

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

佳作

051808

「還有轉環的餘地」—探討鋼球位於自轉圓環
上之運動

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

| | |
|---|-----------------------------|
| 作者： 高二 蘇盈翰 高二 方宥鈞 高三 王嘉德 | 指導老師： 盧政良 高執貴 |
|---|-----------------------------|

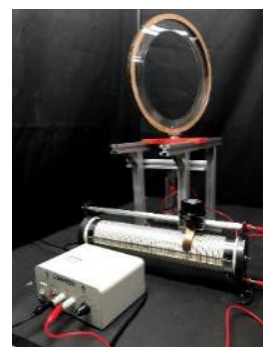
關鍵詞：圓周運動、阻尼振盪、加速座標

摘要

在一個旋轉的圓環內，當將鋼球放入其凹槽內可發現，在某些情況下，鋼球會沿著圓環向上運動，但在某些情況下，鋼球卻只是待在原地。本實驗不僅改進了實驗架設，也透過改變各種變因發現鋼球有許多不同的運動效果，並大致分為三階段，進行更深入的討論。之後利用程式模擬並逐步加入模擬修正，從起初的理想情況，到後面考慮旋轉、阻力等等，使模擬與實驗更為相似，也證明了理論之正確性。同時也利用 VPython 動態模擬，與實驗進行動態比較，更加完整的了解鋼球運動的效果。

壹、 研究動機

有一次和高中同學一同出遊的機會下，我們來到了遊樂園，看到了飛天椅這項設施，雖然感到害怕但同時也對這項設施感到驚訝的我們，發現原來一條鐵鍊在不同的轉速下可以有那麼多不同的表現。於此同時，在飛天椅身後的雲霄飛車正在軌道上做 360 度旋轉，引發了我們的興趣：如果同時將此兩項遊樂設施結合，會發生什麼神奇的事?於是將小球放置於旋轉環內的運動便為此篇之研究題目。



貳、 研究目的

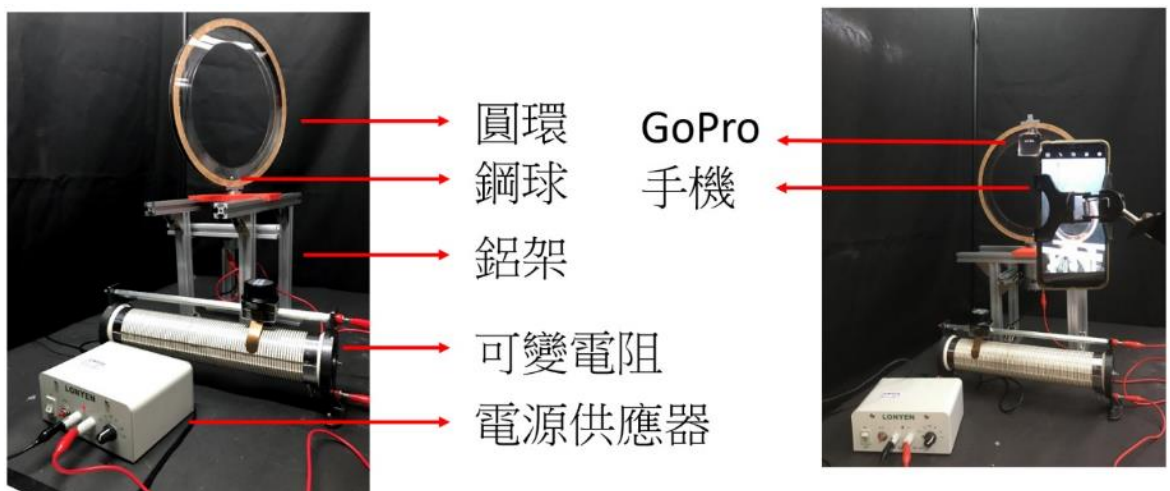
- 一、探討鋼球運動軌跡
- 二、探討不同圓環之轉速對鋼球之影響
- 三、探討不同質量之鋼球對自身平衡點之影響
- 四、探討不同質量之鋼球對自身動態之影響
- 五、探討不同圓環傾角對鋼球之影響

參、 研究設備及器材架設

一、研究設備

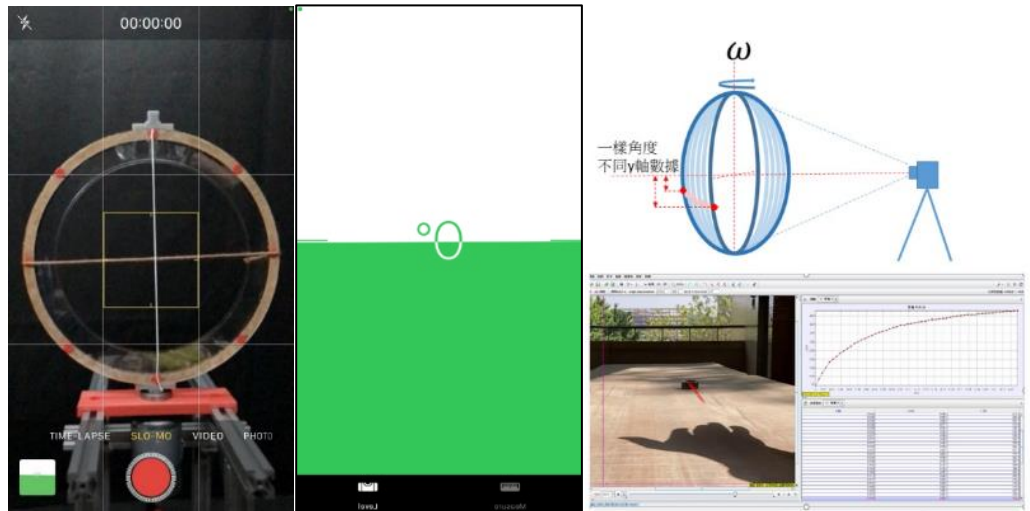
| | | |
|--|--|---|
|  |  |  |
| GoPro(攝影) | 游標尺(測量) | Tracker(影片分析) |
|  |  |  |
| Python(繪圖) | Jupyter Notebook(模擬) | Premiere Pro(製作影片) |
|  |  |  |
| 小鋼球(實驗器材) | 可變電阻(實驗器材) | 其他 |

二、實驗架設



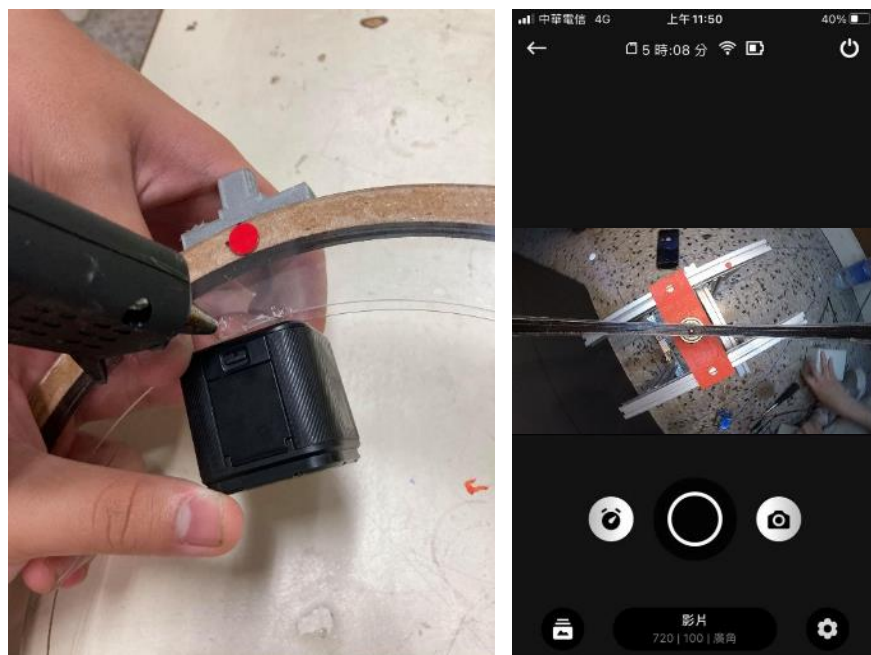
1. 利用垂直放置在圓環外之手機進行拍攝

本實驗起初手機之架設是放置在圓環外，如下圖。但經實驗後發現，此種架設會導致將影片分析時，會因攝影角度而導致鋼球位於一樣的角度，但卻會有不一樣的 y 值(右下圖為一物品在桌面上水平滑動，可在 Tracker 結果中發現)。雖然已有解決方法，但此架設仍會導致當圓環轉到 90 度附近時，鋼球被圓環遮擋，意味著不能了解鋼球完整運動過程。故本實驗之解決方法為將 GoPro 架設在圓環內。



2. 將 GoPro 置於圓環上

由下圖可知，GoPro 是利用熱熔膠黏在圓環之頂部，並確保攝影機畫面之中心點對準圓環最底部，故可利用在手機上的 APP 即時監控 GoPro 之畫面。但此架設仍無法直接直觀的取得鋼球，而計算方法在研究方法內將有更詳細之敘述。

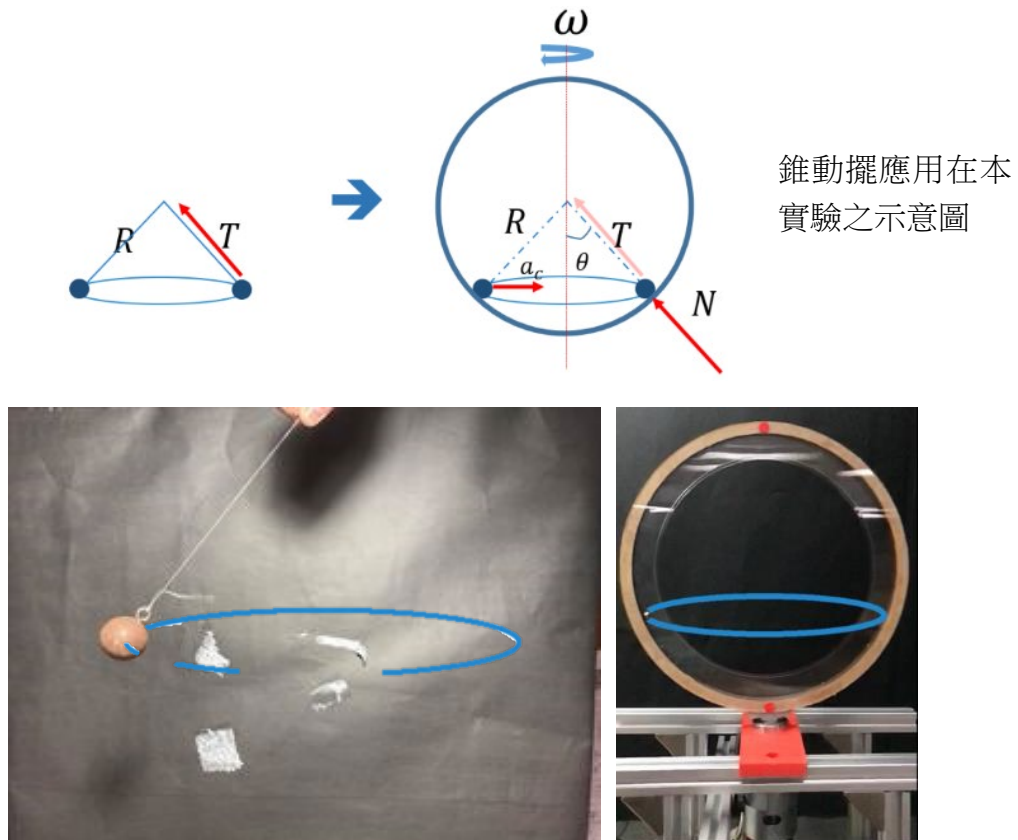


肆、 實驗理論與研究方法

一、 實驗理論

(一) 錐動擺(牛頓力學分析)

由於本實驗裝置中的鋼球運動與錐動擺上球體的運動軌跡十分相似，而且在實驗中鋼球所受的正向力恰好可比擬為錐動擺上球體所受的繩子張力。因此本實驗裝置可以以錐動擺進行簡化並分析。



由下列公式可大致求得本實驗鋼球之位置為 $\cos^{-1}(g/R\omega^2)$ 。其中 g 為重力加速度； R 為圓環中心到鋼球中心的距離， ω 為馬達之轉速。

$$\begin{cases} X = N\sin\theta = ma_c \\ Y = N\cos\theta = mg \end{cases}$$

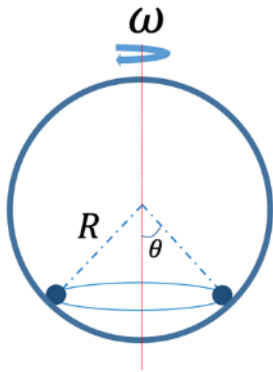
$$\frac{x}{y} = \frac{a_c}{g} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \rightarrow \frac{g}{R\sin\theta\omega^2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

由此公式可以得知，一個圓環轉速對應的鋼球位置，然而此解沒有考慮現實中，鋼球會受到外界阻力之影響，且也尚未完全了解小球完整的運動過程。經過一番搜索，發現國外論文使用尤拉·拉格朗日公式來解小球在環上的運動方程式。

(二) 尤拉·拉格朗日解

為了了解鋼球隨時間連續的變化，且最後也方便將模擬與實驗做比較，運動方程式便是一個相當必要的工具，而為了解物理模型中的運動方程式，需要使用拉格朗日方程式。

經過參考國外論文(Lisandro A Raviola.(2017). Eur. J. Phys. 38 015005.):
鋼球的動能，位能，和阻力項如下:



$$\text{動能：} \quad T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\omega^2)$$

$$\text{位能：} \quad V = -mgR\cos\theta$$

$$\text{阻力：} \quad \vec{F} = -b\vec{v}$$

將以上獲得的動能、位能、阻力導入下列拉格朗日標準方程式(F 即為廣義力)。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F$$

就可得到鋼球的運動方程式(Equation of Motion)

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = \frac{g}{R}\cos(\omega t)\cos\theta$$

而當 $\ddot{\theta}$ 和 $\dot{\theta}$ 為零時，也就是沒有 θ 的加速度或速度時，鋼球應處於一個穩定平衡階段，而透過公式轉換可得到的鋼球的平衡位置之結果與錐動擺分析的結果相同。

$$\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = \frac{g}{R}\cos(\omega t)\cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

由前述所提，拉格朗日運動方程式的價值在於其可以了解鋼球在圓環內的位置對於時間的連續變化，最後也可以將實驗與理論模擬進行比對。

(三)穩定平衡與不穩定平衡

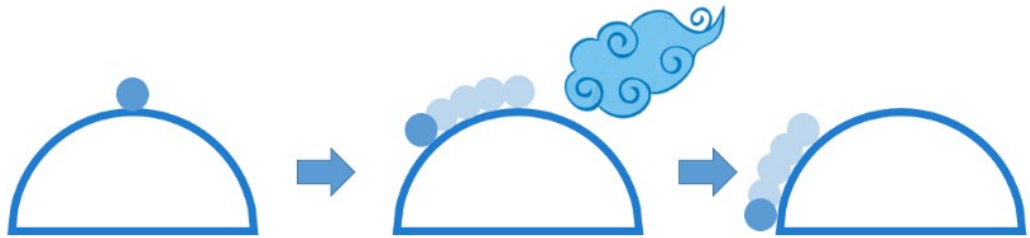
1. 穩定平衡

如下圖。一顆鋼球放置於一碗內部，若碗未獲的任何之擾動，鋼球將沒有外力的產生，意味著鋼球會一直待在此此點。但此時若有任何擾動，例如風吹，將可能導致鋼球離開此點，但鋼球經過一段時間後，會回到此點，故此點定義為此鋼球之穩定平衡點。



2. 不穩定平衡

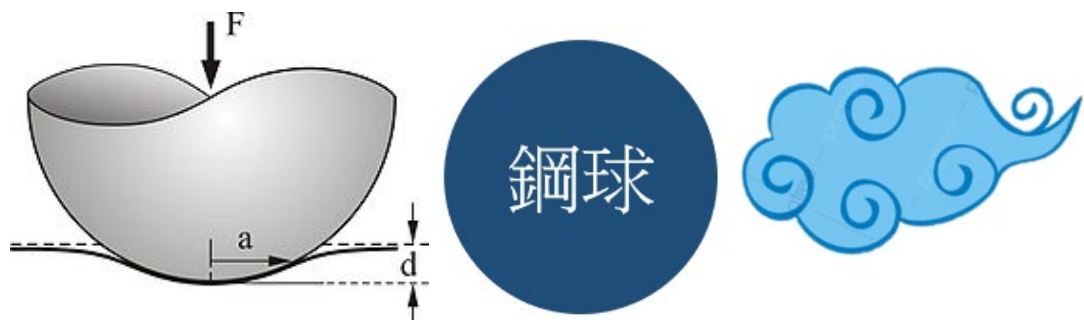
如下圖。不穩定平衡就像是將鋼球放置於一倒立碗上之頂點，如同穩定平衡般，碗未獲的任何形式之擾動，鋼球將沒有外力的產生，意味著鋼球會一直待在此點。但若任何擾動發生，球將離開此點，而鋼球並不會像穩定平衡之鋼球一樣回到原點，故鋼球放在倒立碗上之頂點時為不穩定平衡點。



(四)阻尼震盪

若有一個半徑為 R 的球體在一個彈性半空間上壓出的凹痕深度為 d ，若產生的接觸區域的半徑為 $a = \sqrt{Rd}$ ，則作用力 $F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$ 。

而阻尼震盪是可以指任何振動系統在振動中，由於外界作用（如流體阻力、摩擦力等）或系統本身固有的原因引起的振動幅度逐漸下降的特性，而透過拉格朗日方程的假設，可以看到阻尼項最主要來自空氣給的空氣阻力。

