零件清單。

<p>(a) 110 V 可手調式電源供應器：可調整電流 0~ 24 V，以改變激發喇叭電壓。</p>	
<p>(b) 函數產生器：3 通道 PWM 方波產生器可提供 (1 ~ 150 kHz 之訊號。</p>	
<p>(c) L298N PWM：雙 H-橋接式馬達驅動電源 5~ 35V 範圍，最高電流為 2 A。</p>	

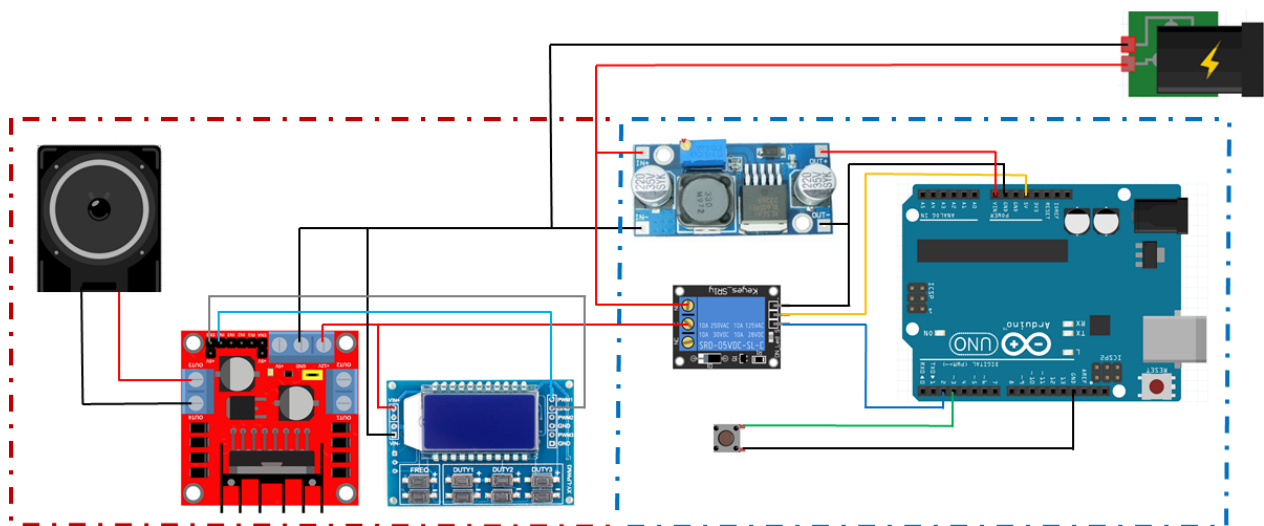
(d) Arduino Uno 主板：Arduino 是一張微控制器板子 (microcontroller board) 使用者可以在 Arduino 板子上接上各種電子裝置，例如 LED 燈、喇叭、馬達、開關、溫濕度感測器、紅外線發射與接收器、LCD 顯示裝置。若再配合撰寫一些自動控制的程式，就能利用 Arduino 做出各式各樣的自動控制應用。



(e) PP 塑膠粒子(聚丙烯)：x30 顆，直徑 $D=3\text{ mm}$ ，密度 0.9 g/cm^3 。



其中連接 Arduino Uno 之設計定時器與電路組裝如圖八所示，控制 Arduino 電路程式碼詳見附件一，其中閃電符號即為可手調式電源供應器，每次計時器設定為 $t=100\sim 10$ 秒，以按鈕觸發喇叭震動，實驗中可改變 PWM 方波產生器之頻率 $f=1\sim 10\text{ Hz}$ 。

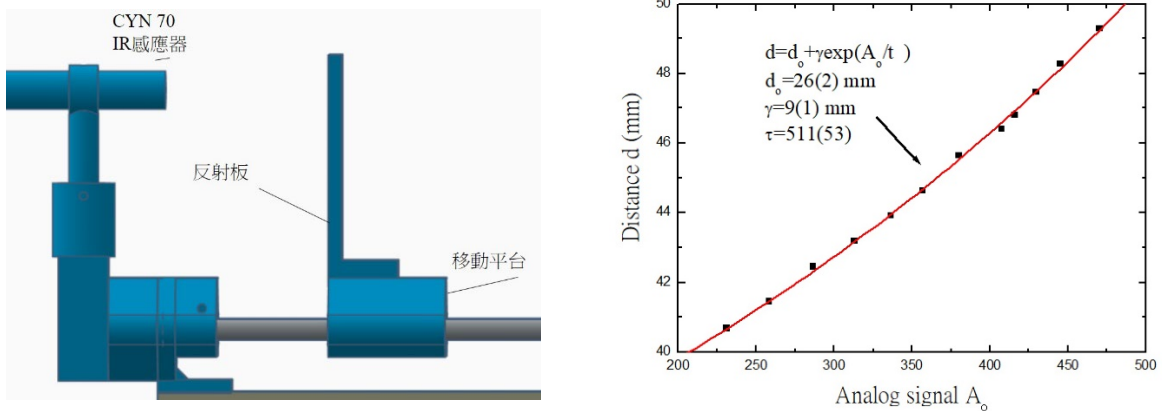


圖八：Arduino Uno 之設計定時器與電路組裝圖。

三、驅動電壓與喇叭振幅校正

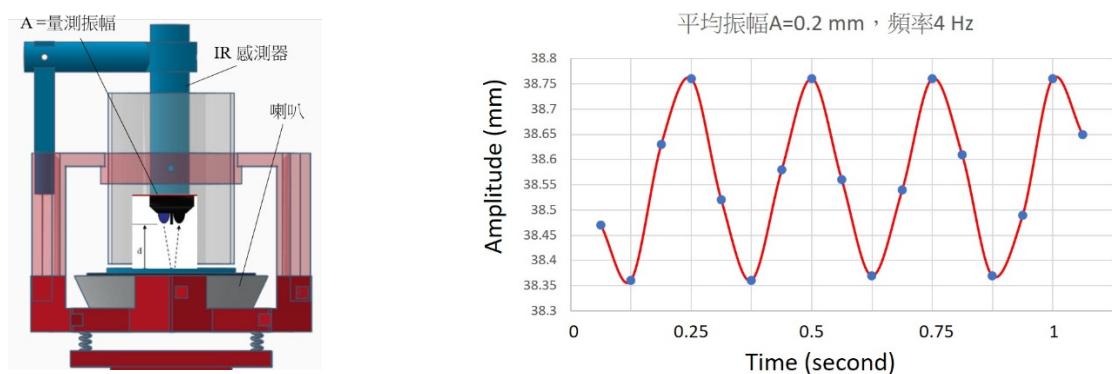
實驗設備與電路因為是自行製作，所以如何精準知道此系統在外加電壓下，其對應的喇叭振幅是多少？是一件蠻複雜的過程；首先，我們找到一支高靈敏 IR 感應器(CNY 70)，其量測分析率約為 0.01 mm ，並將其連接 Arduino Uno，其發射波長為 950 nm ，讀取訊號的方式為類比輸入，訊號為 $0\sim 1023$ 之間的數字；因此需要先校正距離 d 與類比訊號 A_0 之間的轉換，如圖九(a)所示，為利用 3D 列印所架設的校準器，我們依據實體距離來對應類比訊號，並移動反射板，紀錄感應器至反射板距離與類比訊號 A_0 之關係，圖九(b)為我們所得到的校

正圖，其類比訊號與距離的關係呈現指數遞增性的趨勢，實驗擬合的函數為 $d(A_o) = d_o + \gamma e^{A_o/\tau}$ 的關係，其中 $d_o=26(2)mm$ ，遞增斜率為 $\gamma = 9(1)mm$ ，訊號半衰期為 $\tau=511(53)$ 。



圖九：(a)為利用 3D 列印所架設的校準器；(b)校正所得類比訊號與距離的關係呈現指數遞增性的趨勢。

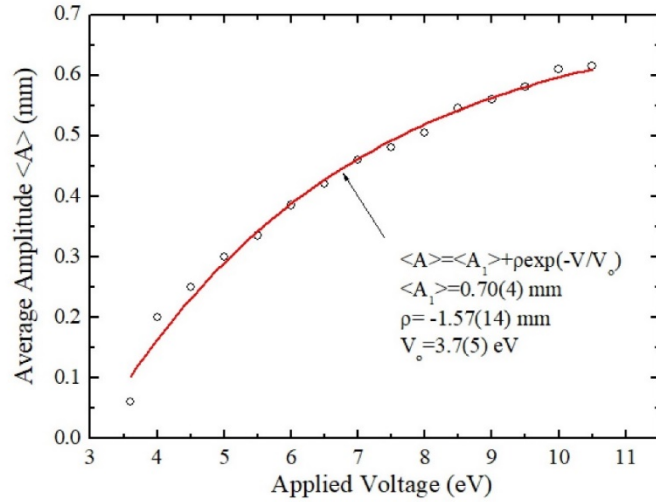
利用上述結果，我們將 IR 感測器置於壓克力圓柱中間，在距離為 4~5 cm 之間(與校正區間相同)，如圖十(a)所示；我們測量在固定驅動電壓 4 V 與頻率 $f=4$ Hz 下的喇叭振幅隨時間的關係(藍色實心圓點)，圖十(b)所示呈現為一振幅隨時間的三角函數震動，我們以 Sin 波函數(紅色實線)去擬合實驗結果，取得平均振幅 $\langle A \rangle$ 為 0.2 mm，如此我們可以進一步驅動電壓，找出喇叭平均振幅的對應關係，一般研判其應為線性關係，但是在做實驗設備的校正上，我們依經驗思考，也許不是線性？所以調整不同的驅動電壓 V，找出此設備的驅動電壓 V 與振幅 A 的關係式，也是校正與實驗精準的關鍵！



圖十：(a)IR 感測器置於壓克力圓柱中間測量振幅隨時間的關係；(b) 振幅隨時間的三角函數震動結果。

如圖十一所示，為驅動電壓與平均振幅呈現指數遞增性的趨勢，實驗擬合的函數為 $\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle + \rho e^{-V/V_o}$ 的關係，其中 $\langle A_1 \rangle = 0.70(4) mm$ ，遞增斜率為 $\rho = -1.57(14) mm$ ，半衰驅動

電壓為 $V_0 = 3.7(5) \text{ eV}$ 。

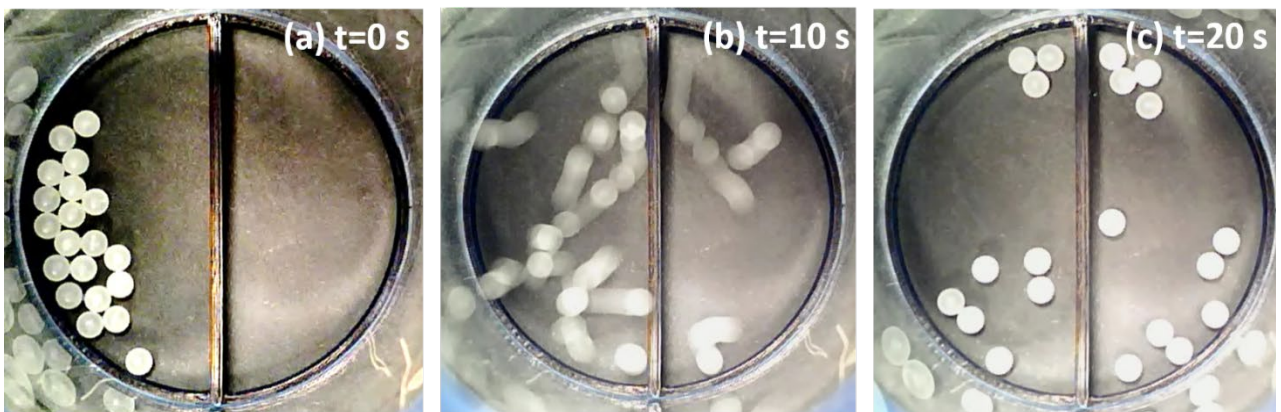


圖十一：為驅動電壓與平均振幅呈現指數遞增性的趨勢。

肆、 研究過程或方法

一、物聯網實驗操作過程與方法

在此研究粒子集體行為系統中，我們將一透明圓環中間以一小隔板，如物理系統中之位能牆壘(potential barrier)分隔此振盪器成兩半，而該系統中對應於我們所探究之相變的巨觀變化，即為小珠子在圓筒中兩半的分佈情況。如圖十二(a)-(c)為例，在實驗條件為驅動電壓 $V=10.6\text{V}$ 、頻率 $f=10 \text{ Hz}$ 、隔板高度 $H=5 \text{ mm}$ 、震動時間分別為在 $t=0$ 、 10 、 20 s 的實驗截圖，由圖十二(b)中我們可見粒子的跳躍非常激烈，而在 $t=20 \text{ s}$ 時見趨於平衡(圖十二(c))，粒子將平均分佈在圓筒的兩半，如左邊 $N_1=9$ ，右邊 $N_2=11$ 顆，此結果顯示，粒子跳躍數已達平衡，即對應到凝態系統中的磁相變，當溫度超過臨界溫度時的情況，系統漸趨有序，趨於平衡參數 $\alpha \sim 0$ 的狀況。



圖十二：(a)-(c)實驗條件為驅動電壓 $V=10.6 \text{ V}$ 、頻率 $f=10 \text{ Hz}$ 、隔板高度 $H=5.74 \text{ mm}$ 、震

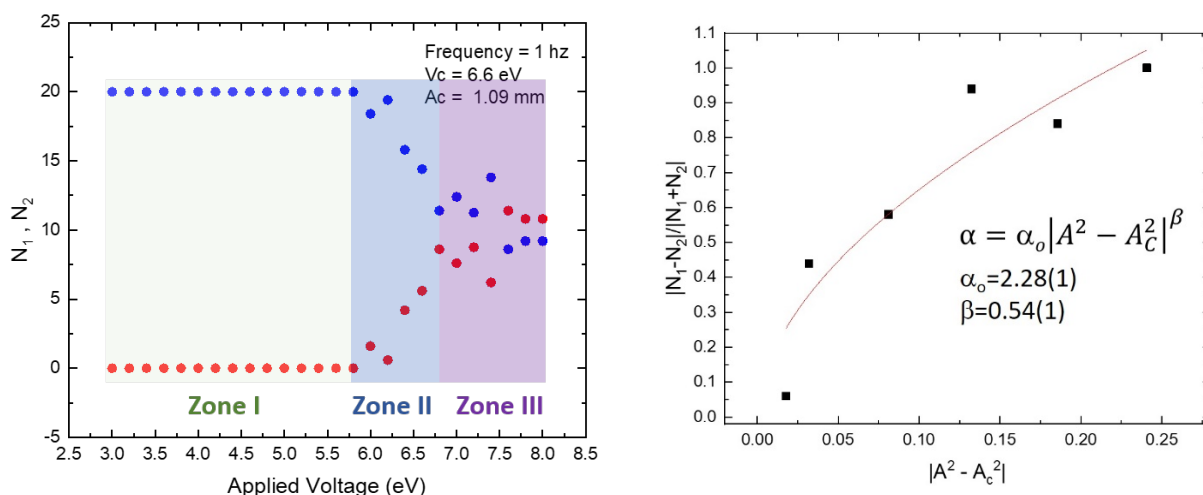
動共 20 s 下，分別為在時間 $t=0$ 、10、20 s 的實驗截圖。

由方程式(2)中，我們知道激發粒子跳躍的動能 K_E 正比頻率與振幅的平方，所以我們首先研究改變激發頻率下對系統有序參數的關係，實驗參數分別為頻率 $f=1$ Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、震動時間 $t=100$ s、系統彈跳總次數 $J_{\#} = f \times t = 100$ 次的粒子數(N_1 (藍色, 左邊)與 N_2 (紅色, 右邊)；每一次驅動電壓時，我們共操作五次量測在取平均數，且每一次量測，粒子皆歸置回左邊，於其實驗數據如表二所示：

