

# 中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

**第二名**

051805

**黏滯流體與固態粒子對馬克士威爾滾輪的物理  
影響及探討**

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者： 高二 李騏維	指導老師： 李瑋舒
---------------	--------------

關鍵詞：黏滯力、角加速度、力矩

## 摘要

將不同填充比例的黏滯流體放入直徑 9.00cm 的空心帶軸圓盤中(稱作黏流滾擺)，以繩子繞圓盤軸芯捲至 27.96cm 高處落下，實驗發現填充比例為 19.950%~81.145%時，相對其他填充比例的黏流滾擺以非常緩慢的速度落下，不會彈跳且圓盤角速度具有規律的週期性，當釋放高度大於 10.53cm 無彈跳填充範圍會一直維持在 19.950%~81.145%，不受高度影響。相對無填充任何液體的空圓盤，黏流滾擺落下時間約為空圓盤的 93 倍。改以黏滯性較小的水作為填充液體則不存在無彈跳填充區域，且彈跳次數不如黏流滾擺有彈跳區域的彈跳次數。改以填充固態粒子(細沙)，實驗發現填充比例 4.242%~93.196%時，細沙滾擺會固定於高空而不落下。比較黏滯流體、水、細沙三種填充物質，黏滯流體緩衝效果與穩定性最佳。

## 壹、研究動機

直上直下的溜溜球是我們日常普遍隨手可得的玩具，而最傳統的溜溜球，它的軸心與圓盤是無分離的，所以無論是向下丟還是靜止釋放，都不需要額外的力量向上拉之，溜溜球會因角動量守恆的關係自動向上滾動。而馬克士威爾滾輪與傳統型溜溜球的物理原理大致相同，由側面觀看便是溜溜球的運動情形，如下圖 1，但馬克士威爾滾輪是由兩條線及實心圓盤所組成，相較於溜溜球會更加穩定。我突發奇想，若將滾擺由實心改為空心，並加入黏滯流體或其他不同介質，會產生什麼樣的物理現象？

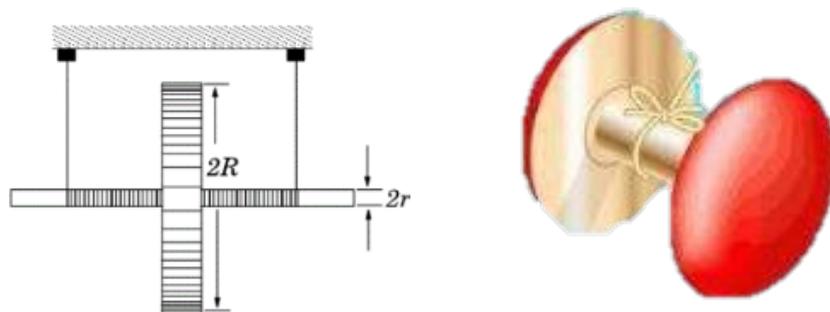


圖 1 由左至右分別是馬克士威爾滾輪示意圖與傳統型溜溜球

## 貳、研究目的

- 一、探討空圓盤的運動情形。
- 二、探討不同填充比例的黏滯流體滾擺在同高度釋放的運動情形。
- 三、探討不同釋放高度對黏流滾擺的影響。
- 四、探討黏流滾擺無彈跳範圍的週期性。
- 五、探討滾擺填充水的運動情形。
- 六、探討滾擺填充細沙的運動情形。

## 參、研究設備及器材

表 1 實驗設備

編號	設備名稱	用途	圖示
1	不鏽鋼棒軸芯	支撐圓盤運動	
2	蜂蜜與紅細沙	待測物: 黏滯流體 固態粒子	
3	側面:Iphone11 MWM22TA/A 慢動作:1080pHD/240fps/480MB 錄影:4K/30fps/400MB	錄影紀錄 TRACKER 分析	
4	角鐵架(含釋放帶裝置) (寬 26.50cm、高 48.00cm、長 30.80cm)	支撐固定整個 滾擺運作	

5	電子秤	測量物品重量	
6	(大)透明塑膠圓盤直徑 9.00cm	裝載液體	
7	無限力量感應器 Pasco PS-3202	測繩張力	
8	軟體分析:Tracker;Auto CAD2022	圓盤追蹤;質心尋找	

表 2-1 液體裝置變因及各規格表

編號	液體種類	液體轉動慣量	液體質量	總轉動慣量	液體佔圓盤容積百分比
單位	--	(g · cm <sup>2</sup> )	(g)	(g · cm <sup>2</sup> )	(%)
C01/D01	空圓盤	0	0.000	815.010	0.000
C(n) C:共 22 組	蜂蜜	I <sub>液</sub> 計算 (肆-二-(三)-3.)	5·(n-1)	815.01+I <sub>液</sub>	$\frac{m_{\text{蜂蜜}}}{175.438}$
D(n) D:共 19 組	水	I <sub>液</sub> 計算 (肆-二-(三)-3.)	對應蜂蜜 I <sub>液</sub> 回推質量	815.01+I <sub>液</sub>	$\frac{m_{\text{水}}}{120.953}$
C29-5	蜂蜜	1102.007	142.360	1809.261	81.145
C29-4	蜂蜜	1107.152	142.960	1815.815	81.487
D29-5	水	1102.007	119.426	1809.261	98.706
D29-4	水	1107.152	119.817	1815.815	99.029

表 2-2 細沙各規格表

編號	待測物	質量	佔圓盤容積百分比
單位	--	(g)	(%)
S(n) S:共 22 組	細沙	4+0.5·(n-1)	$\frac{m_{\text{細沙}}}{182.678}$
S008-1		7.600	4.160
S333-1		170.400	93.278
S334		170.500	93.333

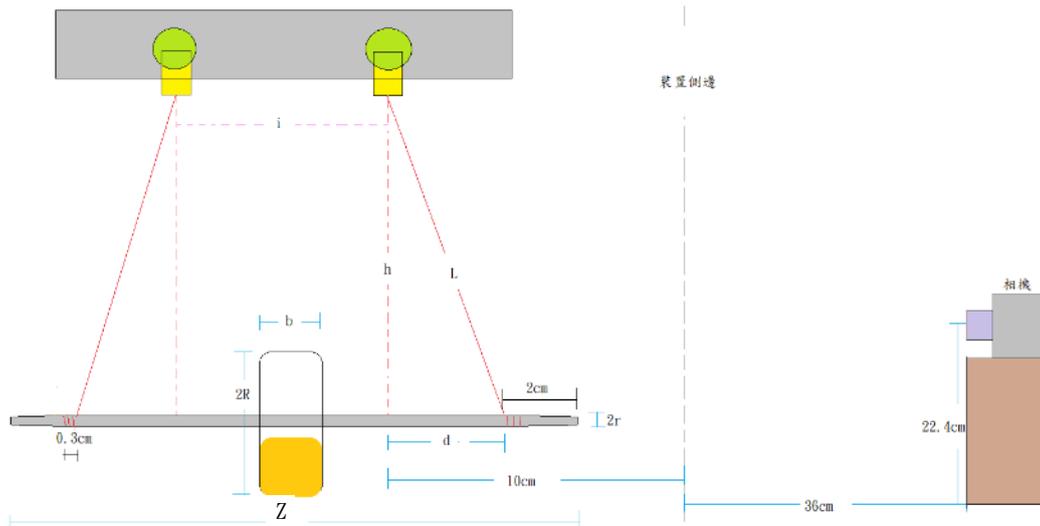


圖 2 裝置未捲繩時的正面示意圖

裝置向上捲時，線與線不重疊，如此會產生線捲越多時，線傾斜的方向會愈朝向中心圓盤，因此為了確保在捲到固定高度時，不讓線的傾斜角度越大，故將線綁靠軸心兩側端點處。

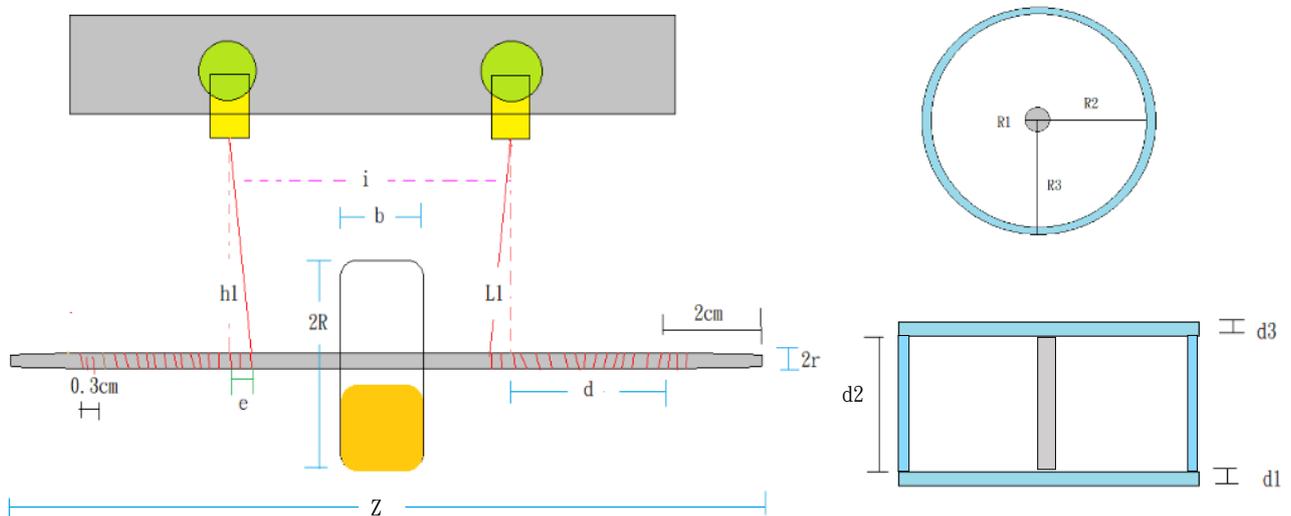


圖 3 左圖為裝置釋放瞬間捲繩正面示意圖。右上圖為空圓盤軸心俯視圖， $R_1$  為軸心半徑、 $R_2$  為圓盤內側半徑、 $R_3$  為外側半徑。右下圖為空圓盤側面透視圖， $d_1$  為圓盤底部厚度、 $d_2$  為圓盤中間空氣塊厚度、 $d_3$  為圓盤上方厚度