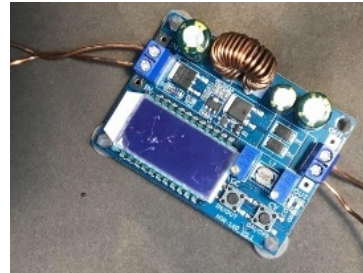


二、研究方法

(一)實驗方法

1. 改變圓環轉速

本實驗在起初架設為直接將馬達接上電源供應器(如下圖左),並直接調整電源供應器輸出之電壓(3V、6V、9V、12V)。但經實驗後發現,4個不同圓環轉速並無法驗證實驗與理論。故後續實驗將接上可變電阻模組(無限段之電壓),進而可以取更多不同圓環轉速之數據。



2. 改變鋼球

如下圖所示,本實驗採用相同密度鋼球,並改變鋼球之大小,進而改變鋼球之質量。



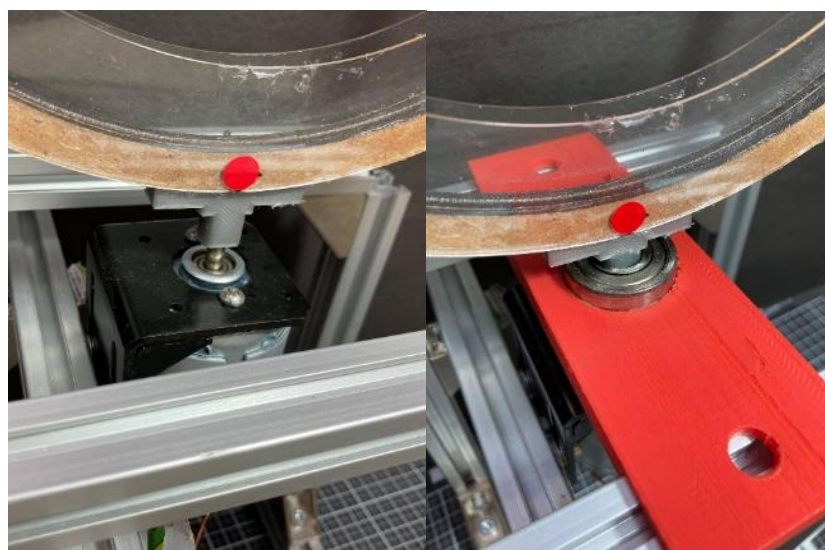
上方圖片之鋼球,由左至右分別是:

0.7mm、1.1g; 0.55mm、0.6g; 0.8mm、2.2g

圓環演變史



| | |
|--|---|
|  | <p>受限於 3D 列印機之大小，此圓環只有一半，進而導致當馬達達到高轉速時，鋼球會超過 90 度，意味著鋼球將飛離圓環。</p> |
|  | <p>雖然此圓環已完整，但從照片中仍可發現，軌道側板並非透明，導致無法使用將攝影機架設在環外之方法。</p> |
|  | <p>將上述圓環重做並改為壓克力側板，便可利用將攝影機架設在環外之方法知道鋼球之位置。 實驗後發現軌道並不光滑，故使用打磨器打磨。</p> |

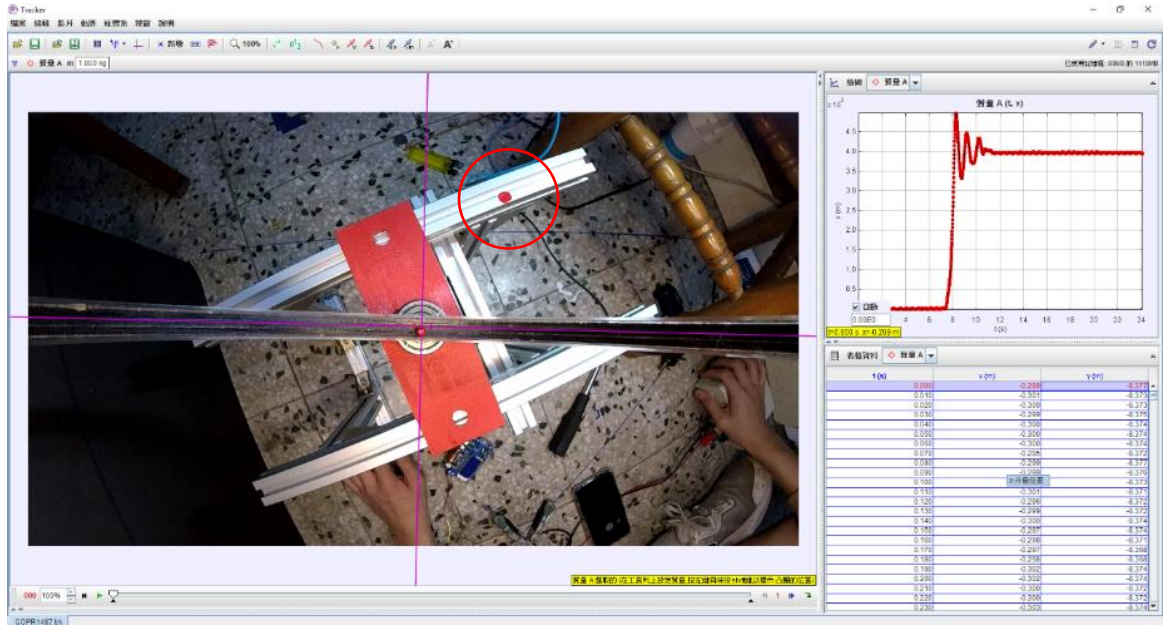


將鋁架加入培玲後，將使本實驗之裝置更加穩定。

(二)影片分析

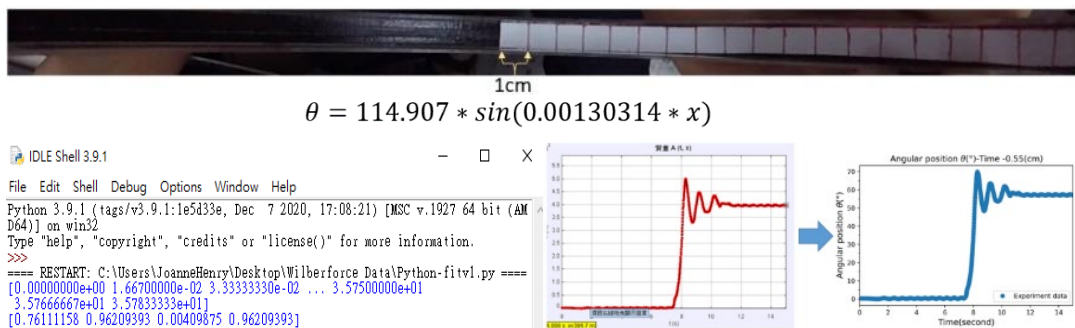
在確立了研究主題後，我們開始假設究竟有那些參數會影響鋼球的運動。當然，最容易觀測的無非是鋼球運動時所能抵達的「平衡點」。於是，我們初步的設想了幾個容易改變的參數：鋼球的質量、半徑，環所連接的馬達的轉速等等…。經過實驗並錄製成影片後，匯入 Tracker 進行分析，繪出鋼球在環內的軌跡隨時間變化圖。

在下圖紅色圈圈中之紅點，為本實驗追蹤圓環轉速之標記。



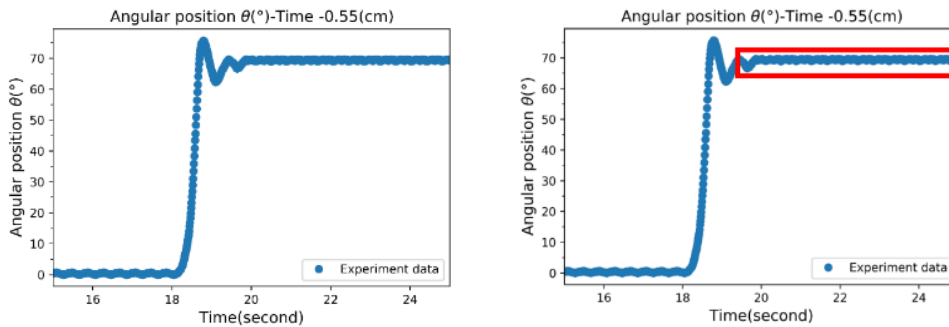
(三)數據處理

將 Tracker 裡之 x-t 資料輸出時，由於攝影機之結構，無法將 x-t 圖直接當成 θ -t 圖。故解決方法為：將一張紙條每 1cm 做一記號(如下圖)，並將此丟進 Tracker 得到不同 x 值對應之 θ ，並使用 python 擬合函數去了解 tracker 的 x 值和實際 θ 之關係，以利於之後能直接將 Tracker 資料輸出並直接換算成 θ ，並利用 Python 繪圖。



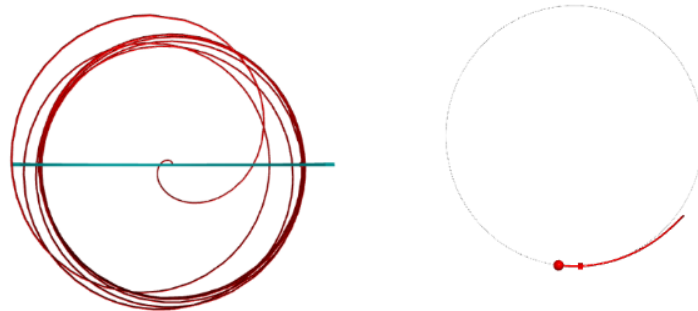
(四)鋼球平衡位置定義

在先前的錐動擺公式中可得知，一個轉速對應一個平衡位置，但是平衡位置在實驗中的意義仍待釐清。下圖左為其中一次實驗之 θ - t 圖。

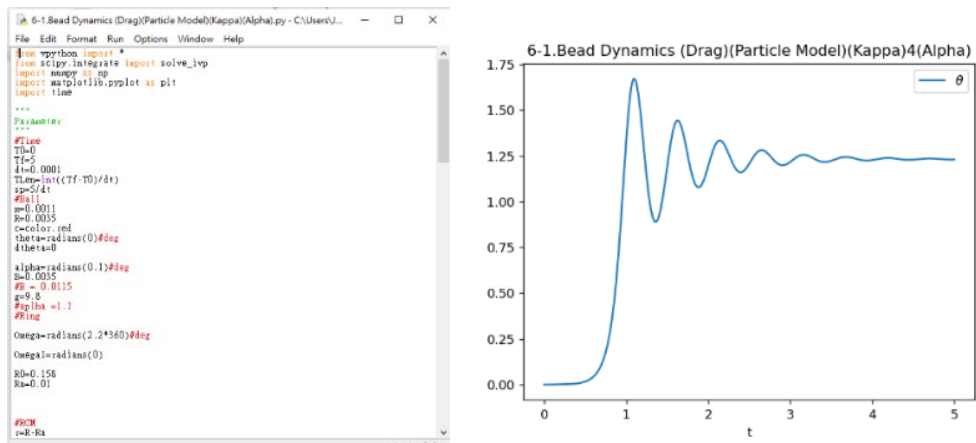


由上圖右中，發現當小球約在第 20 秒時到達一個穩定的狀態如上圖右，此穩定狀態「持續」直到實驗結束(前 18 秒為理論部分提到之不穩定平衡，在之後探討鋼球運動軌跡之實驗將會有更詳細的敘述)，故本實驗將此狀態定義為此小球之平衡位置，且取該段所獲得之數據並平均而得到此小球之平衡位置。

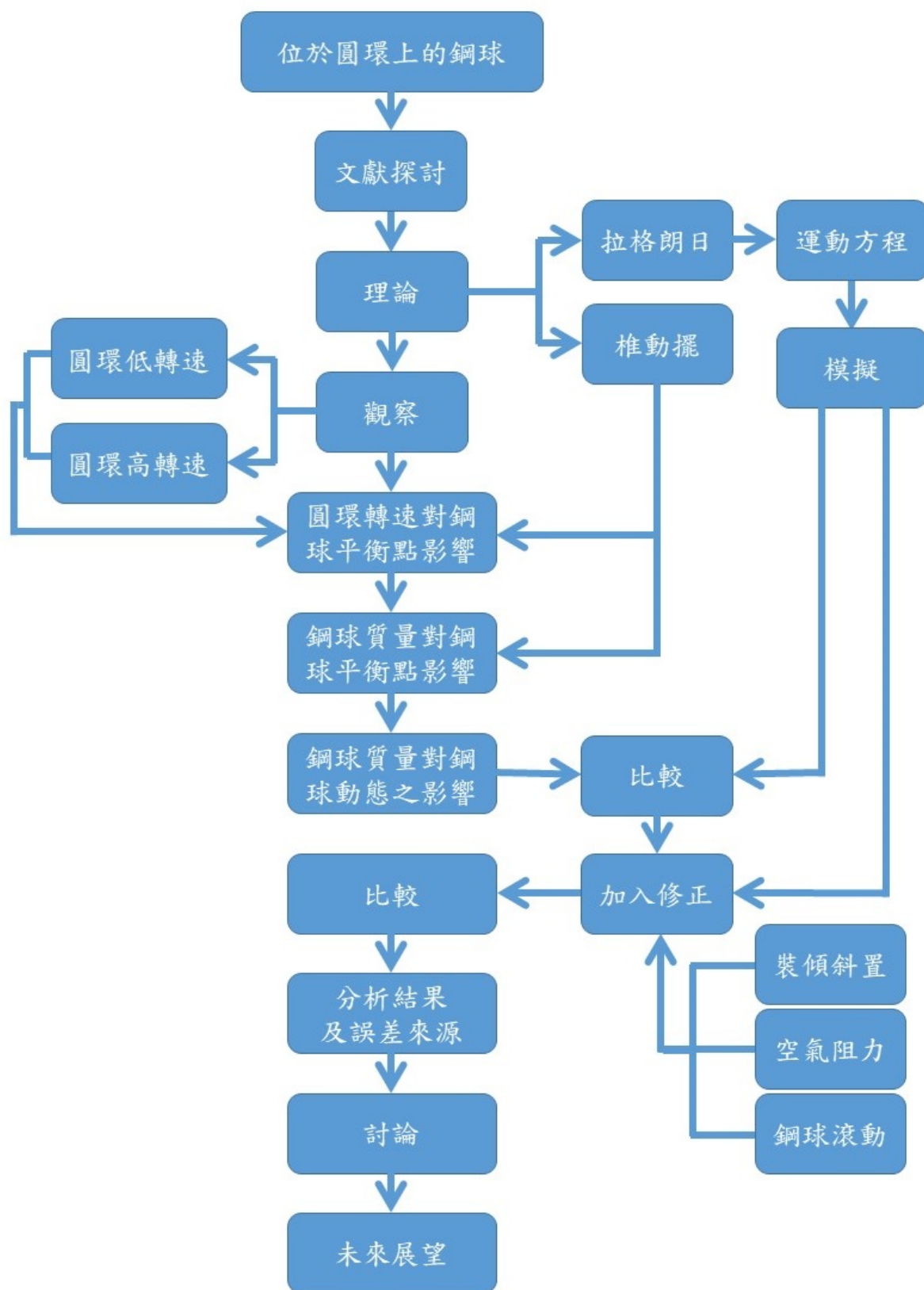
(五) 架設模擬環境



使用Python 模擬，必須先找到合適的Python Package，而經過搜Vpython 的物理模擬最為合適，而模擬設定與運動方程式細節將會在後續實驗中有更詳細之敘述。



(六) 實驗流程圖



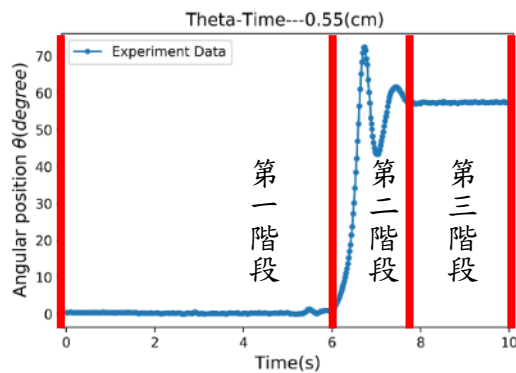
伍、 研究結果

一、 探究鋼球運動軌跡

透過 $\theta = \cos^{-1}(g/R\omega^2)$ 和先前不穩定與穩定的發現，為使 θ 有解， ω 必須大於 $\sqrt{g/R}$ ，所以本實驗將轉速分為大於 $\sqrt{g/R}$ 和小於 $\sqrt{g/R}$ 來做討論。

(一) 高轉速 ($\omega > \sqrt{g/R}$)

1. 從下圖中，可發現小球的運動過程會有三個階段，分別是第一階段: 小球待在 $\theta = 0$ ；第二階段: 小球上升，並且多次上上下下；第三階段: 小球穩定在一定的位置。



發生擾動後，鋼球開始爬升



抵達最高點後，鋼球下墜



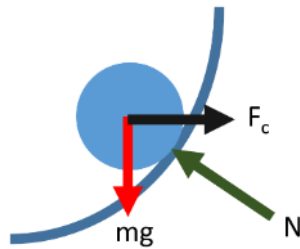
下墜一段時間後後，再度爬升



爬升至第二高點後，隨後又往下墜，並抵達此顆鋼球之平衡位置

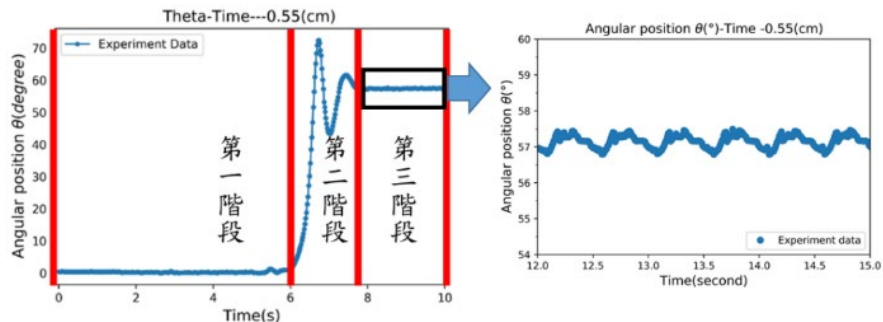
2. 將影片進行更進階的分析，可得到以下結果:

