

# 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

051806

液滴在垂直振動液面上的交互作用

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者： 高二 鄭可煒	指導老師： 林元祥
---------------	--------------

關鍵詞：液滴、表面波、振動

## 摘要

當液滴滴落在一個靜止的液面上時，其可能會直接化入液面中，或是在液面上維持形狀過了一小段時間後才塌陷化入油面，然而，若令液面持續的垂直振動則可以使在液面上的液滴維持跳動很長一段時間(圖 1)，在穩定情況下甚至可以維持數小時。而這些液滴之間的交互作用模式更為有趣，包括相互吸引(圖 2)、排斥，甚至是更特別的自我推進(圖 3)等。本研究使用矽油做為液體，專注於兩顆矽油滴之間的平衡距離，找出它們的成因與了解相關變因對現象造成的影響。



圖 1

液滴被液面抬升後在液面留下表面波

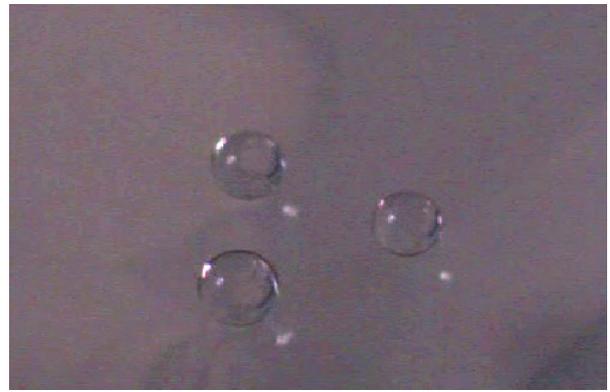


圖 2

三顆液滴互相吸引後停留在平衡距離



圖 3a



圖 3b

兩顆液滴互相吸引後朝液滴中心連線方向自我推進 (時序由 a 至 b)

## 壹、研究動機

記得小時候在 Discovery 頻道上看到有人將油滴滴於垂直振動的油面上，油滴竟會維持在液面上規則的跳動或者是移動，這個特殊且優雅的現象引起我極大的興趣，在實際觀察現象後發現這些液滴的距離似乎會隨著振動頻率和加速度改變，故想進行更深入的探究，找出其規律與參數的關係，並嘗試控制它們的分離距離。

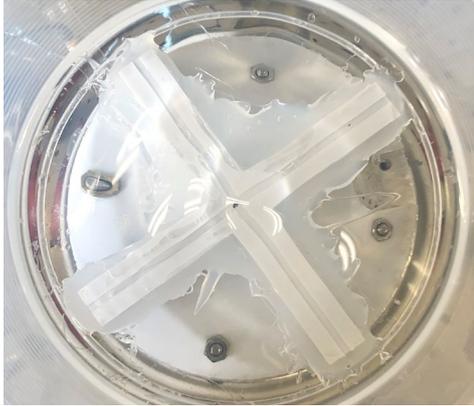
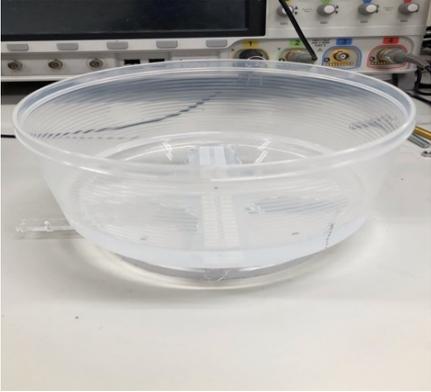
## 貳、研究目的

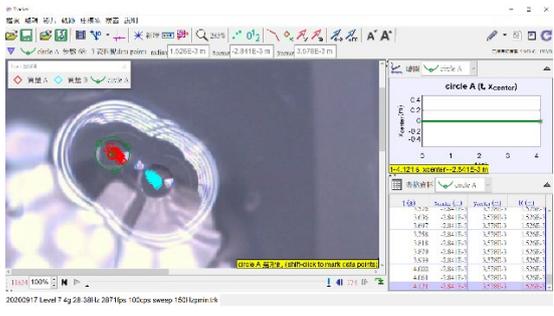
- 一、觀察並探討使油滴之間產生平衡距離的方式，並以模型解釋成因。
- 二、觀察並探討振動頻率對液滴之間平衡距離的影響。
- 三、觀察並探討振動加速度對液滴之間平衡距離的影響。
- 四、觀察並探討外部干擾對液滴之間平衡距離的影響。

## 參、研究設備及器材

### 一、實驗器材清單

器材名稱	圖示	說明與規格
電動振動台 (Electrodynamic Shaker)		型號: LDS V406 振動頻率範圍: 5 Hz - 9 kHz 正弦波峰值加速度: 100g

<p>高速攝影機</p>		<p>型號: Chronos 1.4  最高攝影幀率: 38565 fps @  336x96  (1.4Gpx/s)</p>
<p>燈源</p>		<p>型號: Nanlite Forza 60</p>
<p>矽油</p>		<p>聚二甲基矽氧烷  Polydimethylsiloxane  (PDMS)  無色、無味、無毒、不易  揮發的液體。  黏度：100, 300cSt</p>
<p>容器</p>		<p>圓形透明塑膠容器  半徑: 7.5cm</p>

針筒(點滴裝置)		針頭內徑直徑: 1.194mm(16G), 0.337mm(23G), 0.210mm(27G)
Tracker		影像分析軟體

## 二、實驗配置架設

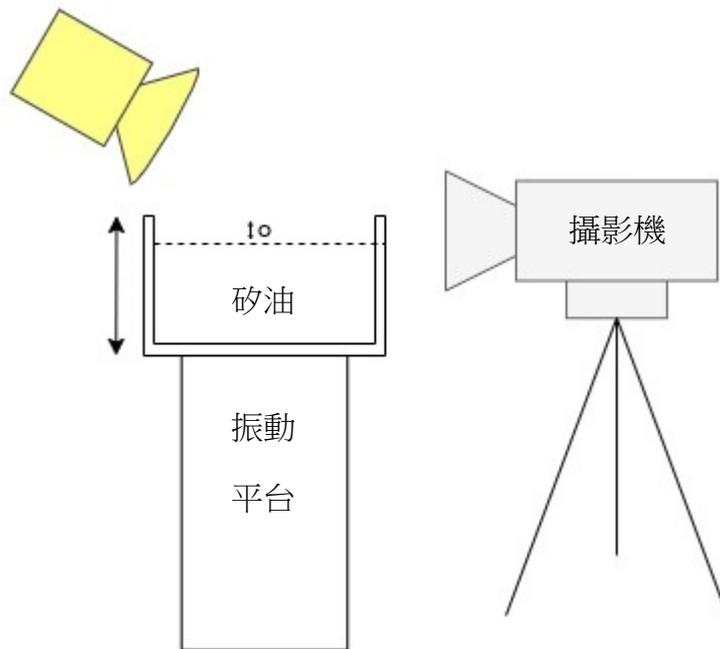


圖 4、實驗架構簡圖 (未依比例繪製)

圖 4 是簡化的實驗架設圖，裝有矽油的容器被固定在振動平台上，並由高速攝影機從水平或垂直方向拍攝液滴，其中黃色部分為燈光來源。

## 肆、研究過程或方法

### 一、相關參數

下表列出本文實驗所使用的所有相關參數與其範圍。

表 1、實驗相關參數

參數代號	參數意義	數值範圍
$\rho$	矽油密度	960 – 970 kg m <sup>-3</sup>
$R$	液滴半徑	0.9 – 2 mm
$\sigma$	矽油表面張力係數	0.02 N/m
$\mu$	液體的黏性係數 (運動黏度)	100 – 350 cSt
$g$	地表重力加速度	9.806 m s <sup>-2</sup>
$f$	液面垂直振動頻率	20 – 100 Hz
$\omega$	液面垂直振動角頻率 ( $2\pi f$ )	125 – 320 rad s <sup>-1</sup>
$\gamma_{max}$	最大振動加速度	9.8 – 49 m s <sup>-1</sup>
$h$	液面高度	13 – 25 mm
$d$	液滴對平衡距離	0 – 10 mm
$T_s$	振動掃頻週期	10 – 60 s

### 二、液滴的形成

Walker (1978)首次提出了液滴可以穩定存在於靜止的液面上，而有關液滴如何在垂直振動液面維持穩定，Moláček 與 Bush (2013)的研究已做了深入的探討，故在僅此介紹其成因。根據他們的研究，在液滴與液面「接觸」時，液滴會受到兩界面中間存有一極薄的空氣層防止液滴崩潰進入液面。

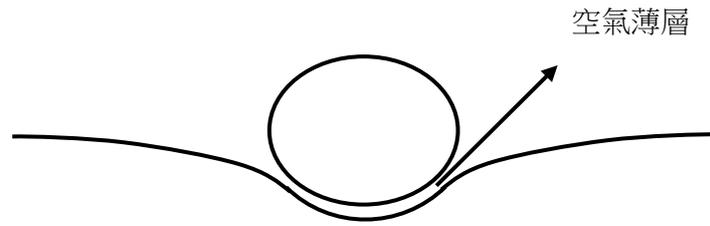


圖 5、空氣薄層示意圖

在一般情況(非振動液面)下，此空氣薄層(圖 5)的厚度會持續縮小至分子間作用力的作用範圍，而導致兩界面相互結合。此處我們引入流體力學中三個用於衡量表面張力效應的無因次數，來探討本實驗的使用的矽油可能會展現何種性質，分別是：

$$\text{Weber Number } We = \frac{\rho v_c^2 L}{\sigma}$$

$$\text{Ohnesorge Number } Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho \sigma R}} \quad \text{Bond Number } Bo = \frac{\rho g R^2}{\sigma}$$

將矽油的相關數值帶入計算可分別得出  $We \ll 1$ 、 $Oh \ll 1$ 、 $Bo < 1$ 。

**Weber Number** 可以想成是慣性力和表面張力效應之比，計算結果說明表面張力在液滴接觸液面時佔有很重要的地位，也是因為有足夠的表面張力，才使得液滴與液面只隔著空氣薄層仍能暫時保持穩定。

**Ohnesorge Number** 則用來度量黏滯力與慣性力和表面張力的關係，根據計算結果，可看出黏滯力較無法抵抗液滴形變，故應會觀察到液滴落入液面時有明顯的形變效應。

**Bond Number** 則可視為是重力和表面張力的比值，上面的計算結果也說明了表面張力的重要性。

我們偶爾也能在靜止水面上觀察到水滴能停留在水面上一段微小的時間。若液滴從落入液面並受到液面水平抬升而離開液面的時間，小於該空氣薄層消失的時間，液滴即

可在此振動液面上做反覆的跳動。在本研究的觀察中也有看到，較低的液滴掉落速率更有利於液滴存留，可能是因為衝量較低使得空氣層較為穩定導致。

### 三、彈跳的液滴

Couder 等 (2005)首次觀察到液滴在垂直振動的液面上有持續彈跳與行走的行為，自此之後就有許多相關的研究探討該現象的性質，這些研究觀察到的現象包括：單顆液滴

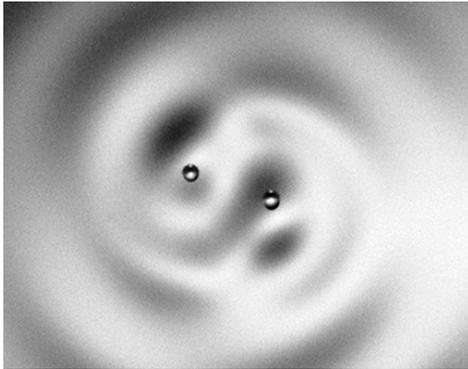


圖 6、雙液滴互繞 (取自[3])



圖 7、由兩顆液滴組成的移動單元

的隨機走動、雙液滴的互繞行為(圖 6)、液滴之間的吸引與排斥行為、液滴之間結合後朝固定方向前進的單元(圖 7)、還有液滴行為與量子行為的類比。

### 四、法拉第波

在進行實驗時我看到若使用太低的振動頻率或太高的振動加速度，液面會出現奇特的圖紋(圖 8)，像是液面在進行共振，這種波稱為法拉第波，是容器中液體的慣性與表面張力互相作用之下產生的一種非線性駐波，當振動頻率低於臨界值，液面就會呈現不穩定的狀態，這種現象稱為法拉第不穩定性，其中一個特性是它的振動頻率是振動平台振動頻率的一半。由於法拉第波會將液面上的液滴束縛在其波腹的位置(圖 9)，使我無法觀察液滴之間的互動關係，故在本文實驗中，只使用高於臨界頻率的振動頻率與較低的振動加速度，不討論法拉第波造成的影響。