表 3 實驗控制變因

磁鐵夾相距 $i$	10.00cm	兩條繩質量	0.390g	繩切面直徑	0.10cm
空圓盤質量	54.230g	空圓盤直徑 $R_3$	9.00cm	空圓盤內側 半徑 $R_2$	4.10cm
蜂蜜密度 $D$	1.45g/cm <sup>3</sup>	塑膠密度 $\rho$	1.00g/cm <sup>3</sup>	落下高度 $h-h_1$	27.96cm
棒軸長 $Z$	18.00cm	棒軸直徑 $R_1$	0.25cm	棒軸質量	3.000g
$d_1$	0.30cm	$d_2$	2.30cm	$d_3$	0.10cm

## 肆、研究過程及方法

### 一、研究過程及方法

- (一) 將直徑 9.00cm 的透明塑膠空圓盤，在雙側中心點利用高溫鐵棒熔出直徑 0.50cm 圓洞。
- (二) 先將鐵棒穿入圓盤底部的圓洞，把圓洞縫隙利用雙面膠填滿(不讓液體流出)，再置入 5.000g 的黏滯流體，並使用止瀉帶把旋轉處黏合(不讓液體滲出)，再將空圓盤蓋子蓋上，並把蓋上圓洞縫隙用雙面膠填滿(不讓液體流出)，盤面貼上標示點，以便分析，並架設好攝影機(如圖 2 系統圖)。
- (三) 接著把兩條玉線分別纏在各距鐵棒兩端 2.00cm 處，並捲至垂直高度 27.96cm 處，由釋放帶固定，當蜂蜜完全靜置於圓盤底部後釋放裝置，影片圓盤的路徑與旋轉透過 Tracker 分析，液體質心位置則使用 Auto CAD2022 計算與尋找。
- (四) 填充不同比例的黏滯流體，並重複步驟(二)(三)。
- (五) 改變釋放高度，並重複步驟(二)(三)(四)。
- (六) 將黏滯流體改成黏滯係數較小的水，並重覆步驟(二)(三)(四)。
- (七) 將黏滯流體改成填充細沙，並重複步驟(二)(三)(四)。
- (八) 探討空圓盤、黏流滾擺、水滾擺、細沙滾擺的緩衝效果。

## 二、馬克士威爾滾輪修正成黏流滾擺的物理原理

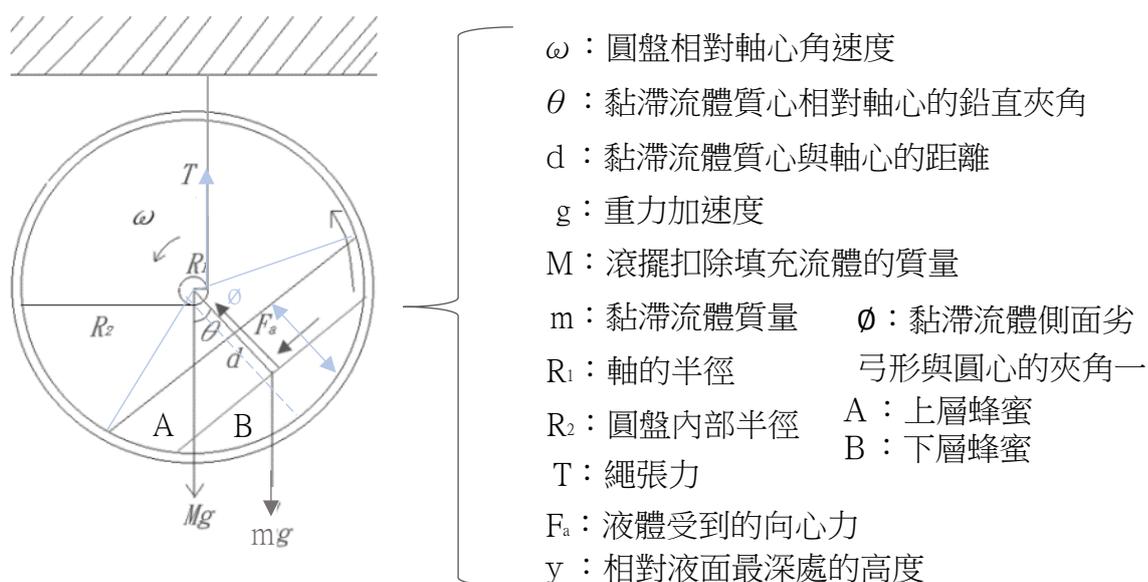


圖 4 黏流滾擺力圖及物理量說明

### (一) 能量

$$E = (Mg h + mg(h - d \cos \theta)) + \frac{1}{2}(M + m)v_{com}^2 + \frac{1}{2}(I_{棒} + I_{圓盤})\omega^2 + \frac{1}{2}I_{液} \omega_{液}^2 + \text{液體內能}$$

由純滾動原理得出  $v_{com} = R_1 \omega$

$$E = (Mg h + mg(h - d \cos \theta)) + \frac{1}{2}\omega^2(R_1^2(M + m) + I_{棒} + I_{圓盤}) + \frac{1}{2}I_{液} \omega_{液}^2 + \text{液體內能} \quad (1)$$

### (二) 力矩

$$\tau = T R_1 - m g s \sin \theta d = I_{總} \alpha_{總} \quad (2)$$

### (三) 黏滯力

$$F_{黏} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

$F_{黏}$ : 黏滯力 /  $\mu$ : 黏滯係數 /  $u$ : 平行液面的速度分量 /  $y$ : 相對液面最深處的高度

### (四) 轉動慣量

$$1. \text{ 棒軸轉動慣量(參數對應如圖 3): } \frac{1}{2} m_{棒} R_1^2 \quad (4)$$

2. 空圓盤轉動慣量(參數對應如圖 3):

$$\frac{1}{2} \pi \rho (d_3 + d_1) \cdot (R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2} \pi \rho (d_1 + d_2 + d_3) (R_3^4 - R_2^4) \quad (5)$$

3. 液體靜置轉動慣量(參數對應如圖 4):

表 4 液體靜置轉動慣量對應表(填充比例未過半與過半)

	填充比例未過半
液體轉動慣量	$\frac{1}{6} \frac{mR_2^2}{2\phi - \sin 2\phi} (6\phi - 2\sin 2\phi - \sin 2\phi \cos 2\phi)$
質量對應 $2\phi$ 關係式	$m = \frac{1}{2} R_2^2 Dh (2\phi - \sin 2\phi)$
	填充比例過半
液體轉動慣量	$\frac{1}{2} \pi D d_2 (R_2^4 - R_1^4) - \frac{1}{6} \frac{(\pi D d_2 (R_2^2 - R_1^2) - m) R_2^2}{2\phi - \sin 2\phi} (6\phi - 2\sin 2\phi - \sin 2\phi \cos 2\phi)$
質量對應 $2\phi$ 關係式	$m = Dh \left( \pi R_2^2 - \left( \frac{1}{2} R_2^2 (2\phi - \sin 2\phi) \right) \right)$

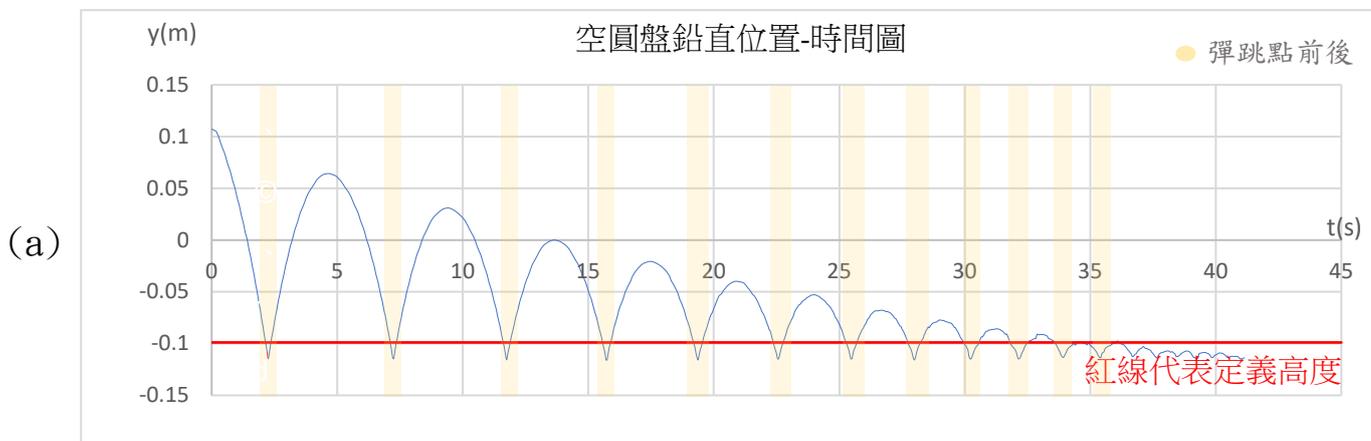
## 伍、研究結果

### 一、空圓盤運動情形(釋放高度 27.96cm)

**彈跳次數:**計算方式滾擺到達最低點後，可上旋起超過一圈則納入彈跳次數，也就是軸心周長 0.01cm(簡稱定義高度，如下圖 5(a)紅線)。

空圓盤參數如下表，物理量如下圖 5。

名稱	編號	空圓盤轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
空圓盤	C01	814.950	0.000	0.000	12