- (1) 第一階段：小球在約5秒前皆待在圓環底部，在5.5秒時小球突然離開原點。推測這就是在理論提到的不穩定平衡，當5.5秒時，擾動發生，球離開此不穩定平衡階段。
- (2) 第二階段：小球離開不穩定平衡後，開始上升，但到達一定高度後下墜，但之後又上升，最後趨於穩定。如下圖，而原因可以從拉格朗日的運動方程看出，但同時也可以直觀的理解，當小球位置上升到相對高處時，重力分力(切線方向分力)提升，導致球下墜；而當小球又盪到相對低處時重力分力又相對減弱。

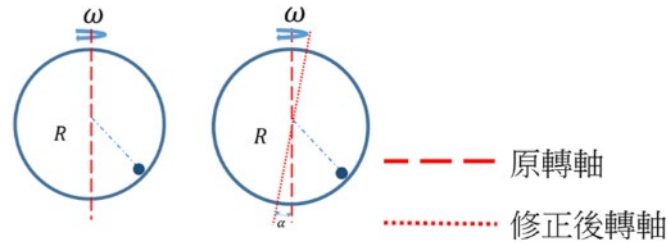


- (3) 第三階段：小球待在平衡位置附近，並且若在此第三階段對裝置給予人為擾動，鋼球也會回到此點，故我們可推測此點即為此小球在特定初始情況下的穩定平衡點。但如果將此階段放大來檢視，又會發現一個神奇的現象。
- (4) 小幅度震盪

由下圖可知，此鋼球並非穩定的待在平衡位置，相反的，此鋼球在平衡位置附近做小幅度震盪。



在了解此現象之原因前，必須先回到拉格朗日論文內。在論文中，研究人員發現圓環並非每次都以垂直旋轉，而是以一小傾角 α 當做旋轉軸，研究人員發現此事並對拉格朗日運動方程式稍作修改，加入 α ，發現在鋼球抵達第三階段後，鋼球確實會在平衡點附近做小幅度震盪。此理論與本實驗之結果相同。



$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\theta \right) \sin\theta = 0$$

研究人員將原本鋼球之運動方程式加入 α ，並修改為下列方程式

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) \theta = \frac{g}{R} \alpha \cos(\omega t) \cos\theta$$

由此公式可得知，鋼球位於第三階段時，小幅度震盪之頻率、振幅呈現如下。

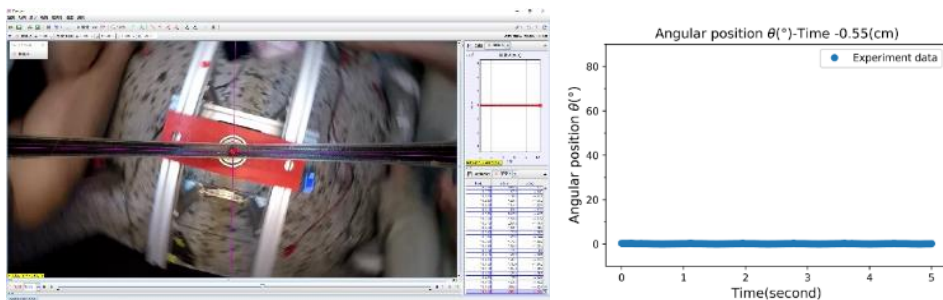
$$f = \sqrt{\frac{g}{2R} - \frac{b^2}{8m^2}}$$

$$\text{amplitude} = \frac{\alpha g}{R \sqrt{\left(2\omega^2 - \frac{g}{R}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2}}$$

3. 了解小球的運動後，便是降低圓環轉速，但卻發現了截然不同的結果。

(二)低轉速($\omega < \sqrt{g/R}$)

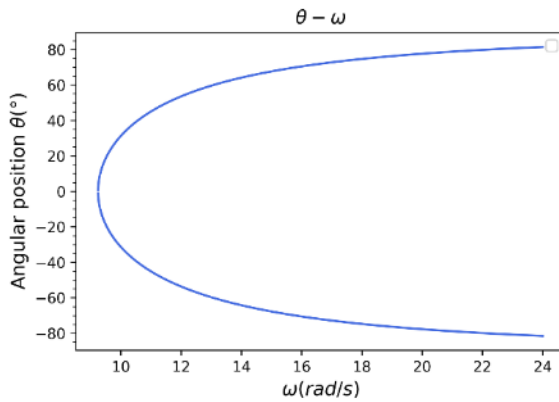
1. 從下圖中可發現，當圓環處於低轉速時，小球即使有擾動，小球也會回到原點，由此可推斷此點即為此小球在此初始情況下的穩定平衡點。



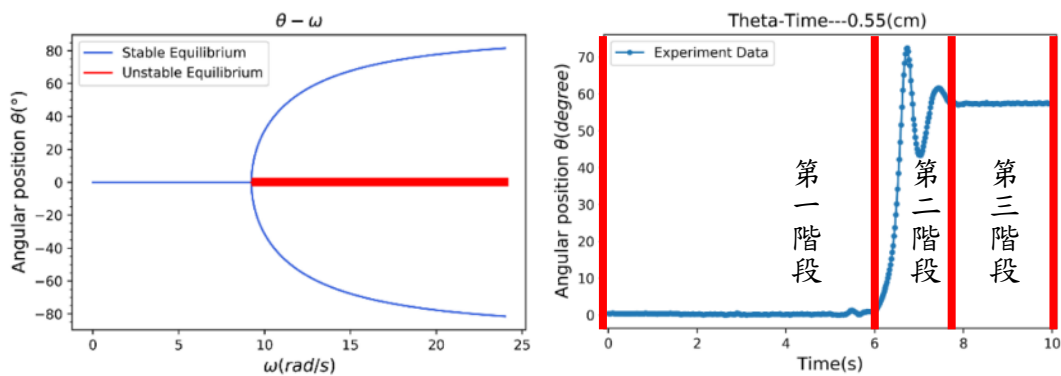
2. 在認知到圓環不同轉速會使鋼球有巨大影響後，不同轉速便為下一個實驗之研究目的。

二、探討不同圓環之轉速對鋼球平衡點之影響

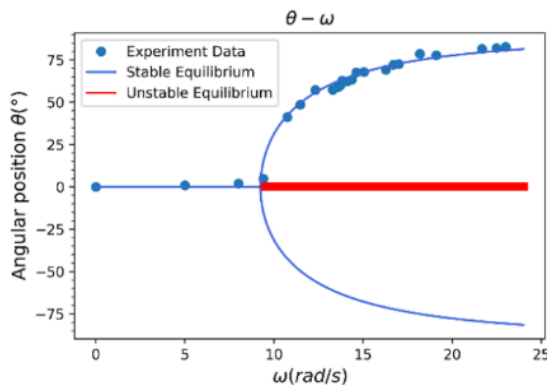
由理論部分可推知，鋼球位於圓環上之平衡位置 $\theta = \cos^{-1}(g/R\omega^2)$ ，故我們可以得知理論線如下圖。由第一個實驗可得知， ω 必須大於 $\sqrt{g/R}$ ， θ 才有解，我們便可從理論線明顯的看出 ω 之界線。



由上述所提及，理論線並未包含 $\omega < \sqrt{g/R}$ 之情況，但由第一個探究中關於低轉速之實驗，已經了解到當圓環處於低轉速時，鋼球會位於 $\theta = 0$ 之位置，固可將理論線修正成下左圖。從下左圖中可以看到紅線為第一個探究中關於高轉速實驗之第一階段，也就是不穩定平衡(如下圖右)。



實驗結果呈現如下圖



由實驗結果可得知，本實驗之結果相當接近於理論值。

三、探討不同鋼球的質量對平衡點的影響

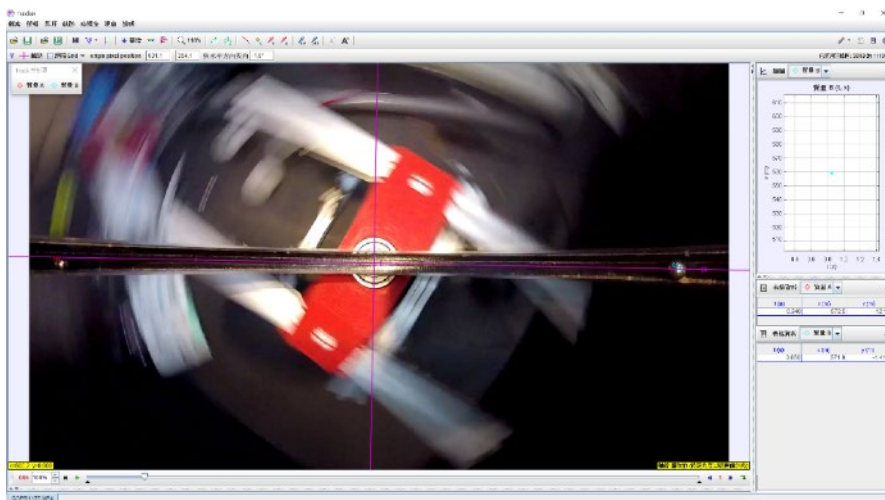
確立了一個轉速應對應一個平衡位置(穩定平衡位置)的事實之後,可發現靜態的平衡公式 $\theta = \cos^{-1}(g/R\omega^2)$ 跟質量並沒有關係,而為了印證質量的改變的確對平衡位置並無影響,所以進行以下實驗。

在環內放入質量不同的兩顆鋼球(0.66g, 1.1g)後,接著將變壓器調製定電壓(也就是固定轉速)



實驗影片

讓鋼球上升後可發現位置大致上相同,而為了進一步確認,需將影片匯入 Tracker 分析,



經過分析(帶入誤差矯正公式)之後發現不同質量不同的鋼球角度確實大致一樣

| 表格資料 | | | 質量 A |
|-------|--------|--------|------|
| t (s) | x (m) | y (m) | |
| 0.840 | -572.5 | -12.15 | |

| 表格資料 | | | 質量 B |
|-------|-------|--------|------|
| t (s) | x (m) | y (m) | |
| 0.850 | 571.9 | -1.419 | |

$X = -572.5 \rightarrow \theta = 78.28^\circ$

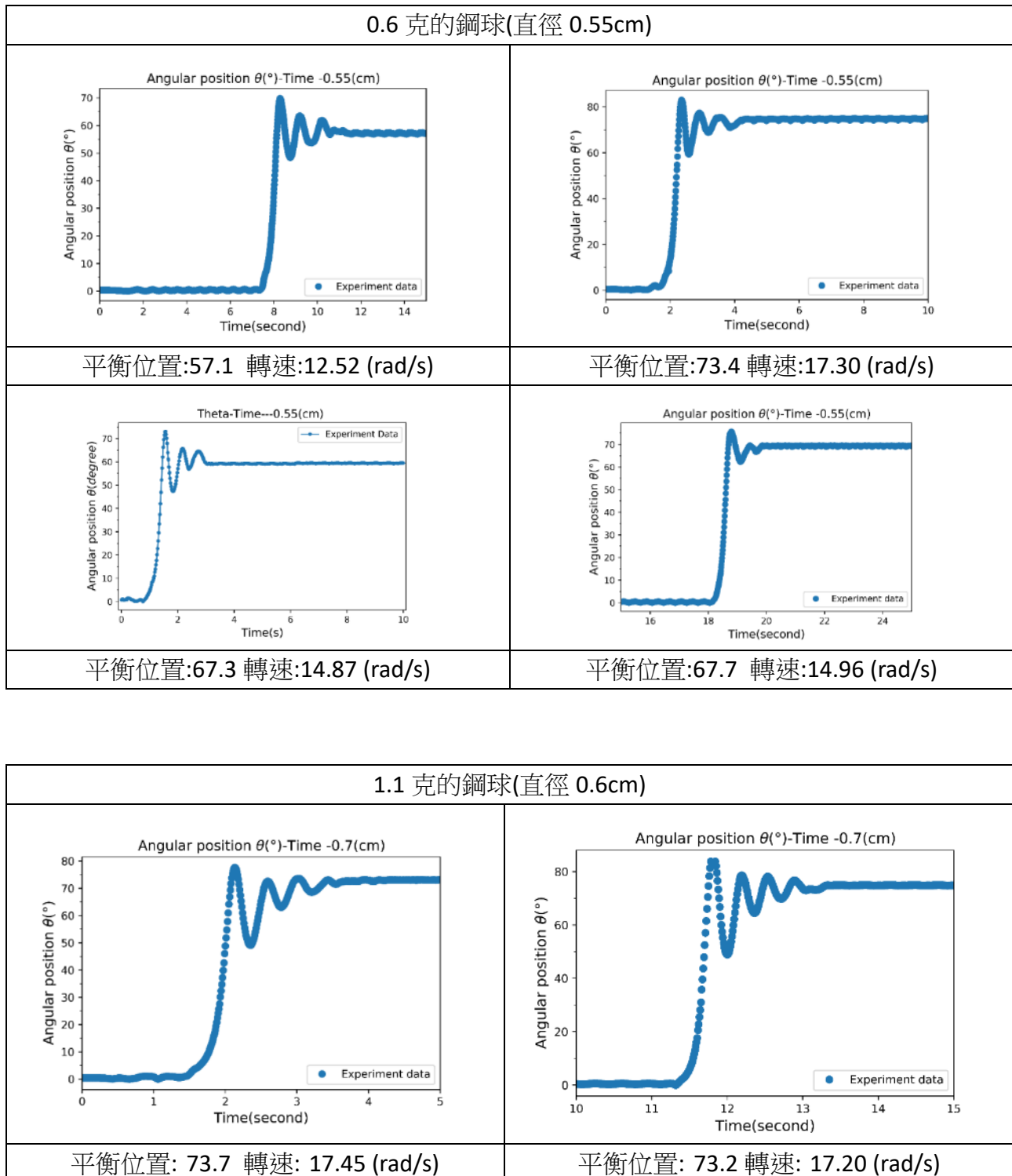
$X = 571.9 \rightarrow \theta = 78.22^\circ$

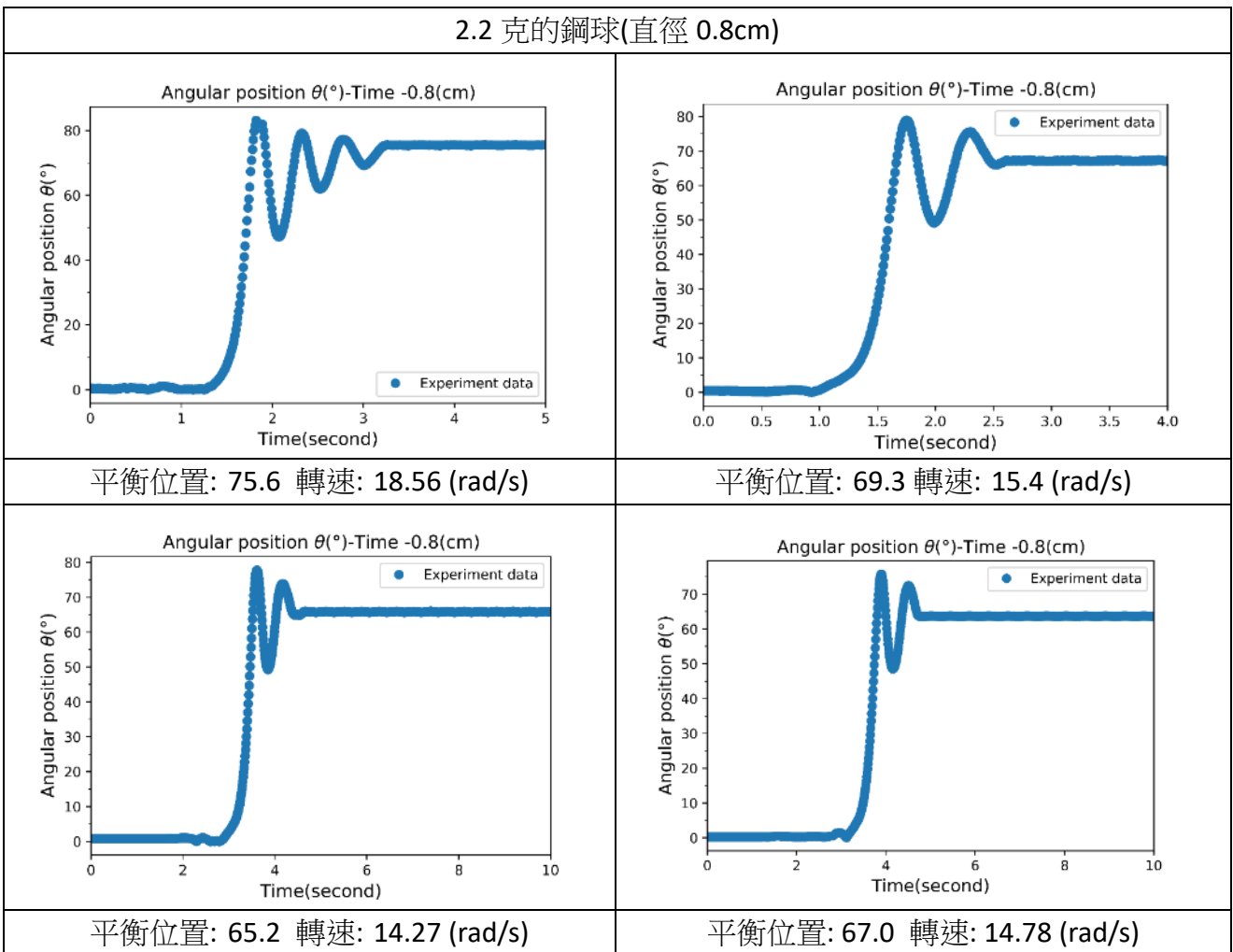
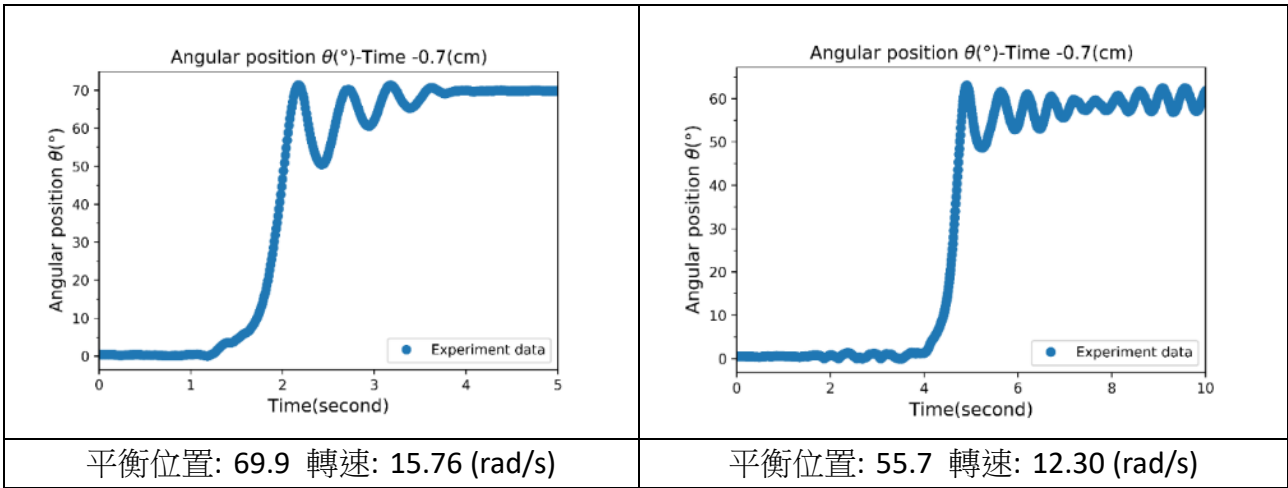
這樣的結果印證理論公式沒有質量的確實性,也讓鋼球位於環內靜態的平衡位置的結果更為完整