表二：實驗之相關參數整理表。

驅動電壓 V(eV)	喇叭振幅 A (mm)	實驗次數、每次量到的 N_2 的個數					N_1 平均值 $\bar{N}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i$	N_2 平均值 $\bar{N}_2 = N - \bar{N}_1$	失衡參數 α $\alpha = \frac{ \bar{N}_1 - \bar{N}_2 }{\bar{N}_1 + \bar{N}_2}$
		1	2	3	4	5			
3	0.36	0	0	0	0	0	20	0	1.000
3.2	0.43	0	0	0	0	0	20	0	1.000
3.4	0.49	0	0	0	0	0	20	0	1.000
3.6	0.55	0	0	0	0	0	20	0	1.000
3.8	0.60	0	0	0	0	0	20	0	1.000
4	0.65	0	0	0	0	0	20	0	1.000
4.2	0.70	0	0	0	0	0	20	0	1.000
4.4	0.74	0	0	0	0	0	20	0	1.000
4.6	0.79	0	0	0	0	0	20	0	1.000
4.8	0.83	0	0	0	0	0	20	0	1.000
5	0.86	0	0	0	0	0	20	0	1.000
5.2	0.90	0	0	0	0	0	20	0	1.000
5.4	0.93	0	0	0	0	0	20	0	1.000
5.6	0.96	0	0	0	0	0	20	0	1.000
5.8	0.99	0	0	0	0	0	20	0	1.000
6	1.02	1	2	1	2	2	18.4	1.6	0.840
6.2	1.04	0	0	0	1	2	19.4	0.6	0.940
6.4	1.07	4	4	3	5	5	15.8	4.2	0.580
Vc=6.6	A_c=1.09	5	7	5	5	6	14.4	5.6	0.440
6.8	1.11	8	10	8	8	9	11.4	8.6	0.140
7	1.13	10	7	6	7	8	12.4	7.6	0.240
7.2	1.15	10	8	9	8	11	11.25	8.75	0.125
7.4	1.17	3	7	7	6	8	13.8	6.2	0.380
7.6	1.19	11	9	11	13	13	8.6	11.4	0.140
7.8	1.20	8	11	12	12	11	9.2	10.8	0.080
8	1.22	10	10	12	11	11	9.2	10.8	0.080

其圖十三(a)所示，為 N_1 、 N_2 平均值隨驅動電壓 V 的變化圖，清楚可以看見數據變化呈現三個區域範圍。



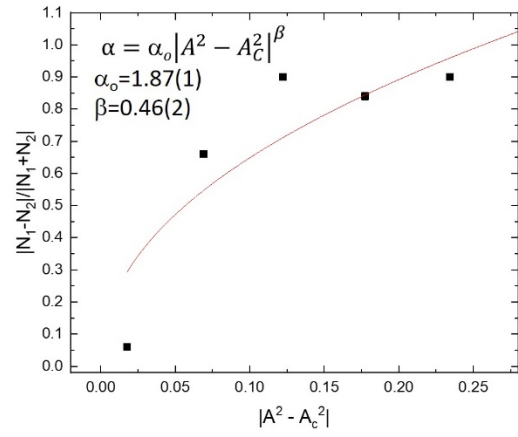
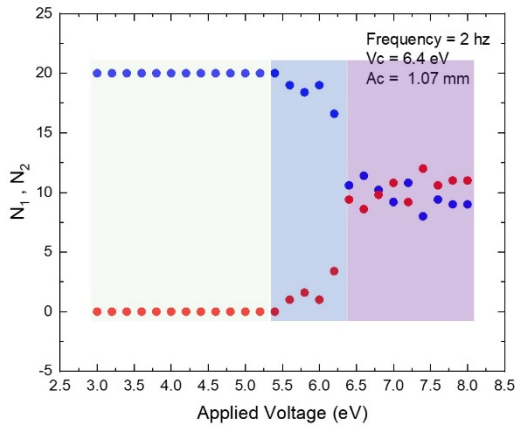
圖十三：(a)為頻率 1 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=100$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=0.54(1)$ 。

我們進一步分析其變化關係，我們可依驅動電壓 V 區分為三區：

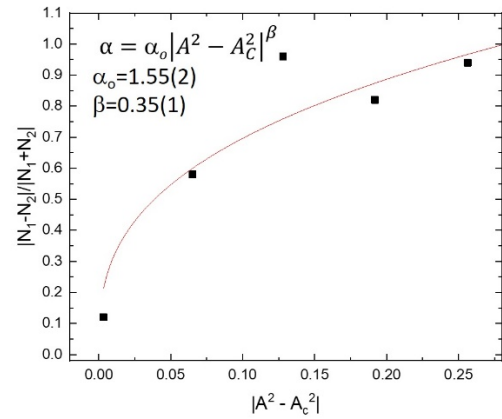
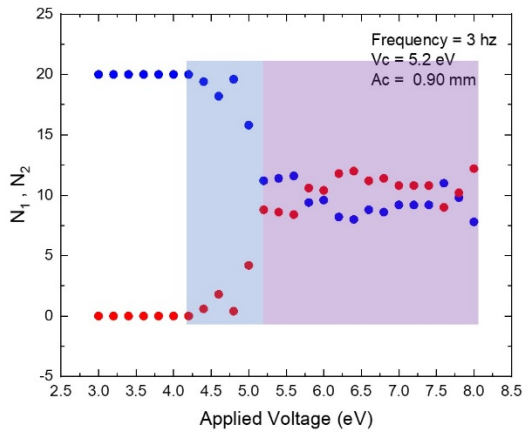
- 一、在區域 Zone-I 中(綠色標示， $V=3\sim 5.8$ eV)， N_1 (藍色，左邊)粒子數隨驅動電壓的關係為一直線，呈相變死亡態(Phase Transition Death State, PT-DS)，標示失衡參數 α 趨近於1。此變化範圍我們稱其為粒子集體行為(collecting behavior)。
- 二、在區域 Zone-II 中(藍色標示， $V=5.8\sim 6.8$ eV)，呈現相變混合態(Phase transition mixed states, PT-MS)， N_1 (藍色，左邊)粒子數隨驅動電壓的增加而減少，並出現非線性遞減的關係，由 $N_1=20$ ($V=5.8$ eV) 降至 $N_1=10$ ($V=6.8$ eV)，標示失衡參數 α 趨近於0；此變化範圍我們稱其為漸近臨界相變點的行為(Approaching behavior)。
- 三、在區域 R-III 中(紫色標示， $V=6.8\sim 8.0$ eV)，呈現相變死亡態(Phase Transition Death State, PTDS)和相變翻轉分叉態(Phase transition Flip Bifurcation State, PT-FBS)的共存， N_1 (藍色，左邊)粒子數隨驅動電壓的增加而上下震盪，標示失衡參數 α 在0值上下震盪，並無收斂的趨勢。此變化範圍我們稱其為遠離臨界相變點的漲落行為(Fluctuation behavior)。

依據表格二資料，我們也畫出失衡參數 α 隨振幅平方差 $|A^2 - A_c^2|$ 作圖，如圖十三(b)所示呈現指數遞增的趨勢，我們以方程式(4)來擬合此關係，可得到係數 $\alpha_0=2.28(1)$ ，有序參量 $\beta=0.54(1)$ 。

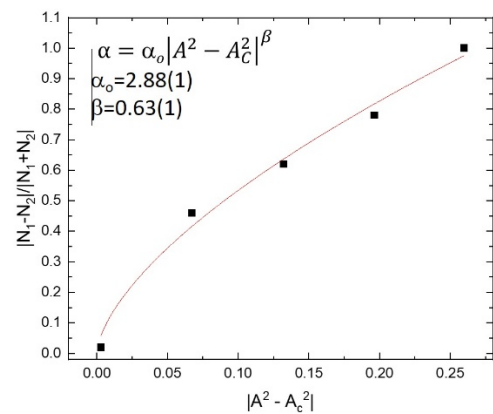
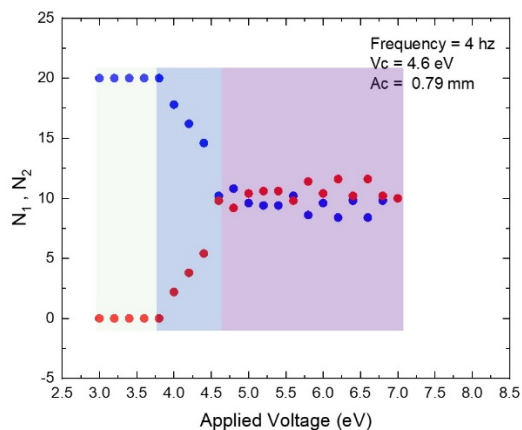
總結整體實驗過程，我們改變頻率，並固定其餘參數與彈跳次數 $J_\#$ ，以求得這個相變模型中之冪次律的指數與頻率的關係。如圖十四至二十二所示：



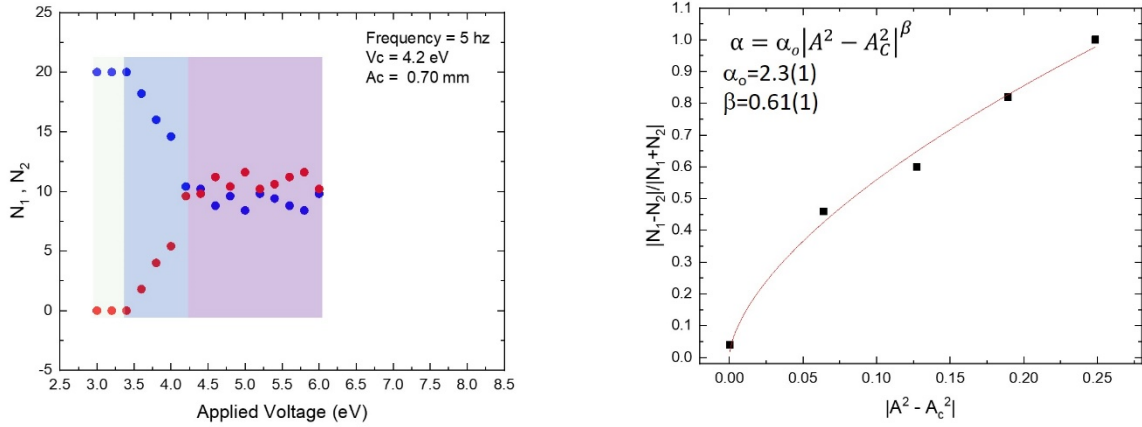
圖十四：(a)為頻率 2 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=50$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=0.46(2)$ 。



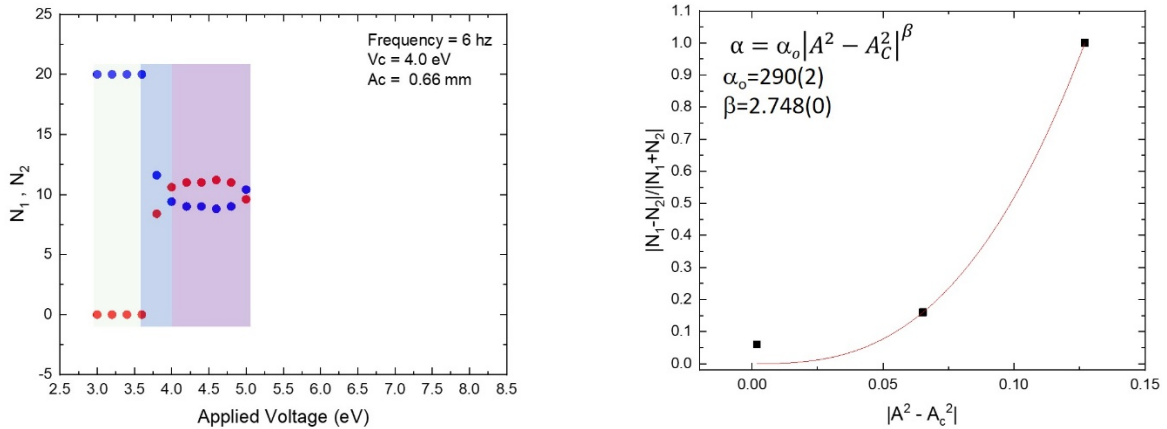
圖十五：(a)為頻率 3 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=33.3$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=0.35(1)$ 。



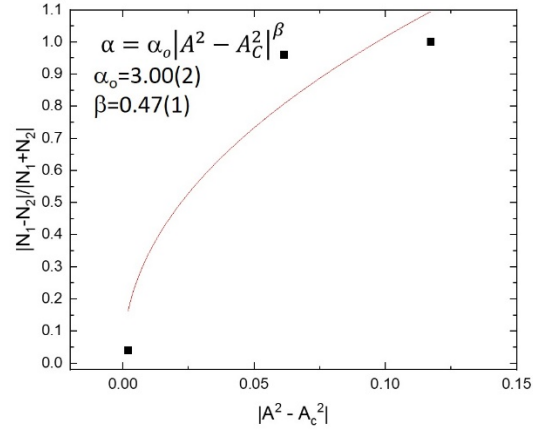
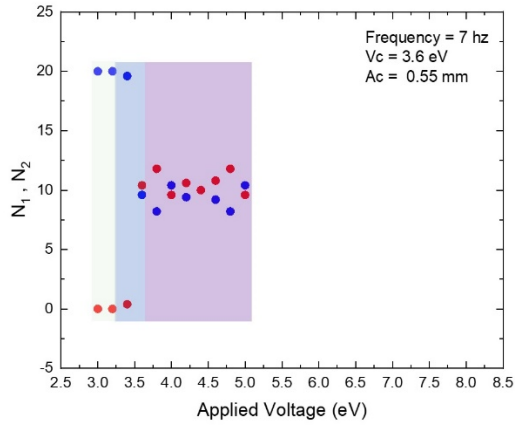
圖十六：(a)為頻率 4 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=25$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨著驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=0.63(1)$ 。



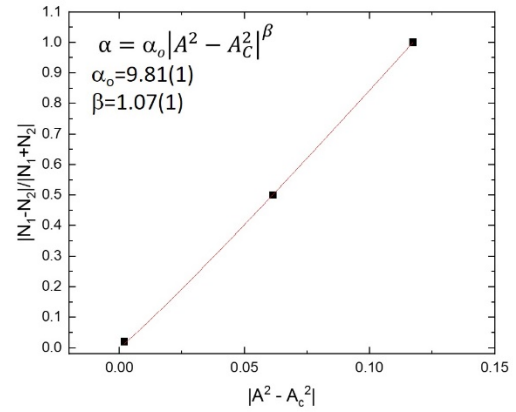
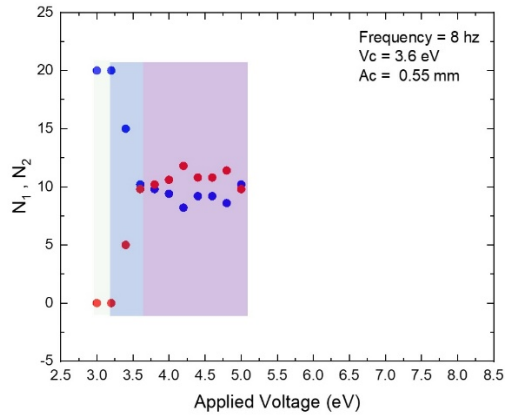
圖十七：(a)為頻率 5 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=20$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=0.61(1)$ 。



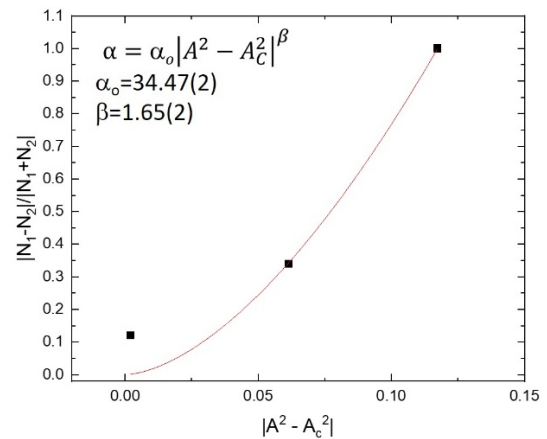
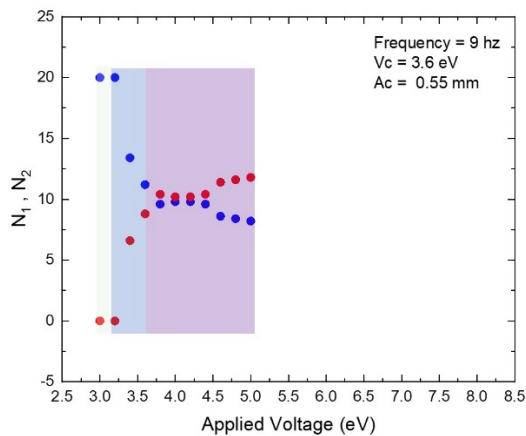
圖十八：(a)為頻率 6 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=16.7$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=2.748(0)$ 。