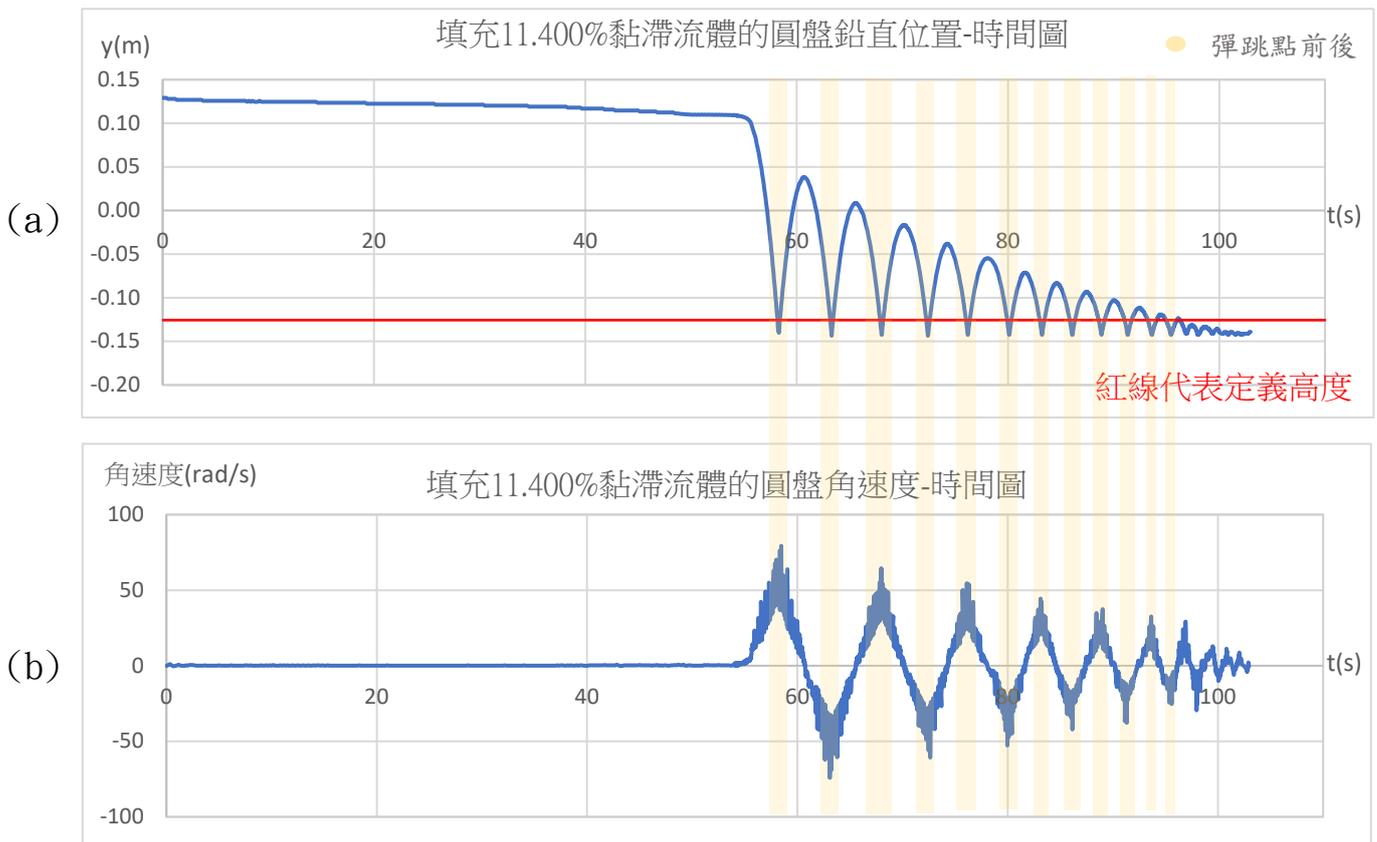
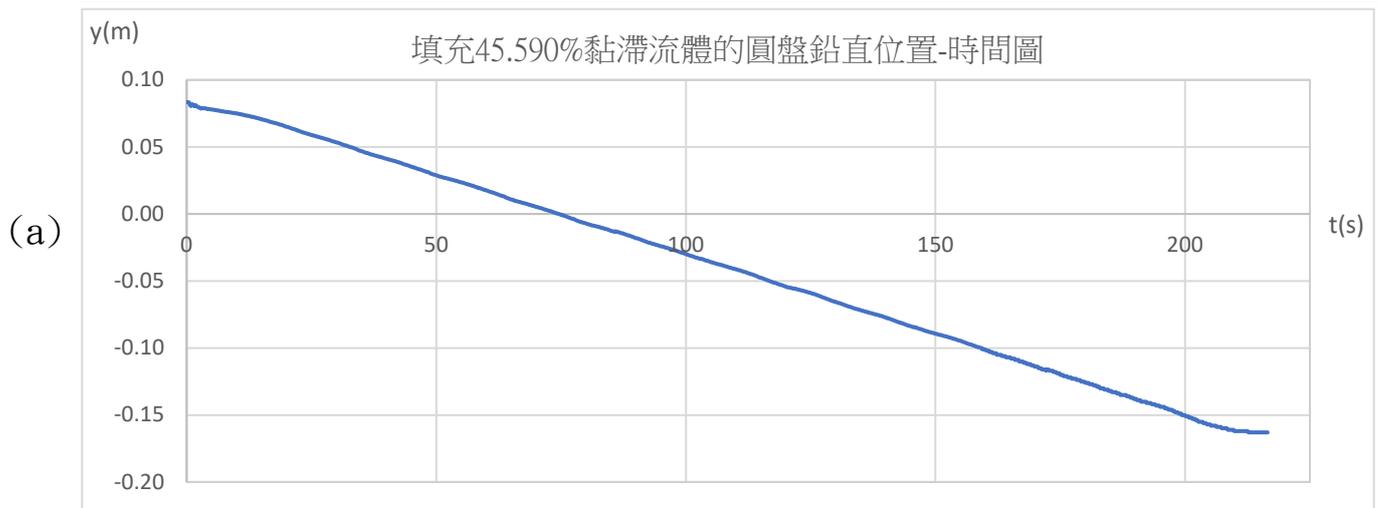


圖 6 (a) (b)分別為第一類型填充比例 11.400%(C05)的  $y-t$  圖與  $\omega-t$  圖

(二) 黏流滾擺第二類型(無彈跳)

類型	名稱	編號	液體靜置轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	空圓盤轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	填充比例 (%)	液體質量(g)	彈跳次數
二	無彈跳	C17	720.848	814.950	45.590	80.000	0



(b)

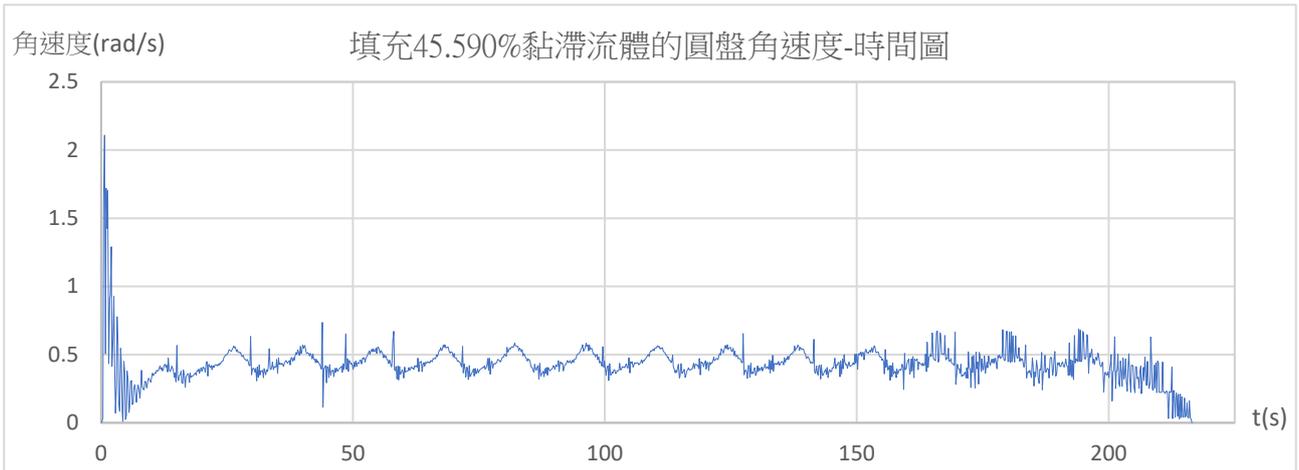
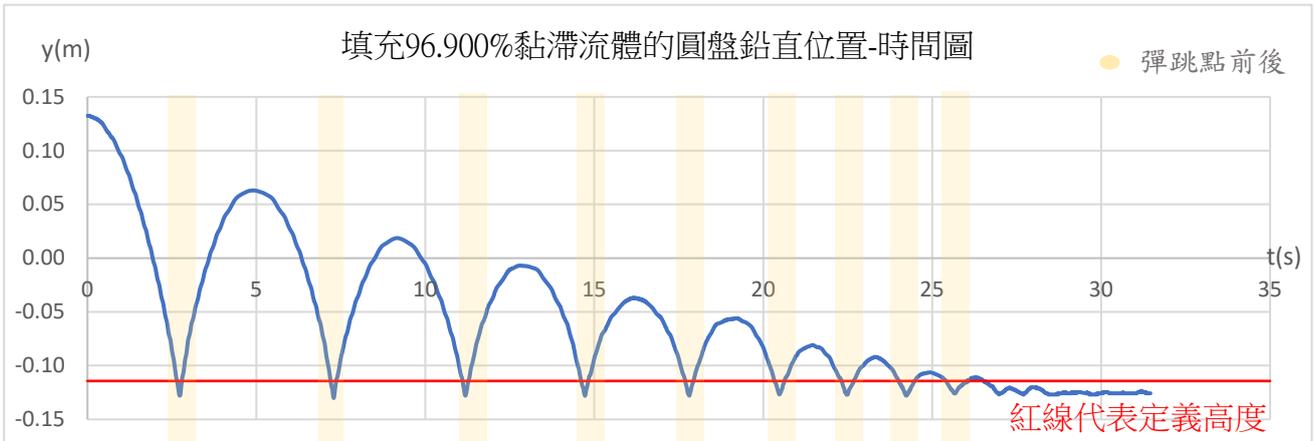