四、探討不同鋼球的質量對運動的影響

當瞭解完鋼球靜態的效果和基本的軌跡運動之後，還有沒有其他變因會影響鋼球的運動呢？根據觀察和推測，即便鋼球質量對於靜態的平衡位置並沒有影響，但卻會鋼球上升過程和第二階段震盪過程有影響。

此實驗使用三個質量的球((0.66 克, 1.1 克, 2.2 克)，並且才用與先前實驗一樣的步驟，而以下為結果





統計結果可以發現鋼球質量較輕時阻尼的效果似乎比質量大時還小，而透過對於第三階段的小幅度震盪頻分析運動方程式內的 b 之後，發現當質量越大時 b 也隨質量變大。

$$f = \sqrt{\frac{g}{2R} - \frac{b^2}{8m^2}}$$

| 三個質量鋼球 b 質的比較 | | |
|---------------|---------------------------------|----------------------------|
| | 平衡位置:73.4 轉速:17.30 (rad/s) | $b = 0.0035$ $f = 6.17$ |
| | 平衡位置: 73.2 轉速: 17.20 (rad/s) | $b = 0.006$ $f = 6.23$ |
| | 平衡位置: 75.6 轉速: 18.56 (rad/s) | $b = 0.015$ $f = 6.06$ |

而**b**質變大的原因，經過分析為球因密度一樣，質量造成體積的改變，體積愈大有效表面積就越大，所以質量越大阻力係數**b**質也就隨之變大(成正相關)

| 三個質量鋼球與 b 質的比較 | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 質量:0.6 克， 體積: 3.1×10^{-5} | 質量:1.1 克， 體積: 5.1×10^{-5} | 質量:2.2 克， 體積: 6.7×10^{-5} |
| $b : 0.0035$ | $b : 0.006$ | $b : 0.015$ |

而這樣的結果是否與模擬相同嗎？為了回答這個問題，接著必須討論模擬和實驗的吻合程度。

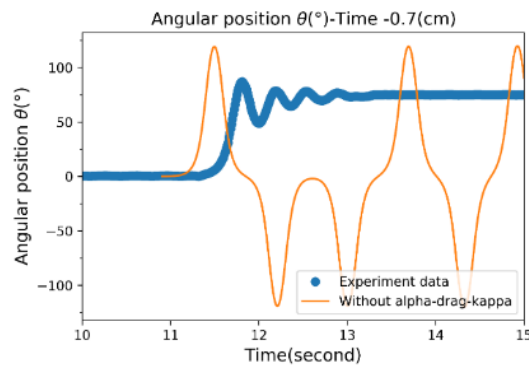
五、探討模擬和實驗吻合的效果

先前有提到模擬使用的環境是 python 的 Vpython package，然而並沒有對模擬公式提出一個詳盡的敘述，所以這章將做一個完整的敘述。

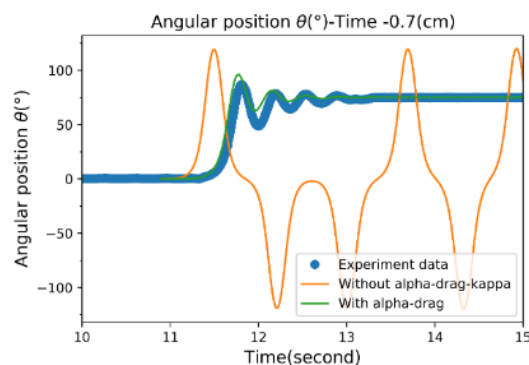
首先，透過先前理論的推導可以了解有兩個變數可以影響環的運動方程式，分別是阻力項和環的傾斜(β 和 α)，所以我們先對這兩項討論，諾沒有這兩項模擬寫出會是如何呢？先必須觀察諾沒有這兩項變因會對運動方程式造成甚麼影響，而經過簡化公式如下：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 \cos\theta \sin\theta + \frac{-g}{R} \sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) \theta = \frac{g}{R} \cos(\omega t) \cos\theta$$

將實驗與理論線做圖會如下圖：



然而可以明顯看到完美的量子模型(**particle mode**)是沒辦法符合現實世界的(先前在理論推導也有提到)，.所以加上兩項阻力項才會比較接近現實世界，結果如下：



加上兩項變因之後的確如假設更接近真實世界，然而可發現第二階段尾端依然有不符合的地方，這樣代表模擬或許依然有考慮不完全的地方，而在先前理論推導參考的論文(Lisandro A Raviola.(2017). Eur. J. Phys. 38 015005.)中有提及**轉動**的效果若考慮進去模擬的效果會更好，所以在繪圖之前必須重新推導運動方程式，經過推導後如下式：

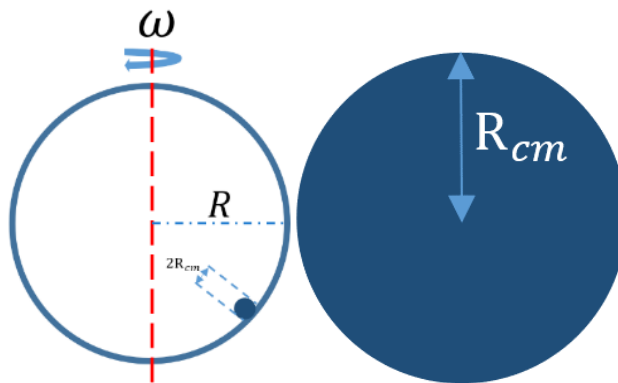
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \kappa \left(\omega^2 \cos\theta \sin\theta + \frac{g}{R_{cm}} \sin\alpha \cos(\omega t) \cos\theta + \frac{-g}{R_{cm}} \sin\theta \cos\alpha + \frac{-b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{-a}{m} \theta \right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \kappa \left[\frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R_{CM}} \cos\alpha - \omega^2 \cos\theta \right) \sin\theta \right] = \kappa \frac{g}{R_{CM}} \sin\alpha \cos(\omega t) \cos\theta$$

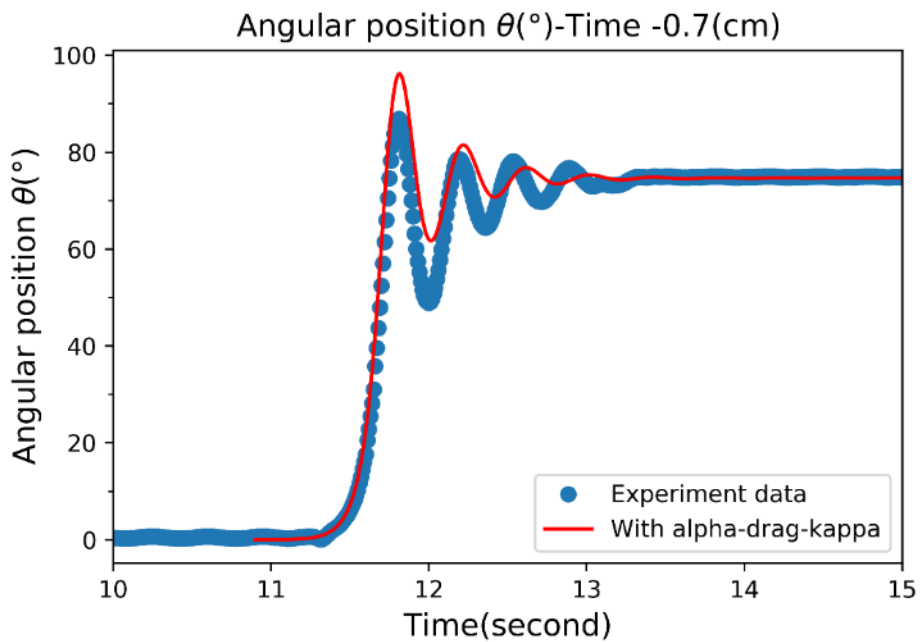
而其中的 κ (kappa) 定義如下:

$$\kappa = \left[1 + \gamma \frac{R^2}{R_{CM}^2} \left(\frac{R_{CM}}{r} + 1 \right)^2 \right]^{-1}$$

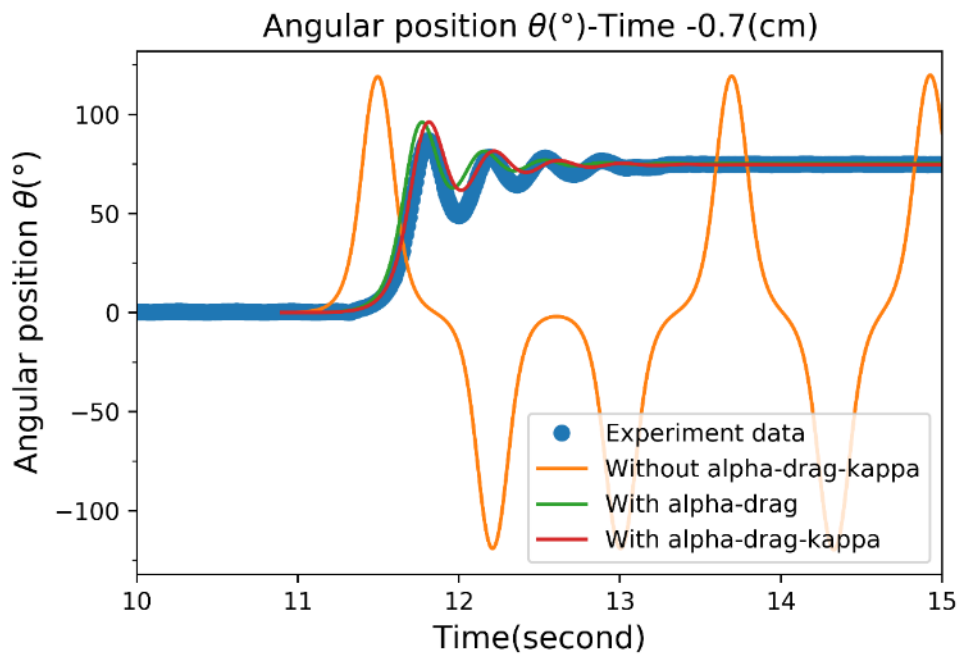
且其中的 γ 為鋼球的轉動慣量、 R_{CM} 為鋼球的半徑、且 $r = R - R_{CM}$ ，示意圖如下:



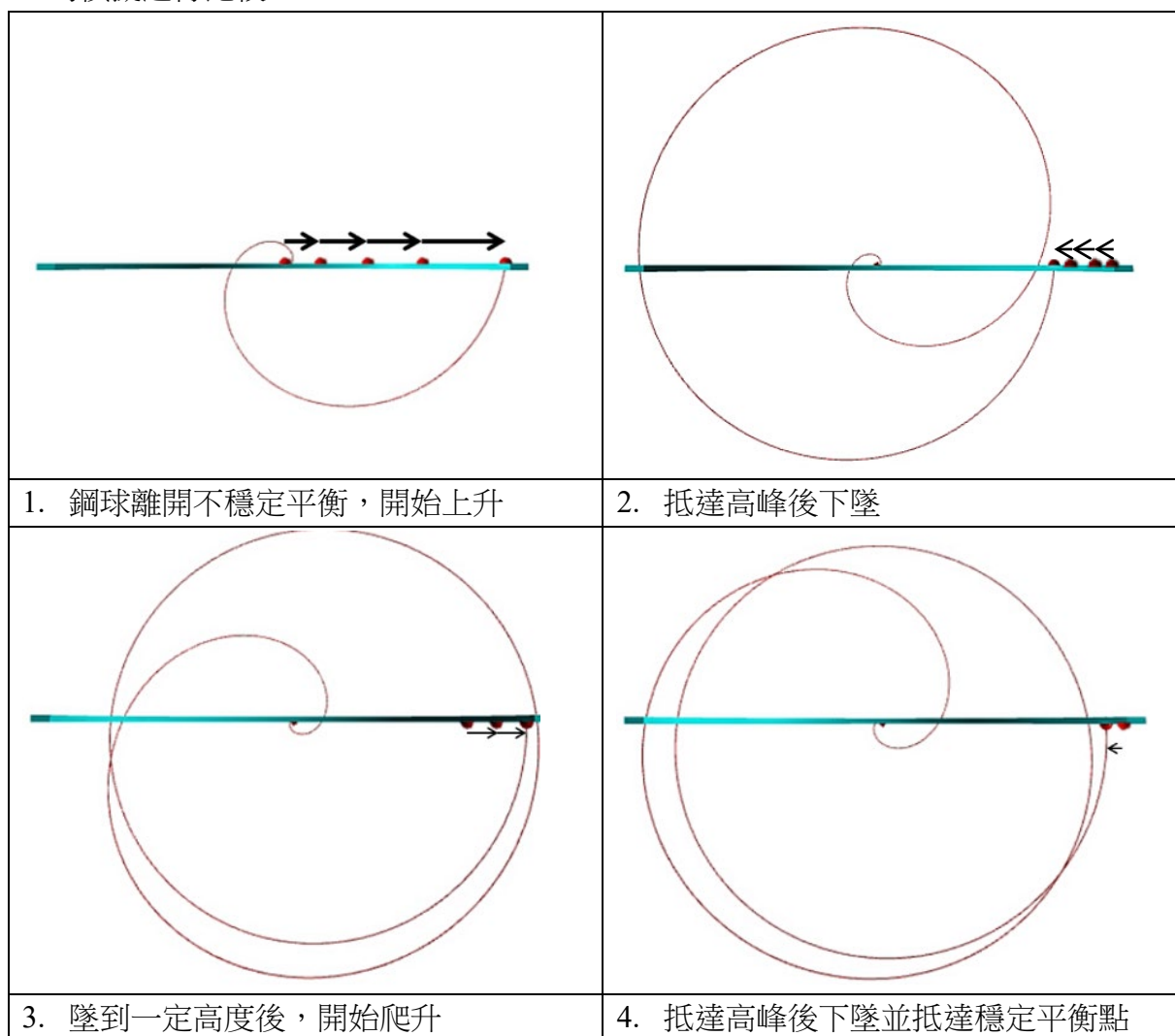
完整了解運動方程式之後重新繪製如下:



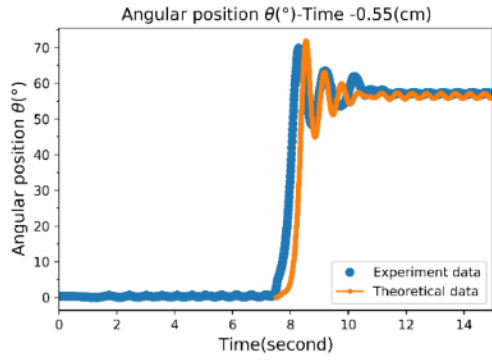
而比較三者更能發現其中的差別



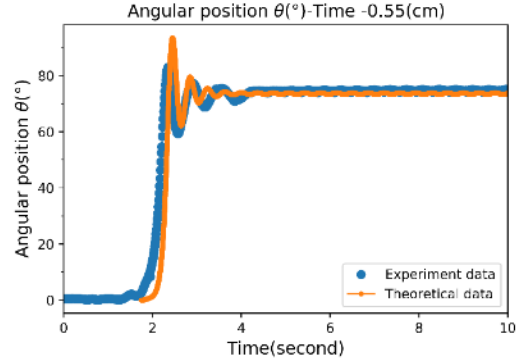
所以完整了解與真實世界較相符的模擬之後，就可將我們所有的實驗與 python 的模擬進行比較。



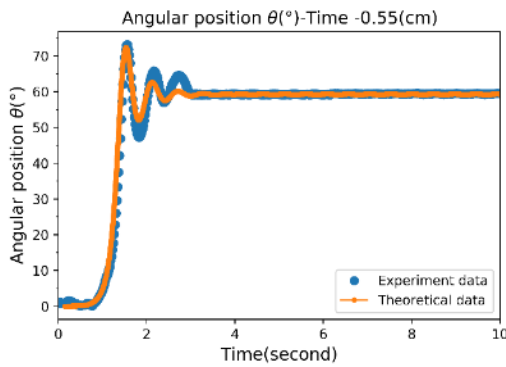
0.6 克的鋼球(直徑 0.55cm)



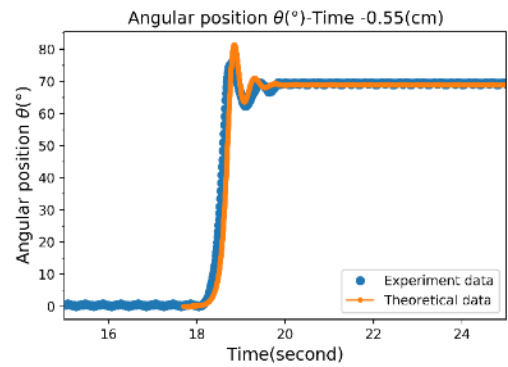
平衡位置:57.1 轉速:12.52 (rad/s)



平衡位置:73.4 轉速:17.30 (rad/s)