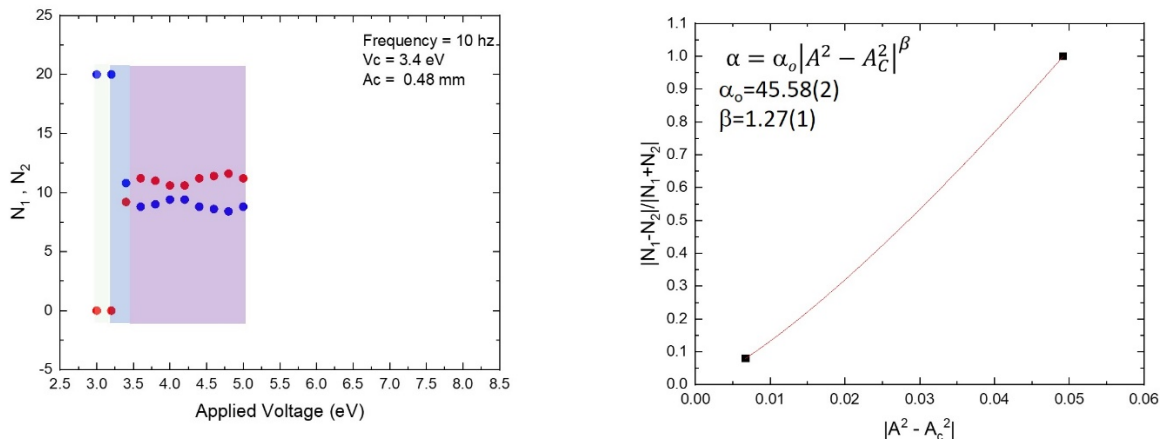
圖十九：(a)為頻率 7 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=14.3$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=0.47(1)$ 。



圖二十：(a)為頻率 8 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=12.5$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=1.07(1)$ 。



圖二十一：(a)為頻率 9 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=11.1$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=1.65(2)$ 。



圖二十二：(a)為頻率 10 Hz、隔板高度 $H=5.74$ mm、與震動時間 $t=10$ s 的粒子數(N_1 (藍色，左邊)與 N_2 (紅色，右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b)Zone II 範圍的有序參量的擬合圖， $\beta=1.27(1)$ 。

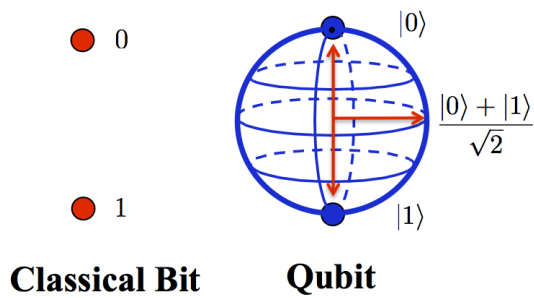
二、量子電腦計算過程與方法

由實驗操作過程中，我們搜尋文獻，並無相關的多體粒子古典理論模型，除了可以用統計法外(如方程式(1)-(4))，牛頓運動方程式運用來描述單一粒子的跳躍也稍嫌不足；若是引進古典隨機亂數，卻無法於量測時給於亂數產生也是問題，還有實體量測時，粒子左右跳動下，並無法於每次量測時得到相同的數據。我們也困擾於此些無解的問題？所以利用量子電腦是一條可行之路，本次科展，我們利用 26-Qubit 來計算我們的系統且進行 100 萬次的同時量子量測(已達 IBM Qiskit 的運算上限)，這樣的特性符合了我們實驗的需求。在實體物聯網實驗中，測量一組實驗數據約需一個小時，完成相關變數，則需約 10 小時；若是要採計百萬次的量測，需要千萬小時，及使用傳統電腦運算，也幾乎是不可能的事！因此，量子計算使用 Qubit 而不是 Classic bit 來執行任務。量子位元是量子力學系統，可導致它們的 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 或某些疊加，我們從布洛赫球面上的量子狀態，可以表示為：

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\theta}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

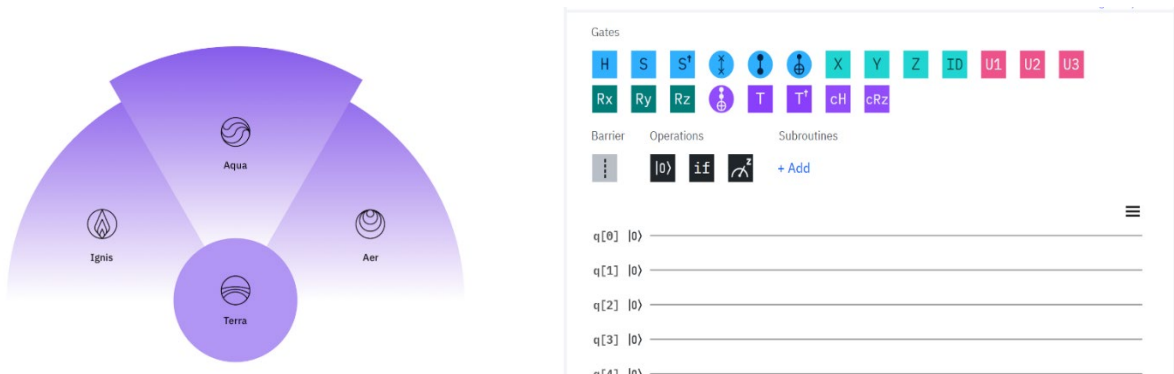
如圖二十三與圖五(a)所示，其為 X 軸為 $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ ，Y 軸為 $\frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ ，與 z 軸 $|0\rangle$ 所組成的坐標系。利用旋轉 Y 軸的特性，將 XZ 平面上的布洛赫球切為上下兩個部分，對應於物聯網實驗即是若是自旋向上即為 N_1 個 $|0\rangle$ (如實驗中的左邊)，旋轉 180 度向下即為 N_2 個 $|1\rangle$ (如實驗中的

右邊)。



圖二十三：布洛赫球面中可以理解自旋向上定義為 $|0\rangle$ ，低於 XY 平面向下為 $|1\rangle$ 與旋轉運算子。

關於量子電腦電路設計，我們使用 IBM Q 實驗室的 Qiskit 軟體來進行，如圖二十四(a)所示我們於 IBM Q 實驗室註冊一個新帳號，並使用 Circuit Composer 來創建量子電路，並用圖形的方式創立量子電路，如圖二十四(b)所示。

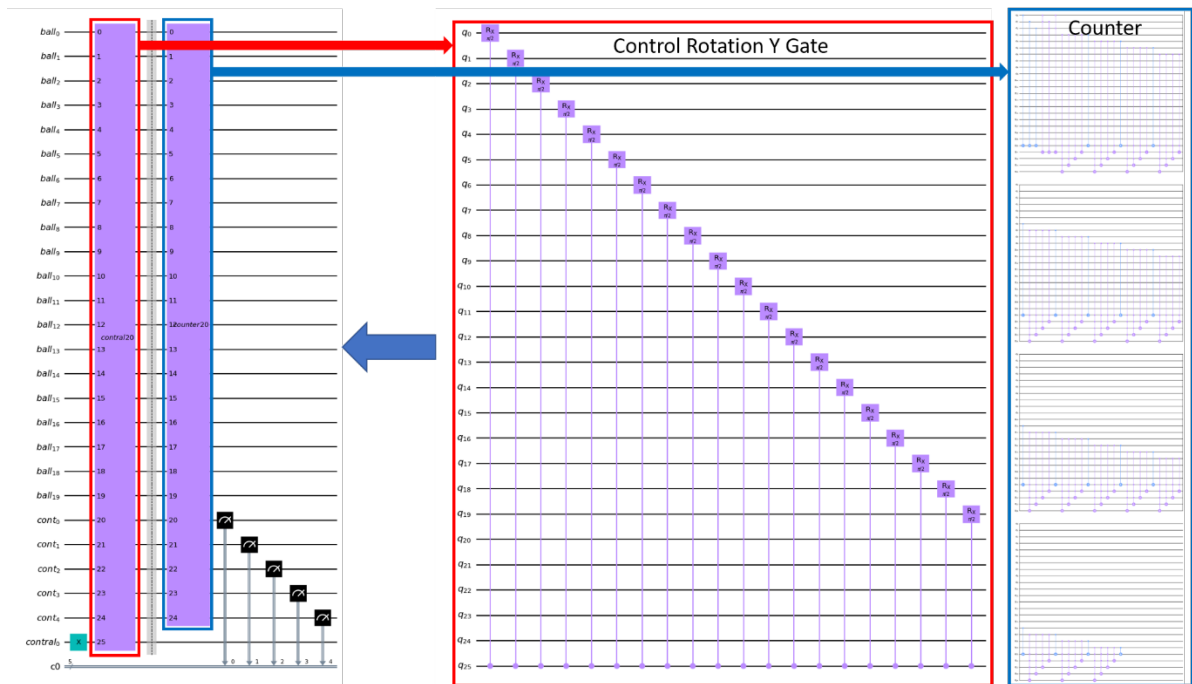


圖二十四：(a) IBM Q 實驗室的 Qiskit 軟體；(b) 使用 Circuit Composer 來創建量子電路。

因為，Qiskit 的 32-Qbits 限制，我們使用 26-Qubit 來簡化模擬系統，在實體實驗時，我們利用 20-Qbits 來表示實驗粒子(Ball0~19)，並給于系統一個控制旋轉 Y 閘運算子(占用 1-Qbit)，其矩陣可以表示為:

$$CRY(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$

其旋轉角度定義為 $\theta = a \times \frac{\pi}{2}$ ，其中 a 為我們的控制變因，介於 0~1 之間，我們並利用五個 Counters 進行(cont0-4)，以進行量子測量 100 萬次，其量子電路圖如圖二十五所示，其中 Control₀為 CRY 驅動旋轉運算子。而 Python 程式碼則列於圖二十六。



圖二十五：20 顆 Qbits 跳躍的量子電路圖，其中Control₀為驅動旋轉運算子，a 為調致變因。

量子電路 Python 程式碼	
<pre># 步驟一： 引進 Qiskit 資料庫 %matplotlib inline # Importing standard Qiskit libraries from qiskit import QuantumCircuit, execute, Aer, IBMQ from qiskit import QuantumRegister, ClassicalRegister from qiskit.compiler import transpile, assemble from qiskit.tools.jupyter import * from qiskit.visualization import * from ibm_quantum_widgets import * import numpy as np # Loading your IBM Q account(s) provider = IBMQ.load_account() def contral20(nqubits=20,a=1) : qcc = QuantumCircuit(26) for i in range(nqubits) : qcc.cry(a*np.pi/2,[25],[i]) U_c20 = qcc.to_gate() U_c20.name = "\$contral20\$" return U_c20</pre>	<pre># 步驟二： 定義五個 Counters def counter20() : qct = QuantumCircuit(25) qct.cx([0],[20]) qct.cx([1],[20]) qct.cx([2],[20]) qct.ccx([0],[1],[21]) qct.ccx([1],[2],[21]) qct.ccx([0],[2],[21]) for i in range(3,20) : qct.mcx([[i],[20],[21],[22],[23]], [24]) qct.mcx([[i],[20],[21],[22]], [23]) qct.mcx([[i],[20],[21]], [22]) qct.ccx([i],[20],[21]) qct.cx([i],[20]) U_ctt20 = qct.to_gate() U_ctt20.name = "\$counter20\$" return U_ctt20</pre>
<pre># 步驟三： 進行 Y 軸旋轉運算(Y-Gate rotation operator) def contral20(nqubits=20,a=1) : qcc = QuantumCircuit(26) for i in range(nqubits) : qcc.cry(a*np.pi/2,[25],[i]) U_c20 = qcc.to_gate() U_c20.name = "\$contral20\$" return U_c20</pre>	<pre># 步驟四： 引進 20-Qubit， a=0~1.0 的激發能(歸一化) a = 0.1 qbr = QuantumRegister(20,name='ball') qco = QuantumRegister(5,name='cont') qcr = QuantumRegister(1,name='contral') cr = ClassicalRegister(5) qc = QuantumCircuit(qbr,qco,qcr,cr) qc.x(qcr) contral20() qc.append(contral20(a=a), [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25]) qc.barrier() qc.append(counter20(), [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24]) qc.measure(qco,cr) qc.draw()</pre>
<pre># 步驟五： 進行量子量測(shots=1 million)一百萬次，且進行統計(Histogram)</pre>	

```
#backend = provider.get_backend('ibmq_qasm_simulator')
backend = Aer.get_backend('qasm_simulator')
#job = execute(qc, backend=backend, shots=1000,
seed_simulator=12345, backend_options={"fusion_enable" :
True})
shots=1000000
job = execute(qc, backend=backend, shots=shots, memory=True)
result = job.result()
count =result.get_counts()
for i in count :
    state = int(i, 2)
    print(i,',',state,' : ',count[i])
print(len(count))
plot_histogram(count)
```

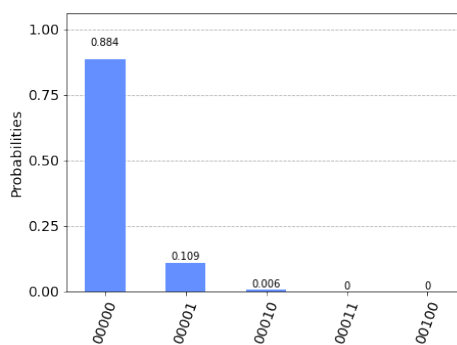
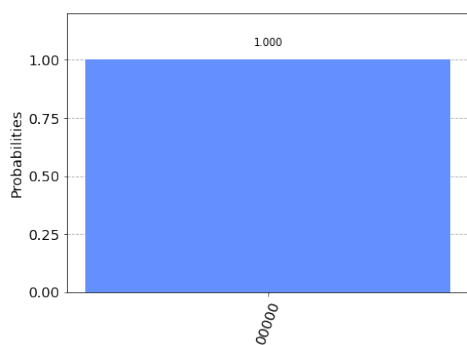
圖二十六：量子電路 Python 程式碼，運算方式由步驟 1~5 執行。

此量子電腦運算結果，我們依 $a=0\sim 1.0$ ，每隔 0.1 操作一遍，並將其統計採二進位統計，計算 100 萬次量測，在調制不同 a 值下，出現自旋向下狀態個數($N_2=0\sim 20$)的次數和，其統計表如表三所示。

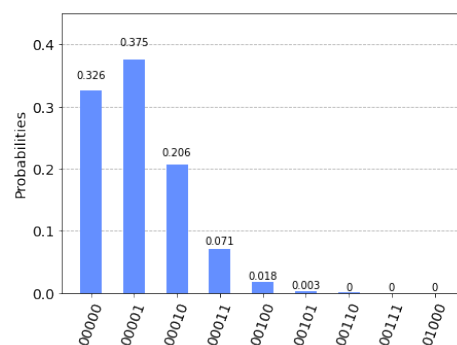
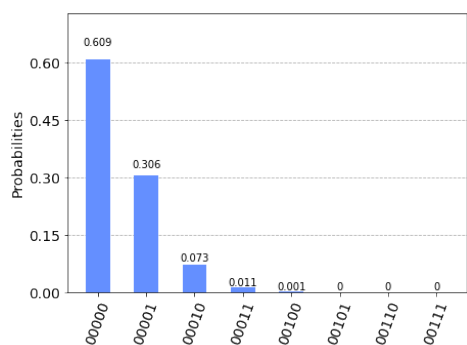
表三：量子電腦運算量測 100 萬次統計表。