圖 7 (a) (b)分別為第二類型填充比例 45.590%(C17)的 y-t 圖與 $\omega$ -t 圖

(三) 黏流滾擺第三類型(過半且能彈跳)

類型	名稱	編號	液體靜置轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	空圓盤轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	填充比例 (%)	液體質量 (g)	彈跳次數
三	過半且能彈跳	C35	1388.731	814.950	96.900	170.000	9

(a)



(b)

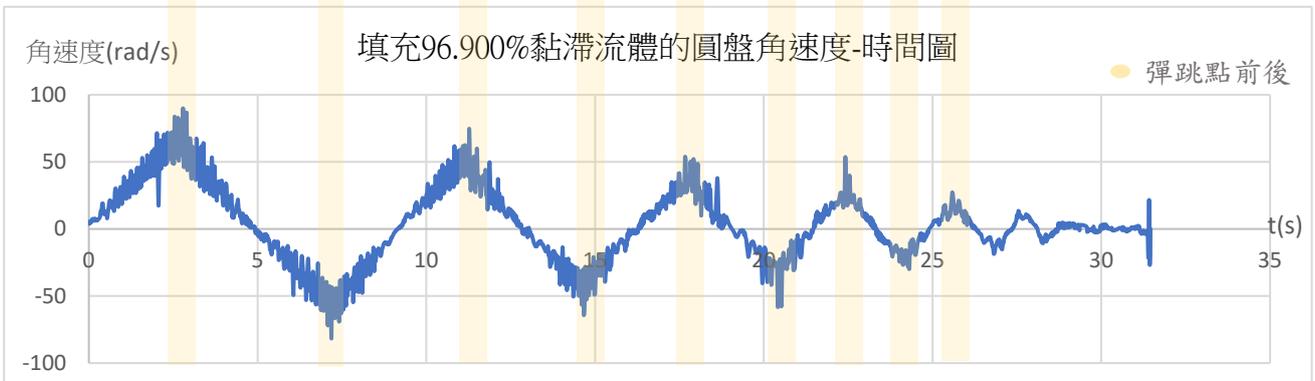


圖 8 (a)(b)分別為第三類型填充比例 96.900%(C35)的 y-t 圖與 $\omega$ -t 圖

### 三、填充不同比例的水滾擺運動情形

以下挑選與黏流滾擺呈現數據有相同靜置液體轉動慣量來呈現。

(一) 水滾擺運動情形(與黏流滾擺第一類型 C05 有相同的液體靜置轉動慣量)

填充液體	類型	編號	液體靜置轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	空圓盤轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
水	對應黏流滾擺第一類	D05	256.312	814.950	17.719	21.439	2

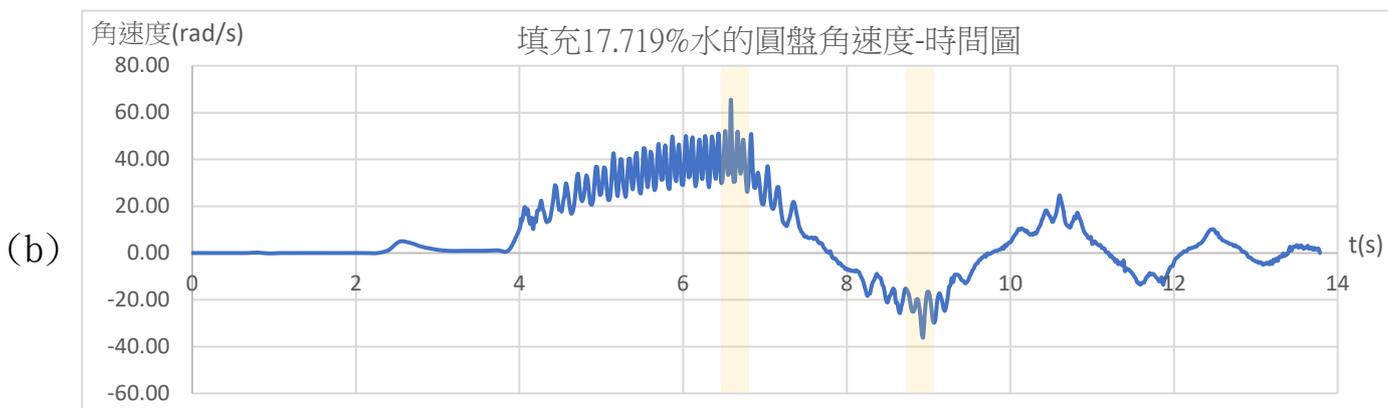
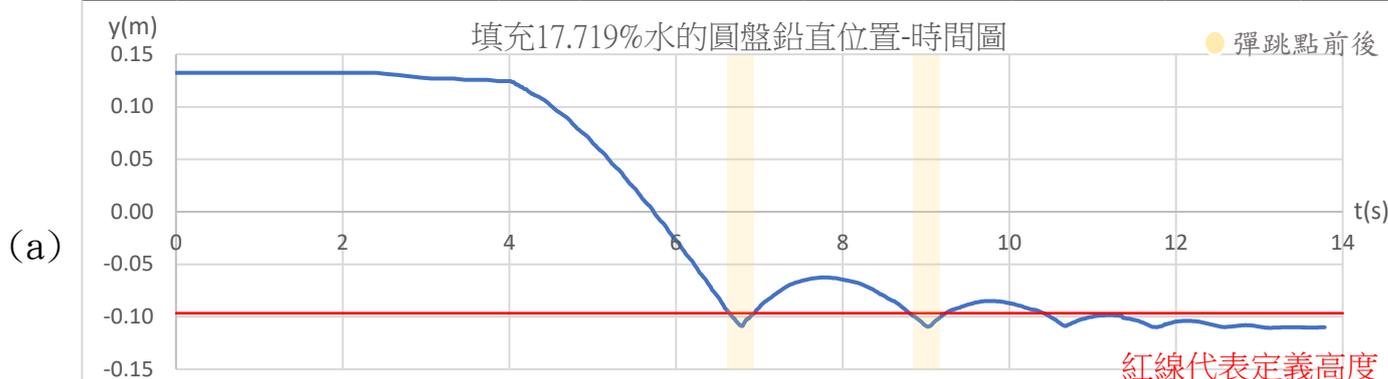


圖 9 (a)(b)分別為填充比例 17.719%水滾擺(D05)的  $y-t$  圖與  $\omega-t$  圖

(二) 水滾擺運動情形(與黏流滾擺第二類型 C17 有相同的液體靜置轉動慣量)

填充液體	類型	編號	液體靜置轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	空圓盤轉動慣量( $g \cdot cm^2$ )	填充比例(%)	液體質量(g)	彈跳次數
水	對應黏流滾擺第二類	D17	720.847	814.950	83.674	101.239	3