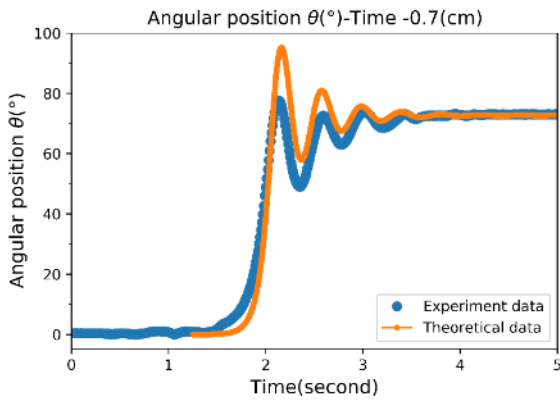


平衡位置:67.3 轉速:14.87 (rad/s)

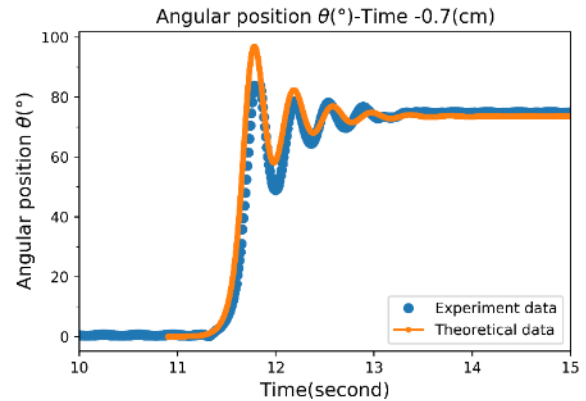


平衡位置:67.7 轉速:14.96 (rad/s)

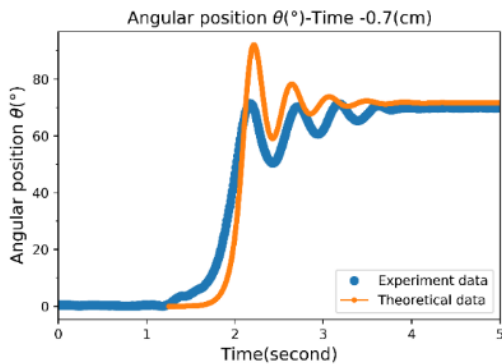
1.1 克的鋼球(直徑 0.6cm)



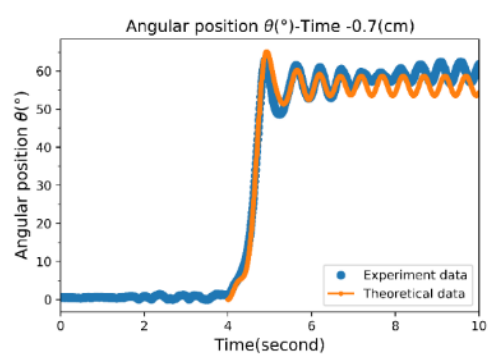
平衡位置: 73.7 轉速: 17.45 (rad/s)



平衡位置: 73.2 轉速: 17.20 (rad/s)

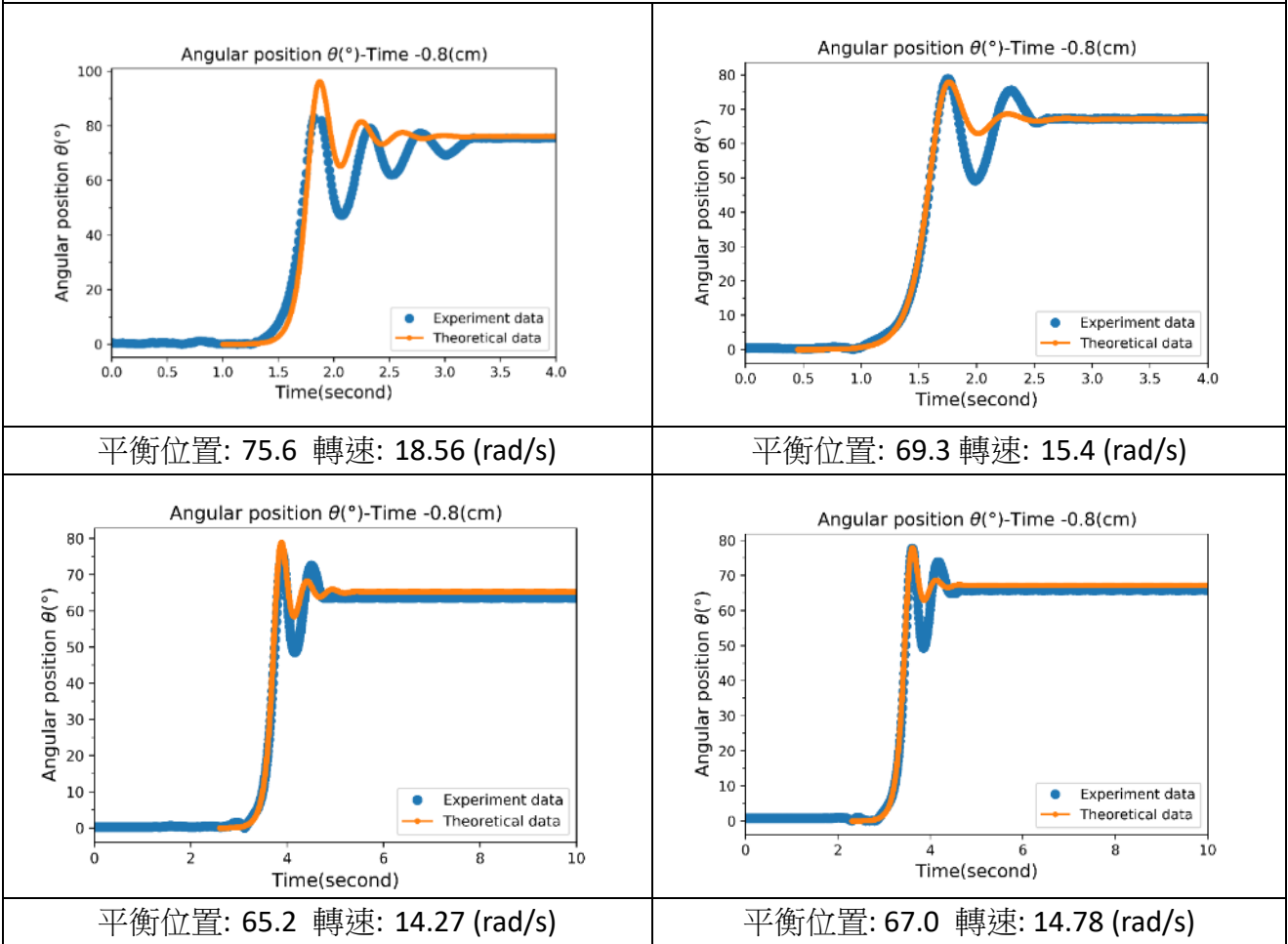


平衡位置: 69.9 轉速: 15.76 (rad/s)

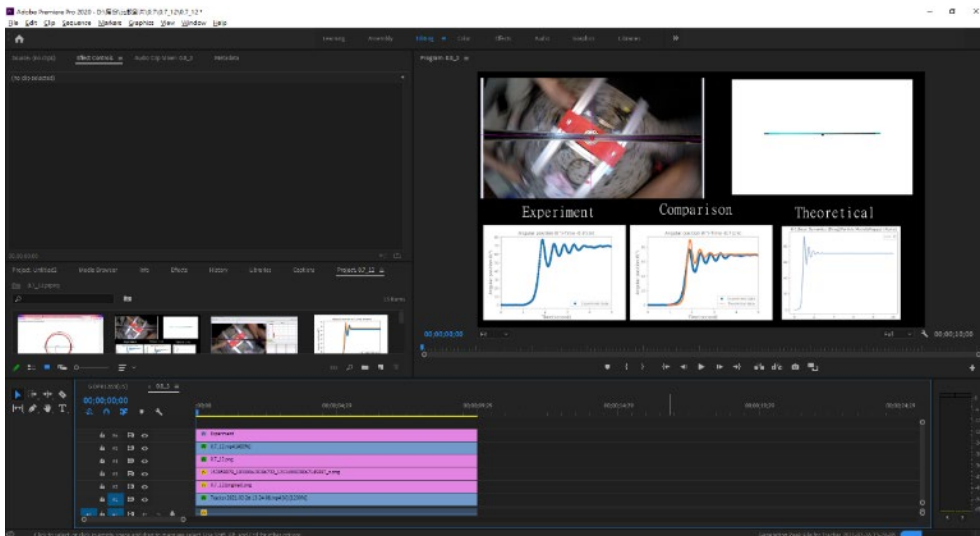


平衡位置: 55.7 轉速: 12.30 (rad/s)

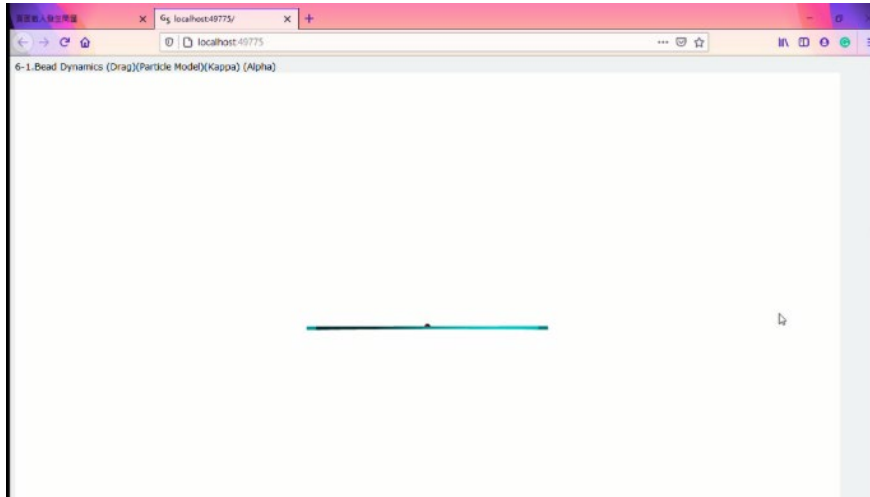
2.2 克的鋼球(直徑 0.8cm)



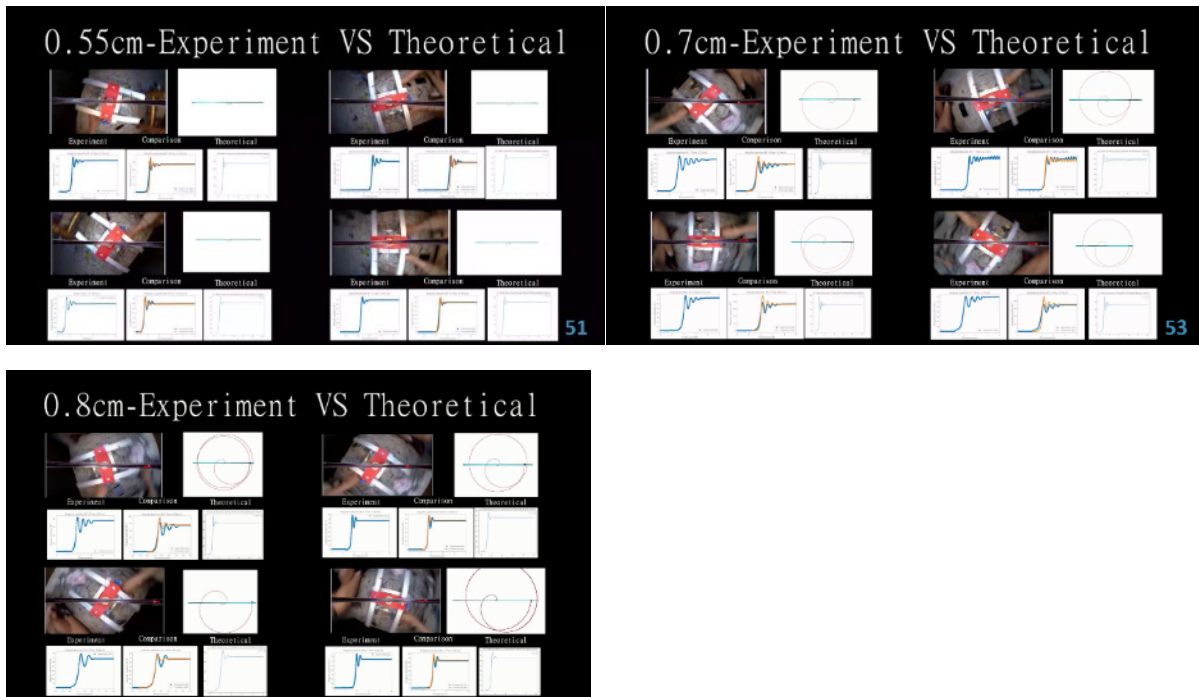
利用圖表比較實驗與理論似乎無法直觀的看到其中之差別，故本實驗將模擬之結果輸出成影片，放入 Pr 中與實驗影片直接比較。利用此方式可更加了解模擬與實驗之比較。



為了達到比較效果，在 Vpython 執行的過程的時需要使用螢幕錄影，如下圖：

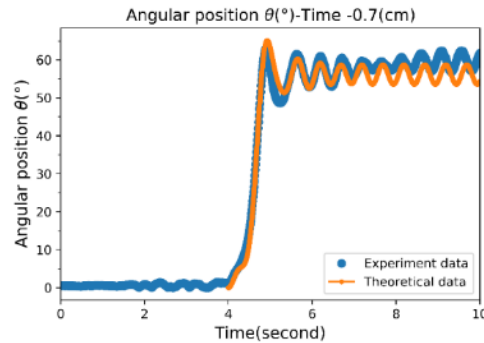


錄完後以下為結果：



六、探討環傾斜對鋼球運動的影響

先前的公式的理論推導有討論到，諾環有傾斜會對鋼球造成運動的影響(改變運動方程式)，然而沒有詳細的闡述，這章會將其補足。

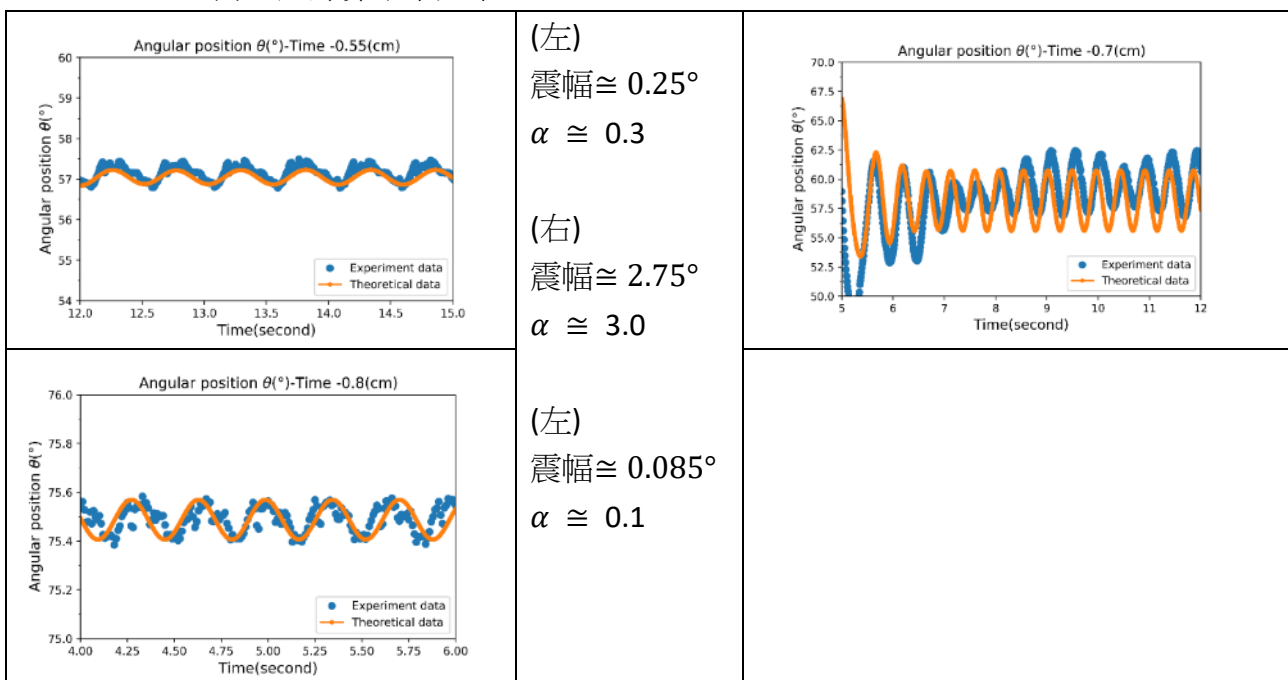


透過先前實驗的數據可以發現，某些特定狀態的第三階段，有震幅特別大的震盪而且沒有減少的效果，經過計算可發現**b**似乎不變，所以可能是**α**造成的影響，為了進行驗證，需要尋找不同狀況**α**對於震幅的影響。

先觀察先前推論的震幅公式，可以發現**α** 與震幅成正相關，所以須要在實驗中觀察震幅越大**α**越大的趨勢：

$$\text{amplitude} = \frac{\alpha g}{R \sqrt{\left(2\omega^2 - \frac{g}{R}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2}}$$