圖 8、法拉第波

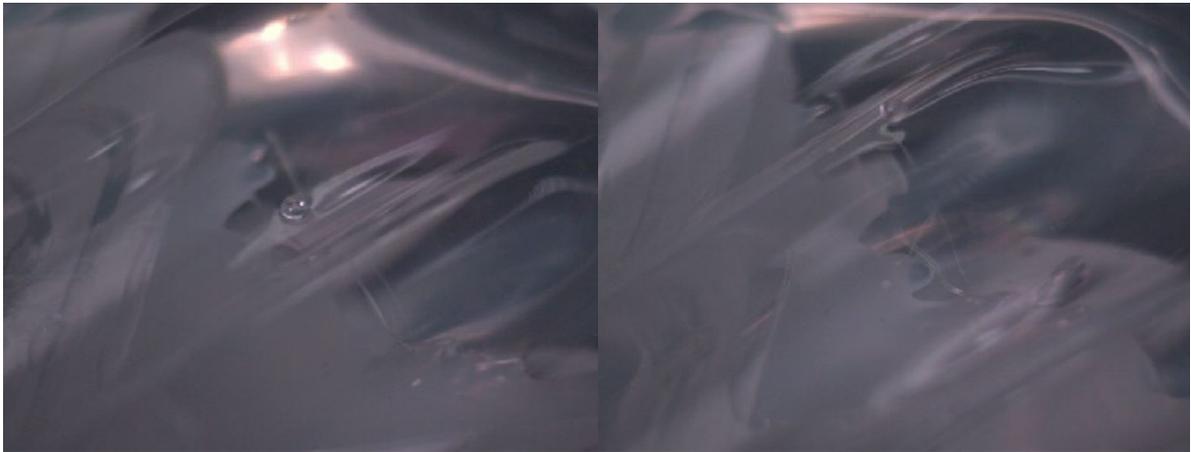


圖 9、被法拉第波束縛的液滴

## 五、表面波的波形

為了要了解液滴之間如何互動，我們必須要知道液滴使用何種方式來進行互動，從各個實驗的觀察，我們大概可以知道液滴進行遠距離互動的媒介是液滴在液面上產生的表面波，從 Moláček 與 Bush (2013) 和 Milewski, Galeano-Rios, Nachbin, 與 Bush (2015) 可以得到因單顆液滴跳動產生的液面梯度方程式(1)

$$\nabla h = \frac{A}{2} \sin \Phi_i \nabla \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{f} e^{-n/M_e}}{\sqrt{2n}} J_0(k_F(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)) \quad (1)$$

其中 $h$ 是液面高度、 $\Phi_i$ 是液滴撞擊液面的平均相位、 $N$ 為撞擊次數、 $\mathbf{x}$ 為液面上的位置向量、 $\mathbf{x}_n$ 為第 $n$ 次撞擊(當下時刻往過去排序)的液滴位置向量、 $M_e$ 稱為記憶參數，是表面

$$M_e = \frac{T_d f}{2(1 - \frac{\gamma}{\gamma_F})}$$

波衰減率的倒數、 $\gamma_F$ 是法拉第加速度，為液面產生法拉第波的最小振動加速度、 $T_d$ 是未垂直振動液面上的波衰減時間、 $k_F$ 為法拉第波數，可由法拉第波的頻率與波數關係式(2)

$$\omega^2 = k_F \tanh(k_F h) \left[ G + \frac{\sigma}{\rho} k_F^2 \right] \quad (2)$$

得出 (Benjamin & Ursell, 1954)，其中 $G$ 是液面受到的總加速度，需考慮重力與振動加速度，可以表示為(3)式，

$$G = g + \gamma_{max} \cos(\omega t) \quad (3)$$

$J_0$ 則是 0 階的第一類貝索函數(Bessel function)，與 $1/\sqrt{x}$ 速率衰減的正弦或餘弦函數類似

(圖 10)。此方程式考慮了每一次液滴接觸液面對其造成的影響，並可以用來進一步探討液滴移動時的行為，不過，在本研究中觀察的是兩顆液滴的距離達成平衡後的狀態，故可假設 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|$ 皆等於 $r$ ，也就是離液滴中心的距離，又因為 $\mathbf{x}_n$ 可視為定值，從而逐次累加後的波形不變，

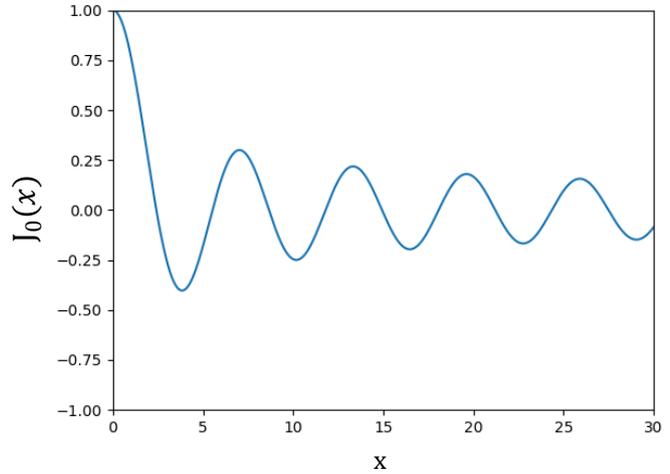


圖 10、0 階的第一類貝索函數

只有在波的幅度上有變化，故若要只單探討液滴產生的波形則可將(1)式簡化為(4)式，

$$\Delta h(r, t) = \frac{A}{\sqrt{t - t_n}} J_0(r k_F) e^{-(t-t_n)f/2M_e} \cos(\omega t/2) \quad (4)$$

其中 $t$ 表示時間， $A$ 是與時間和位置無關的參數，[4]與[5]內分別有詳細的內容，由於過於複雜不在此說明，而 $t_n$ 可以表示為(5)式，其中 $F_N$ 為液滴所受液面正向力， $t_c$ 為液滴與

液面接觸的時間。

$$t_n = \int_{t_c} F_N(t')t' dt' / \int_{t_c} F_N(t') dt' \quad (5)$$

在此(4)式中可以看到其振幅有隨時間指數衰減的趨勢，為能量耗散的結果。若將此方程式以軟體畫出，可得到形如圖 11 的圖形，其中藍色實心圓代表與液面接觸的液滴，這



圖 11、液滴表面波示意圖

裡可以進一步使用立體的圖表來呈現，在圖 12 中可以看到漣漪狀的表面從中心輻射擴散開來，藉由此立體圖像，即可得知兩個液滴之間的吸引、排斥行為，可能是取決於液滴該點表面波的梯度。在圖 13 當中呈現的是兩顆液滴產生的表面波的疊加，而液滴平衡距離的出現也極有可能是因液滴被此表面波束縛在其波腹的位置，如同法拉第波的效應(圖 9)。

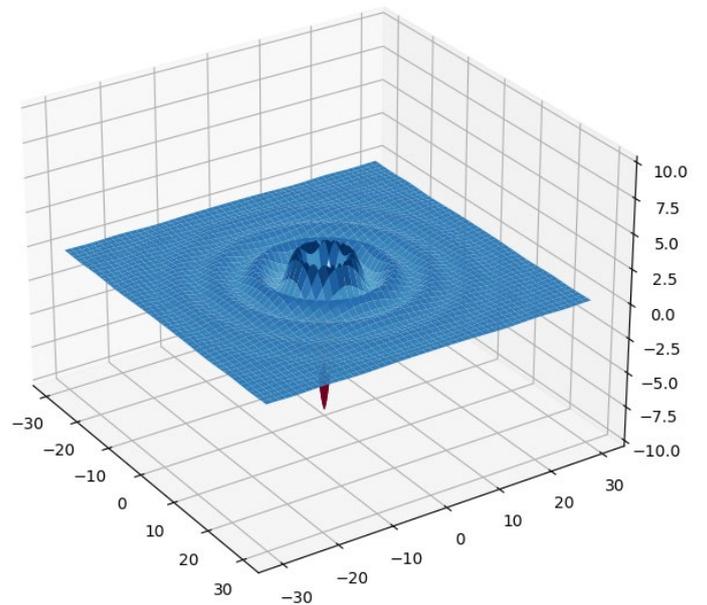


圖 12、液滴表面波立體示意圖



圖 13、雙液滴表面波示意圖

## 六、波長與平衡距離

這裡可以進一步的觀察(4)式，可以看到其主要影響波腹間隔的因子是貝索函數  $J_0(rk_F)$ ，能夠進一步推測液滴平衡距離應和  $k_F$  有一定的相關性。

## 七、實驗方法

### (一)、液滴產生方法

研究不同大小液滴之間的互動行為時，為要進行不同大小液滴的實驗，有產生特定體積液滴的需求，故在本研究我使用針筒來製造相似體積的微小液滴，透過輕輕擠壓針筒使針尖的液滴體積緩慢增加，直到表面張力小於重力時滴落，可獲取體積相近的液滴，使用不同口徑的針頭則可以得到不同半徑的液滴。在此我將液滴視為球體並透過平均體積來估算每顆液滴的體積，以下是由實驗求得的對不同口徑針筒滴出矽油液滴的平均液滴大小(表 2)。

表 2、不同針頭規格所滴出的平均液滴大小 ( $\mu=350\text{cps}$ )

產生液滴所用針頭 內徑直徑	1 毫升所需液滴數 (drops/mL)	單顆液滴平均 體積( $\mu\text{L}$ )	單顆液滴平均 半徑(mm)
1.194mm(16G)	96	10.4	1.35
0.337mm(23G)	218	4.6	1.03
0.210mm(27G)	270	3.7	0.96

而對於其他體積的液滴，我使用縫紉針挑起液面來產生，但由於縫紉針產生的液滴大小並不固定，故須由拍攝後於影像處理程式(Tracker)估算其體積。

### (二)、液滴間距離

本文定義兩個液滴之間的距離 $d$ ，皆為兩液滴中心的水平距離，並使用 Tracker 追蹤液滴位置來測量液滴間距離。

### (三)、振動台設置

本文實驗中的振動皆使用正弦波，其液面隨時間的加速度 $\gamma$ 可以寫為下式。

$$\gamma = g + \gamma_{max} \cos(2\pi ft)$$

在實驗中需要用到電動振動台的掃頻功能，來連續觀察不同頻率對液滴平衡距離的影響，其振動頻率 $f$ 對時間 $t$ 的變化如圖 14，其中橫軸是簡化過的時間，顯示經過的掃頻周期數， $f_{min}$ 與 $f_{max}$ 分別代表掃頻中的最低與最高頻率，可以看到頻率在掃頻範圍內以三角波的形式來回震盪。

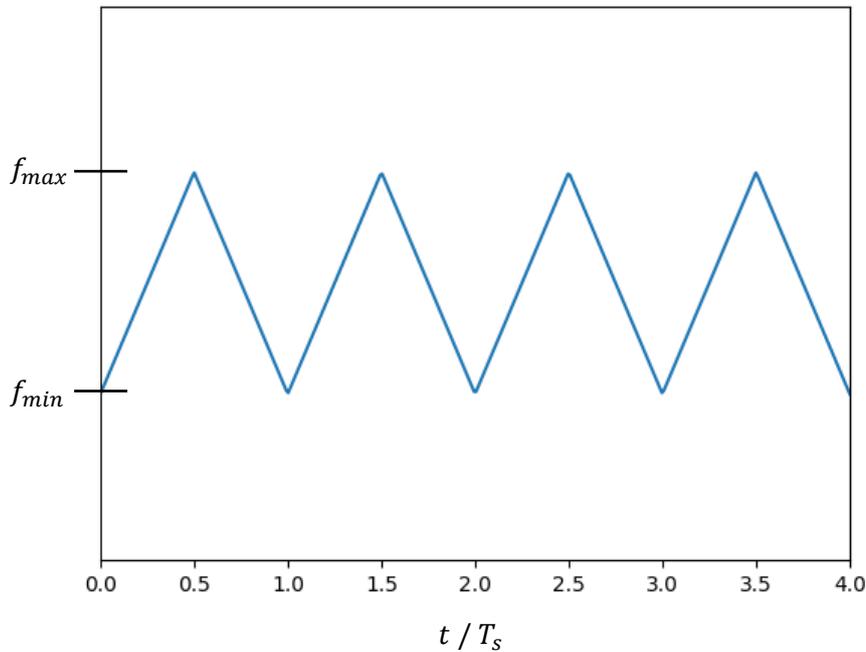


圖 14、振動台掃頻時的頻率隨時間變化圖

## 八、實驗探究

- (一)、觀察振動頻率對液滴對平衡距離的影響
- (二)、觀察最大振動加速度對液滴對平衡距離的影響
- (三)、觀察推擠液滴(外部干擾)對液滴對的影響

## 伍、研究結果

### 一、振動頻率與液滴對平衡距離的關係

在本實驗中，我使用電動振動台的掃頻功能(sweep)來緩慢調整振動頻率，以觀察頻率對液滴對(pair)平衡距離 $d$ 的影響，從圖 15 與圖 16 中可以觀察到資料呈現近似於一直