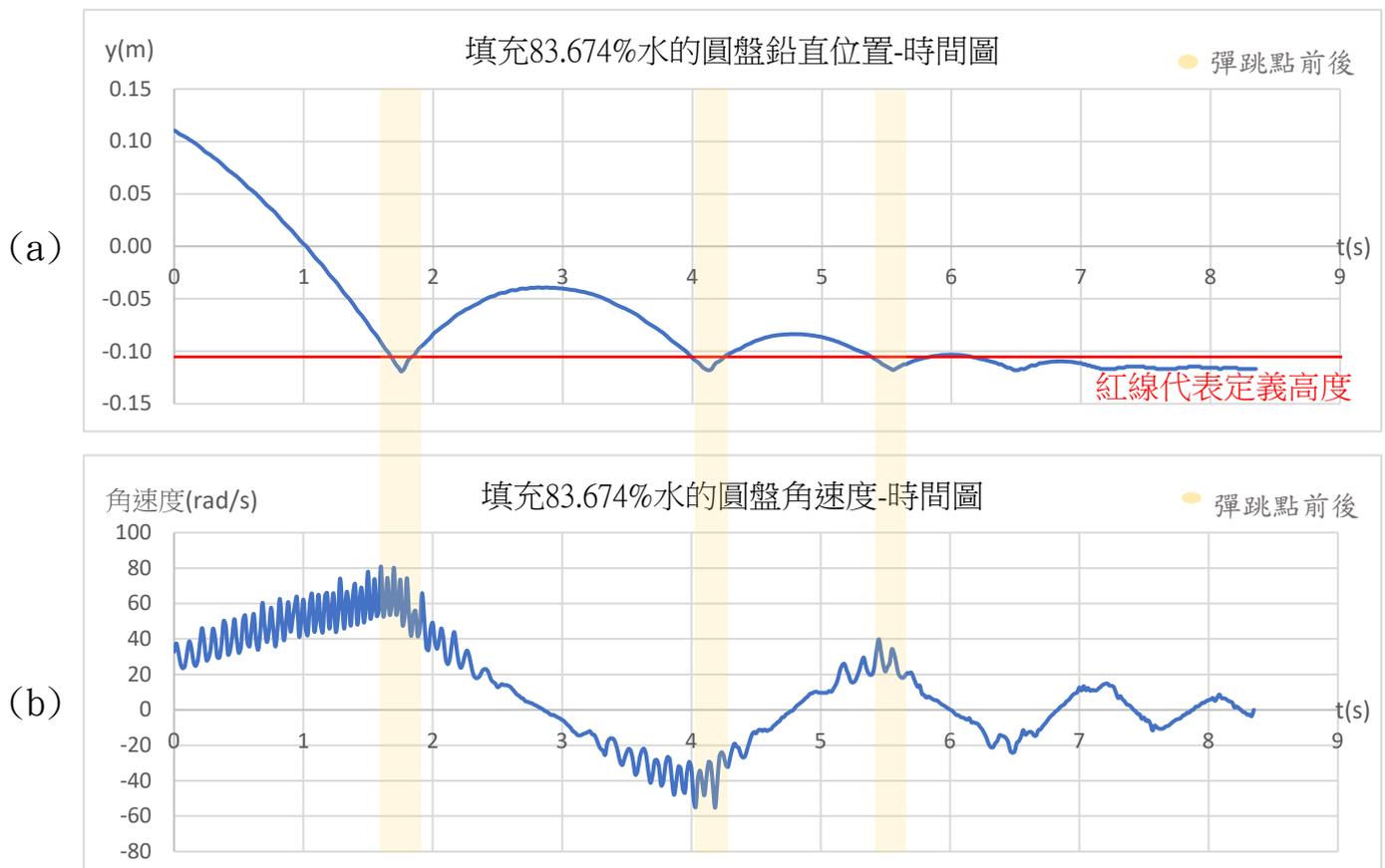


圖 10 (a)(b)分別為填充比例 83.674%水滾擺(D17)的 y-t 圖與  $\omega$ -t 圖

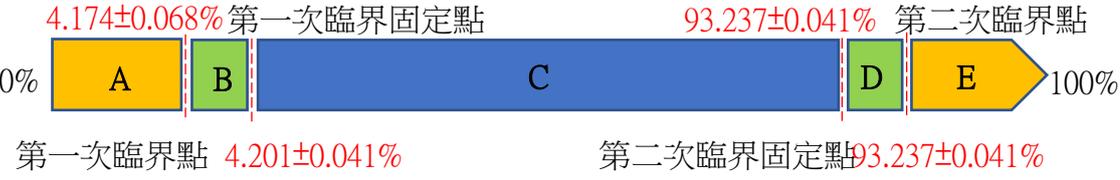
(三) 水滾擺運動情形(與黏流滾擺第三類型 C35 有相同的液體靜置轉動慣量)

因蜂蜜與水的密度有差異( $\frac{D_{\text{蜂蜜}}}{D_{\text{水}}} = 1.45$ )，所以即使裝滿水也無法達到對應所有黏流滾擺第三類型的液體靜置轉動慣量。

#### 四、填充不同比例細沙滾擺運動情形

表 6 細沙滾擺的類型、名稱、填充比例對照圖表

類型	A	B	C	D	E
名稱	未過半且能彈跳	未過半且無彈跳	中途即固定不動	已過半且無彈跳	已過半且能彈跳
填充比例(%)	0.000~4.174 ±0.068	4.174±0.068 ~4.201±0.041	4.201±0.041 ~93.237±0.041	93.237±0.041~ 93.237±0.041	93.237±0.041 ~100.000

擇一樣品圖片與影片來呈現	 <a href="#">2.463%(S002)</a> 原速影片	 <a href="#">4.105%(S008)</a> 原速影片	 <a href="#">93.059%(S333)</a> 原速影片	沙子過半之後與圓盤的摩擦力增大，使沙子不容易掉落，導致圓盤易高速轉動，不容易找到 D 區。	 <a href="#">94.154%(S335)</a> 原速影片
分佈圖	 <p>4.174±0.068% 第一次臨界固定點      93.237±0.041% 第二次臨界點</p> <p>0%      A      B      C      D      E      100%</p> <p>第一次臨界點 4.201±0.041%      第二次臨界固定點 93.237±0.041%</p>				
臨界固定點	跨過此填充比例，則滾擺將於落下途中固定住，無法降至最低點。				

以下每一種類型各挑一項樣品來呈現實驗數據。

(一) 細沙滾擺 A 類型(未過半且能彈跳)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	A(未過半且能彈跳)	S001	2.189	4.000	2

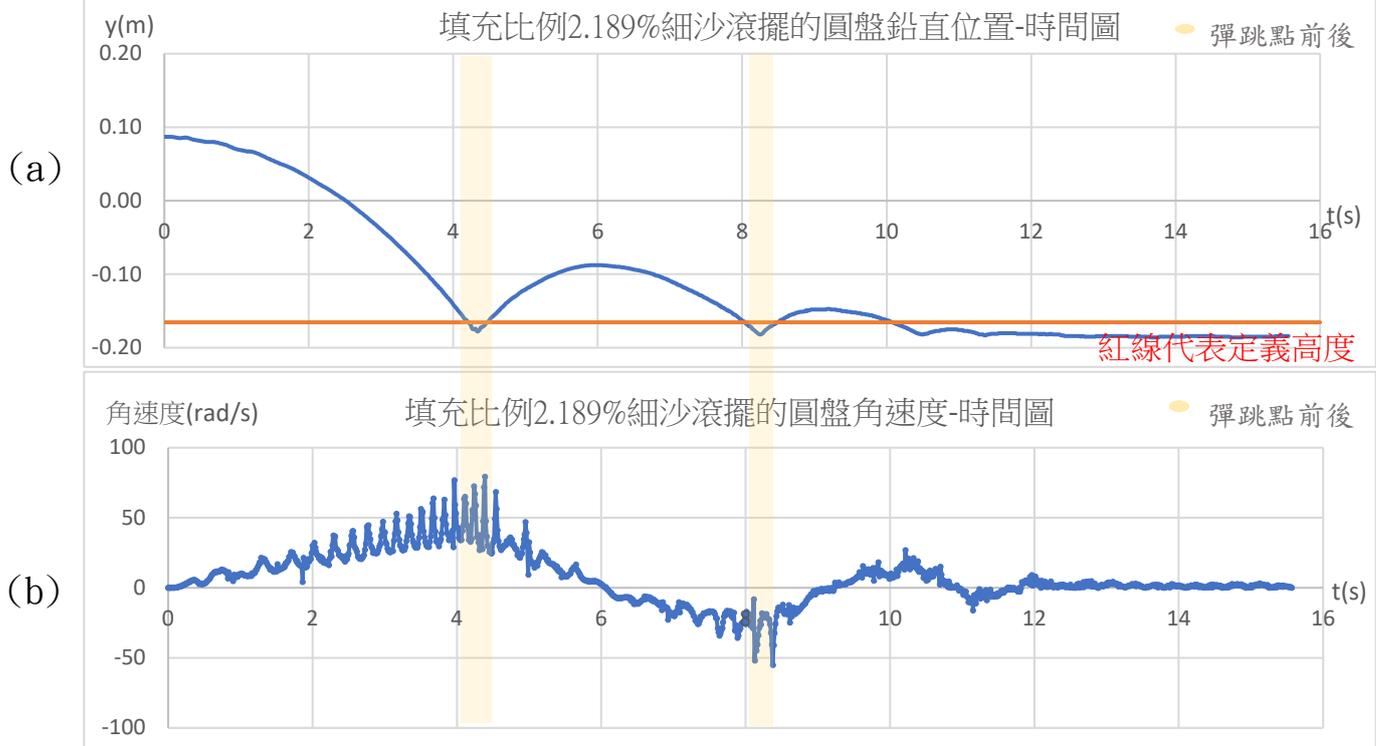


圖 11 (a)(b)分別為 A 類型(未過半且能彈跳)填充比例 2.189%(S001)細沙滾擺 y-t 圖與  $\omega$ -t 圖

(二) 細沙滾擺 B 類型(未過半且無彈跳)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	B(未過半且無彈跳)	S008	4.105	7.500	0