而經過計算結果如下：

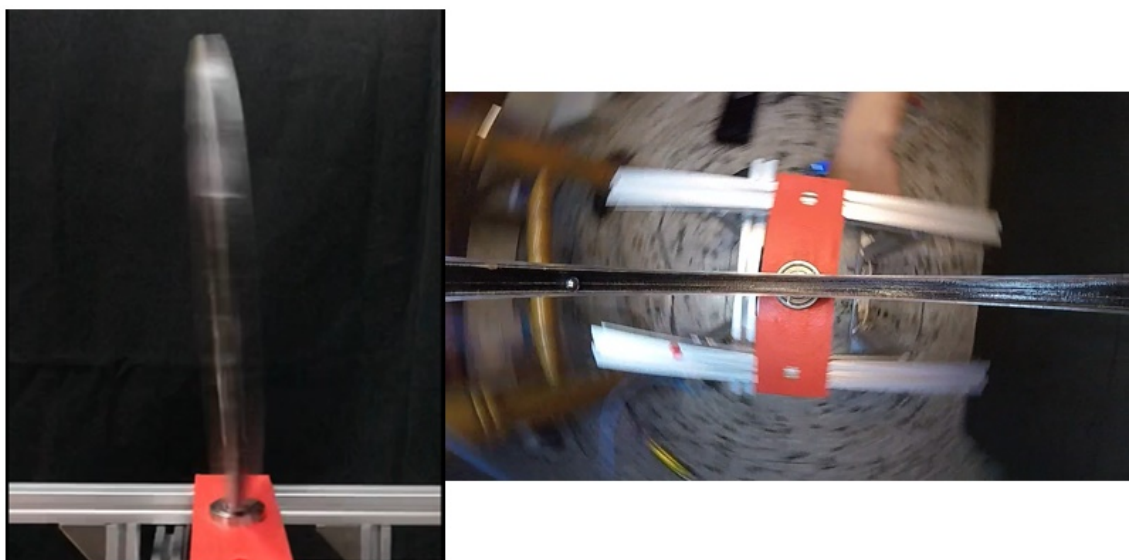


所以經過計算和觀察發現，當環傾斜越大，第三階段的震盪就越大，這就與先前假設相同，然而上述三張圖也可發現傾斜似乎跟鋼球的質量還是環的轉速沒有關係，而這似乎合理，因為在實驗中並沒有特定改變環當作操縱變因(況且也幾乎不可能自造完全垂直平面的環)，只是透過先前發現環傾斜有特殊現象，在從實驗數據中去做證實，進而再次論證了理論模型的可信性。

陸、 討論

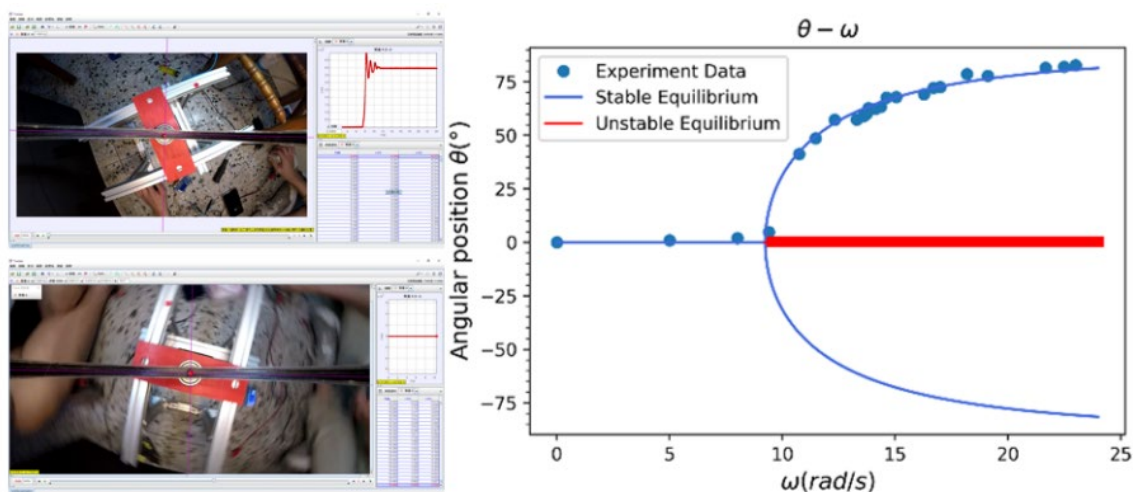
一、攝影機架設

將手機垂直架設在圓環外將導致數據必須再經過複雜之修正、運算，才能求得鋼球位於環內之數據，加上此設計將會導致幾個影格將被圓環本身遮擋(如下圖左)。故架設經修正後，將攝影機(GoPro)架設於圓環內(如下圖右)，確保能準確得到每個時間點鋼球位於圓環內之位置。



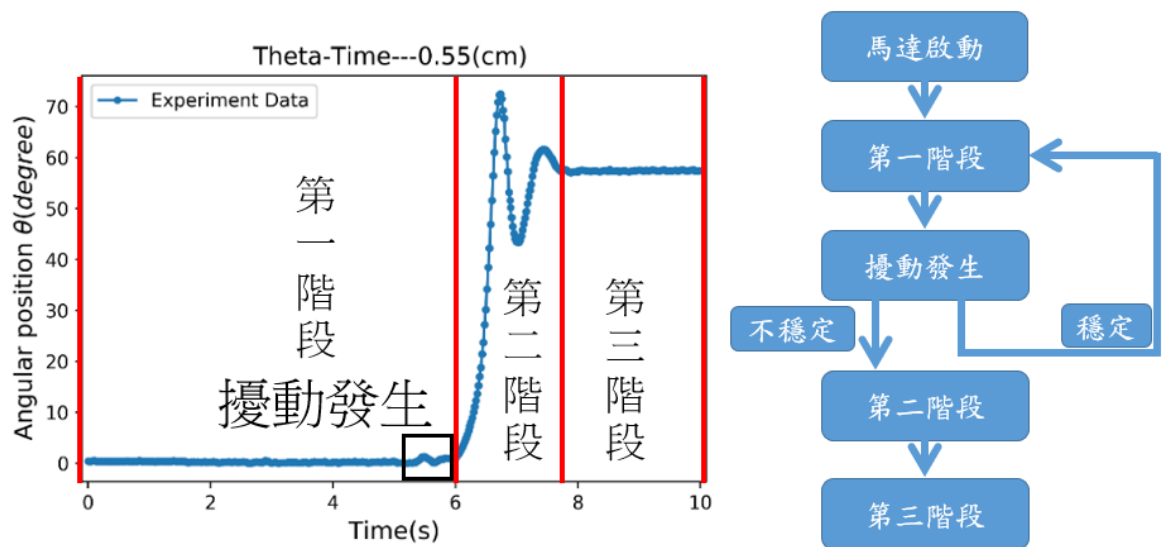
二、高轉速與低轉速

在前面提到使用錐動擺可求出轉速對位置角度的關係公式，而透過實驗也驗證公式的正確性，接著可以利用**分岔圖**來表示這個關係，並且發現低轉速與高轉速有差異極大的現象，進而在最後發現有穩定平衡與不穩定平衡的差別。而低轉速中，平衡位置位於最低處時為穩定平衡；但若高轉速時，且小球還在低處的話，那就會是不穩定平衡，可用藍線與紅線作為區別，所以一個轉速也可以有兩個相對位置角度(穩定和不穩定)，但相對的穩定平衡點在本實驗中只有一個(取絕對值)。



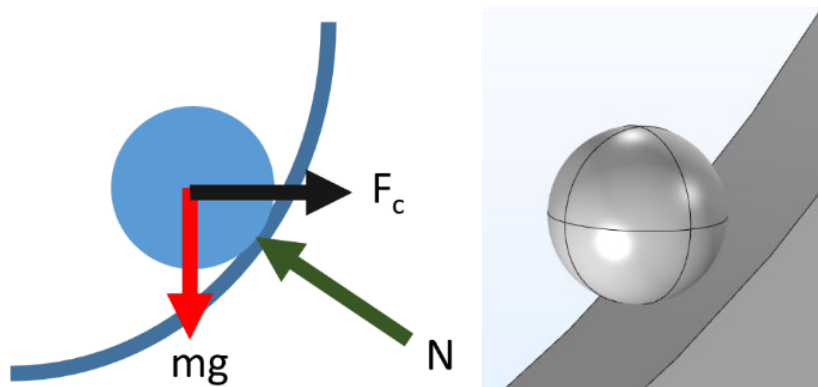
三、穩定與不穩定平衡

由理論關於穩定與不穩定之部分可得知，鋼球在低轉速的圓環上時，即使受到擾動並離開原點，鋼球也會在一段時間後回到原點，即原點為此顆鋼球之穩定平衡點。相反的，當鋼球處於高轉速的圓環上，原點反而變成此顆鋼球之不穩定平衡點，意味著若鋼球受到擾動，鋼球便會離開此點，並且經過一系列之運動到達穩定平衡點，但在本實驗中也發現，有時鋼球受到擾動也不會離開此點，甚至需要人為給的強制擾動鋼球才會離開此點，可得知擾動大小也是不穩定和穩定平衡的關鍵。而由此可推知，鋼球處於第一階段之時間和擾動發生之時間，大小有關聯。(以下討論將建立在圓環處於高轉速時鋼球之運動)



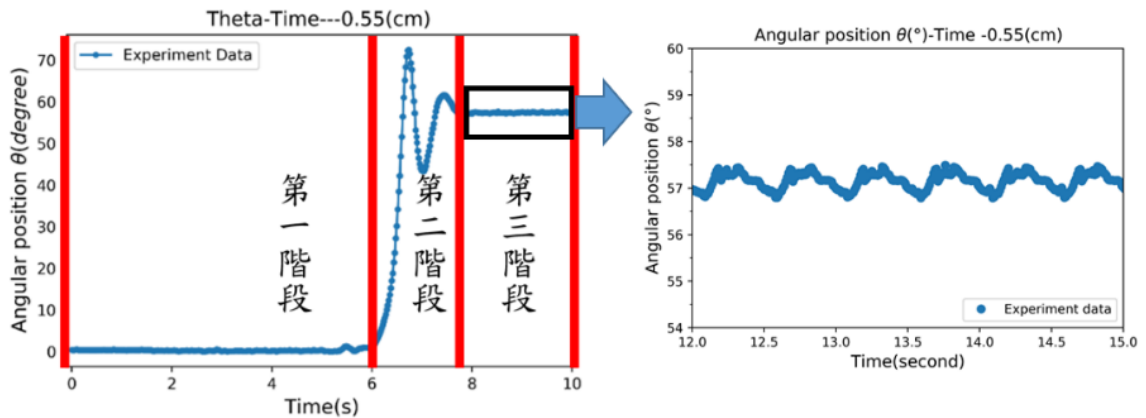
四、第二階段上下震盪之原因

由實驗中可得知，當球發生擾動後，球離開原點，並因為正向力分力與重力分力未達平衡導致鋼球產生 $\ddot{\theta}$ ，但同時又因理論提到的阻尼震盪(也就是拉格朗日方程中的阻力 $F = -bv$)，導致震幅隨著時間逐漸降低，進而使鋼球趨向於穩定。



五、第三階段小幅度震盪之原因

在起初未加入裝置傾斜角度時，鋼球並不會做小幅度震盪，但當參考論文並加入裝置傾斜的修正後，發現鋼球確實會在平衡點附近做小幅度震盪。



並且可由拉格朗日方程推出此小幅度震盪之頻率、震幅等等。

六、質量對於鋼球之影響

由錐動擺之公式可得鋼球之平衡位置不受鋼球重量影響，而本實驗方法為同時將不同重量之鋼球放置於圓環內，可以發現重量確實不影響平衡點。

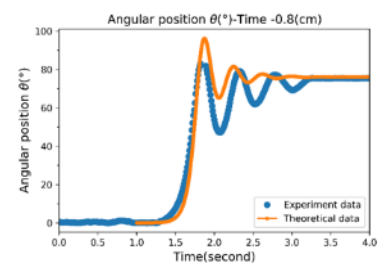
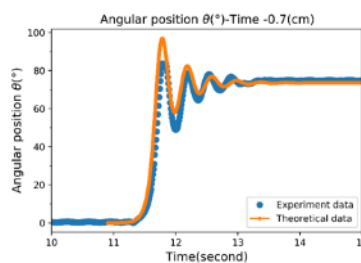
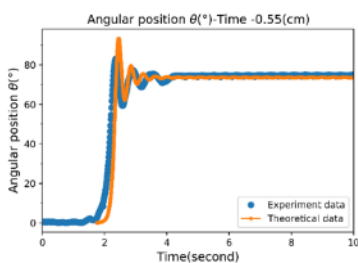


但當檢視鋼球之運動過程時，可發現不同質量之鋼球會導致鋼球之阻力改變，經過計算，便可發現鋼球質量與阻力係數 b (阻力項: $F = -bv$) 成正相關。

$b = 0.0035$

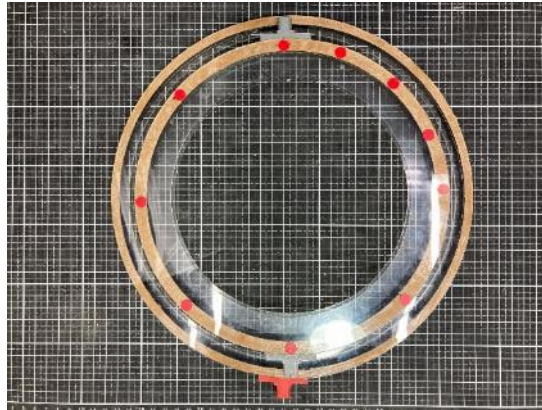
$b = 0.006$

$b = 0.015$



柒、 未來展望

未來將會繼續深入探討球的動態過程，並進行更進一步分析，並加入不同圓環半徑、裝置傾斜角度或改變軌道材質、形狀等變因，探討這些變因對球的平衡位置、動態過程產生之影響並與理論、模擬進行比較。



捌、 結論

- 一、一個轉速對應一個穩定平衡的相對位置角度
- 二、質量對鋼球的靜態平衡位置沒有影響
- 三、鋼球在圓環上的運動大致分成三個階段
- 四、可以使用數學方法校正攝影角度誤差
- 五、擾動為鋼球離開不穩定平衡的關鍵
- 六、阻力跟圓環傾斜角度對於鋼球在真實世界中的運動影響極大
- 七、質量變大阻力係數變大
- 八、圓環傾斜角度和轉速與鋼球質量無關
- 九、物理模擬與真實的軌跡相符
- 十、若考慮轉動造成的效果，模擬會更準確

玖、 參考資料及其他

- 一、Lisandro A Raviola, Maximiliano E Véliz, Horacio D Salomone, Néstor A Olivieri and Eduardo E Rodríguez. (2017) The bead on a rotating hoop revisited: an unexpected resonance. Eur. J. Phys. 38 015005.
- 二、Cross R. (2016) Coulomb's law for rolling friction Am. J. Phys. 84 221
- 三、Ochoa F and Clavijo J. (2006) Bead, hoop and spring as a classical spontaneous symmetry breaking problem Eur. J. Phys. 27 1277

【評語】 051808

本作品探討一個自轉環上鋼球的運動，特別是金屬球的平衡位置以及各平衡位置之躍遷以及震盪運動。這是一個常見的實驗問題，本作品的分析是蠻標準的，但加上了鋼球的大小、阻力及環傾斜的影響以及對稱性破壞類比的分析，因為這是一個已知的問題，結果與可能的變因都是知道的，因此實驗並沒有太多的新意與不同的發現，是一個深度有限的實驗。不過本作品分析工作詳實，實驗設計良善，堪稱佳作。

作品簡報

2021 全國科展



還有轉環的餘地 探討鋼球位於自轉圓環上之運動

物理與天文學科



實驗簡介



圓環

改進實驗裝置

鋁架

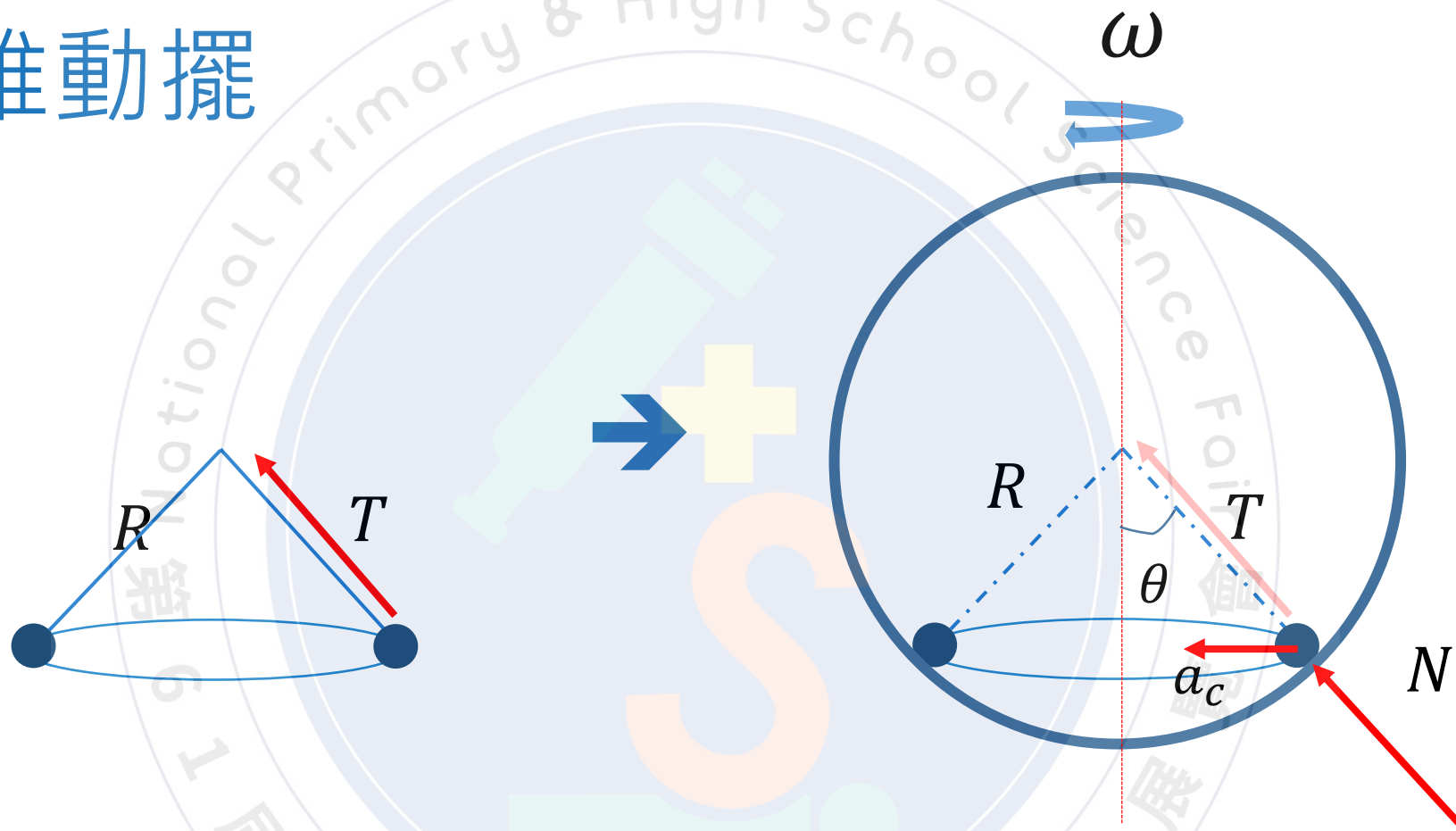
可變電阻



鋁架加強固定

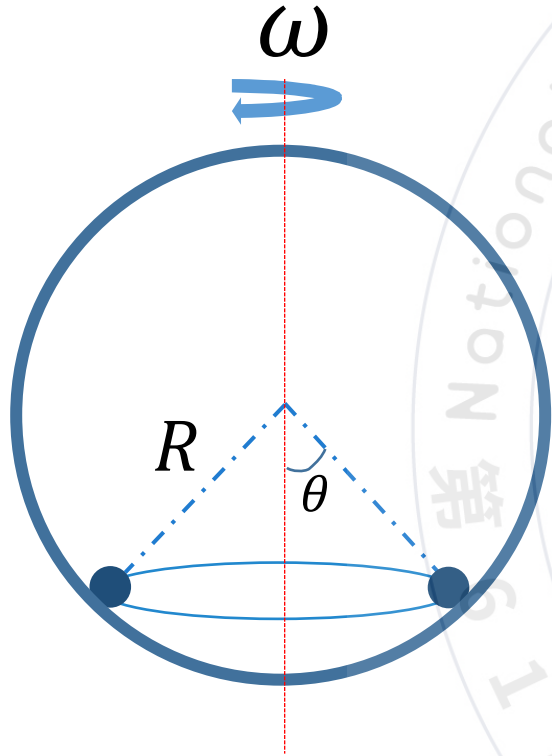
黑幕防止反光

理論 — 錐動擺



$$\begin{cases} X = N \sin \theta = m a_c \\ Y = N \cos \theta = m g \end{cases} \longrightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{g}{R \omega^2} \right)$$