線，隨著頻率上升，平衡距離下降，有關進一步的分析，會在討論部分說明。

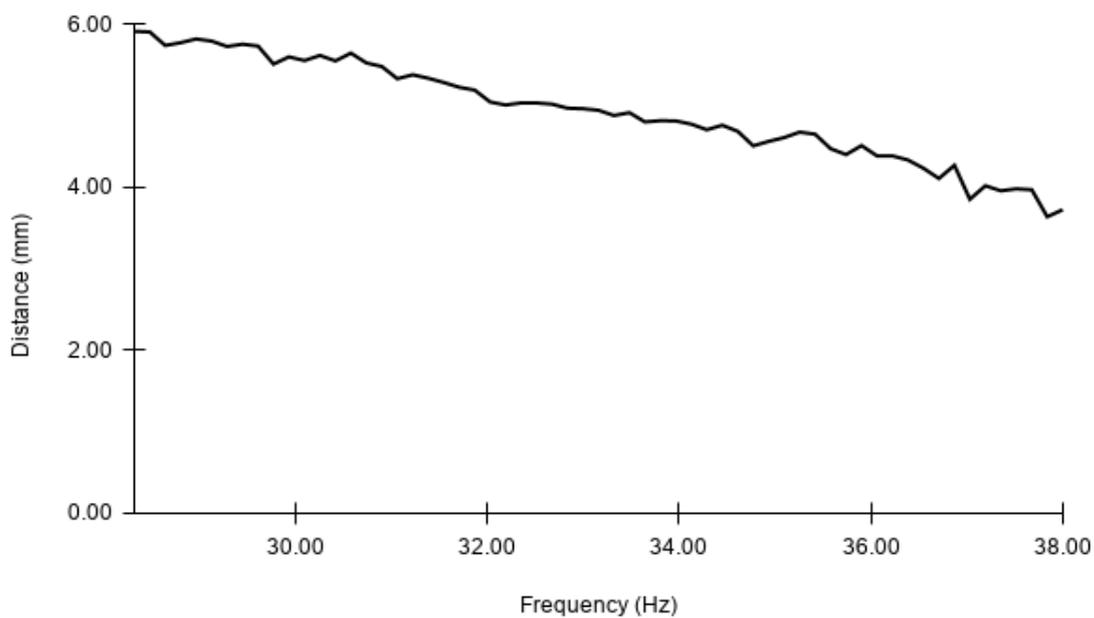


圖 15、液面垂直振動頻率對液滴對平衡距離  $h = 2.5\text{cm}$ ,  $\gamma_{max} = 4\text{g}$ ,  $\mu = 100\text{cSt}$ , 兩液滴  $R = 1.53\text{mm}$

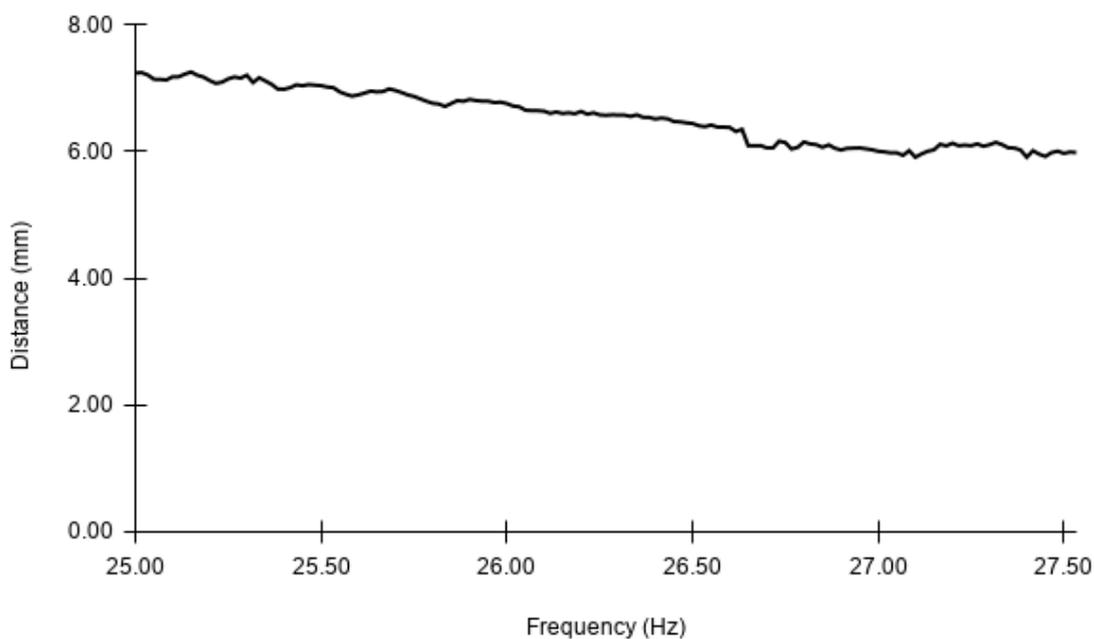


圖 16、液面垂直振動頻率對液滴對平衡距離  $h = 1.9\text{cm}$ ,  $\gamma_{max} = 4\text{g}$ ,  $\mu = 350\text{cSt}$ , 兩液滴  $R = 1.03\text{mm}$

## 二、最大振動加速度與液滴對平衡距離的關係

本實驗同樣使用掃頻功能並皆在 $f = 25\sim 30\text{Hz}$ 之間震盪，頻率隨時間做線性的改變，觀察不同最大振動加速度 $\gamma_{max}$ 對液滴對(pair)平衡距離 $d$ 的影響，此處使用兩種液面高度比較平衡距離在 $\gamma = 4g$ 和 $\gamma = 5g$ 下的差異，圖中 $t$ 代表時間，呈現一個完整頻率震盪周期的資料。從圖 17 與圖 18 中可以觀察到平衡距離在 $\gamma = 4g$ 的情況下普遍大於 $\gamma = 5g$ 時的情況，也可以看到平衡距離隨振動的頻率變化，其中低點頻率為 $30\text{Hz}$ ，高點頻率為 $25\text{Hz}$ 。

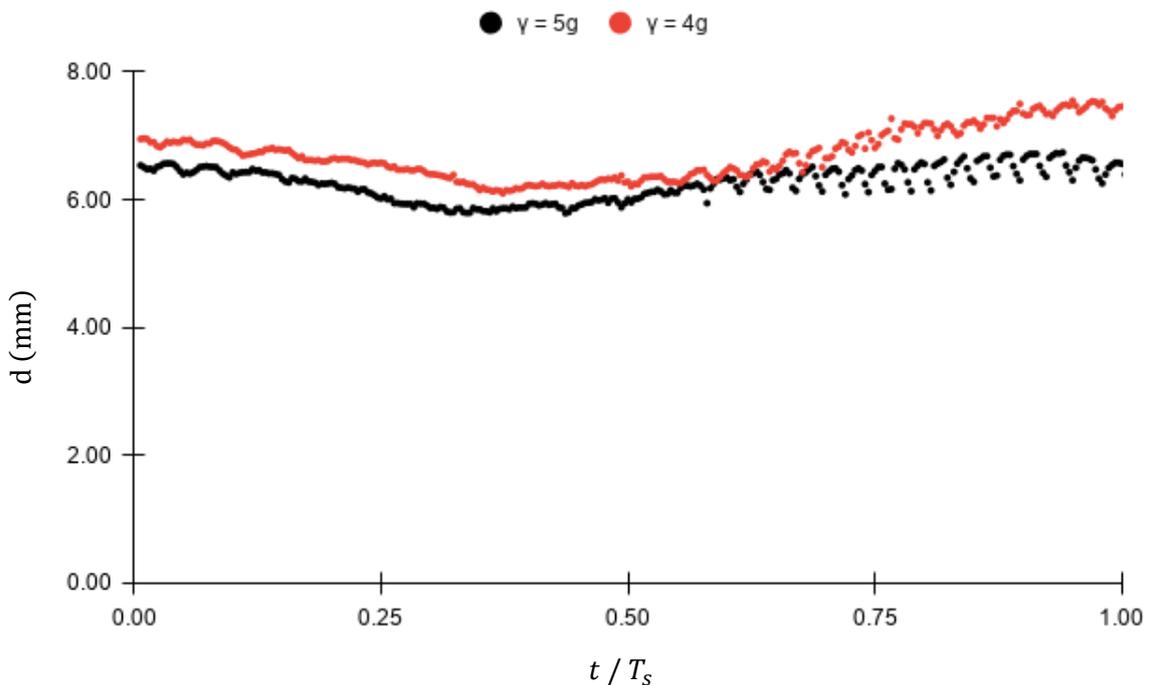


圖 17、液面垂直振動加速度對平衡距離的影響  
其中紅色資料點 $\gamma_{max} = 4g$ ，黑色資料點 $\gamma_{max} = 5g$ ，  
 $h = 2.5\text{cm}$ ， $\mu = 350\text{cSt}$ ，兩液滴 $R = 1.03\text{mm}$

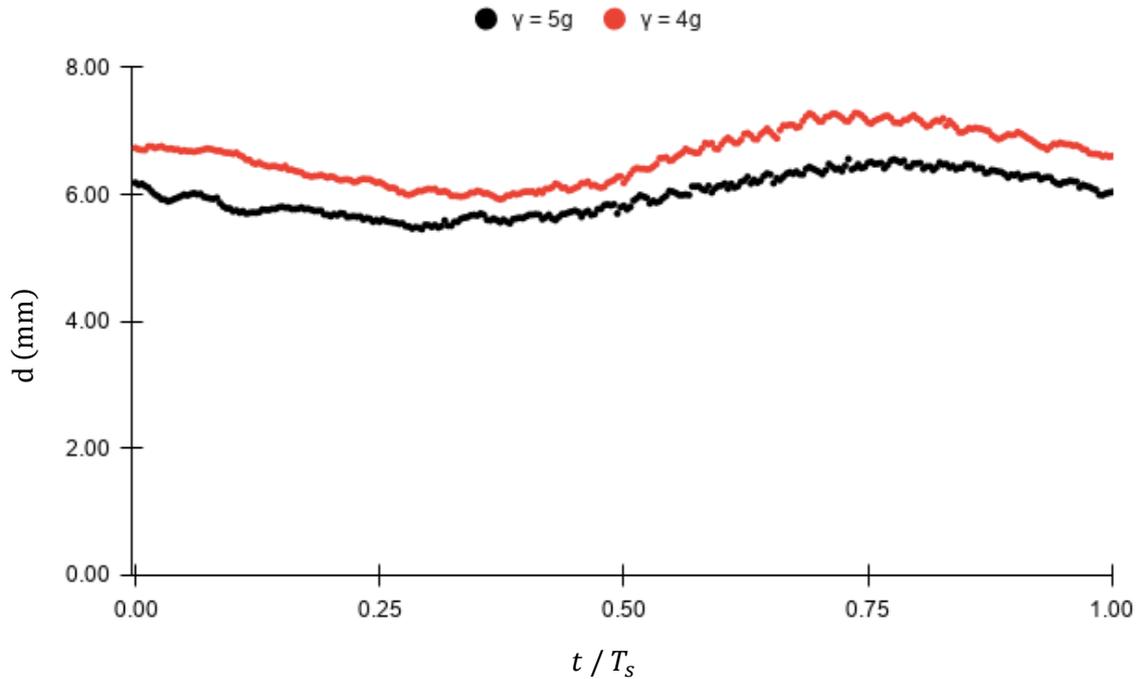


圖 18、液面垂直振動加速度對平衡距離的影響  
 其中紅色資料點 $\gamma_{max} = 4g$ , 黑色資料點 $\gamma_{max} = 5g$ ,  
 $h = 1.9cm$ ,  $\mu = 350cSt$ , 兩液滴  $R = 1.03mm$

### 三、推擠液滴對液滴對平衡距離的影響

在本實驗我使用針頭去推擠液滴對的其中一顆液滴來模擬液滴受到擠壓的情形，從圖 19 與圖 20 中可以明顯看出有 V 形的資料出現，V 形中端點前部分代表液滴受擠壓的情形，而端點後部分代表液滴回彈至平衡距離，從圖 19 與圖 20 可以看到對於 $\gamma = 4.5g$ (黑)的情形來說，在每次的推擠後液滴皆可回到原先的平衡距離，但在 $\gamma = 4g$ (紅)的情況則觀察到推擠後液滴並非每次皆會回彈至原先的平衡距離，而可能會獲得一個新的平衡距離，此平衡距離為兩顆液滴直接接觸(靠在一起)的情形，如圖 19 與圖 20 中最後水平線所代表的距離。此外我們也可以透過推擠距離來比較此兩種加速度下的回彈情形，在圖 19 中，可以發現在這兩種振動加速度下都推擠到約 3mm 的距離後釋放，而只有在較高的加速度下會回彈至原先的平衡距離，在圖 20 也可以觀察到相似的現象，從這個觀察，我們可以得知一些液滴表面波的性質，會在接下來進行討論，在此不進行贅述。