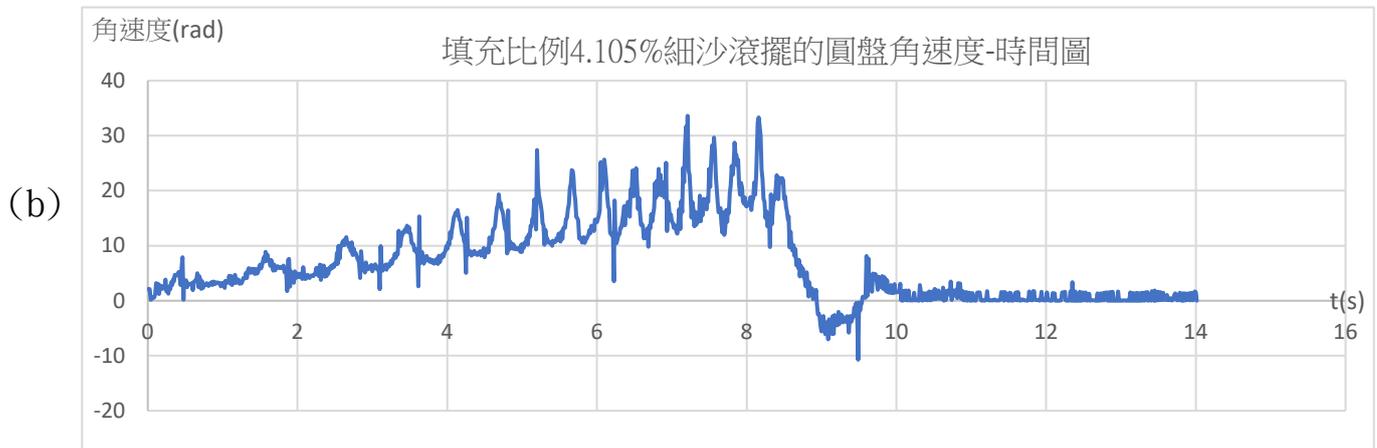
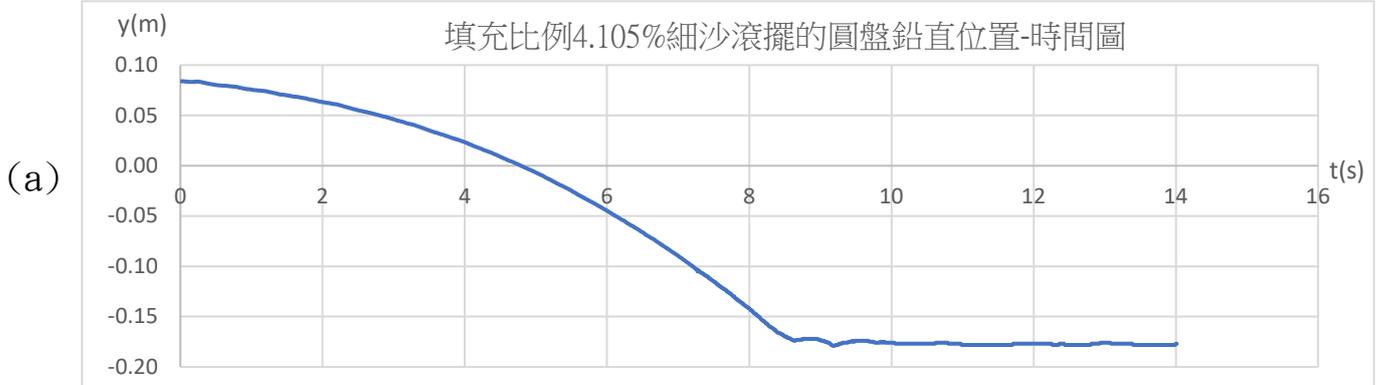
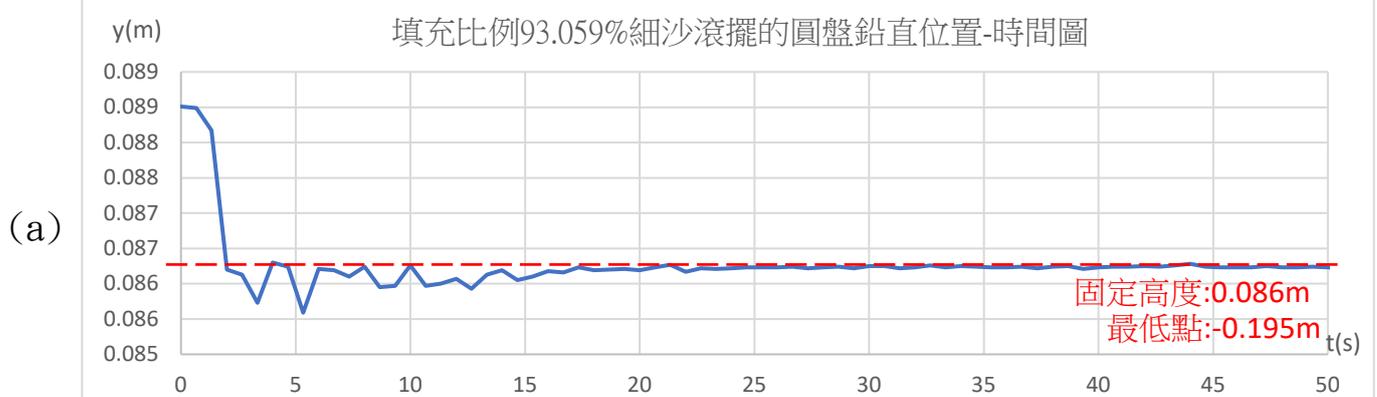


圖 12 (a)(b)分別為 B 類型(未過半且無彈跳)填充比例 4.105%細沙滾擺(S008)y-t 圖與  $\omega$ -t 圖

(三) 細沙滾擺 C 類型(中途即固定不動)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	C(中途即固定不動)	S333	93.059	170.000	0



(b)

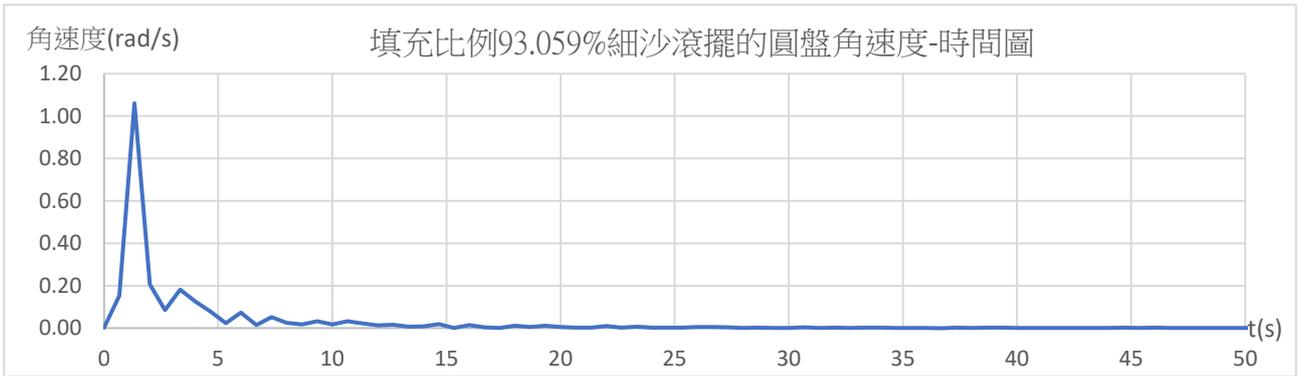
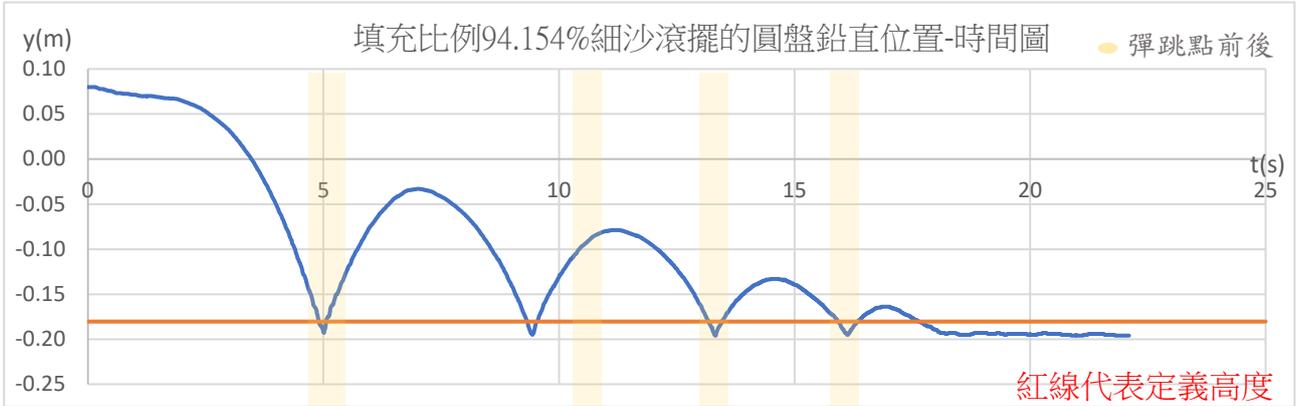


圖 13 (a)(b)分別為 C 類型(中途即固定不動)填充比例 93.059%細沙滾擺(S333)y-t 圖與 $\omega$ -t 圖

(四) 細沙滾擺 E 類型(過半且能彈跳)

填充物質	類型	編號	填充比例(%)	質量(g)	彈跳次數
細沙	E(過半且能彈跳)	S337	94.154	172.000	4

(a)



(b)