理論 – 尤拉拉格朗日運動方程



Kinetic energy: $T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \omega^2)$

Potential energy: $V = -mgR \cos \theta$

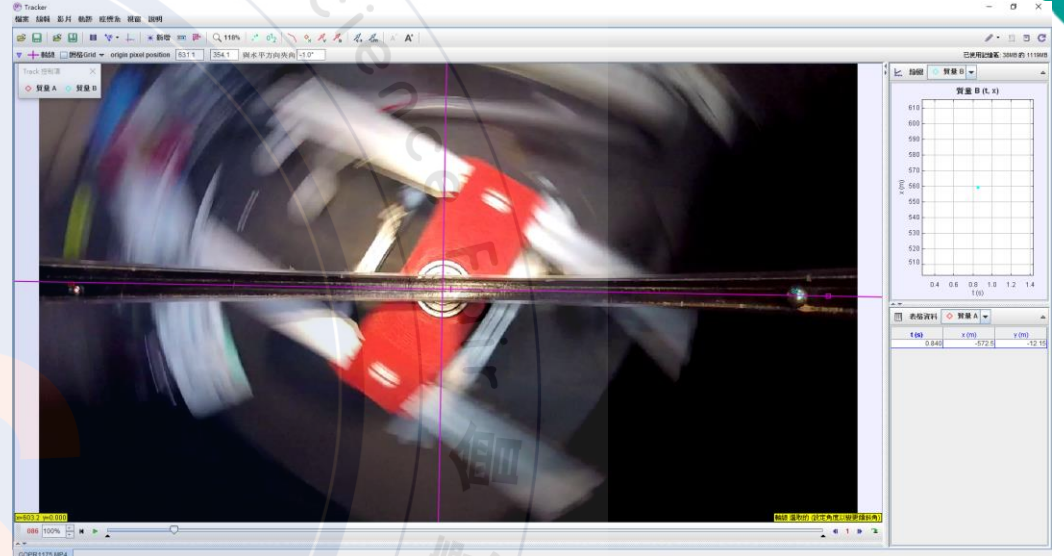
Drag force: $\vec{F} = -b\vec{v}$

$$\mathcal{L} = T - V \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0$$

質量 平衡點



分
析



環內放入**質量不同**的兩顆鋼球(0.66g, 1.1g)

| 表格資料 | | | 質量 A | | |
|-------|--------|--------|-------|-------|--------|
| t (s) | x (m) | y (m) | t (s) | x (m) | y (m) |
| 0.840 | -572.5 | -12.15 | 0.850 | 571.9 | -1.419 |

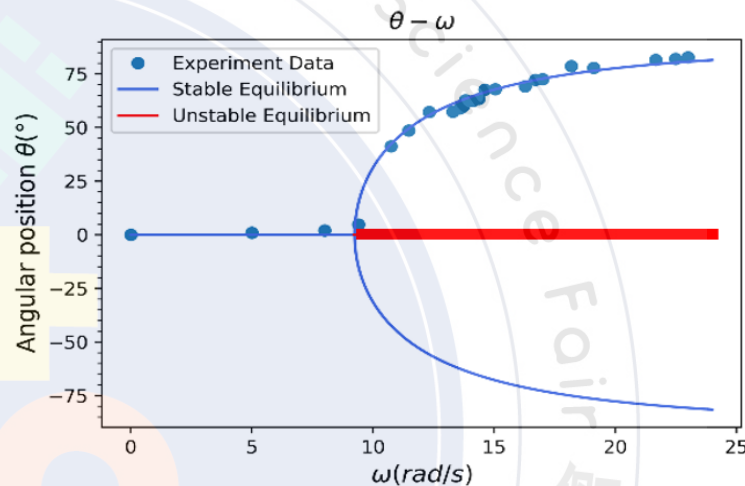
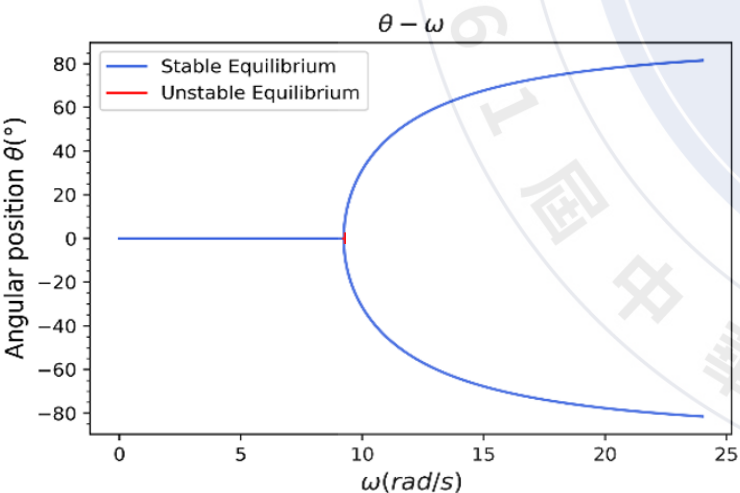
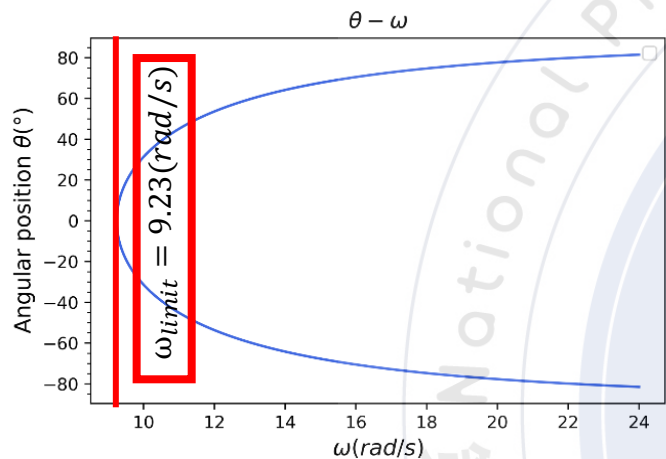
$X = 571.9 \rightarrow \theta = 78.22^\circ$

$X = -572.5 \rightarrow \theta = 78.28^\circ$

轉速 平衡點

錐動擺公式推得

↓
鋼球初始位置為原點

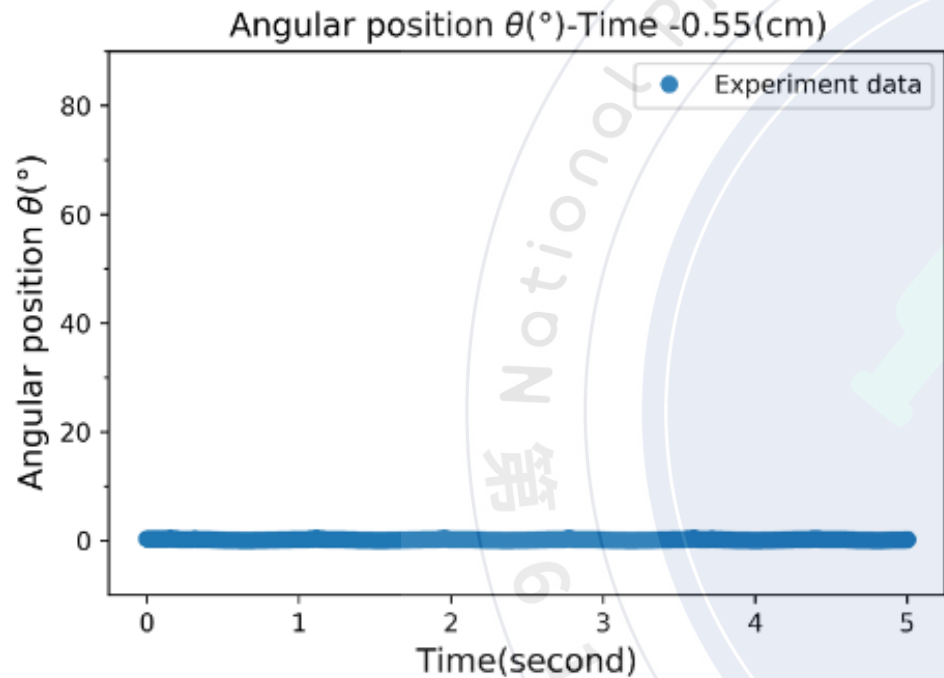


實驗結果

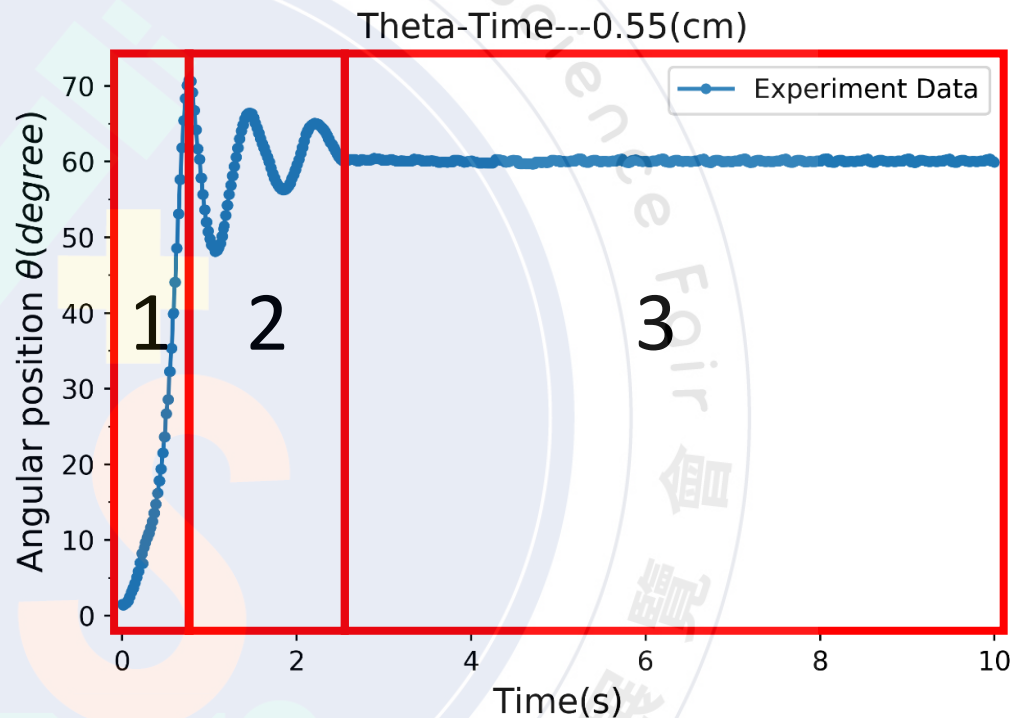
↑
加入不穩定平衡(紅線)

軌跡三部分

低轉速



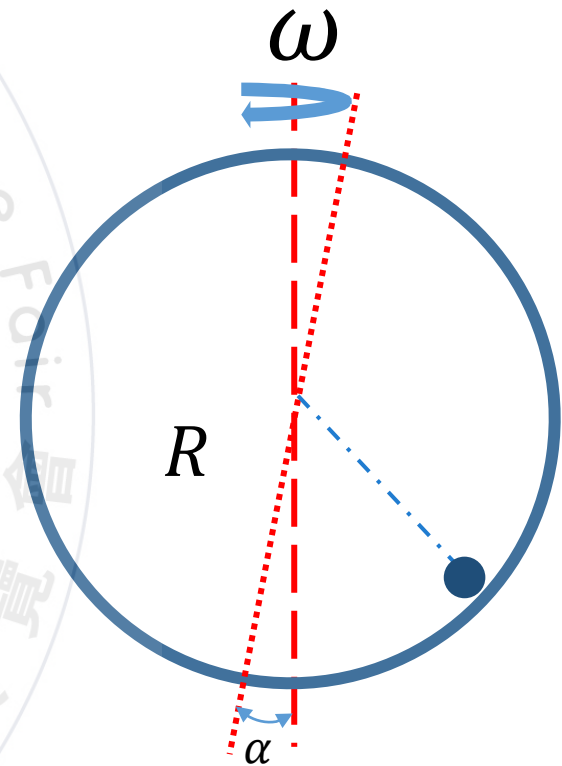
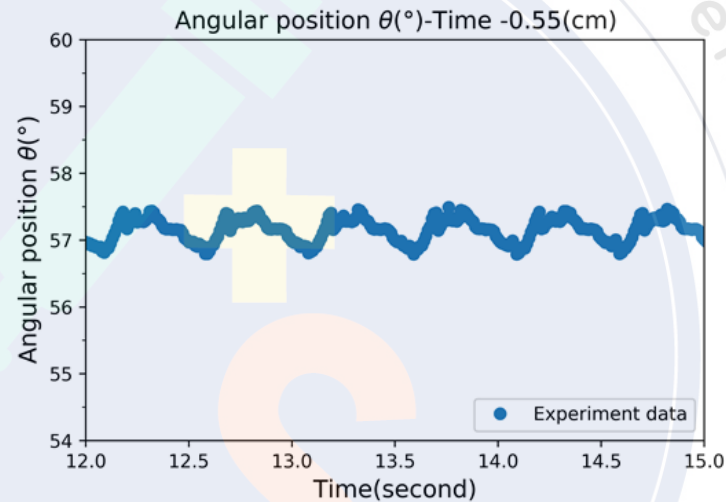
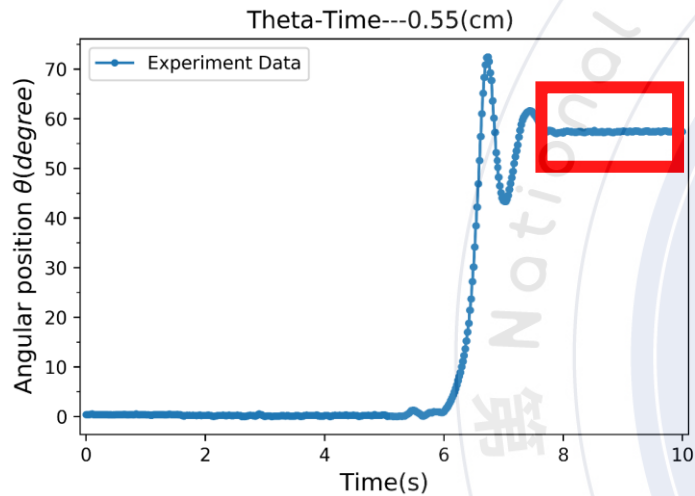
持續待在原點



高轉速

- Status 1. 上升階段
- Status 2. 震盪階段
- Status 3. 穩定階段

小幅度震盪



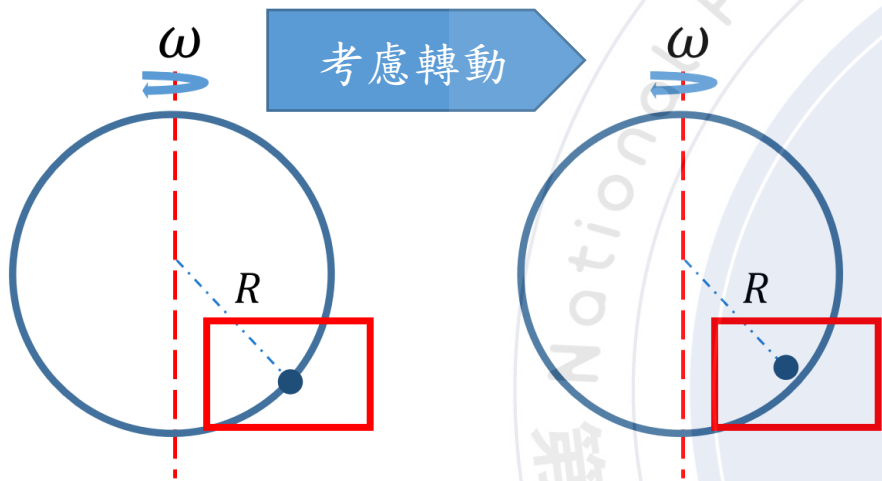
--- 原轉軸
 修正後轉軸

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) \theta = \frac{g}{R} \alpha \cos(\omega t) \cos \theta$$

$$f = \sqrt{\frac{g}{2R} - \frac{b^2}{8m^2}}$$

$$AMP = \frac{\alpha g}{R \sqrt{\left(2\omega^2 - \frac{g}{R} \right)^2 + \left(\frac{b}{m} \right)^2 \omega^2}}$$