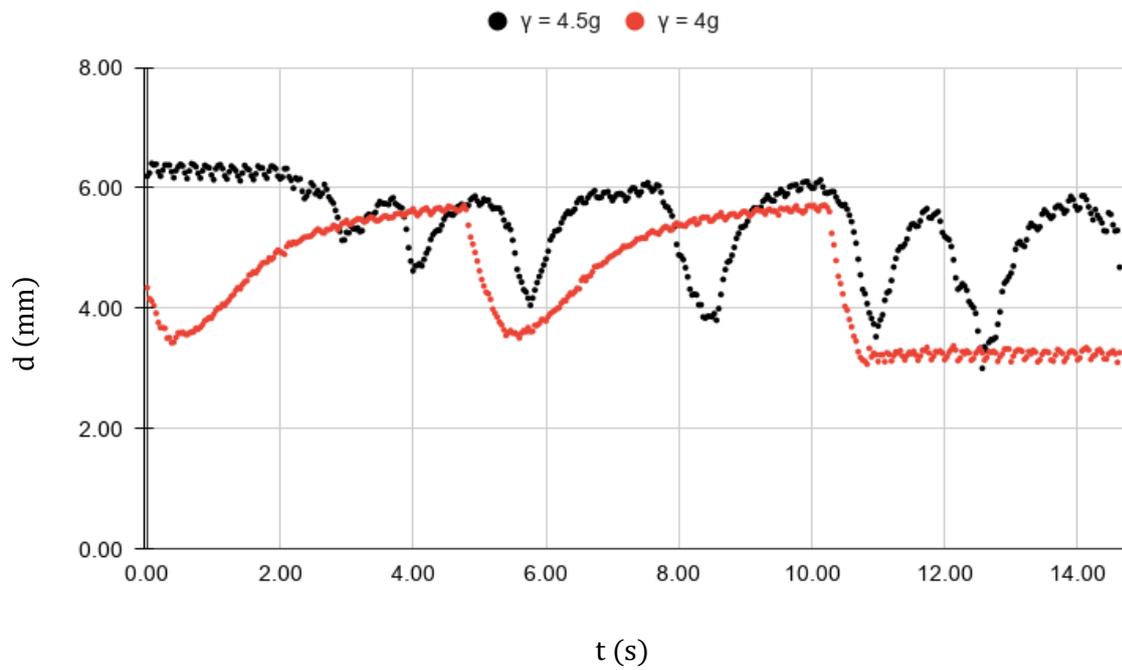


圖 19、推擠液滴對平衡距離的影響

其中紅色資料點 $\gamma_{max} = 4g$ , 黑色資料點 $\gamma_{max} = 4.5g$ ,  
 $h = 1.9cm$ ,  $\mu = 350cps$ ,  $f = 25Hz$ , 兩液滴  $R = 1.35mm$

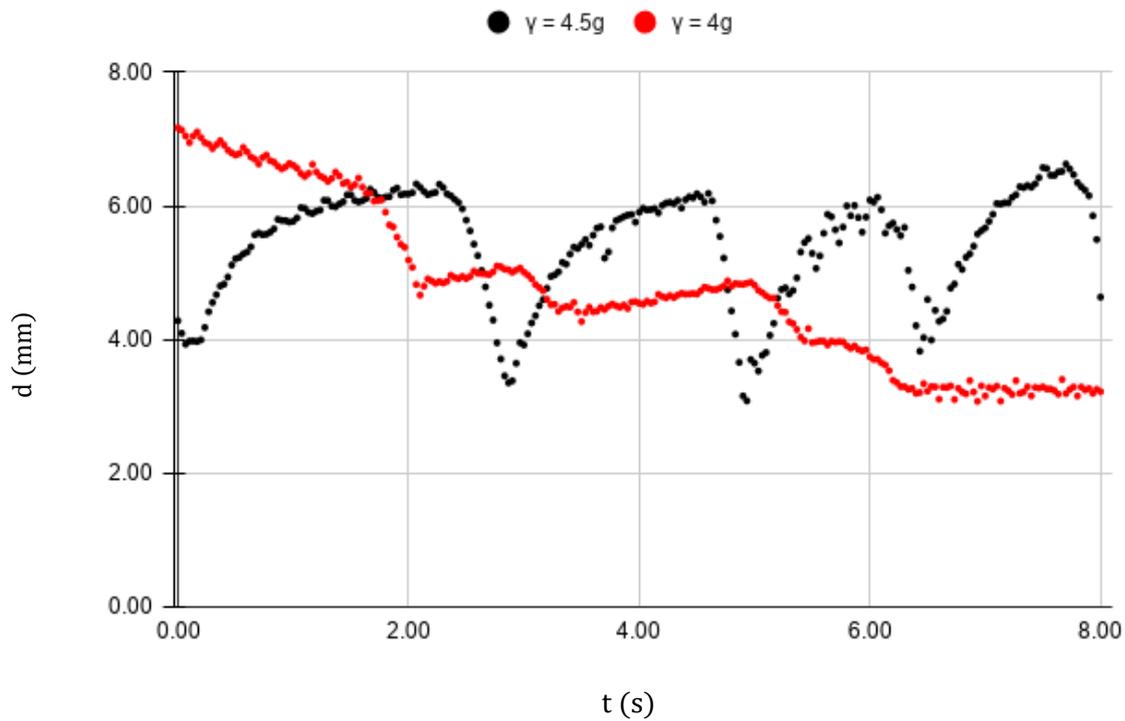


圖 20、推擠液滴對平衡距離的影響

其中紅色資料點 $\gamma_{max} = 4g$ , 黑色資料點 $\gamma_{max} = 4.5g$ ,  
 $h = 2.5cm$ ,  $\mu = 350cps$ ,  $f = 25Hz$ , 兩液滴  $R = 1.35mm$

## 陸、討論

### 一、振動頻率與平衡距離

在理論部分談到平衡距離與 $J_0(rk_F)$ 的可能相關性，此處進行深入的探討。首先，從(2)式我可以作出 $\omega$ 對 $k_F$ 在近於本文實驗參數的關係圖(圖 21)，可以看到 $\omega$ 在本文實驗範圍( $125 - 320 \text{ rad s}^{-1}$ )內可近似於一直線，其範圍內近似後的線性方程式可寫為

$$k_F = 4.73\omega - 286$$

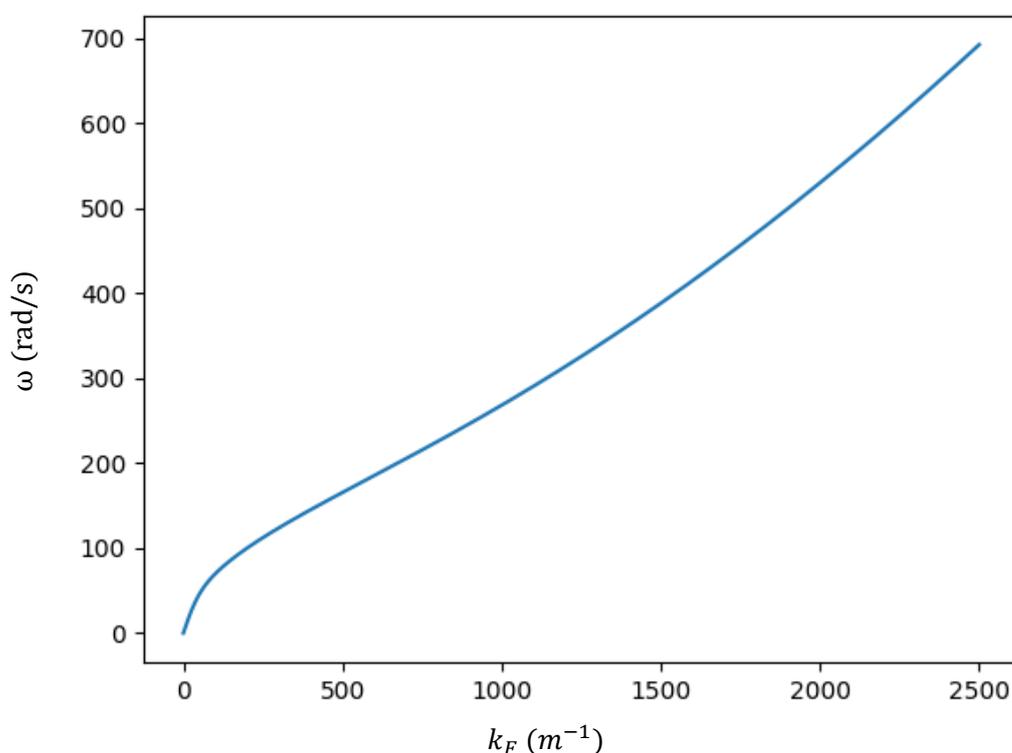


圖 21、 $\omega$ 對 $k_F$ 的關係圖

$$h = 2.5\text{cm}, \gamma_{max} = 4\text{g}, \sigma = 0.022\text{N/m}, \rho = 965\text{kg/m}^3$$

將其帶入(4)式中的貝索函數可以得到(6)式

$$J_0(r(4.73\omega - 286)) \quad (6)$$

我們可以猜測液滴的平衡距離應該跟貝索函數的低點有關，原因是低點有較低的位能，

容易將液滴束縛在其中，這裡取貝索函數微分後為零的點，在圖 22 中，我將貝索函數

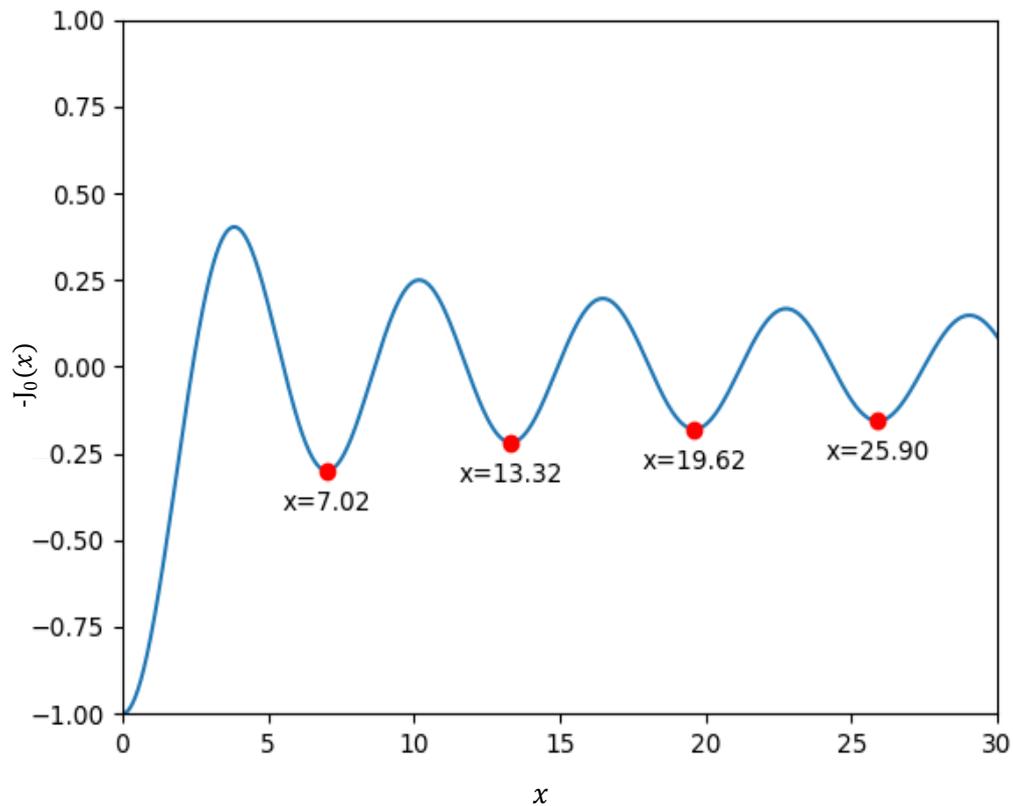


圖 22、貝索函數低點位置

乘上負號以符合液滴撞擊液面時的中心凹陷情形，此處列出前四個  $x > 0$  的低點位置，此處我們取第一個點，也就是  $x = 7.02$  作為假想的液滴平衡位置，可以在接下來的方程式看出，其作用僅為提供一常數，這裡(5)式函數括號內的數值須等於 7.02，如下式

$$r(4.73\omega - 286) = 7.02$$

若將  $r$  與  $\omega$  代換為  $d$  與  $f$  來表示則可以得到(7)式

$$d = \frac{7.02}{29.72f - 286} \quad (7)$$

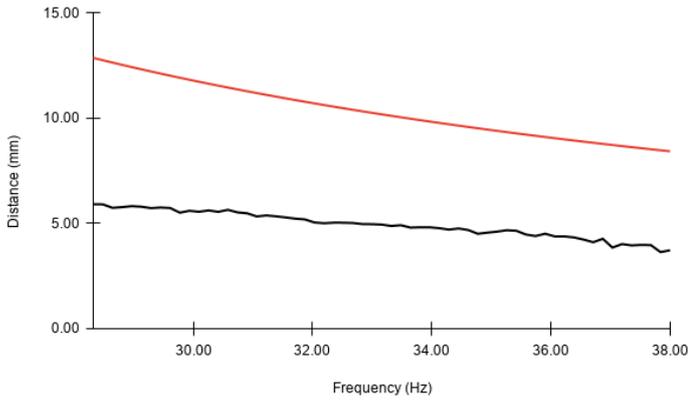


圖 23、理論平衡距離與實驗數據的比較  
其中紅色線由(7)式計算得出，黑色為實驗數據  
 $h = 2.5\text{cm}$ ,  $\gamma_{max} = 4\text{g}$ ,  $\mu = 100\text{cSt}$ ,  
兩液滴  $R = 1.53\text{mm}$