$N_2 1\rangle$ 個數		a=0	a=0.1	a=0.2	a=0.3	a=0.4	a=0.5	a=0.6	a=0.7	a=0.8	a=0.9	a=1.0
00000	0	1000000	883821	609324	326280	134212	42049	9949	1706	229	13	0
00001	1	0	109617	305505	376251	283706	144749	51036	12713	2226	237	16
00010	2	0	6328	72827	205470	284370	236032	127224	45399	10976	1806	204
00011	3	0	228	11052	70894	180071	242607	197872	102479	34935	7507	1068
00100	4	0	6	1182	17346	81069	176666	217181	164461	78084	24116	4606
00101	5	0	0	98	3241	27414	96966	180883	196660	132660	55939	14796
00110	6	0	0	12	468	7291	41649	116903	184748	174093	101921	36941
00111	7	0	0	0	47	1560	14192	61015	138880	183550	148973	73699
01000	8	0	0	0	3	272	3982	25725	85232	158539	176108	120379
01001	9	0	0	0	0	28	901	9058	42269	111217	170882	159650
01010	10	0	0	0	0	7	170	2476	17249	64751	138112	176077
01011	11	0	0	0	0	0	36	549	5992	31015	90964	160025
01100	12	0	0	0	0	0	1	102	1739	12385	49718	120565
01101	13	0	0	0	0	0	0	23	398	4029	22449	74383
01110	14	0	0	0	0	0	0	3	63	1044	8202	36888
01111	15	0	0	0	0	0	0	1	12	227	2372	14841
10000	16	0	0	0	0	0	0	0	0	34	563	4554
10001	17	0	0	0	0	0	0	0	0	6	101	1101
10010	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	185
10011	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	21
10100	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

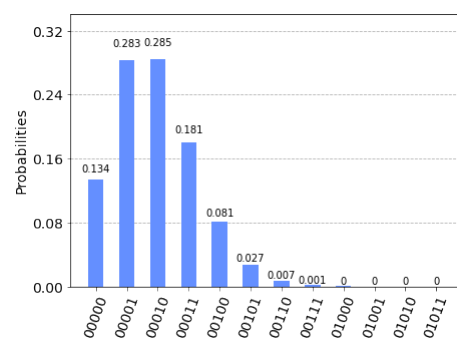
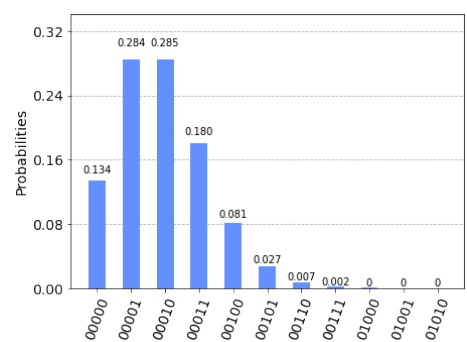
我們進一步將總數 100 萬次歸一化，以機率(0~1)表達，並以條狀圖呈現，而 x 軸以五個 Counters 計算表示五個二進位(00000~11111)的粒子數，如圖二十七(a)-(b)所示，分別為 $a=0$ 與 0.1 的計算結果，圖二十七(a)表示，在 $a=0$ 時，有粒子數為零(00000)個旋轉到自旋向下狀態之機率為 100 %；而圖二十七(b)表示，在 $a=0.1$ 時，有粒子數為零(00000)個旋轉到自旋向下狀態之機率為 88.4 %，有粒子數為壹(00001)個旋轉到自旋向下狀態之機率為 10.9 %，有粒子數為兩(00010)個旋轉到自旋向下狀態之機率為 0.6 %，依此類推，我們將 $a=0.2\sim 1.0$ 的結果顯示於圖二十八~三十二。



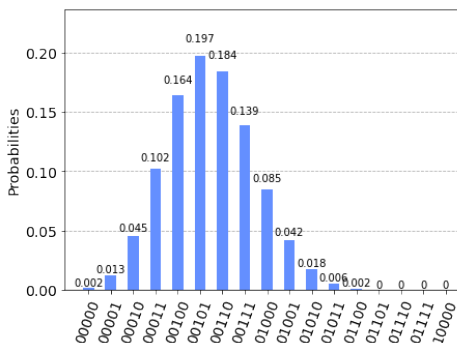
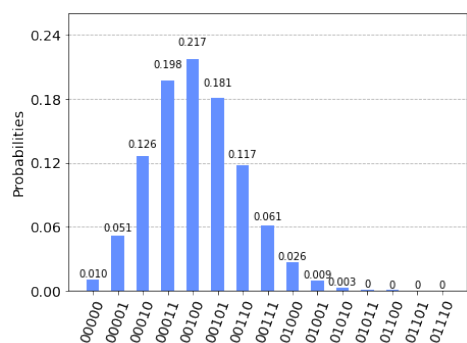
圖二十七：(a) 在 $a=0$ 與 $a=0.1$ 時，粒子數旋轉到自旋向下狀態之機率分佈。



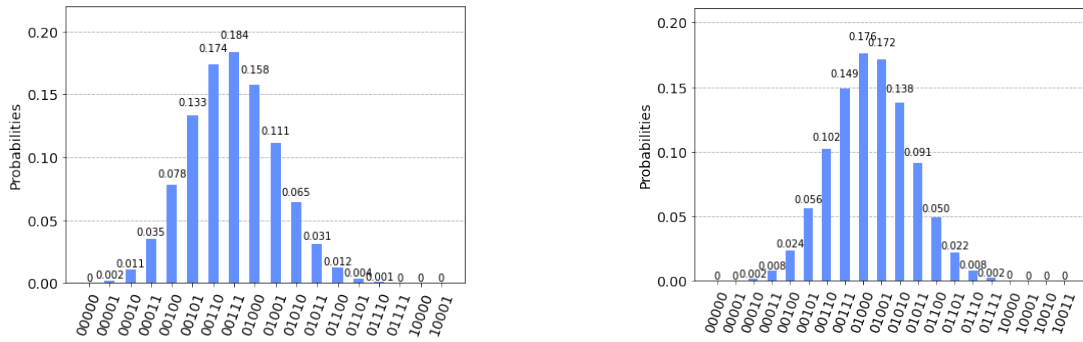
圖二十八：(a) 在 $a=0.2$ 與 $a=0.3$ 時，粒子數旋轉到自旋向下狀態之機率分佈。



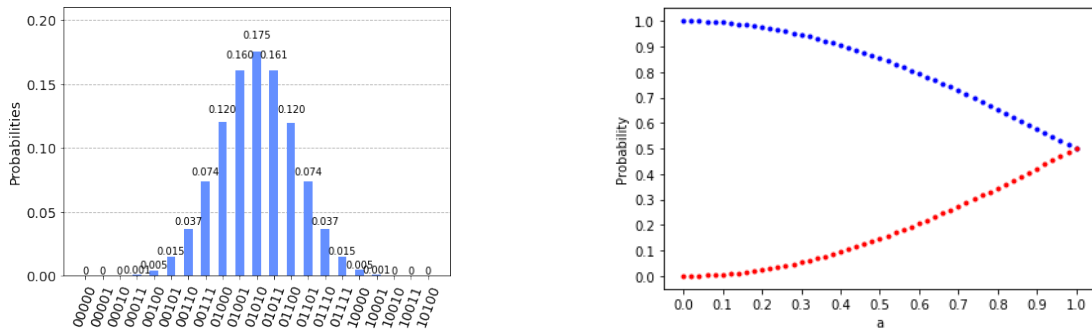
圖二十九：(a) 在 $a=0.4$ 與 $a=0.5$ 時，粒子數旋轉到自旋向下狀態之機率分佈。



圖三十：(a) 在 $a=0.6$ 與 $a=0.7$ 時，粒子數旋轉到自旋向下狀態之機率分佈。



圖三十一：(a) 在 $a=0.8$ 與 $a=0.9$ 時，粒子數旋轉到自旋向下狀態之機率分佈。



圖三十二：(a) 在 $a=1.0$ 時，粒子數旋轉到自旋向下狀態之機率分佈。(b) 即為不同 a 下的自旋向上(藍色)與向下(紅色)的出現機率。

我們將不同的 a 值與出現機率作圖，如圖三十二所示(b)，量子計算結果成功的獲得 Zone-II 相變區間變化圖形，其曲線變化可以用來擬合實驗結果，將 a 值對應到實驗的 Zone-II 的驅動電壓範圍，即可解釋實驗之有序參量。

伍、結果

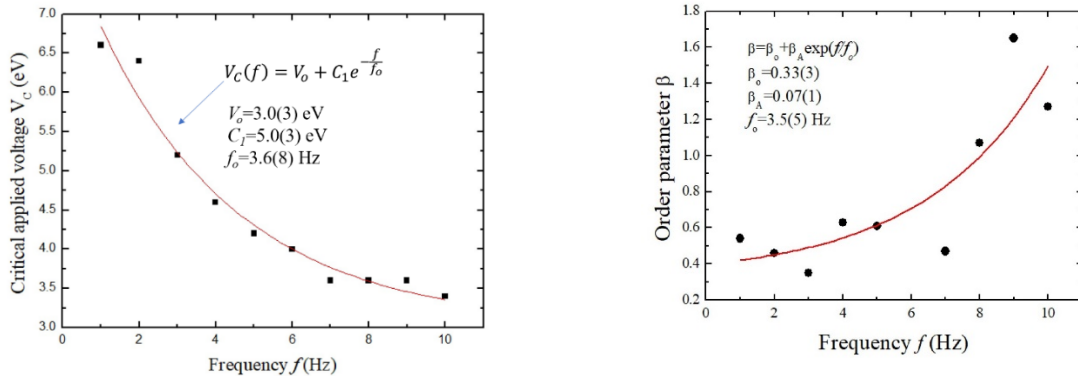
(1)關於實驗操作：我們整理出臨界電壓與有序參量隨頻率改變的關係，如表格四所示，我們發現 Zone-I 之相變死亡態(Phase Transition Death State, PT-DS) 範圍已經隨著頻率增加而變的越來越小，粒子之集體行為(Collecting behavior)是來自於動能正比於頻率的平方項，加速相變的發生；而 Zone-II 的相變混合態(Phase transition mixed states, PT-MS) 範圍亦有縮小，其漸進行為(Approaching behavior)於相變的改變量隨頻率增加而越來越快；而在 Zone-III，相變死亡態(Phase Transition Death State, PTDS)和相變翻轉分叉態(Phase transition Flip Bifurcation State, PT-FBS)的共存態依然存在，這點是我們很懷疑之處，其數據在 Zone-III 之粒子的漲落(Fluctuation behavior)在高頻處有呈現波的形式，此種已過相變後的行為，在不同頻率下依然存在，其統計結果亦有可能也受頻率之影

響。

表格四：臨界電壓與有序參量隨頻率改變的擬合參數整理。

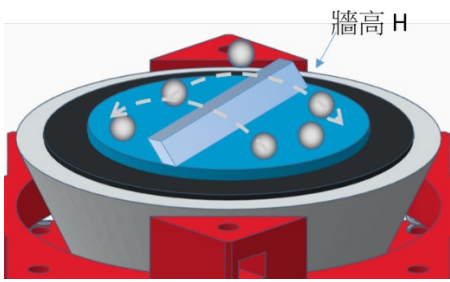
頻率 f (Hz)	跳躍時間 t (s)	臨界電壓 V_c (eV)	臨界振幅 A_c (mm)	有序參量 β
1	100	6.6	1.09	0.54
2	60	6.4	1.07	0.46
3	33.3	5.2	0.90	0.35
4	25	4.6	0.79	0.63
5	20	4.2	0.70	0.61
6	16.7	4.0	0.66	2.748
7	14.3	3.6	0.55	0.47
8	12.5	3.6	0.55	1.07
9	11.1	3.6	0.55	1.65
10	10	3.4	0.48	1.27

如此，我們畫出臨界電壓與有序參量隨頻率改變的關係，如圖三十三(a)-(b)所示，我們發現可以用 $V_c(f) = V_0 + C_1 e^{-\frac{f}{f_0}}$ 來描述，其初始臨界電壓為 $V_0=3.0(3)$ eV、遞減係數為 $C_1=5.0(3)$ eV、而半衰遞減頻率為 $f_0=3.6(8)$ Hz。而在頻率大於 6 Hz，驅動電壓也趨於常數，約在 $V_c \sim 3.6$ eV，其中在 6 Hz 的異常大有序參量，我們嘗試多次依然存在。如圖三十三(b)所示，有序參量隨頻率改變的關係可以用 $\beta(f) = \beta_0 + \beta_A e^{f/f_0}$ 來描述，其初始有序參量為 $\beta_0=0.33(3)$ 、遞增係數為 $\beta_A=0.07(1)$ 、而半衰遞增頻率為 $f_0=3.5(5)$ Hz。



圖三十三：(a)臨界電壓與(b)有序參量隨頻率改變的關係。

另外，我們亦有考慮另一實驗變因，調整不同的隔板高度，由古典理論中，我們得知實驗中喇叭振幅與運動速率有關，若是速度越大，則跳過固定牆高之機率越大，我們可以藉由粒子拋體運動中知曉，當其跳要至最大高度時，粒子即能跳過障礙物(牆高 H)，跑至另一邊，其基本概念如圖三十四(a)所示，而理論運動方程式如圖三十四(b)所示，而調整不同初始角度(θ)，其運動軌跡可用不同顏色所示。



$$H = x \tan \theta - \frac{g}{2\bar{V}^2 \cos^2 \theta}$$

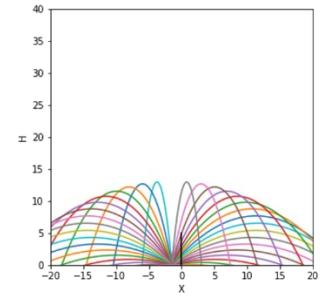
x = 球心到牆的距離

$\theta = 0 \sim 180^\circ$

H = 球心到牆位置的高度

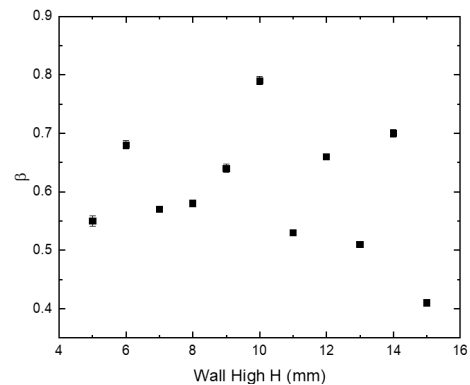
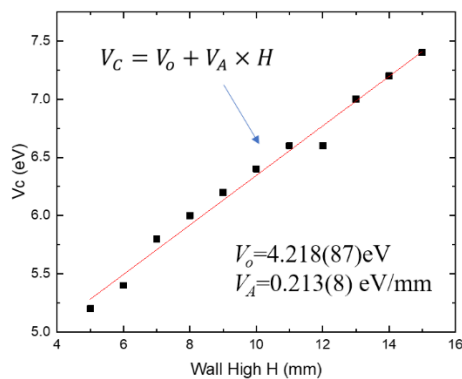
其中 V 為粒子的運動速度，正比於實驗的震幅與頻率：

$$\bar{V}^2 \sim A^2 f^2$$



圖三十四: (a) 粒子拋體運動概念；(b) 拋體運動軌跡圖。

在實驗的操作上，我們研究在固定頻率，改變激發振幅(即實驗中之電壓 V) 下對系統有序參數的關係，實驗參數分別為頻率 $f=1$ Hz、隔板高度 $H=5 \sim 15$ mm、震動時間 $t=100$ s、系統彈跳總次數 次的粒子數(N_1 (藍色, 左邊)與 N_2 (紅色, 右邊)；每一次驅動電壓時，我們共操作五次量測在取平均數，且每一次量測，粒子皆歸置回左邊；如圖三十五為隔板高度 H 隨驅動電壓的變化圖；(b) Zone II 範圍的有序參量的擬合圖。由不同牆高實驗中，我們可以得到牆高 H 與驅動電壓 V_c (或說喇叭振幅)，如我們所預測，呈現線性關係；而有序參量與牆高則呈現無相關性，約介於 0.6(1)之間。