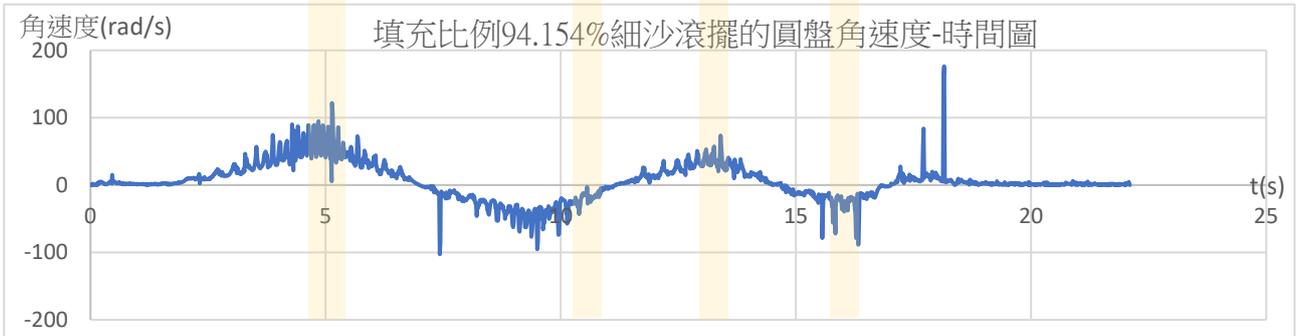


圖 14 (a)(b)分別為 E 類型(過半且能彈跳)填充比例 94.154%細沙滾擺(S337)y-t 圖與 $\omega$ -t 圖

## 陸、討論

### 一、黏流滾擺彈跳次數與填充比例的關係

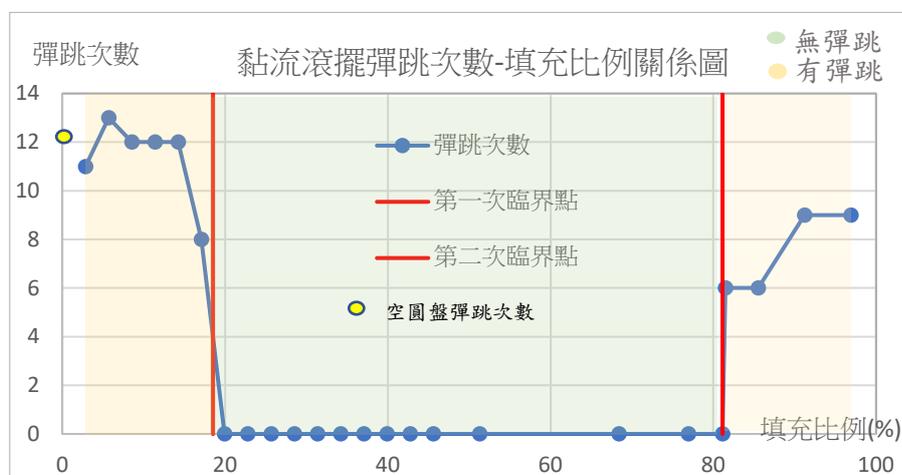


圖 15 黏流滾擺彈跳次數對應填充比例關係圖

黏滯流體填充比例增加至  $18.525 \pm 1.425(\%)$  時，會從「未過半且能彈跳」變成「無彈跳」，此填充比例  $18.525 \pm 1.425(\%)$  稱為**第一次臨界點**，越靠近臨界點的過程彈跳次數會減少。填充比例增加至  $81.132 \pm 0.170(\%)$  時，會從「無彈跳」變成「過半且能彈跳」，此填充比例  $81.132 \pm 0.17(\%)$  稱為**第二次臨界點**，隨著填充比例增加彈跳次數會跟著增加。

### 二、探討造成黏流滾擺三種類型的成因

#### (一) 平衡初始 b 線所夾的 $\theta_b$ 角

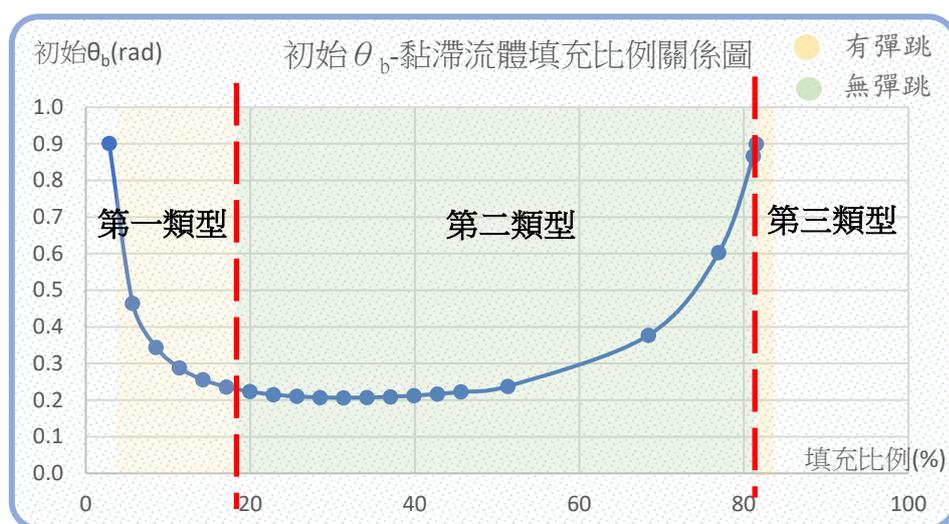


圖 16 初始  $\theta_b$  與黏滯流體填充比例關係圖

滾擺受張力和液體重量兩個力矩，而隨著填充比例不同可找出一個力矩為 0 的角度，此角度為 b 線與垂直軸的夾角(稱為 $\theta_b$ )，如下圖 18，當液體質心轉過 b 線，圓盤從加速變成減速。由第 6 頁式子(2)  $\tau = T R_1 - m g s i n \theta d = I_{總} \alpha_{總}$ ，如果兩個角加速度為 0 時，可得  $T R_1 - m g s i n \theta d = 0$ ，考量等速度情況

$T = (m+M) g$  與不同填充比例造成的 d 和 m，如下表 7，得  $\theta = \sin^{-1}(\frac{(M+m)R_1}{md})$ ，利用 Excel 計算模擬出圖 16 初始平衡角 $\theta_b$ 對應填充比例關係圖。

表 7 填充比例未過半及過半待測物質心與圓心距離d的計算

	填充比例未過半
待測物質心與圓心距離d	$\frac{2}{3} R_2 \left( \frac{2 \sin \phi - \sin 2\phi \cos \phi}{2\phi - \sin 2\phi} \right)$
質量對應 $\phi$ 關係式	$Dh(R_2^2 \phi - R_2^2 \sin \phi \cos \phi)$
	填充比例過半
待測物質心與圓心距離d	$\frac{2}{3} R_2 \sin \phi \left( \frac{\sin^2 \phi}{\pi - \phi + \sin \phi \cos \phi} \right)$
質量對應 $\phi$ 關係式	$Dh(\pi R_2^2 - R_2^2 \phi + R_2^2 \sin \phi \cos \phi)$

(二) 黏流滾擺可彈跳的物理運動情形(第一類型與第三類型)