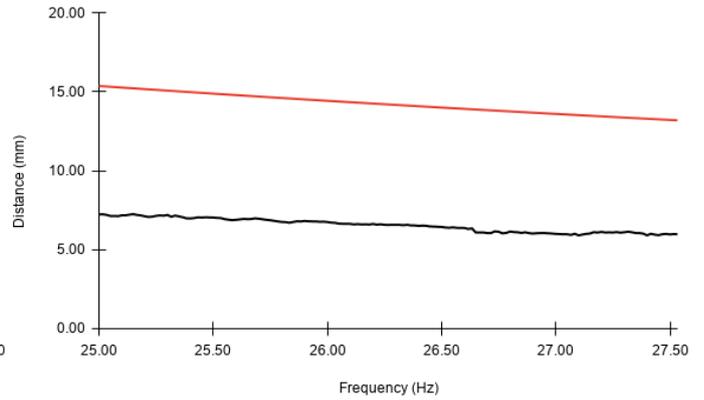


圖 24、理論平衡距離與實驗數據的比較  
其中紅色線由(7)式計算得出，黑色為實驗數據  
 $h = 1.9\text{cm}$ ,  $\gamma_{max} = 4\text{g}$ ,  $\mu = 350\text{cSt}$ ,  
兩液滴  $R = 1.03\text{mm}$

將(7)式與實驗數據比對可得圖 23 與圖 24，可以看到理論線與實驗線數值相差近一倍，表示當初取的  $x = 7.02$  需要修正，經過擬合常數修正後的  $d$  可表示為(8)，

$$d = \frac{3.30}{29.72f - 286} \quad (8)$$

並可畫出圖 25、圖 26。

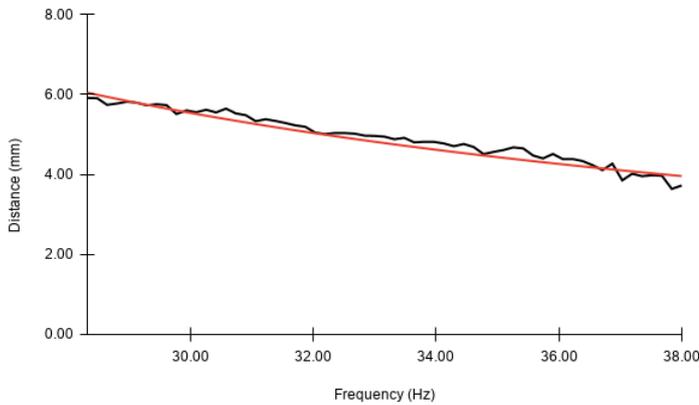


圖 25、修正後的理論平衡距離與實驗數據的比較  
其中紅色線由(8)式計算得出，黑色為實驗數據  
 $h = 2.5\text{cm}$ ,  $\gamma_{max} = 4\text{g}$ ,  $\mu = 100\text{cSt}$ ,  
兩液滴  $R = 1.53\text{mm}$

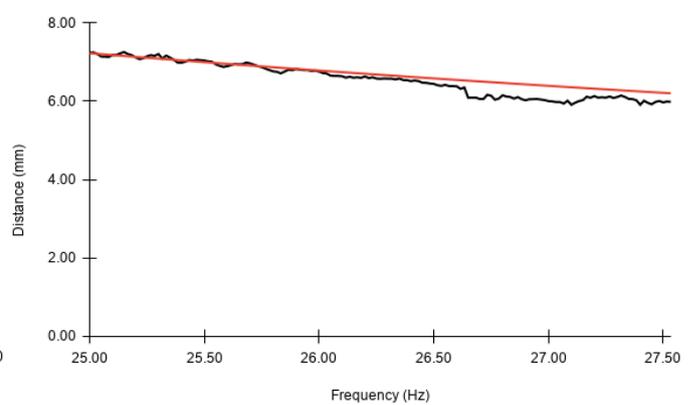


圖 26、修正後的理論平衡距離與實驗數據的比較  
其中紅色線由(8)式計算得出，黑色為實驗數據  
 $h = 1.9\text{cm}$ ,  $\gamma_{max} = 4\text{g}$ ,  $\mu = 350\text{cSt}$ ,  
兩液滴  $R = 1.03\text{mm}$

從圖 25 與圖 26 中可以看到(8)式有相當好的擬合程度。

## 二、最大振動加速度與平衡距離



圖 27、液滴造成液面變形

從第二部分實驗可以看出最大振動加速度 $\gamma_{max}$ 的增加會導致平衡距離 $d$ 的減少，此處我們可以考慮液滴撞擊液面時造成的液面變形(凹陷)(圖 27)，我觀察到較大液滴撞擊液面或者 $\gamma_{max}$ 提升時，其周圍的液面會與普通的漣漪狀波形有較大的差異，液面形狀會逐漸由凹陷變形主導，可以用撞擊時的液滴動量轉移來解釋，這導致了(4)式有修正的空間，我推測液面應會變得像圖 28 的樣子，凹陷造成的表面梯度改變導致平衡位置朝向中心內縮，在振動加速度與平衡距離關係的實驗可以看出這個趨勢，然而，在推擠液滴對液滴對平衡距離的影響的實驗中， $\gamma_{max}$ 提升使得液滴較不易因推擠而靠在一起，成因在下一節進行討論。



圖 28、液面凹陷示意圖

## 三、推擠液滴

從推擠液滴對液滴對平衡距離的影響的實驗中，可以看出似乎有一個「柵欄」在阻擋液滴靠近，其成因查看圖 28 便一目了然，若平衡距離處在中心液滴旁第一個凹陷處，則可以看到波峰像是山丘一般擋住了液滴，這也是波束縛液滴的情形。若提升 $\gamma_{max}$ ，可以觀察到表面波使得液滴較不易因推擠而靠在一起，推論是因 $\gamma_{max}$ 的提升造

成表面波振幅的上升，使得平衡位置 $d$ 雖然減少，但跨越波峰的所需能量(難度)卻提升了。

## 柒、結論

### 一、振動頻率對液滴的影響

- (一)、垂直振動的頻率上升會使得液滴對的平衡距離縮短。
- (二)、液滴對的平衡距離 $d$ 對振動頻率的關係 $f$ 可以使用下式來表示。

$$d = \frac{3.30}{29.72f - 286}$$

### 二、最大振動加速度對液滴的影響

- (一)、最大振動加速度的提升會導致液滴撞擊液面時有更深更廣的凹陷。
- (二)、最大振動加速度的提升會使平衡距離縮短，其原因與液滴造成的凹陷有關。

### 三、推擠液滴對液滴對的影響

- (一)、推擠液滴可以給予液滴能量去脫離表面波的束縛。
- (二)、若推擠液滴的能量不足，液滴會回彈至平衡距離。

### 四、相關物理現象

- (一)、液滴得以在液面上存留是倚賴液滴底部與液面中間的空氣薄層。
- (二)、過低的振動頻率與過高的振動加速度會使液面產生法拉第波，其會將液滴束縛在波腹位置，在液滴產生的表面波也可以看到束縛其他液滴的現象。
- (三)、垂直振動的液面上的液滴之間會出現隨機走動、互繞、吸引、排斥、朝固定方向走動等行為，且這些行為可能同時出現。

### 五、相關實際應用

在化學、生物等領域或微流體相關實驗，可能會牽涉到微量液體的混合反應與控

制，此時即可利用液滴在振動液面上的彈跳與互動行為來達到目的，包括可以控制的分離距離(平衡距離)來分別樣品避免混合，還有可調整的樣品移動速度與移動方向，此外，本方法也可以防止液體汙染所使用的容器，免去清洗上的困擾，實為一種有趣的解決方案。

## 捌、參考文獻資料

### 一、參考資料

- [1] Walker, J. (1978). Drops of liquid can be made to float on the liquid. What enables them to do so? *The Amateur Scientist, Sci. Am.* 238, 151 – 158.
- [2] Moláček, J., & Bush, J. (2013). Drops bouncing on a vibrating bath. *Journal of Fluid Mechanics*, 727, 582-611. doi:10.1017/jfm.2013.279
- [3] Couder, Y., Protière, S., Fort, E. et al. Walking and orbiting droplets. *Nature* 437, 208 (2005). <https://doi.org/10.1038/437208a>
- [4] Moláček, J., & Bush, J. (2013). Drops walking on a vibrating bath: Towards a hydrodynamic pilot-wave theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 727, 612-647. doi:10.1017/jfm.2013.280
- [5] Milewski, P., Galeano-Rios, C., Nachbin, A., & Bush, J. (2015). Faraday pilot-wave dynamics: Modelling and computation. *Journal of Fluid Mechanics*, 778, 361-388. doi:10.1017/jfm.2015.386
- [6] Benjamin, T. B. & Ursell, F. (1954). The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. SOC. Lond. A* 225, 505-515.
- [7] 蔣儀宣、朱鳳華、徐悅聲 (2012)。與波共舞的飄浮水滴。2012 年臺灣國際科學展覽會優勝作品專輯。
- [8] Douady, S. (1990). Experimental study of the Faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*,

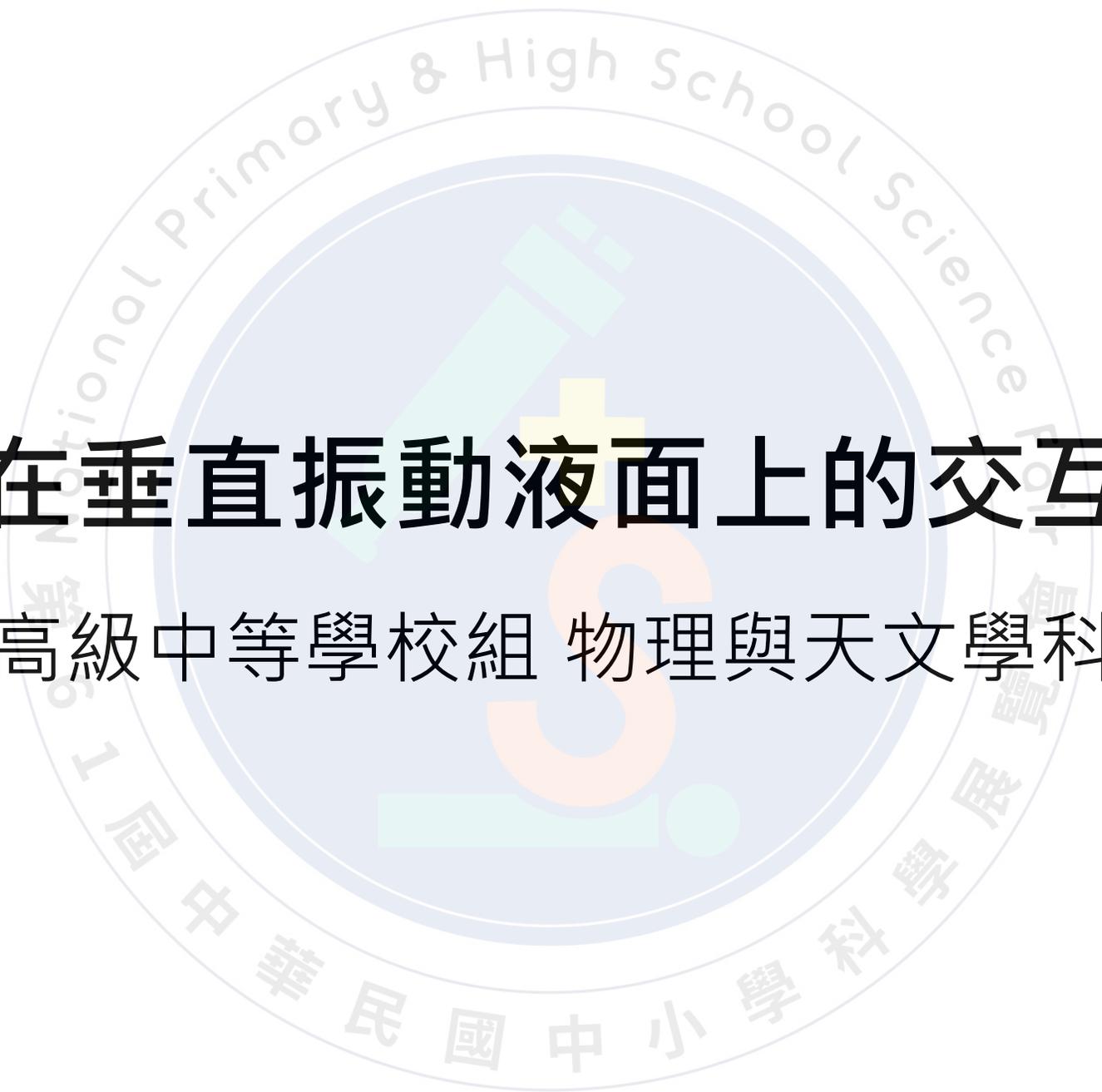
221, 383-409. doi:10.1017/S0022112090003603