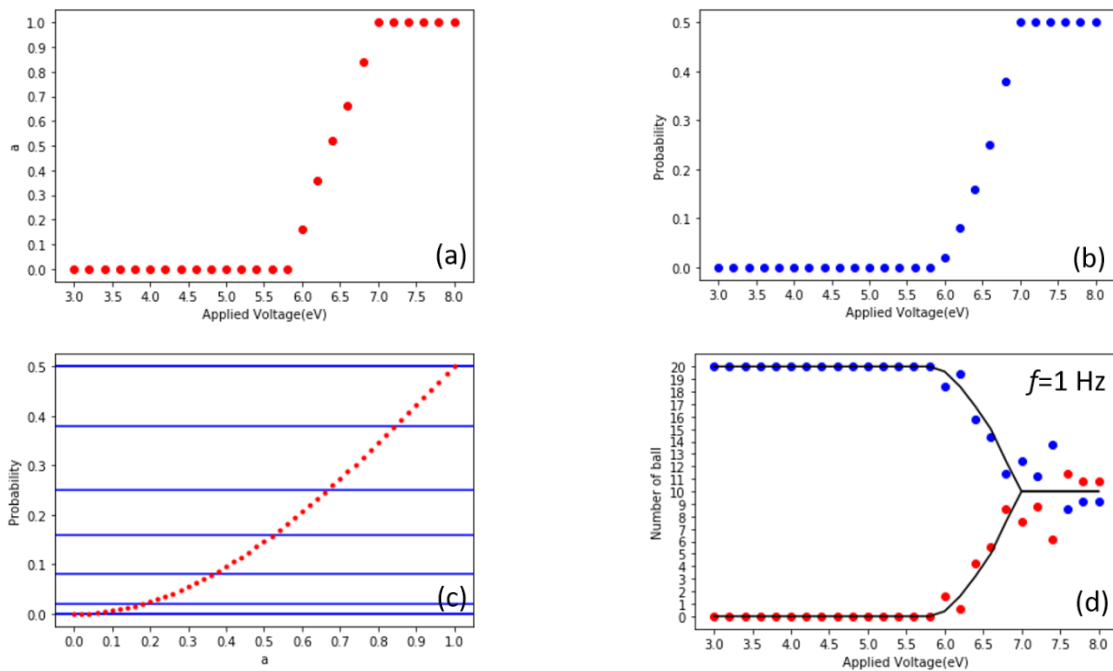
圖三十五 (a) 為頻率 1 Hz、隔板高度 $H=5 \sim 15$ mm、與震動時間 $t=100$ s 的粒子數(N_1 (藍色, 左邊)與 N_2 (紅色, 右邊)隨驅動電壓的變化圖；(b) Zone II 範圍的有序參量的擬合圖。

(2) 關於量子電腦計算：關於計算結果與實驗的擬合，我們採用 Mapping 技術，將 a 值與出現機率 mapping 至 Zone-II 的驅動電壓，其方法為：量子電路計算結果與實驗數據的擬合，採用 Mapping 技術，將圖三十二(b)之結果之 a 值與出現機率 p mapping 至 Zone-II 的驅動電壓之變化範圍 ΔV 與粒子數 ΔN_1 ，如表五所列參數，其藍/紅色線即為對實驗之擬合結果，而 a 值與座標機率 p (control amplitude a , Probability p) 轉換至電壓與粒子數 (V, N) 之方程式詳列於表五。

表五: a 值與出現機率 p mapping 至 Zone-II 的驅動電壓之變化範圍 ΔV 與粒子數 ΔN_1 之參數。

Mapping method	$V = V_C - \Delta V \cdot a; a=0\sim 1$		$N_1 = N_{1C} + \Delta N_1 \cdot p; p=0\sim 1$	
Frequency f (Hz)	Critical Voltage V_C (eV)	Zone II range ΔV (eV)	Zone II range N_{1C} (# at V_C)	Zone II range ΔN_1 (#)
1	6.6	1.2	14.4	5.6
2	6.4	1	10.6	9.4
3	5.2	1	11.2	8.8
4	4.6	0.8	10.2	9.8
5	4.2	0.8	10.4	9.6
6	4	0.3	9.4	10.6
7	3.6	0.3	9.6	10.4
8	3.6	0.4	10.2	9.8
9	3.6	0.4	11.2	8.8
10	3.4	0.2	10.8	9.2

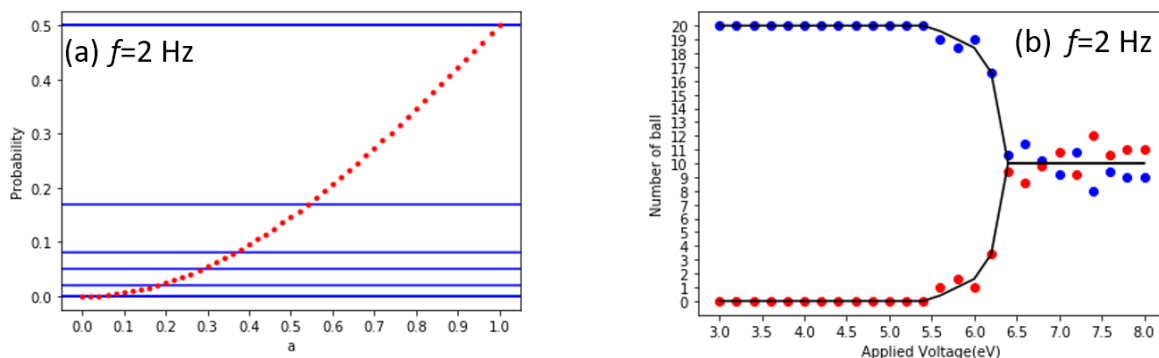
其方式如圖三十六(a)-(b)所示，將電壓 $\Delta V = 6.6 - 5.4 = 1.2$ eV間的機率 mapping 至 $a=0\sim 1.0$ ，而 Zone-II 的 N_1 個數區間為 ΔN_1 (#) = 5.6，其對應的臨界電壓與 N_1 個數分別為 $V_C = 6.6$ eV 與 N_{1C} (# at V_C) = 14.4，如圖三十六(c)藍色平行線即為實驗對應之機率與 a 值曲線的交點，即為擬合實驗的點，如圖三十六(d)所示，我們成功擬合出頻率為 $f=1$ Hz 實驗(圖十三)之 Zone-II 區間。



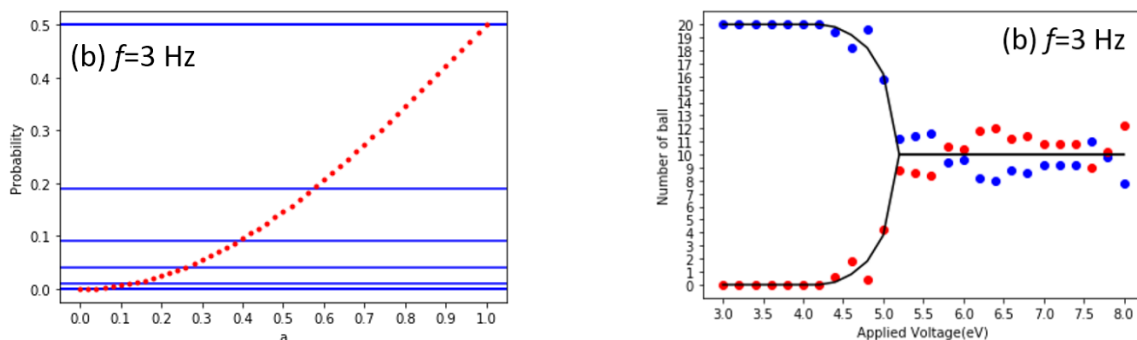
圖三十六：(a)-(c)量子計算與實驗資料轉換擬合；(d)為 $f=1$ Hz 之實驗擬合結果。

而圖三十七(a)-(b)至圖四十五(a)-(b)分別為改變不同頻率下的實驗擬合結果，由圖三十七(a)至圖四十五(a)中，我們發現一個有趣的現象，在不同頻率下，相變區間的機率在低 a 值下，出現較為密集，而接近 $a\sim 1$ 時，呈現跳躍的形式，且在低頻率下，較密集，而高頻率下，機率跳躍較明顯，其與 a 值之關係並非線性關係。此發現在知識有限下，目前還是無法解釋；

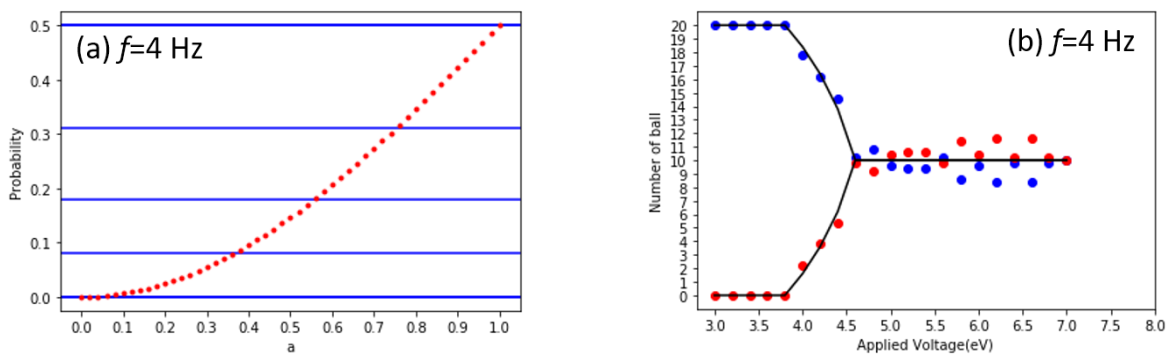
但是以相變區間 Zone-II 為例，當頻率 $f=6\sim 10$ Hz 之實驗，也說明驅動電壓在 $V_C\sim 3.6$ eV 時呈階梯函數。



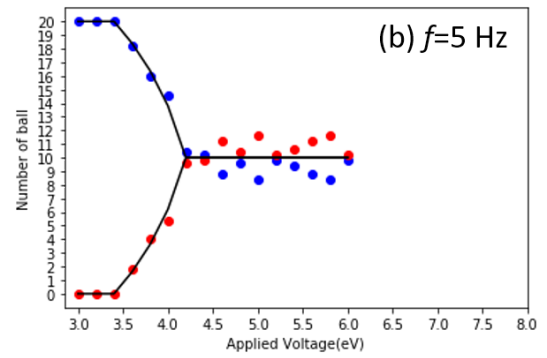
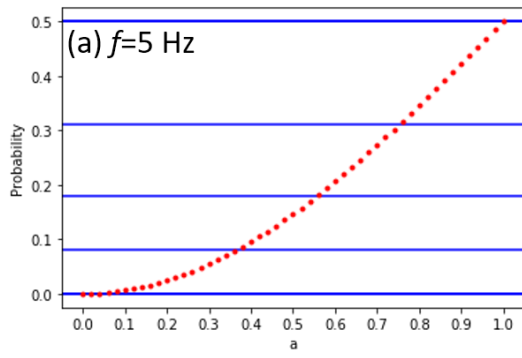
圖三十七：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=2$ Hz 之實驗擬合結果。



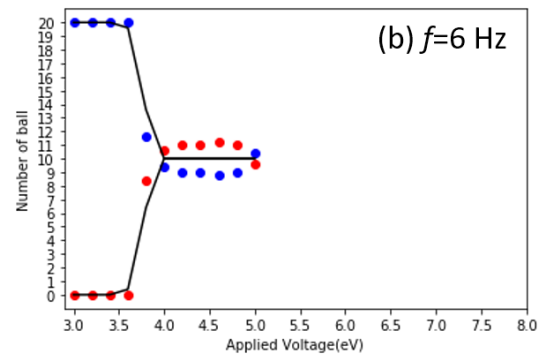
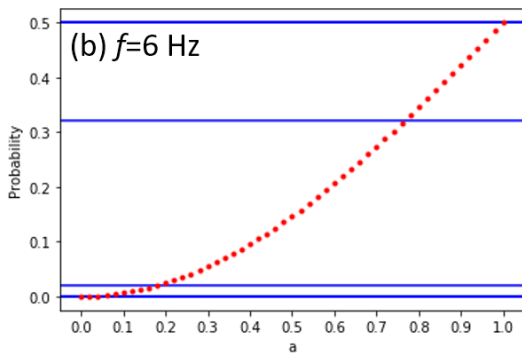
圖三十八：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=3$ Hz 之實驗擬合結果。



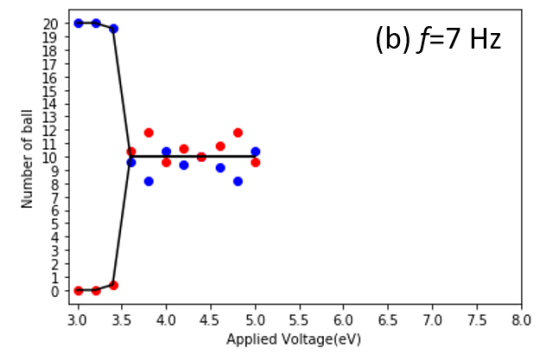
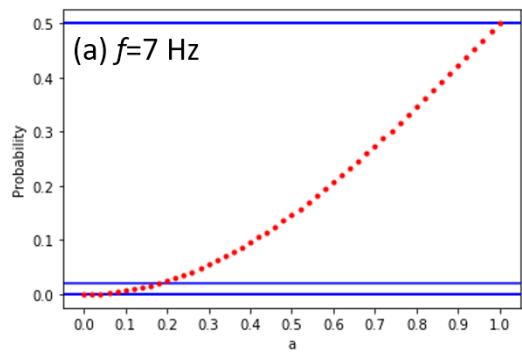
圖三十九：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=4$ Hz 之實驗擬合結果。



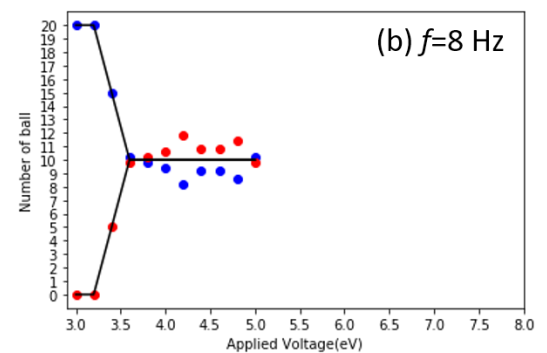
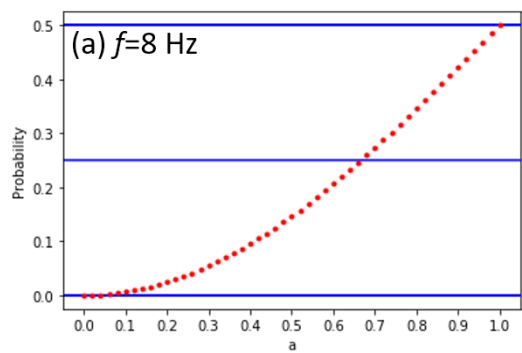
圖四十：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=5$ Hz 之實驗擬合結果。



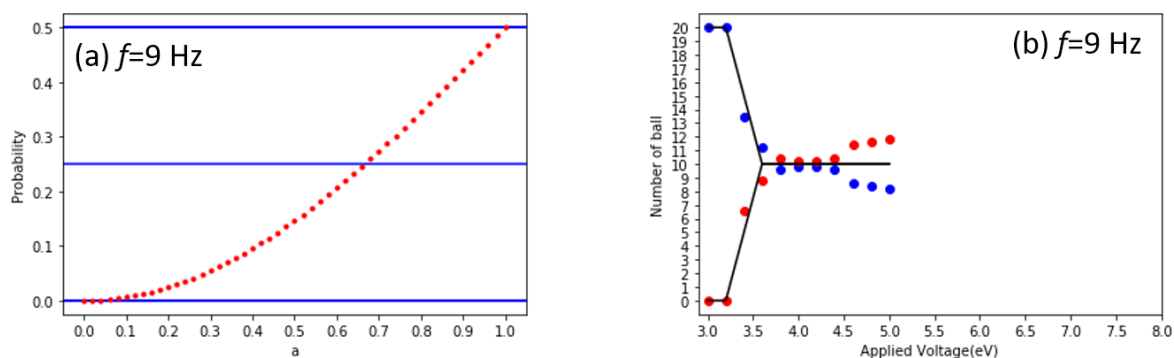
圖四十一：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=6$ Hz 之實驗擬合結果。