Kappa修正 & 模擬架設



Particle mode:

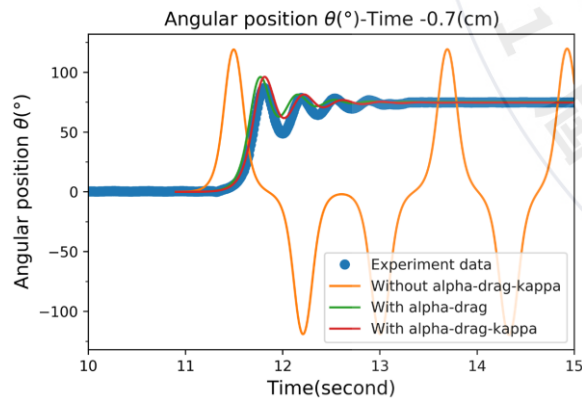
$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\theta\right) \sin\theta = 0$$

Drag+Alpha:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \cos\theta \sin\theta + \frac{g}{R} \sin\alpha \cos(\omega t) \cos\theta + \frac{-g}{R} \sin\theta \cos\alpha + \frac{-b}{m} \frac{d\theta}{dt}$$

Kappa+Drag+Alpha:

$$\ddot{\theta} = \kappa \left(\omega^2 \cos\theta \sin\theta + \frac{g}{R_{cm}} \sin\alpha \cos(\omega t) \cos\theta + \frac{-g}{R_{cm}} \sin\theta \cos\alpha + \frac{-b}{m} \frac{d\theta}{dt} \right)$$



```

from vpython import *
from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
def Bead_Dynamics(t, y, m, r, R0, RCM, Kappa, Omega, alpha, B, g):
    dtheta, thetabar = y
    return (Kappa*(Omega**2*cos(theta)*sin(theta)+(g/RCM)*alpha*cos(Omega*t)*cos(theta)+(-g/RCM)*sin(theta)+(-B/m)*dtheta), dtheta)
t = np.linspace(T0, Tf, 1000)
sol = solve_ivp(Bead_Dynamics, t_span=[T0, Tf], y0=[dtheta, thetabar], method='RK45', t_eval=t, args=(m, r, R0, RCM, Kappa, Omega, alpha, B, g), dense_output=True)

# Parameters
m = 0.002
r = 0.004
Tf = 15
dt = 0.0001
alpha = radians(0.1) # deg
dtheta = 0
alpha_radians = 0.1 # rad
R0 = 0.068092
R = 0.015
g = 9.8
# alpha = 1.1
# Ring
FPS = 2.148686742

# Simulation
def Bead_Dynamics(t, y, m, r, R0, RCM, Kappa, Omega, alpha, B, g):
    dtheta, thetabar = y
    return (Kappa*(Omega**2*cos(theta)*sin(theta)+(g/RCM)*alpha*cos(Omega*t)*cos(theta)+(-g/RCM)*sin(theta)+(-B/m)*dtheta), dtheta)
t = np.linspace(T0, Tf, 1000)
sol = solve_ivp(Bead_Dynamics, t_span=[T0, Tf], y0=[dtheta, thetabar], method='RK45', t_eval=t, args=(m, r, R0, RCM, Kappa, Omega, alpha, B, g), dense_output=True)

# Plotting
for now in t:
    theta = sol.sol(now)[1]
    dtheta = sol.sol(now)[0]
    # File
    file.write(str(now) + " " + str(theta*57.3) + " " + str(dtheta) + " " + str(Ball.pos.x) + " " + str(Ball.pos.y) + " " + str(Ball.pos.z) + "\n")
    rate(10)
    # Refresh graph
    Ball1theta.plot(pos = (now, theta))
    Ball1dtheta.plot(pos = (now, dtheta))
    Ring.rotate(angle=Omega*dt, axis=vec(0,1,0))
    Ball1.pos = vec(R0*sin(theta)*cos(Omega+Omega*now), -R0*cos(theta), -R0*sin(theta)*sin(Omega+Omega*now))
    scene.camera.axis = vec(-L*sin(Omega+Omega*now)/6, -3*L, -L*cos(Omega+Omega*now)/6)
    
```

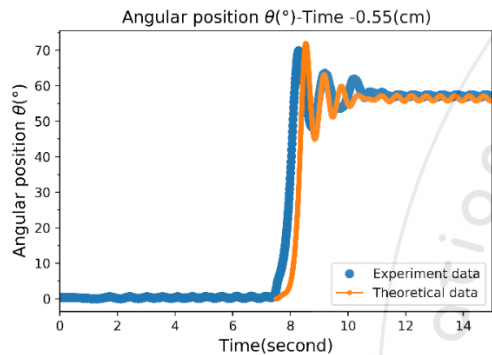
帶入運動方程式

計算數值解答案

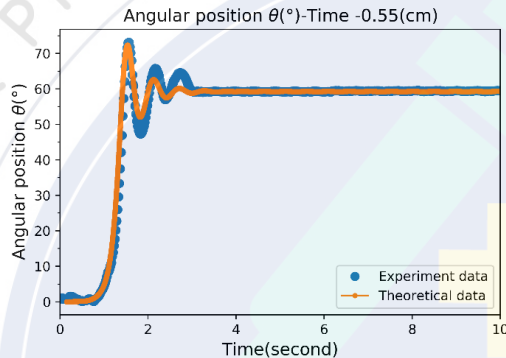
實驗結果

平衡位置(度)/轉速(rad/s)

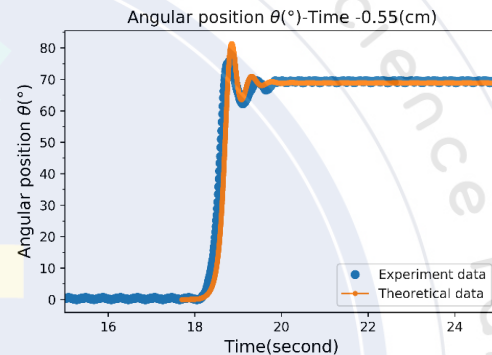
0.6克鋼球



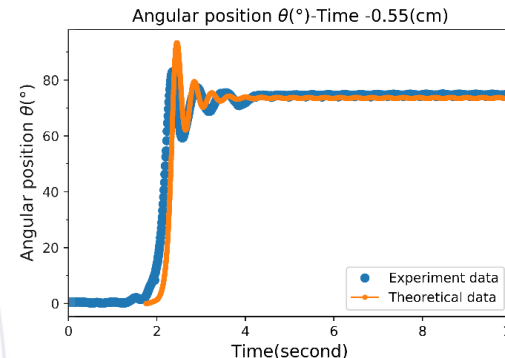
57.1/12.52



67.3/14.87

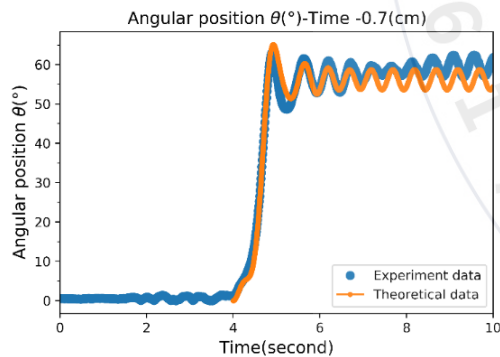


67.7/14.96

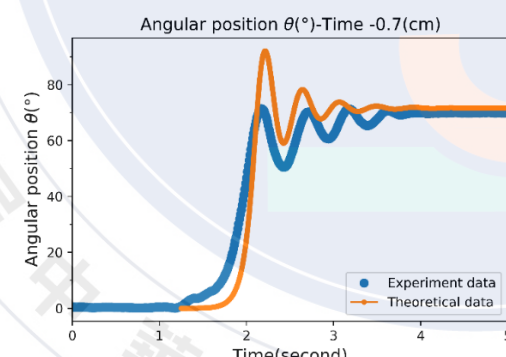


73.4/17.30

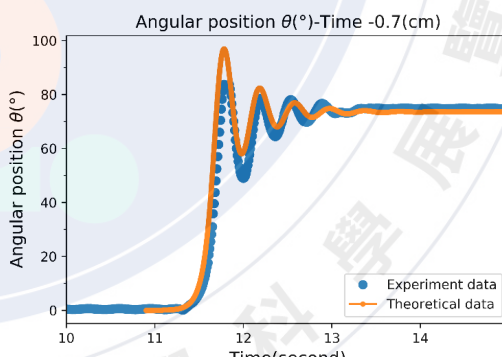
1.1克鋼球



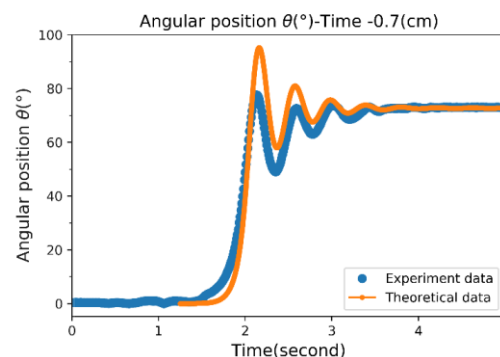
55.7/12.30



69.9/15.76



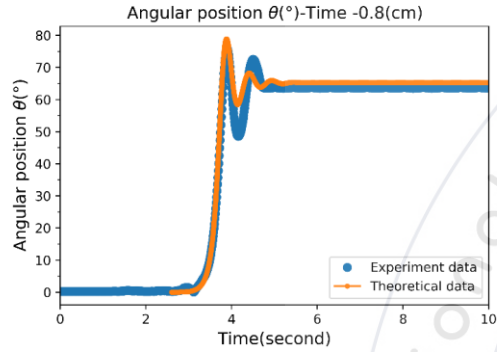
73.2/17.20



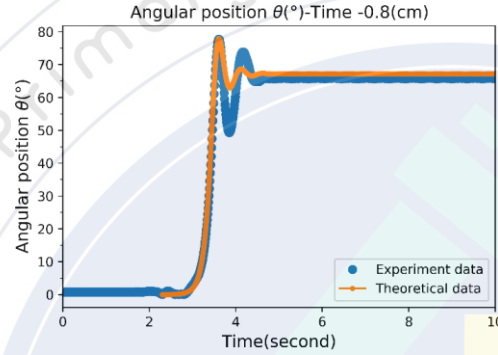
73.7/17.45

平衡位置(度)/轉速(rad/s)

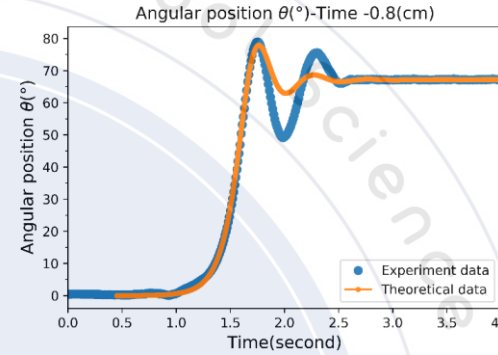
2.2克鋼球



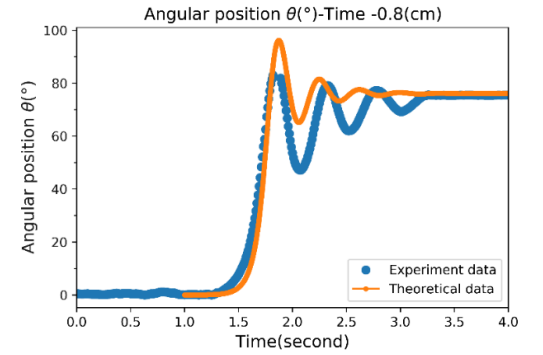
65.2/14.27



67.0/14.78



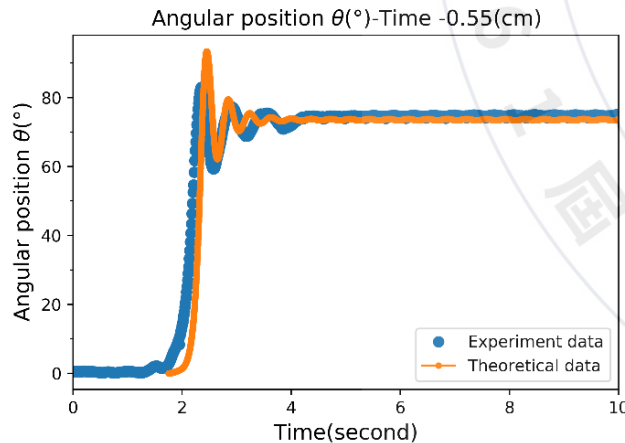
69.3/15.4



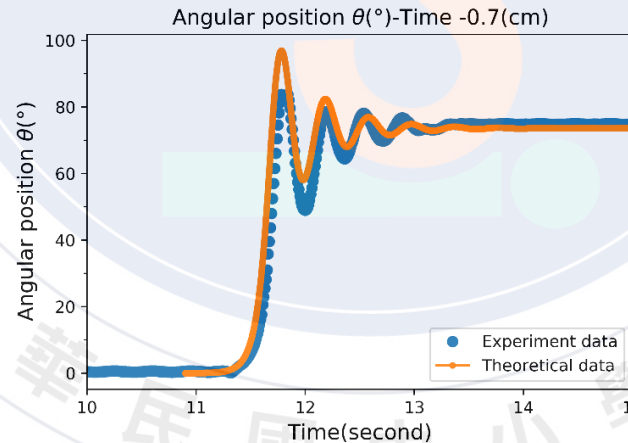
75.6/18.56

阻力係數比較

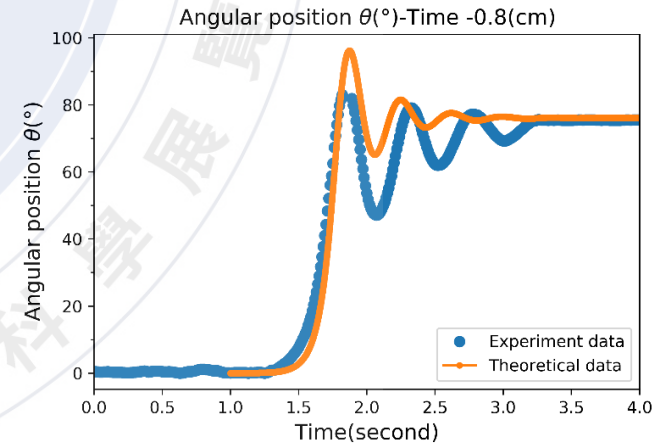
阻力係數與鋼球質量呈正相關



$b = 0.0035$



$b = 0.006$

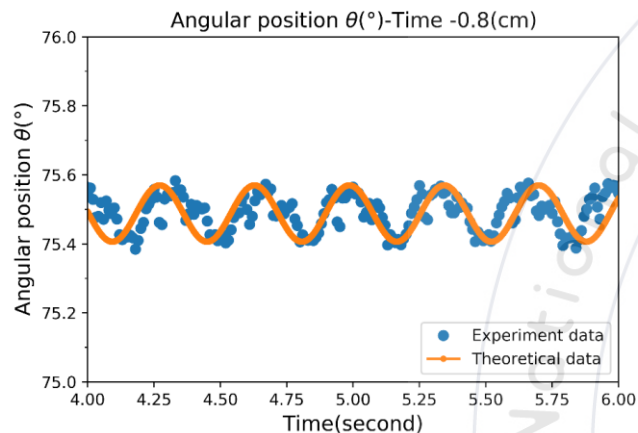


$b = 0.015$

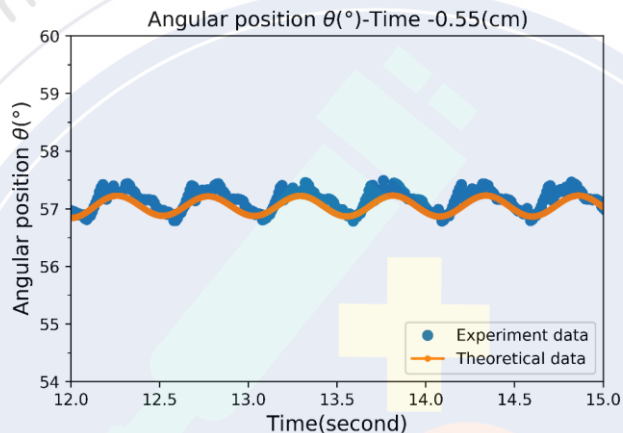
Alpha 角比較

Alpha 角與鋼球質量無相關

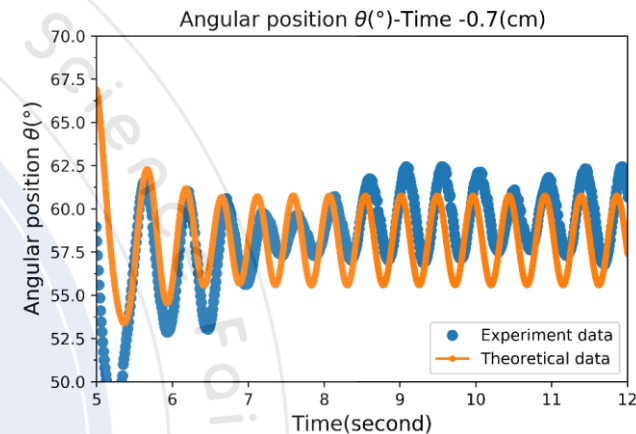
$$\alpha \cong 0.1$$



$$\alpha \cong 0.3$$



$$\alpha \cong 3.0$$



結論

低轉速時，鋼球位於低處時為**穩定平衡**。高轉速時，鋼球位於低處時為**不穩定平衡**。

發現並且加入**裝置傾斜的修正**後，發現鋼球將會在平衡點附近進行**小幅度震盪**。

將鋼球放置於圓環內，可以發現**重量不影響平衡點**。

鋼球處於第一階段之時間和**擾動發生之時間與大小有關聯**。

經過計算，便可發現**鋼球質量與阻力係數b成正相關**。