[9] 高中選修物理 III 課本，南一書局。王名儒等編著。

## 【評語】 051806

本實驗作品探討油滴於垂直振動之面上維持穩定、規則跳動移動的機制，特別是探討油滴之間產生平衡距離的方式、成因、探討振動頻率對液滴之間平衡距離的影響、探討振動加速度對液滴之間平衡距離的影響以及外部干擾的影響。油滴於垂直振動面上維持穩定以及移動的實驗已是個常被探討的實驗，本實驗在設計、數據、分析以及探討的議題上並沒有突出不同的結果，可再探索多液滴的運動及其統計行為以顯現新穎物理現象。

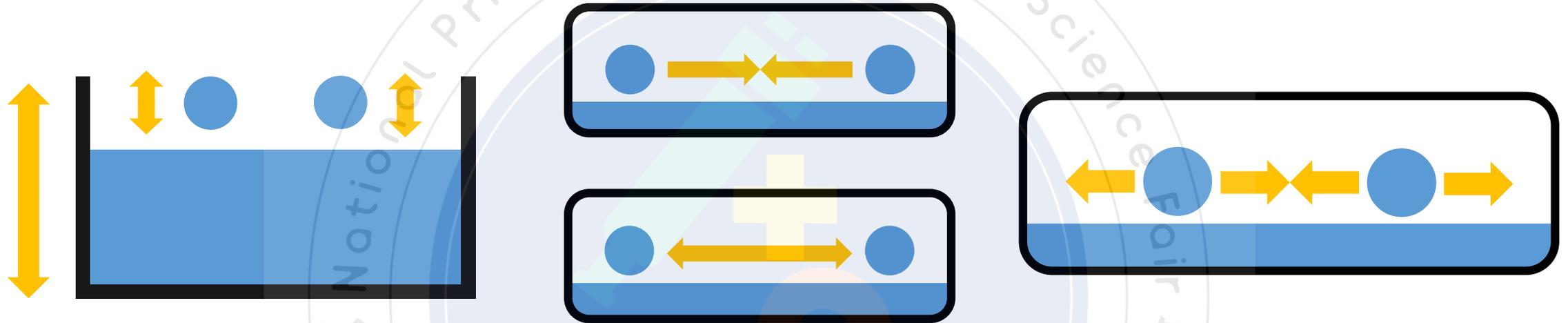
## 作品簡報



# 液滴在垂直振動液面上的交互作用

高級中等學校組 物理與天文學科

# 前言



科學家發現在一些條件下，液滴可以在垂直振動的液面上保持完整，並持續地**反覆跳動**。

兩顆在垂直振動的液面上跳動的液滴之間在不同的條件下存在一些有趣的交互作用，包括**相互吸引**、**排斥**、**互繞**、**自我推進**等。

液滴在互相吸引（或排斥）之後，會停留在一個**平衡距離**，此時兩液滴距離不再改變，受到微小擾動後也會趨於保持此平衡距離。

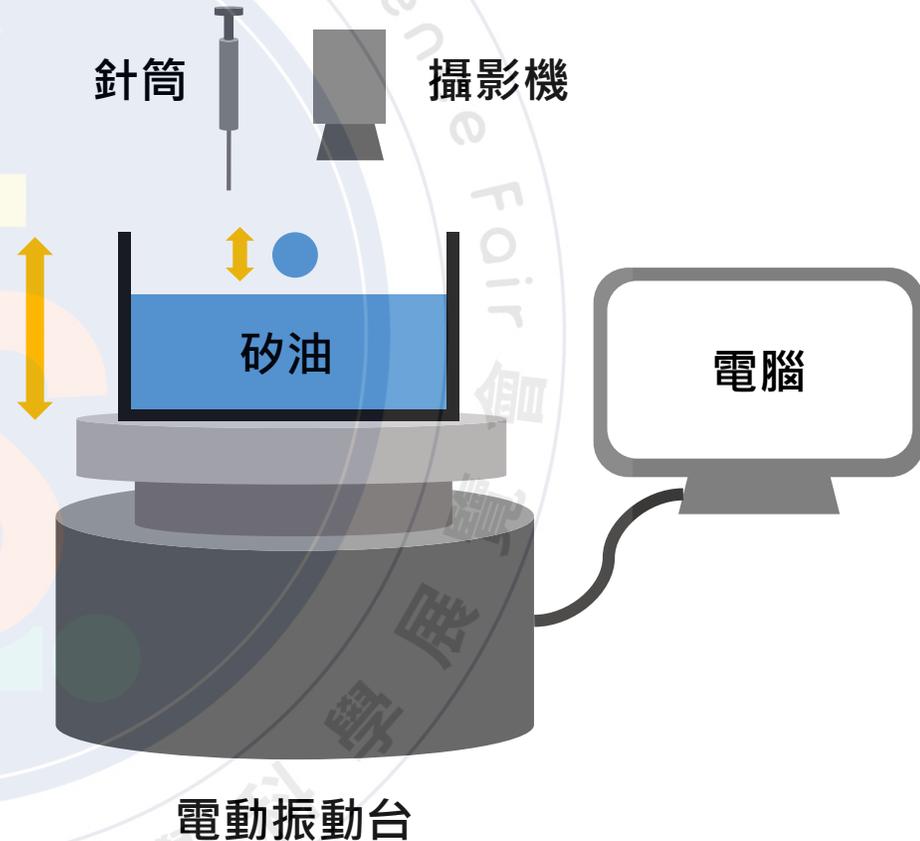
## 研究問題

1. 油滴之間產生平衡距離的方式與模型？
2. 振動頻率、振動加速度與外部干擾對液滴之間平衡距離的影響為何？

## 研究假設

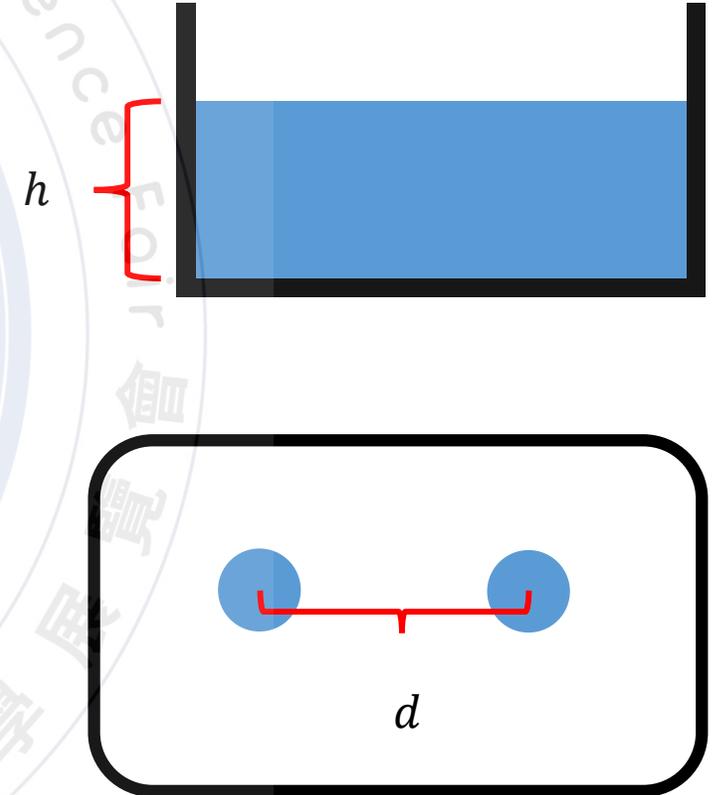
1. 液滴的交互作用應受其產生的表面波影響。
2. 液滴該處的表面波梯度決定液滴的受力方向。

## 研究方法



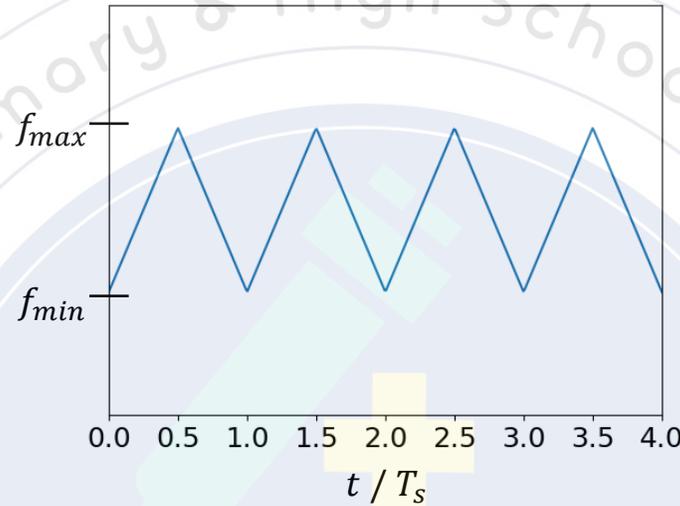
# 定義

代號	意義	數值範圍
$R$	液滴半徑	0.9 – 2 mm
$\sigma$	矽油表面張力係數	0.02 N/m
$\mu$	液體的黏性係數 (運動黏度)	100 – 350 cSt
$f$	液面垂直振動頻率	20 – 100 Hz
$\omega$	液面垂直振動角頻率 ( $2\pi f$ )	125 – 320 rad s <sup>-1</sup>
$\gamma_{max}$	最大振動加速度	9.8 – 49 m s <sup>-1</sup>
$h$	液面高度	13 – 25 mm
$d$	液滴對平衡距離	0 – 10 mm
$T_s$	振動掃頻週期	10 – 60 s