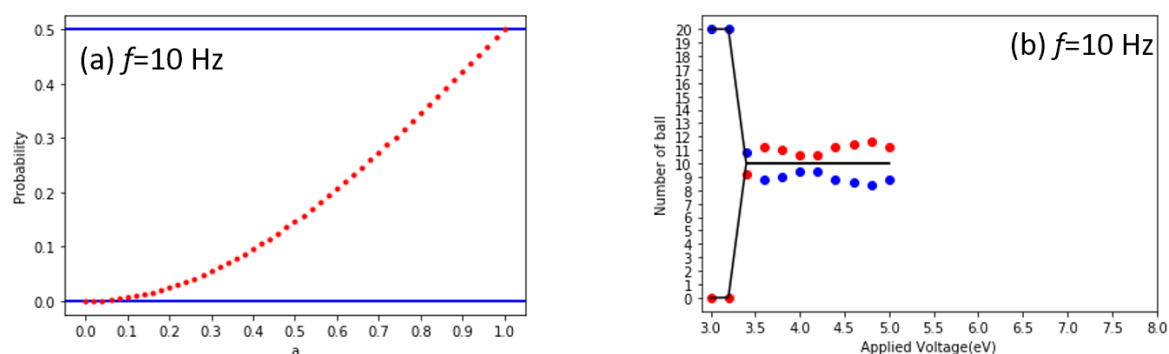
圖四十二：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=7$ Hz 之實驗擬合結果。



圖四十三：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=8$ Hz 之實驗擬合結果。



圖四十四：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=9$ Hz 之實驗擬合結果。



圖四十五：(a)量子計算與實驗資料轉換擬合；(b)為 $f=10$ Hz 之實驗擬合結果。

陸、討論

近年來在人工製備驅動激發的活性粒子上已有很多的突破，包括不同形狀、尺寸的粒子。由於驅動力的存在，單個粒子的運動短時間為彈性運動，長時間為擴散運動。大量粒子則會表現出集體行為，並自組裝出各種相變。顯示出獨特的相變，有些在傳統的熱力學系統中不存在。除了這些空間結構不同的相變外，有些相變表現為粒子的內部自由度的相變。比如粒子的自發的活性運動方向變得一致以減小耗散，類似於液晶，並產生集體流動。這種從內部雜亂無序的運動到自發的集體定向運動的相變也存在於生態界如鳥群、魚群、細菌等生物系統中，與此實驗設計類似，當激發至一個臨界動能時，粒子顯示出集體行為轉換至相變附近的漸近行為。而我們也在實驗中克服一些關鍵條件，如：

(1) 自製相變實驗，其關鍵條件為：物聯網實驗結果顯示在：

1. Zone-I 之相變死亡態(PT-DS)隨著頻率增加而變的越來越小，粒子之集體行為是來自於動能(正比於頻率的平方項)，加速相變的發生；
2. Zone-II 的相變混合態(PT-MS)範圍亦有縮小，其漸進行為於相變的改變量隨頻率增加而越來越快；而在 Zone-III，相變死亡態(PTDS)和相變翻轉分叉態(PT-FBS)的共存態

依然存在，這點是我們很懷疑之處，

3. 在 Zone-III 之粒子的漲落在高頻處有呈現波的形式，此種已過相變後的行為，在不同頻率下依然存在，其統計結果亦有可能也受頻率之影響。
4. 而改變牆高 H 與驅動電壓 V_c (或說喇叭振幅)之實驗，如我們所預測，呈現線性關係。

(2)量子電路可成功解釋相變實驗，其關鍵條件為：此次科展，我們試著提出:

1. 量子電路模型，解釋多體粒子之相變混合態，說明如何利用 CRY 量子邏輯閘來控制 20 顆粒子，以擬合實驗結果，並說明 Zone-II 之粒子靠近相變臨界點之粒子漸近行為 (Approaching behavior)。
2. 量子統計(Quantum histogram)方法，利用大量的量子量測次數，統計不同驅動旋轉角下的自旋向上 $|0\rangle$ 與自旋向上 $|1\rangle$ 的機率分佈，此方法可運用於大數據統計，克服傳統實驗條件限制，如粒子數與實驗次數。

我們的實驗與理論計算，顯示當量子量測次數至巨量時，系統的相變漸近行為可以完美的以 26-Qubits 來擬合實驗結果，而另外一個有趣的現象是，當遠離相變點時，粒子的漲落行為依然存在，很值得我們未來進一步研究。此研究粒子系統之有序參量對振動頻率呈現非線性關係，意味著振動頻率與粒子之相互作用之存在，也就是說，傳統意義上的狀態方程之不存在，這意味著在一階非平衡相變的共存態可能不存在力學平衡。

柒、結論

目前，粒子集體行為相變還很少被研究，對非平衡相變的研究在近年來才開始。相關實驗主要使用各向同性排斥粒子，對各向異性粒子或活性粒子系統相變過程的實驗還很少，還有大量問題需要探索。即使是對於研究較多的各向同性粒子的結晶、熔化、固—固相變和玻璃態轉變、與有序參量，仍有大量基礎問題有待研究，比如相變在臨界附近的漸進行為 (Approaching behavior)與行為落漲行為(Fluctuation behavior)有何不同？小系統中的相變與熱力學極限下的相變有何不同？粒子交互作用如何影響相變？無論分子還是原子系統，當粒子密度大到形成液體或固體時，多體作用往往不可避免，這種多體作用對相變有何影響？我們此次所提出的量子電腦計算模型為凝體物理系統提供了豐富的研究課題並為相變研究提供了更廣闊的前景。

捌、參考資料及其他

[1]二分法 (dichotomy)：指的是將一個整體事物分割成兩部分。也即是說，這兩部分必須是互補事件，即所有事物必須屬於雙方中的一方，且互斥，即沒有事物可以同時屬於雙方。

(維基百科(<https://zh.wikipedia.org/wiki/二分法>))。

[2] G. Jaeger, The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution. *Archive for History of Exact Sciences*. **53** (1) : 51–81 (1998).

[3] V. L. Berezinskii, Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group I. Classical systems (pdf), *Sov. Phys. JETP*, **32** (3) : 493–500 (1971).

[4] A. D. McNaught and A. Wilkinson, *Compendium of Chemical Terminology*. IUPAC. ISBN 978-0-86542-684-9 (2007)

[5] Anastasia Perry, Ranbel Sun, Ciaran Hughes, Joshua Isaacson, Jessica Turner. Quantum Computing as a High School Module , arXiv : 1905.00282v2 (2020).

[6] IBM Qiskit, <https://qiskit.org/>

[7] J. E. Jacak, W. A. Jacak, W.A. Donderowicz *et al.* Quantum random number generators with entanglement for public randomness testing. *Scientific Reports* **10**, 164 (2020).

[8]參考 <https://sureshemre.wordpress.com/2016/11/27/qubit/>

[9]帳號註冊網址 <https://quantum-computing.ibm.com/>

[10]免費線上開放量子電腦 <https://quantum-computing.ibm.com/services?systems=all>

附件一：AIoTs 相變實驗系統程式碼

<pre>#include <TimerOne.h> const long interval = 100;//1ms int buttomt = 8; int buttomtstate = 0; const byte sqwave = 5; int out1 = 7; int out2 = 6; int outEN = 3;//Timer2 int irs =4; void setup() { // put your setup code here, to run once: pinMode(buttomt,INPUT_PULLUP); pinMode(sqwave,INPUT); pinMode(out1,OUTPUT); pinMode(out2,OUTPUT); pinMode(outEN,OUTPUT); pinMode(irs,OUTPUT); Serial.begin(9600); digitalWrite(out1,LOW); digitalWrite(out2,LOW); digitalWrite(outEN,LOW); digitalWrite(irs,HIGH); Timer1.initialize(interval); //Timer1.attachInterrupt(twoSQwave); }</pre>	<pre>void loop() { buttomtstate = digitalRead(buttomt); //Serial.println(buttomtstate); while(buttomtstate == LOW){ digitalWrite(irs,LOW); Timer1.attachInterrupt(twoSQwave); delay(11110); digitalWrite(irs,HIGH); delay(100); Timer1.detachInterrupt(); digitalWrite(out1,LOW); digitalWrite(out2,LOW); break; } } void twoSQwave(){ volatile bool sqwavestate = digitalRead(sqwave); //Serial.println(sqwavestate); if (sqwavestate == LOW){ digitalWrite(out2,HIGH); digitalWrite(out1,LOW); analogWrite(outEN,255); }else{ digitalWrite(out2,LOW); digitalWrite(out1,HIGH); analogWrite(outEN,255); } }</pre>
---	--

【評語】 051810

本作品探討塑膠粒子在振動軟膜上跳躍過隔板的行為，觀測得起始集中在隔板一邊的塑膠粒子，會平均分配到隔板兩側，以隔板兩側塑膠粒子數目隨振動時間的增減，據以主張發生相變，並推論為量子電腦的行為。內容並無微小擾動能造成分布不均的實驗數據，難以據本實驗結果即主張能連結到量子電腦的行為。建議可擴展實驗起始條件，而能實質連結到量子電腦行為，以顯現新穎物理現象。

作品簡報

非平衡系統之多體粒子集體行為相變研究

量子電腦統計在有序參量分析之應用

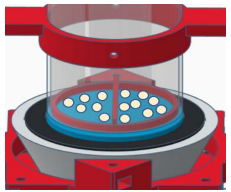
科 別：物理與天文學科

組 別：高級中等學校組

前言

摘要

設計一個簡易的封閉AIoTs相變實驗系統與量子電腦計算，觀察多體粒子的彈跳運動，如圖1並觀察在不同驅動電壓下的粒子數失衡參數 α 與有序參量 β 、及低驅動電壓下之：



1. 集體行為(Collecting behavior)

2. 漸近行為(Approaching behavior)

3. 漲落行為(Fluctuation behavior)

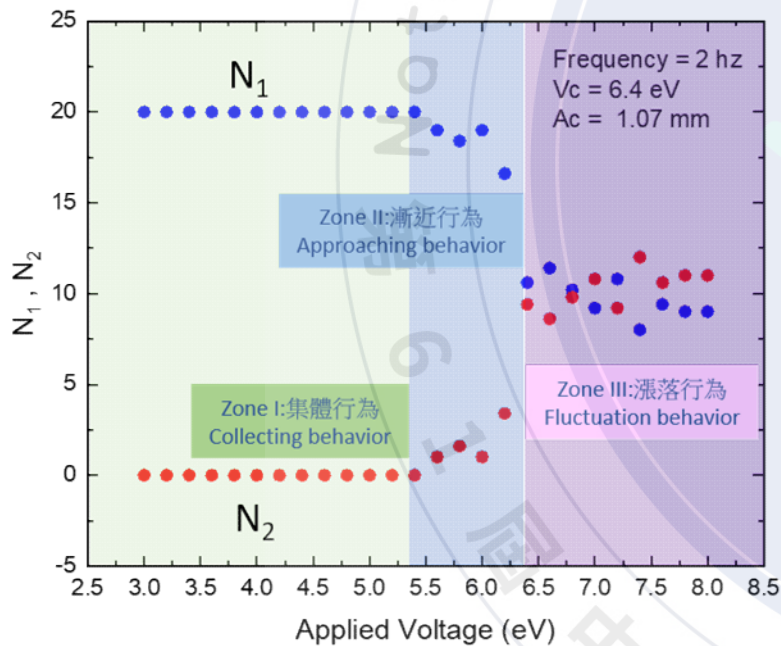
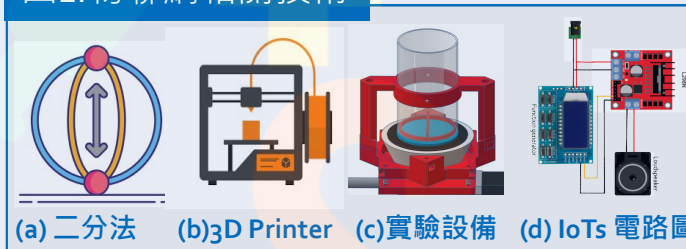


圖1: 左右粒子數與不同驅動電壓的關係

圖2: 物聯網相關技術



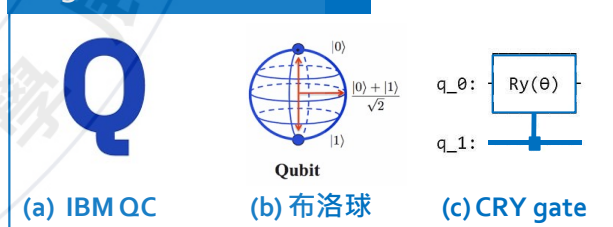
二分法(Dichotomy)概念

以3D列印與物聯網技術將多體粒子放置震動喇叭，並以隔板區分左右兩區，改變實驗參數以觀察粒子在喇叭表面跳躍與在左右兩區兩邊之分佈數，以研究系統的相變與穩定度。如下圖2(a)-(d)所示。

量子電腦計算概念

如圖3，採用量子技術與26-Qubits來描述20個自旋粒子控制旋轉閘(C Controlled Rotate Y-gate)運算下的相變行為，完美擬合相變區間之漸進行為。如圖1 Zone-II所示。

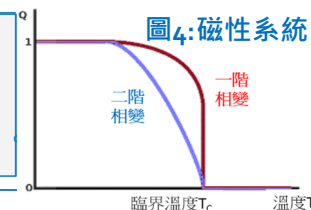
圖3: 物聯網相關技術



研究背景

研究背景

由統計物理中得知，系統的平衡態及連續相變在相變點附近的漸近行為可以用簡單的「冪次定律」來表示，如右圖4之磁性系統，而其中冪次指數 β 可以通過實驗來量測，稱為有序參量



1. 溫度高於臨界溫度 $T > T_c$ ，磁化強度 $M=0$ ($T > T_c$)

2. 低於臨界溫度 $T < T_c$ ，磁化強度隨溫度關係為 $M \sim (T_c - T)^\beta$

失衡參數(imbalance parameter):

凝體物理中的磁化強度: $\mathbf{M} = \frac{(N_+ - N_-)}{V} \mu_B$ ，為正比於自旋向上的個數 N_+ 與自旋向下的個數 N_- 的差值 $(N_+ - N_-)$ 。如下圖5所示，為我們系統之左邊的粒子數 N_1 與右邊的粒子數 N_2 之差值 α 定義為失衡參數:

$$\alpha = \frac{|N_1 - N_2|}{|N_1 + N_2|}$$

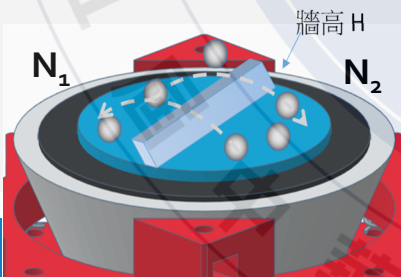


圖5: 粒子彈跳圖

有序參數(Order parameter)概念

α 失衡參數隨振幅改變成冪次指數的關係: $\alpha = \alpha_0 |A^2 - A_c^2|^\beta$ ，其中冪次指數 β 即可用來定義我們相變實驗的有序參量，如圖6所示。

實驗變因-震動頻率 f 與震幅 A

激發粒子跳躍動能 K_E 與喇叭的震動速率 \dot{v}^2 成正比，其關係式為：

$$K_E = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 \propto A^2 f^2$$

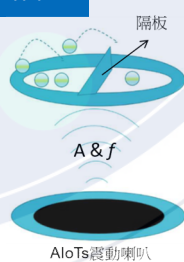
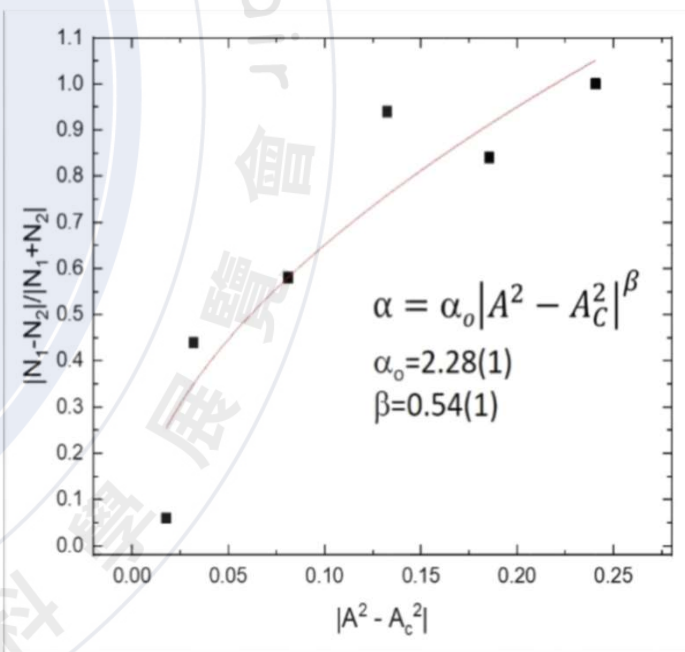


圖6: 頻率 $f=1\text{Hz}$ 下之 α 與震幅平方差值關係



研究方法:實驗設計

實驗設備-設計概念

使用Tinker CAD軟體設計與Snap Maker 3D列印機製造此AIoTs相變實驗系統(圖7)，以直徑5 cm 的喇叭驅動(5~12 V直流電壓)，並設計一喇叭裝載底座。以物聯網控制組裝(圖8)與Arduino韌體撰寫完成系統

步驟 1 設計 製作

1. Tinker CAD
設計

2. 3D 列印組件

3. 震動喇叭組裝

4. 四方水平組裝

5. AIoTs系統組裝

步驟 2 物聯網 電路

1. 物聯網電路
設計

2. Arduino Uno
控制板

3. 3通道 PWM
方波產生器

4. L298N PWM
橋接式驅動電源

步驟 3 韌體 撰寫

1. Arduino韌體
撰寫與測試

2. 繼電器定時
裝置撰寫

步驟 4 校正 平台

1. IR測距儀校正

2. 震動震幅校正
(圖9)

圖7: AIoTs實驗組裝圖

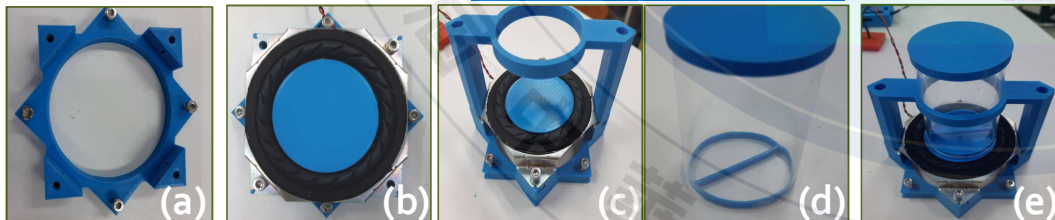


圖8: 物聯網電路圖

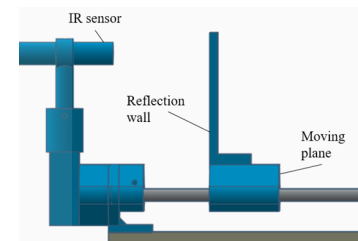
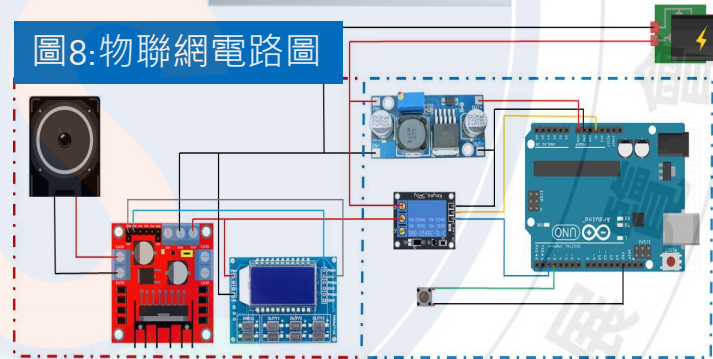
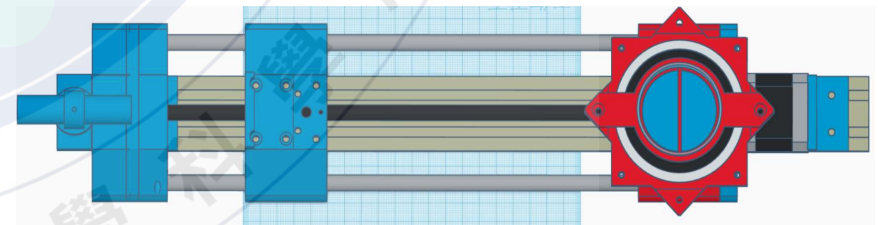


圖9: 校正平台圖



研究方法:實驗數值校正

數值校正

如何精準知道此系統在外加電壓下，其對應的喇叭振幅是多少？利用一支高靈敏IR感應器(CYN70)，其量測分析率約為0.01 mm，讀取訊號的方式為類比輸入介於0~1023之間；需要先校正距離d與類比訊號A₀之間的轉換：

IR測距儀設計與校正

用一滑軌改變檔板距離，以校正類比訊號與距離的關係，如圖10所示，實際距離d與類比訊號(A₀)呈現指數上升的關係，利用此函數，以計算不同激發動能下的喇叭振幅訊號。

圖10: 類比訊號與距離的關係

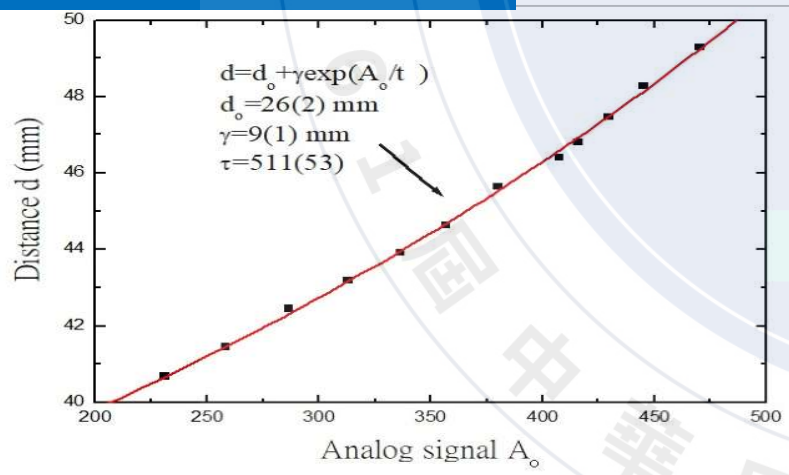
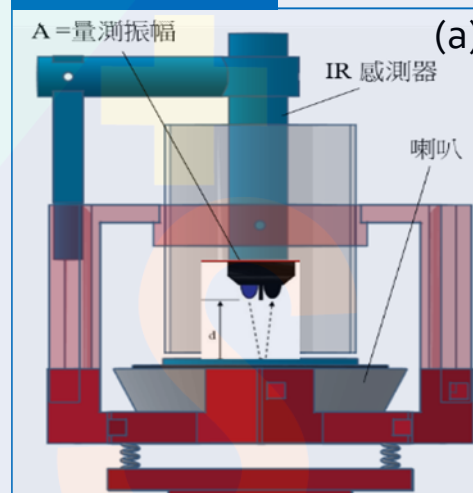
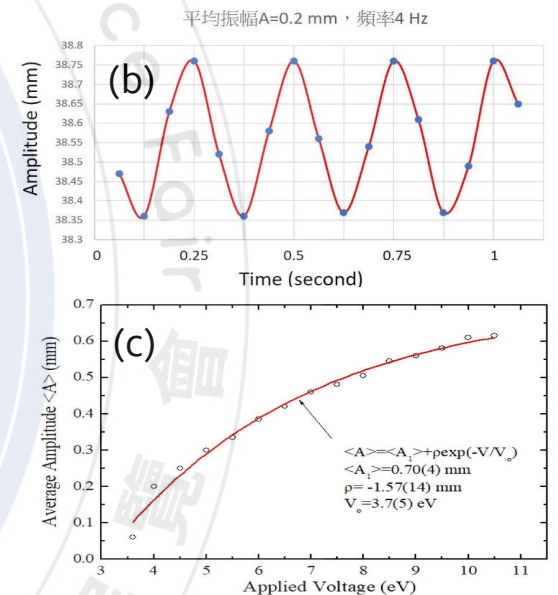


圖11: 校正平台



精準喇叭振幅量測

將IR感測器置於壓克力圓柱中間，如圖11(a)所示；測量在固定驅動電壓4 V與頻率f=4 Hz下的喇叭振幅隨時間關係，圖11(b)所示呈現為一振幅隨時間的三角函數震動，我們以Sin波函數(紅色實線)，取得平均振幅⟨A⟩為0.2 mm，進一步驅動電壓，如圖11(c)，找出喇叭平均振幅的對應關係。



研究方法:量子電路設計

量子電腦-電路設計概念

量子計算使用Qubit而不是Classic bit來執行任務。量子位元是量子力學系統，可導致它們的 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 或某些疊加，從布洛赫球面上的量子狀態(圖12)，可表示為： $|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

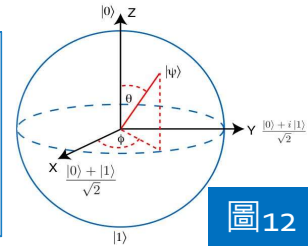


圖12

圖13:布洛赫球(Bloch Sphere)概念

用旋轉Y軸的特性，將XZ平面上的布洛赫球切為上下兩個部分，對應於物聯網實驗即是若是自旋向上即為 N_1 個 $|0\rangle$ ，旋轉180度向下即為 N_2 個 $|1\rangle$ 。如右圖13所示。

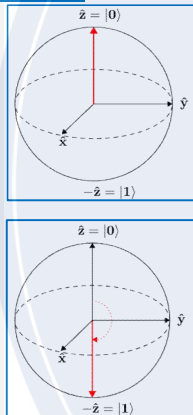
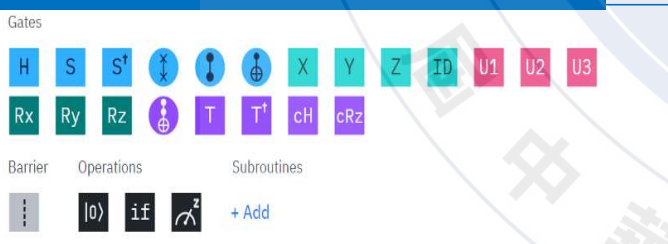


圖14:量子電路工具:Qiskit Composer



CRY控制旋轉布洛赫球概念:

二十個量子位元(20-Qubits)來產生粒子數，五個量子位元(5-Qubits Counters)來統計、一個量子位元(1-Qubit)來控制 Y-Gate 運算 ((Controlled Rotate Y-gate operator) 與五個量子量測(不須占用Qubit)，合計共26個量子位元。

圖15:CRY電路閘圖

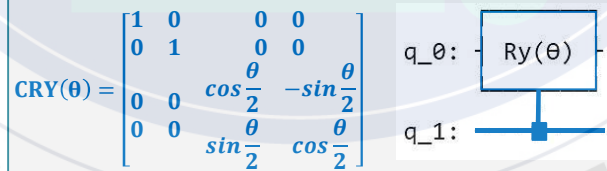
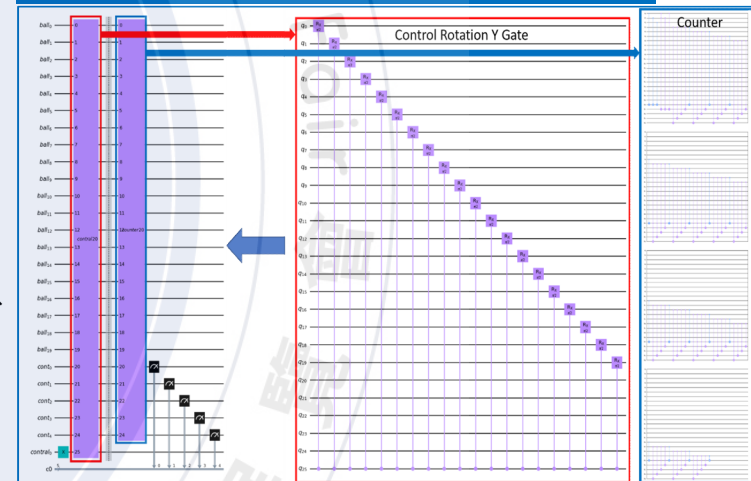


圖16: 20顆Qbits跳躍的量子電路圖



旋轉操作變因

旋轉角度定義為 $\theta = a \times \frac{\pi}{2}$ ，其中 a 為我們的控制變因，介於0~1之間，並五個Counters進行(cont0-4)，進行量子測量100萬次。

研究結果:實驗說明與分析

實驗方法

研究改變激發頻率下對系統有序參數的關係，實驗參數分別為頻率 $f=1\text{ Hz}$ 、隔板高度 $H=5.74\text{ mm}$ 、震動時間 $t=100\text{ s}$ 、系統彈跳總次數 $J_{\#} = f \times t = 100$ 次的粒子數(N_1 (藍色, 左邊)與 N_2 (紅色, 右邊)；共操作五次量測取平均數。

圖17: 實驗在 $t=0, 10, 20\text{ s}$ 跳躍過程

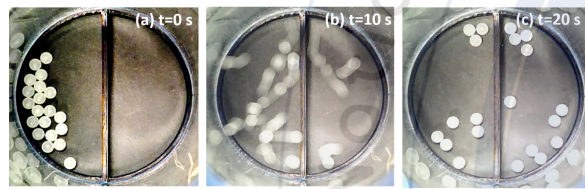
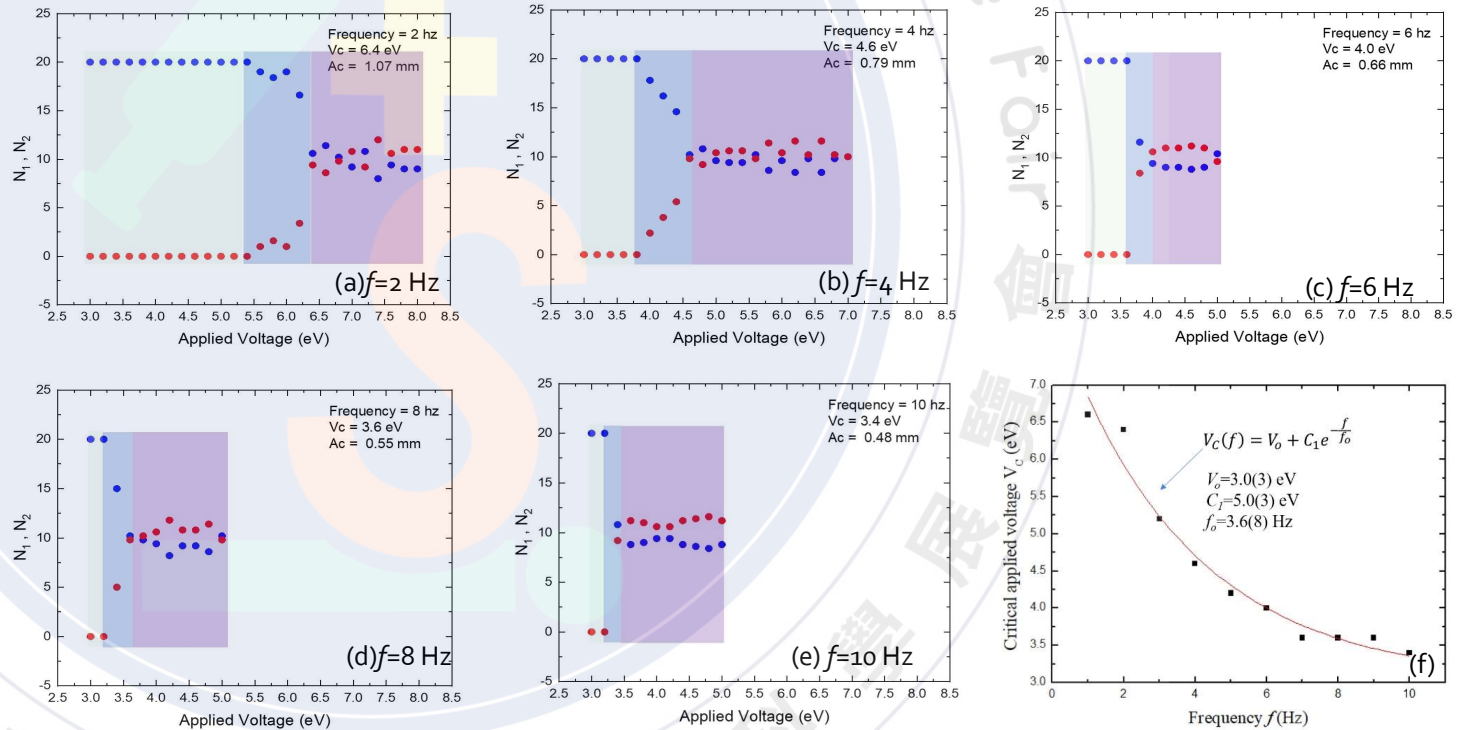