# 實驗方法

- 正弦波振動波形
  - 振動台掃頻功能
  - 控制針頭內徑
- 控制液滴體積、半徑

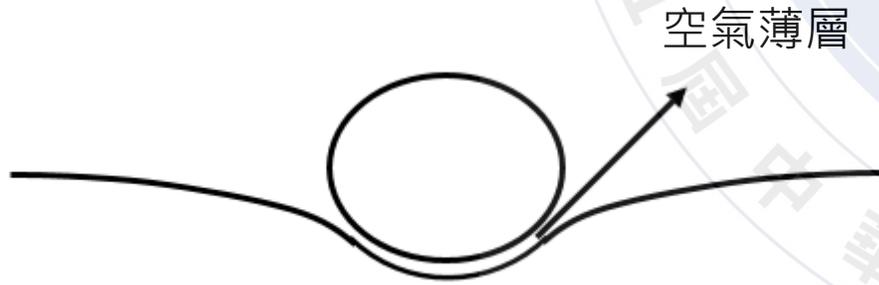


圖一、振動台掃頻頻率隨時間變化圖



圖二、兩液滴停留在平衡距離

# 液滴的形成



- 液滴與液面間形成空氣薄層
- 持續時間短
- 消失前液滴需被彈離液面
- $We \ll 1$ 、 $Oh \ll 1$ 、 $Bo < 1$

$$\text{Weber Number } We = \frac{\rho v_c^2 L}{\sigma}$$

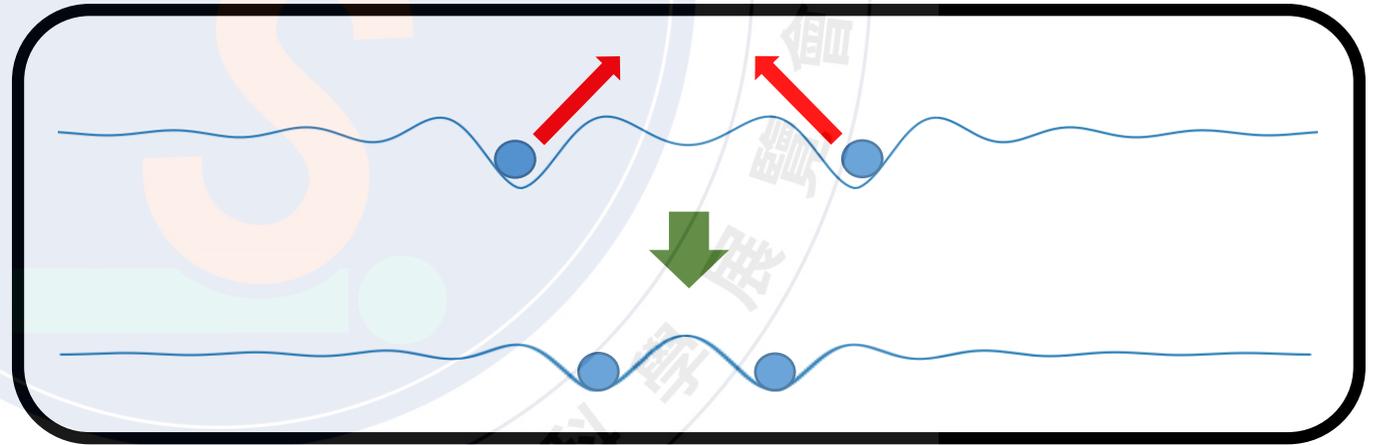
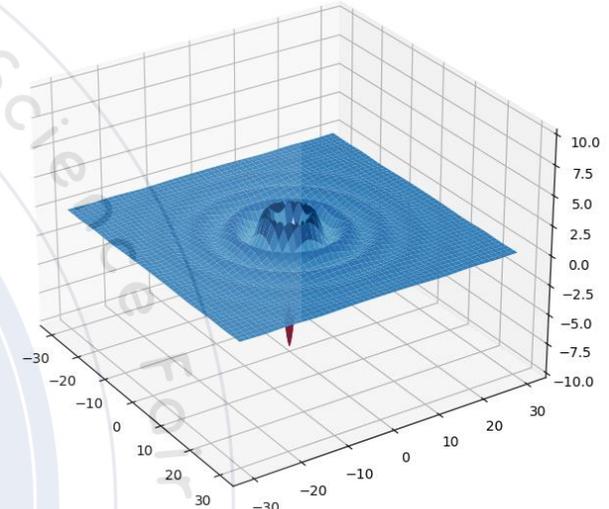
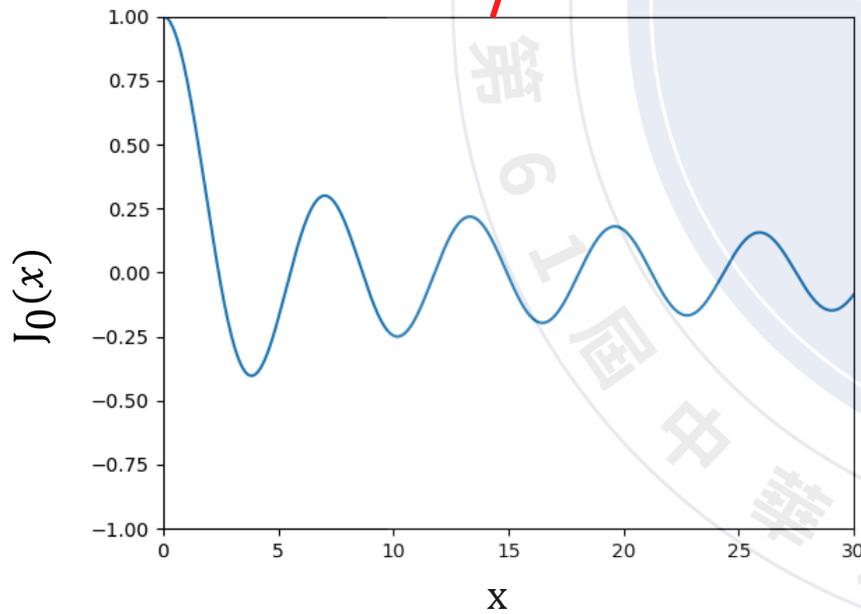
$$\text{Ohnesorge Number } Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho \sigma R}}$$

$$\text{Bond Number } Bo = \frac{\rho g R^2}{\sigma}$$

# 表面波的波形

$$\omega^2 = \left[ G + \frac{\sigma}{\rho} k_F^2 \right] k_F \tanh(k_F h) \quad (1)$$

$$\Delta h(r, t) = \frac{A}{\sqrt{t - t_n}} J_0(r k_F) e^{-(t - t_n)/T_F M_e} \cos(\omega t / 2) \quad (2)$$



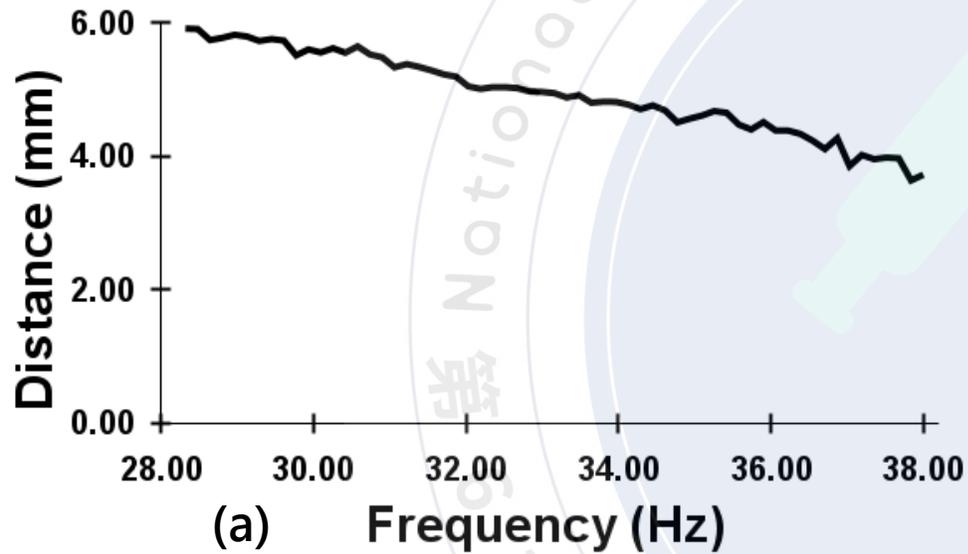
圖三、平衡距離的形成

(1)、(2) 出自 Milewski, Galeano-Rios, Nachbin & Bush (2015)

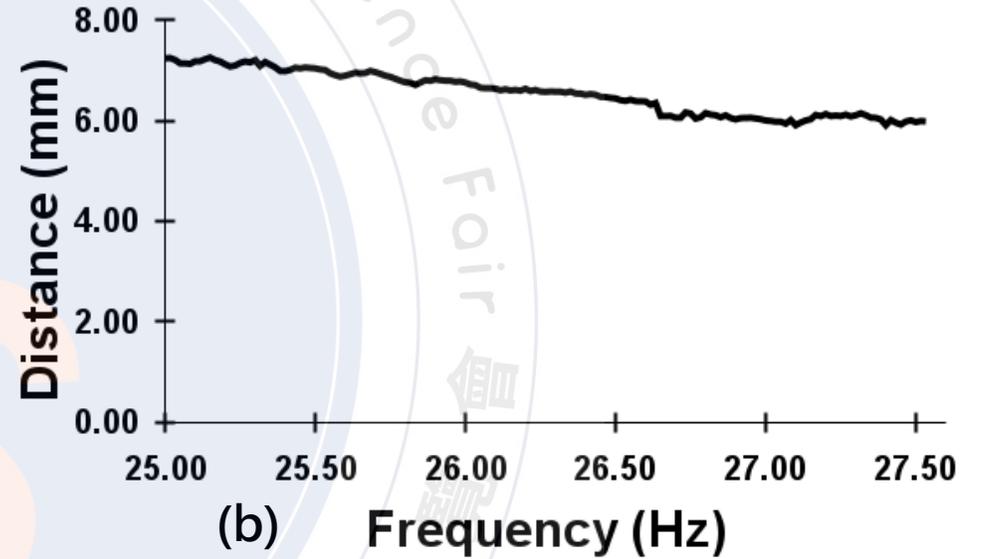
# 研究結果 $f - d$

$R$	液滴半徑	$\gamma_{max}$	最大振動加速度
$\mu$	液體運動黏度	$h$	液面高度
$f$	液面垂直振動頻率	$d$	液滴對平衡距離

目的→探討振動頻率對平衡距離的影響



$h = 2.5\text{cm}, \gamma_{max} = 4g$   
 $\mu = 100\text{cSt}$ , 兩液滴  $R = 1.53\text{mm}$



$h = 1.9\text{cm}, \gamma_{max} = 4g$   
 $\mu = 100\text{cSt}$ , 兩液滴  $R = 1.53\text{mm}$

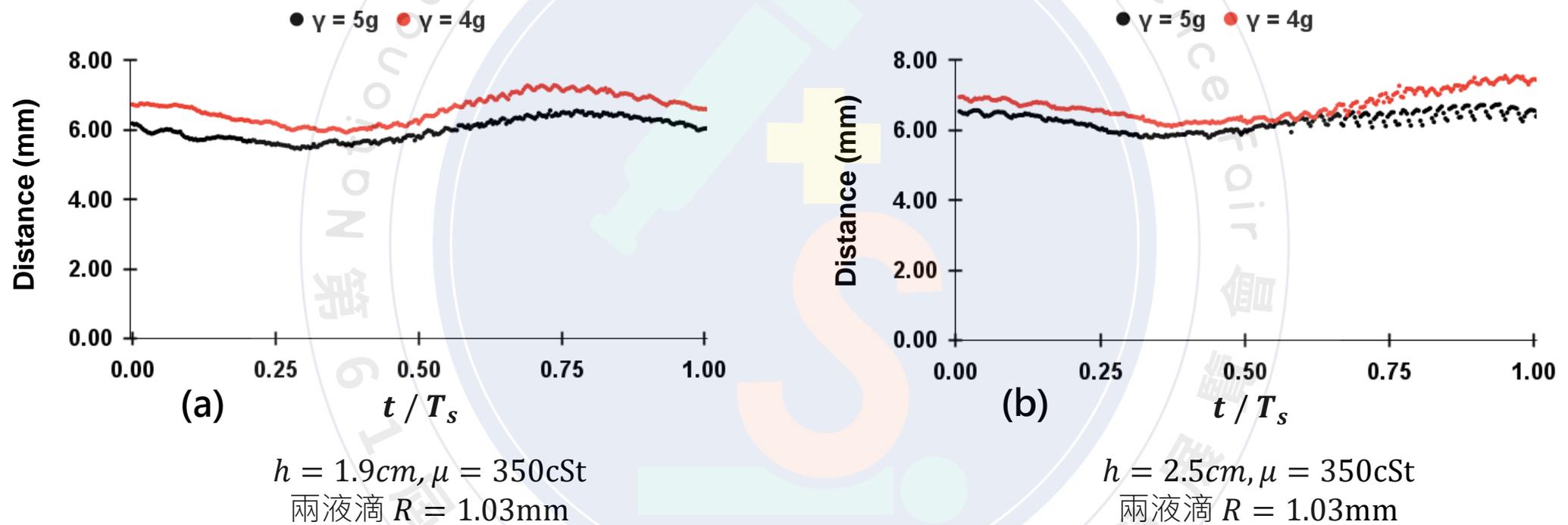
圖四、液面垂直振動頻率對液滴對平衡距離

小結→隨著振動頻率上升，平衡距離有縮短的趨勢。

# 研究結果 $\gamma_{max} - d$

$R$	液滴半徑	$\gamma_{max}$	最大振動加速度
$\mu$	液體運動黏度	$h$	液面高度
$f$	液面垂直振動頻率	$T_s$	振動掃頻週期

目的→探討最大振動加速度對平衡距離的影響



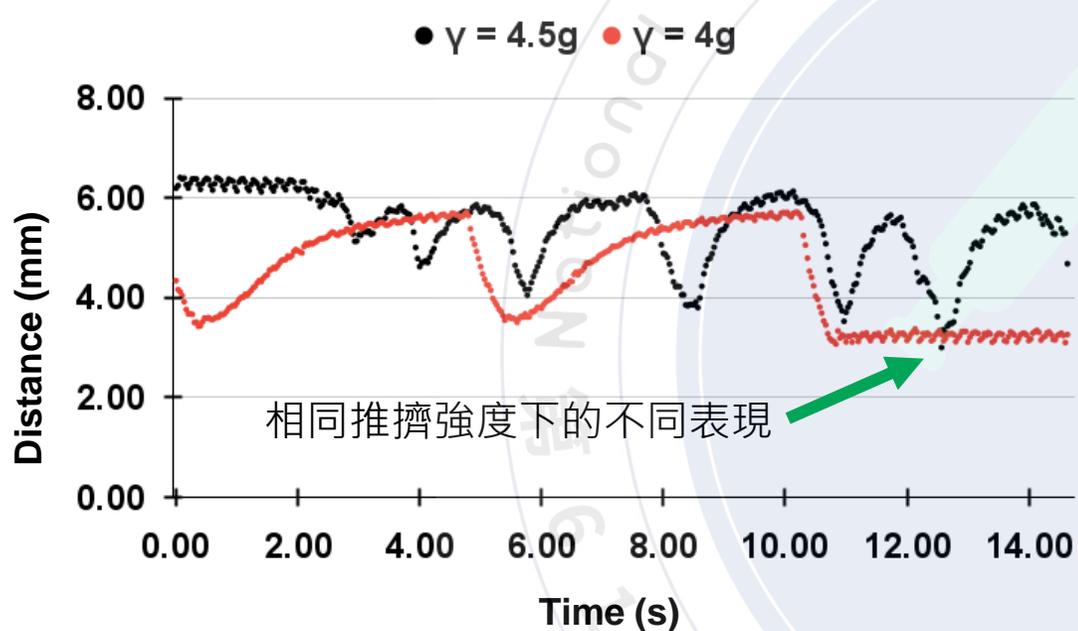
圖五、液面垂直振動加速度對平衡距離的影響 ( 掃頻範圍 25~30Hz )