圖18: 左右粒子數與不同驅動電壓的關係



臨界電壓計算概念

如圖 18(f) 所示，可以用 $V_c(f) = V_0 + C_1 e^{-\frac{f}{f_0}}$ 來描述，其初始臨界電壓為 $V_0 = 3.0(3)\text{ eV}$ 、遞減係數為 $C_1 = 5.0(3)\text{ eV}$ 、而半衰遞減頻率為 $f_0 = 3.6(8)\text{ Hz}$ 。

研究結果:有序參量

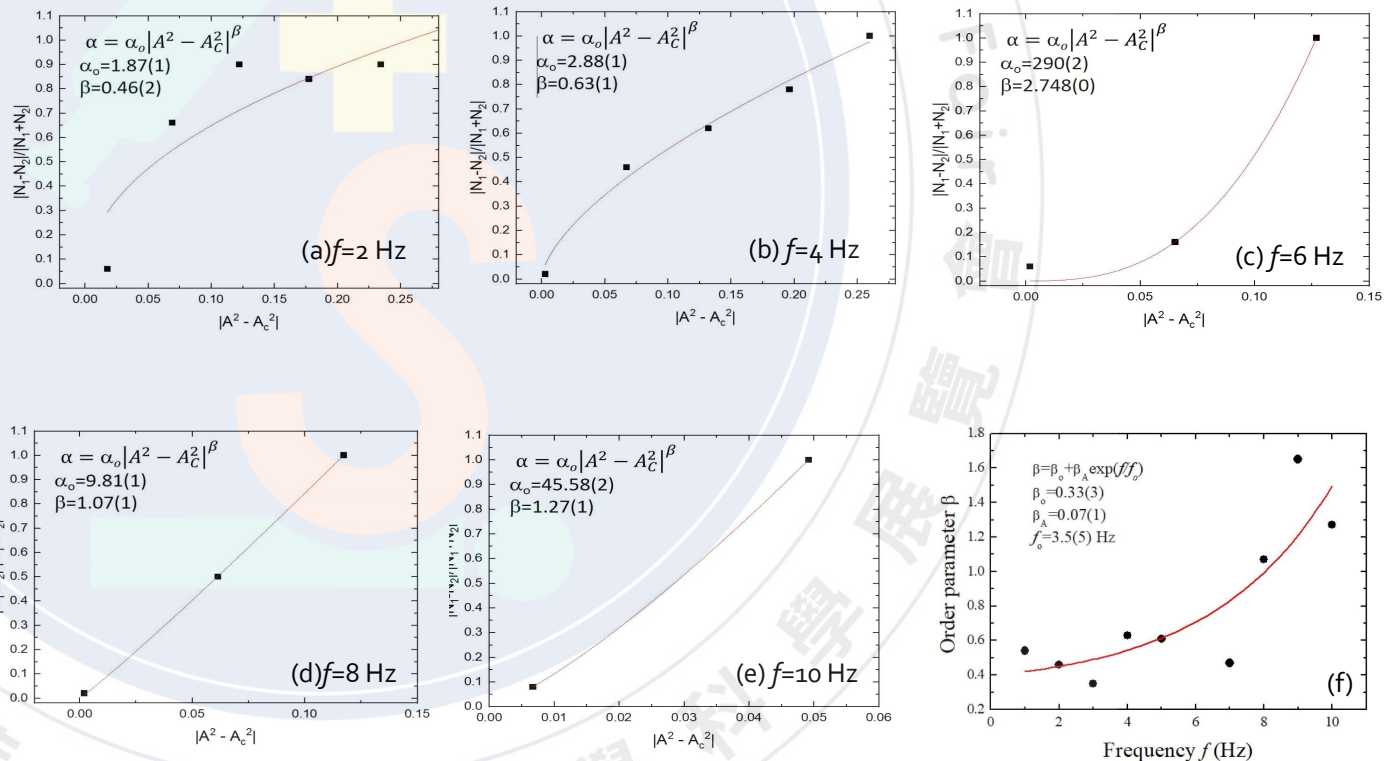
實驗方法

我們也畫出失衡參數 α 隨振幅平方差 $|A^2 - A_c^2|$ 作圖，如圖19(b)所示呈現指數遞增的趨勢，我們擬合此關係，可得到係數 $\alpha_o = 2.28(1)$ ，有序參量 $\beta = 0.54(1)$ 。

有序參量擬合

圖 19(f) 所示，可以用 $\beta(f) = \beta_o + \beta_A e^{f/f_o}$ 來描述，其初始有序參量為 $\beta_o = 0.33(3)$ 、遞增係數為 $\beta_A = 0.07(1)$ 、而半衰遞增頻率為 $f_o = 3.5(5)$ Hz。

圖19: 失衡參數與不同震幅平方差的關係



實驗總結

總結整體實驗過程，我們改變頻率，並固定其餘參數與彈跳次數 $J_{\#}$ ，以求得相變模型中之冪次律的指數與頻率的關係。

研究結果:量子計算結果

調控變因

量子電腦運算結果，我們依調控變因 $a=0\sim 1.0$ ，每隔0.1操作一遍，並將其統計採二進位統計，計算100萬次量測，在調制不同a值下，出現自旋向下狀態個數($N_2=0\sim 20$)的次數和。

圖20: 實驗在不同a下的布洛球過程

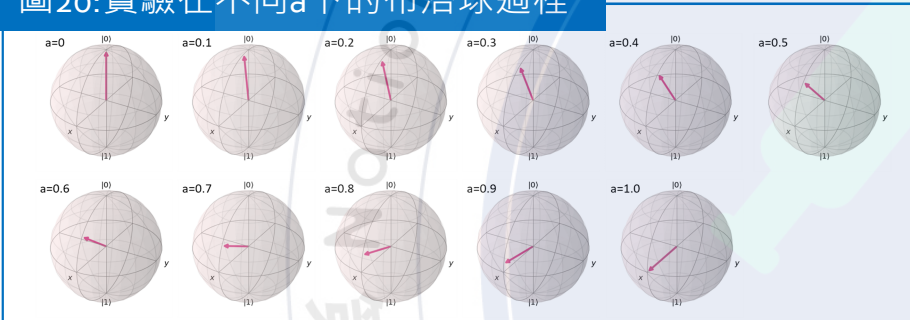
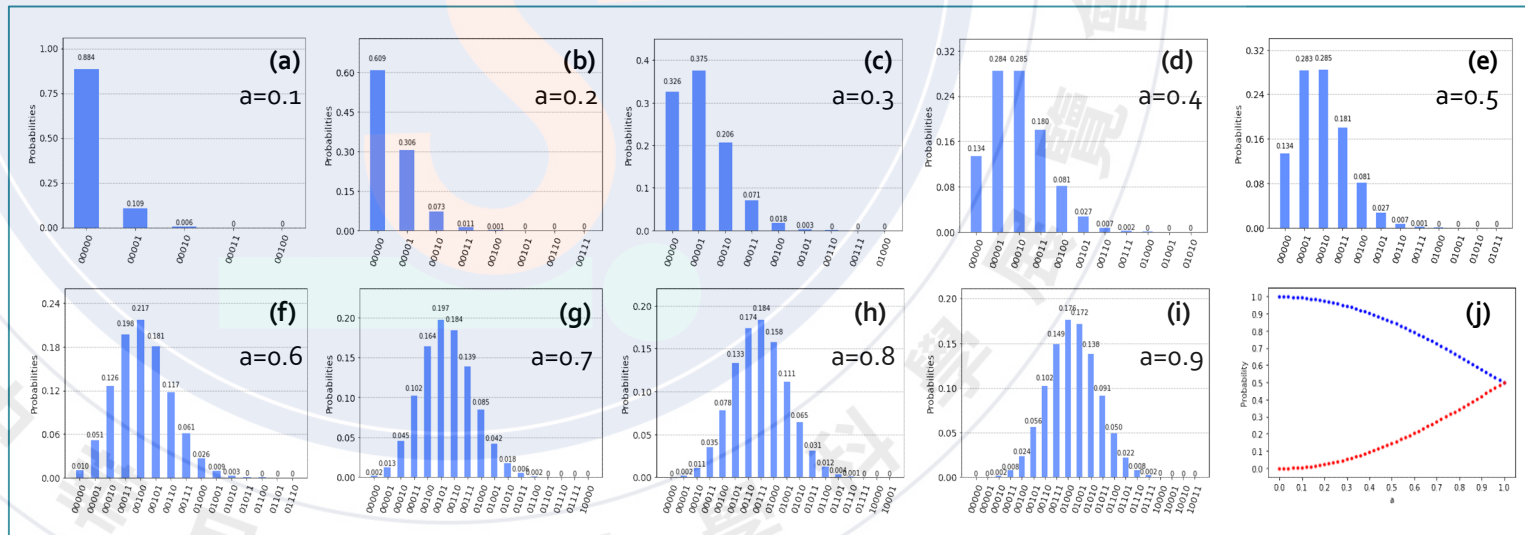


圖21: 量子電腦計算統計概念

量測總數100萬次並進行歸一，以機率 $p(0\sim 1)$ 表達，並以條狀圖呈現，而x-軸以五個Counters計算表示五個二進位粒子數，(j)為不同a下的自旋向上(藍色)與向下(紅色)的出現機率。

Mapping 擬合概念

將不同的a值與出現機率p作圖，如圖21(j)，量子計算結果成功的獲得Zone-II相變區間變化圖形，其曲線變化可以用來擬合實驗結果，將a值對應到實驗的Zone-II的驅動電壓範圍，即可解釋實驗之有序參量。



研究結果:量子計算與實驗之擬合

Mpping 擬合實驗

量子電路計算結果與實驗數據的擬合，採用Mapping技術，將圖21(j)之結果之a值與出現機率p mapping至Zone-II的驅動電壓之變化範圍 ΔV 與粒子數 ΔN_1 ，而a值與座標機率p轉換至電壓與粒子數(V, N)之方程式如表1。

表1:a值與出現機率p mapping至Zone-II的驅動電壓之變化範圍 ΔV 與粒子數 ΔN_1 之參數

Mapping method	$V = V_C - \Delta V \cdot a; a=0\sim 1$		$N_1 = N_{1C} + \Delta N_1 \cdot p; p=0\sim 1$	
Frequency f (Hz)	Critical Voltage V_C (eV)	Zone II range ΔV (eV)	Zone II range N_{1C} (# at V_C)	Zone II range ΔN_1 (#)
1	6.6	1.2	14.4	5.6
2	6.4	1	10.6	9.4
3	5.2	1	11.2	8.8
4	4.6	0.8	10.2	9.8
5	4.2	0.8	10.4	9.6
6	4	0.3	9.4	10.6
7	3.6	0.3	9.6	10.4
8	3.6	0.4	10.2	9.8
9	3.6	0.4	11.2	8.8
10	3.4	0.2	10.8	9.2

圖22:量子電腦計算統計概念

圖22(a)-(b)所示，將電壓 $\Delta V = 6.6 - 5.4 = 1.2$ eV間的機率mapping至 $a=0\sim 1.0$ ，而Zone-II的 N_1 個數區間為 $\Delta N_1(\#) = 5.6$ ，其對應的臨界電壓與 N_1 個數分別為 $V_C = 6.6$ eV與 N_{1C} (# at V_C) = 14.4，如圖23(a) 成功擬合出頻率為 $f=1$ Hz實驗之Zone-II區間。

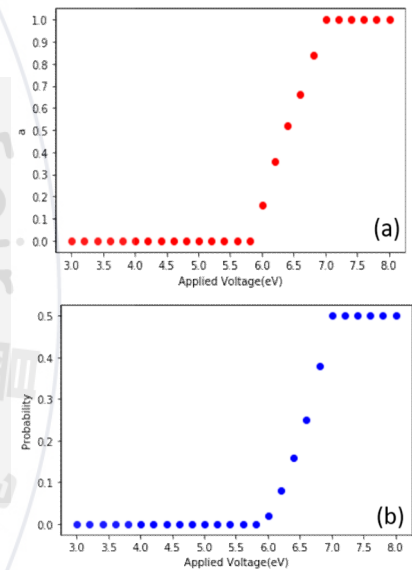
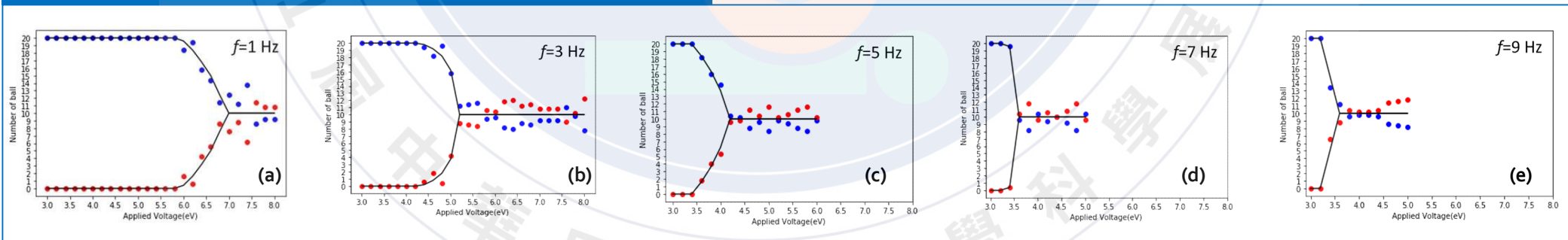


圖23: 為量子計算與實驗資料擬合 $f=1\sim 10$ Hz之實驗結果



討論

討論

實驗與理論計算，顯示當量子量測次數至巨量時，系統的相變漸近行為可以完美的以26-Qubits來擬合實驗結果，而另外一個有趣的現象是，當遠離相變點時，粒子的漲落行為依然存在。

自製相變實驗，其關鍵條件為：

Zone-I

相變死亡態(PT-DS)隨著頻率增加而變小，粒子之集體行為是來自於動能，以加速相變的發生。

Zone-II

相變混合態範圍亦有縮小，其漸進行為於相變的改變量隨頻率增加而越來越快。

Zone-III

粒子的漲落在高頻處有呈現波的形式，此種已過相變後的行為，在不同頻率下依然存在。

量子電路可成功解釋相變實驗，其關鍵條件為：

量子電路模型

解釋多體粒子之相變混合態，說明如何利用CRY量子邏輯閘來控制20顆粒子，以擬合實驗結果，並說明Zone-II之粒子靠近相變臨界點之粒子漸近行為。

量子統計

利用大量的量子量測次數，統計不同驅動旋轉角下的自旋向上 $|0\rangle$ 與自旋向上 $|1\rangle$ 的機率分佈，此方法可運用於大數據統計，克服傳統實驗條件限制，如粒子數與實驗次數。