小結→較大的振動加速度會導致較小的平衡距離。

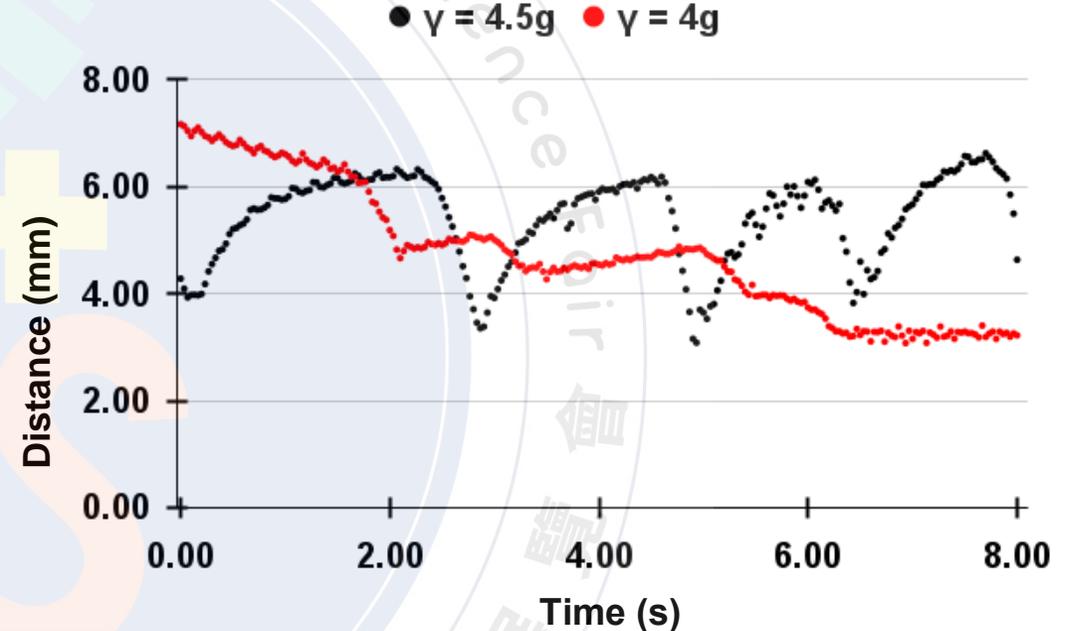
# 研究結果 – 外部干擾



目的→探討外部干擾（推擠）對平衡距離的影響



(a)  $h = 1.9cm, \mu = 350cSt$   
 $f = 25Hz$ , 兩液滴  $R = 1.35mm$



(b)  $h = 2.5cm, \mu = 350cSt$   
 $f = 25Hz$ , 兩液滴  $R = 1.35mm$

圖六、推擠液滴對平衡距離的影響

推擠液滴後釋放，使液滴對自然回彈至平衡距離

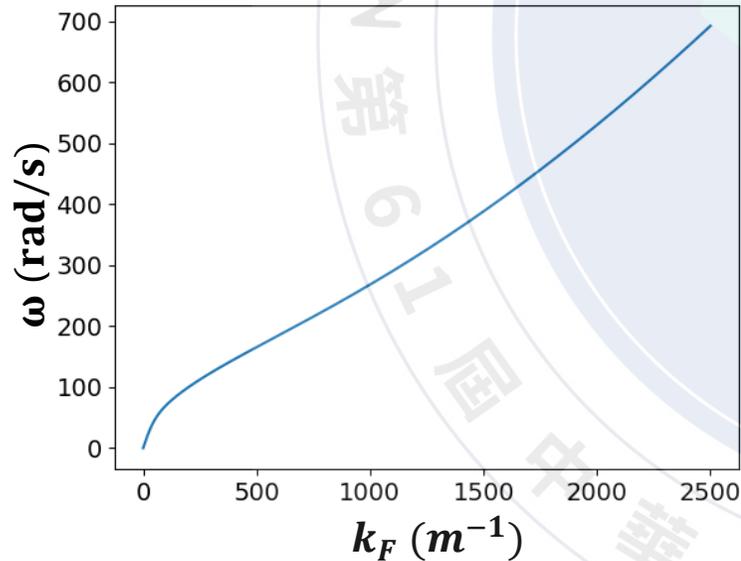
小結→較大的振動加速度使液滴之間有較強的排斥能力。

# $f - d$ 理論

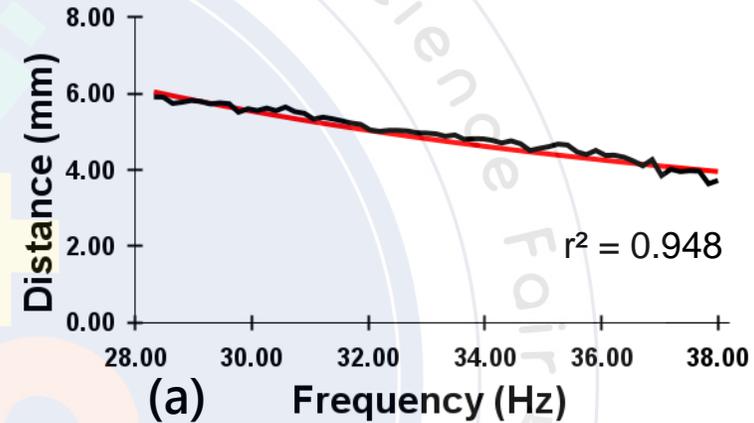
$$\Delta h(r, t) = \frac{A}{\sqrt{t - t_n}} J_0(rk_F) e^{-(t-t_n)/T_F} M_e \cos(\omega t/2)$$

$$d = \frac{3.30}{29.72f - 286}$$

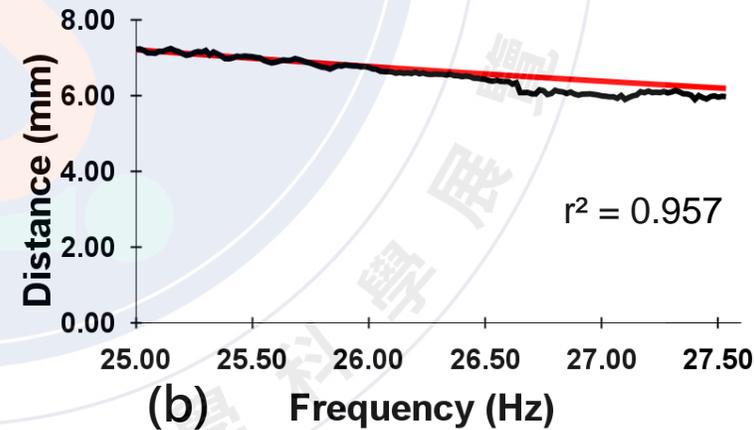
→ 可由  $k_F - \omega$  近似關係並假設  $rk_F$  為定值得出



圖七、 $\omega$  對  $k_F$  的關係圖  
 $h = 2.5\text{cm}, \gamma_{max} = 4\text{g}, \mu = 350\text{cSt}$



$h = 2.5\text{cm}$   
 $\gamma_{max} = 4\text{g}$   
 $\mu = 100\text{cSt}$   
 兩液滴  $R = 1.53\text{mm}$

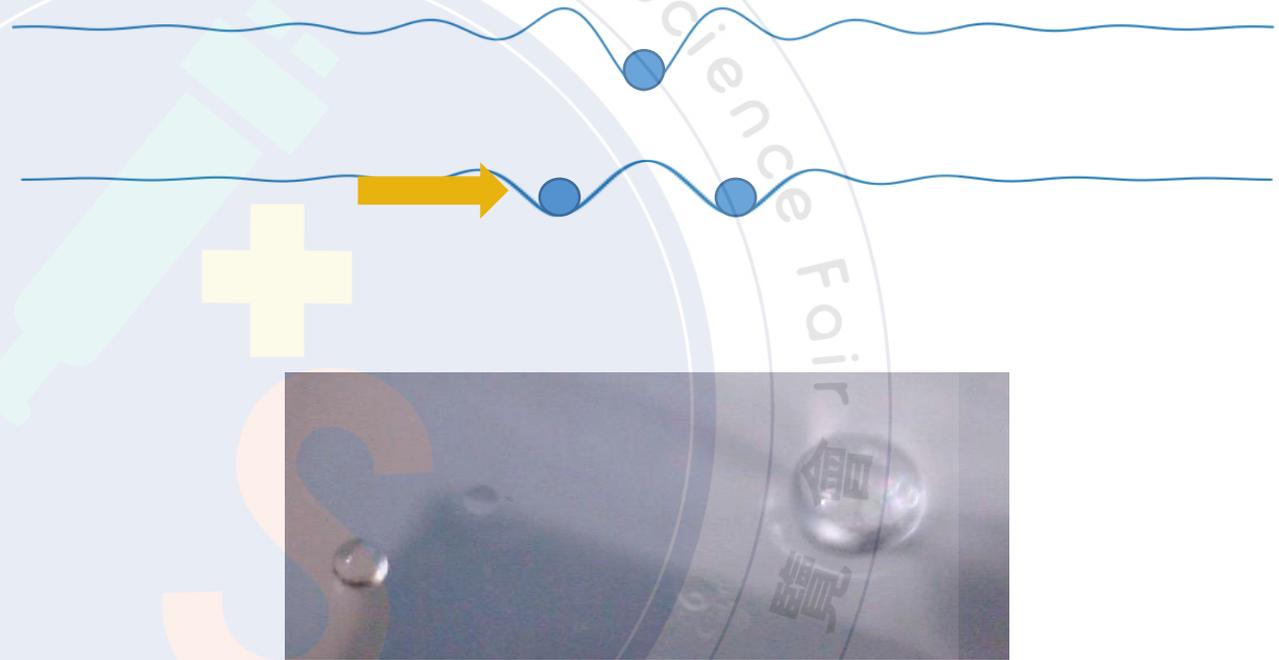


$h = 1.9\text{cm}$   
 $\gamma_{max} = 4\text{g}$   
 $\mu = 350\text{cSt}$   
 兩液滴  $R = 1.03\text{mm}$

圖八、理論平衡距離與實驗數據比較

# 討論

- 垂直振動的頻率上升
  - 表面波波長縮短
  - 液滴對的平衡距離縮短
- 最大振動加速度提升
  - 凹陷主導表面形狀
  - 平衡位置（低點）內縮
  - 液滴對的平衡距離縮短



圖九、與參考資料[2]實驗的比較

加速度上升

撞擊力上升

表面波  
振幅上升

跨越難度  
提升

# 結論

## ■ 振動頻率對液滴對的影響

- 振動頻率與平衡距離呈現負相關。
- 找出了液滴對的平衡距離 $d$ 對振動頻率 $f$ 的關係。

$$d = \frac{3.30}{29.72f - 286}$$

## ■ 最大振動加速度對液滴對的影響

- 最大振動加速度與平衡距離呈現負相關。
- 最大振動加速度的提升會使平衡距離縮短，其原因與液滴造成的凹陷有關。

## ■ 推擠液滴對液滴對的影響

- 推擠液滴可以給予液滴能量去脫離表面波的束縛。
- 若推擠液滴的能量不足，液滴會回彈至平衡距離。

## ■ 未來展望與實際應用

- 將加速度加入平衡距離關係式中。
- 生物與化學領域操控微流體分離距離。

# 參考資料

[1] Walker, J. 1978 Drops of liquid can be made to float on the liquid. What enables them to do so? The Amateur Scientist, Sci. Am. 238, 151–158.

[2] Moláček, J., & Bush, J. (2013). Drops bouncing on a vibrating bath. Journal of Fluid Mechanics, 727, 582–611. doi:10.1017/jfm.2013.279

[3] Moláček, J., & Bush, J. (2013). Drops walking on a vibrating bath: Towards a hydrodynamic pilot-wave theory. Journal of Fluid Mechanics, 727, 612–647. doi:10.1017/jfm.2013.280

[4] Milewski, P., Galeano-Rios, C., Nachbin, A., & Bush, J. (2015). Faraday pilot-wave dynamics: Modelling and computation. Journal of Fluid Mechanics, 778, 361–388. doi:10.1017/jfm.2015.386