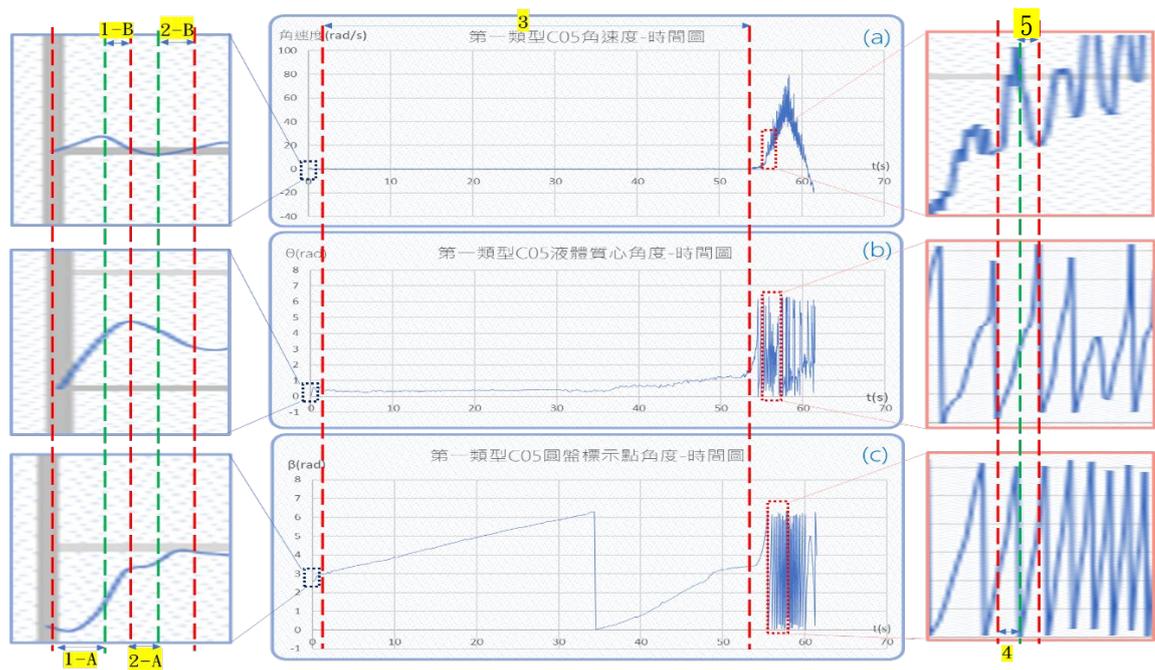


圖 17 黏流滾擺第一類型(未過半且能彈跳)填充比例 11.400%(C05)的物理量變化。

(a)圓盤角速度對應時間圖(b)液體質心角度對應時間圖(c)圓盤標示點角度對應時間圖到達第一次最高點之前。右側圖表由左至右分別為藍色虛線框和紅色虛線框的放大圖。

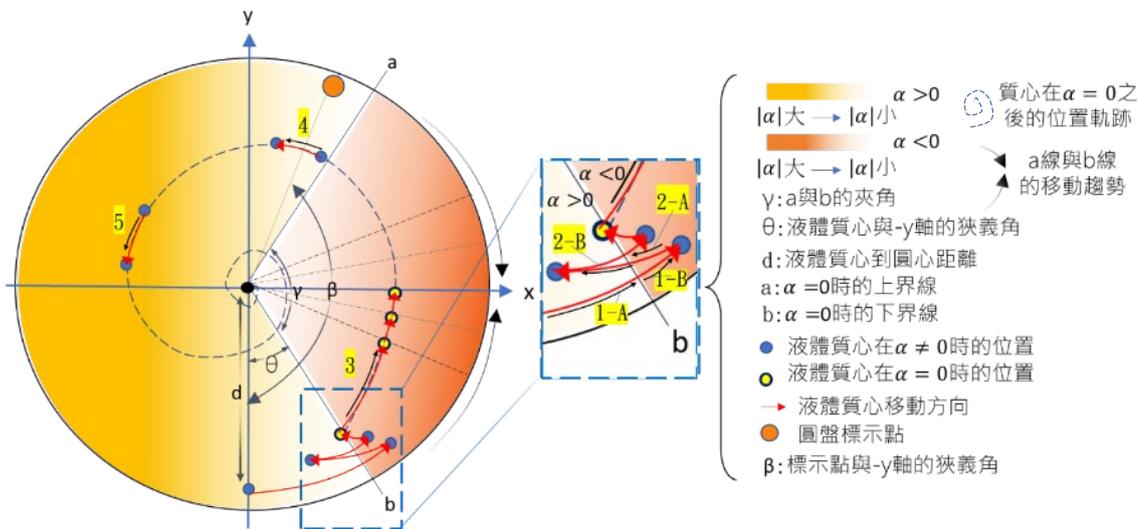


圖 18 黏流滾擺第一類型圓盤中液體質心與各物理量變動圖

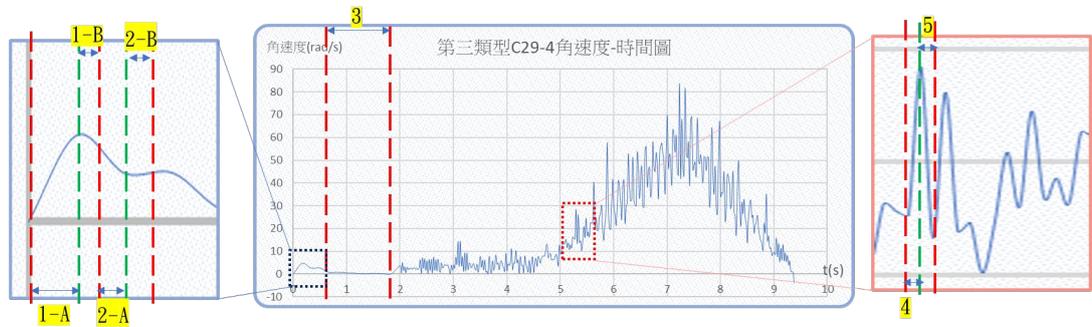
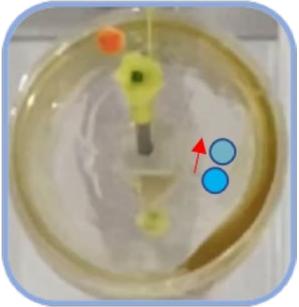
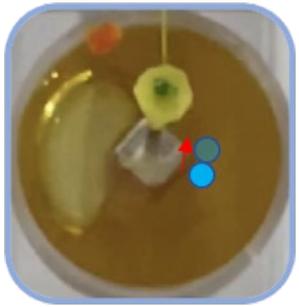
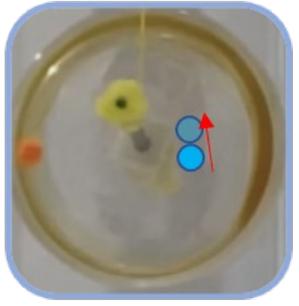
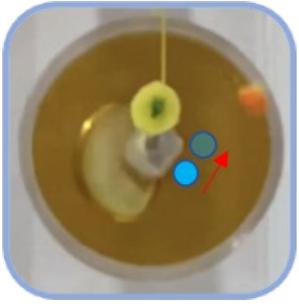
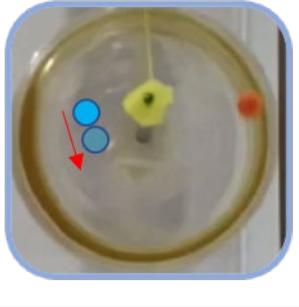
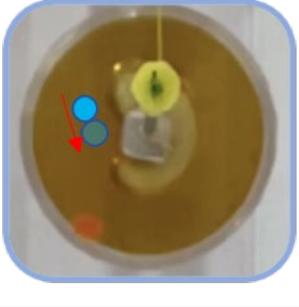


圖 19 黏流滾擺第三類型填充比例 81.487%(C29-4)的圓盤角速度-時間圖及部分放大圖

表 8 第一類型與第三類型各特色區間的物理運動情形(填充比例 11.400%(C05)與填充比例 81.487%(C29-4)為例)

標示	● 質心位置    ● 前後瞬間質心位置    ← 質心行進方向    ● 圓盤標示點	
編號	圖片(第一類型)      圖片(第三類型)      說明	
1-A		將線綁至於軸心右側，並使蜂蜜靜置一段時間，此時蜂蜜重力直接作用於軸心，力矩為 0。釋放後，液體由圖 18 黃色區域( $\alpha > 0$ )到橘色區域( $\alpha < 0$ )，因重力與黏滯力作用下，液體質心回到黃色區域( $\alpha > 0$ )，不斷重複 1、2 來回，最終趨近於 b 線( $\alpha = 0$ )。
1-B		
2-A		
2-B		

1-A	$\theta \uparrow \cdot \sin \theta \uparrow \cdot  TR_1  >  mgd \sin \theta  \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha > 0 \cdot  \alpha  \downarrow$		
1-B	$\theta \uparrow \cdot \sin \theta \uparrow \cdot  TR_1  <  mgd \sin \theta  \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha < 0 \cdot  \alpha  \uparrow$		
2-A	$\theta \downarrow \cdot \sin \theta \downarrow \cdot  TR_1  <  mgd \sin \theta  \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha < 0 \cdot  \alpha  \downarrow$		
2-B	$\theta \downarrow \cdot \sin \theta \downarrow \cdot  TR_1  >  mgd \sin \theta  \Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = \vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha} \Rightarrow \alpha > 0 \cdot  \alpha  \uparrow$		
1 $\leftrightarrow$ 2	液體力矩會愈趨向等於繩張力矩，因此質心愈趨近於 b 線 $\Rightarrow \alpha = 0$ ， $(\alpha_{1-A}\Delta t_{1-A} + \alpha_{1-B}\Delta t_{1-B}) + (\alpha_{2-A}\Delta t_{2-A} + \alpha_{2-B}\Delta t_{2-B}) + (\alpha_{1-A}'\Delta t_{1-A}' + \alpha_{1-B}'\Delta t_{1-B}') + \dots = \Delta\omega = 0 \Rightarrow$ 等角速度(直至液體質心達 b 線)		
3			當液體質心達 b 線，圓盤旋轉的過程中，下層蜂蜜會不斷的殘留於圓壁上，因此使得液體質心與圓心的距離變小(d ↓)，造成 b 線的 $\theta$ 變大( $\theta_b \uparrow$ )，直至液體質心隨著 b 線慢慢移動至 $\theta = 90^\circ$ 。
	第一類型: $\because m$ 小 $\therefore y$ 小 $\Rightarrow \therefore F_{黏} \propto \frac{1}{y} \therefore F_{黏}$ 大，所以相對於無彈跳類型質心容易爬升至 $\theta = 90^\circ$ (加速點)。	第三類型: 如圖 16 第三類型的初始 $\theta_b$ 非常靠近 $90^\circ$ ，所以到達 $\theta$ 為 $90^\circ$ (加速點) 所需時間更短。	
4			當液體質心到達 $\theta = 90^\circ$ 之後，會開始加速，當液體質心切線加速度往上，繩張力矩變大，使加速現象更為明顯。
5			當液體質心轉至左側時，因液體質心加速度使繩張力矩變小， $\alpha < 0$ 。

(三) 黏流滾擺無彈跳的物理運動情形(第二類型)

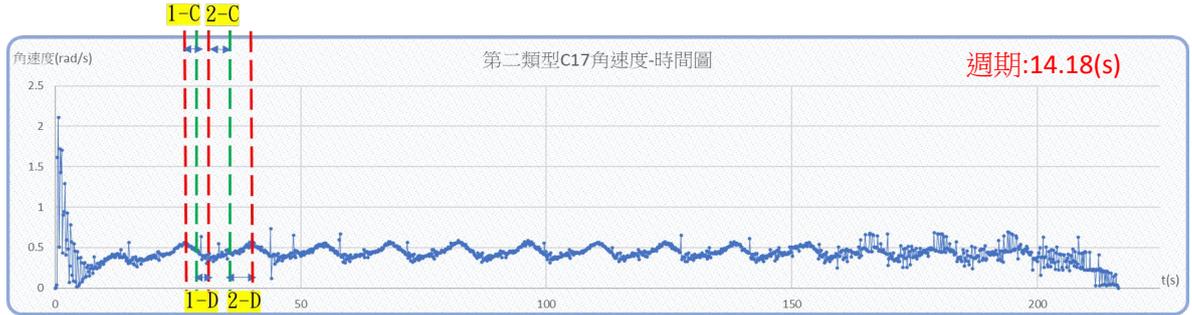


圖 20 黏流滾擺第二類型(無彈跳)填充比例 45.600%(C17)的角速度-時間圖

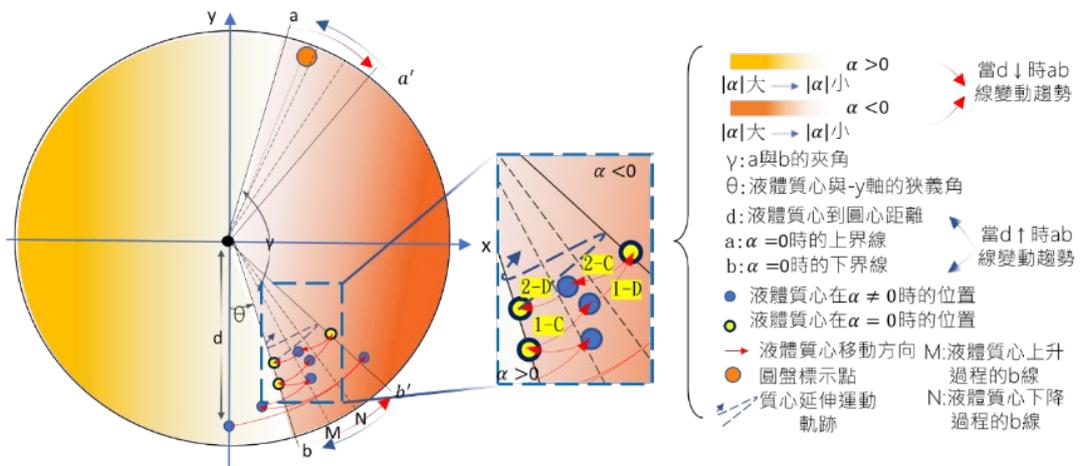


圖 21 黏流滾擺第二類型(無彈跳)圓盤中液體質心與各物理量變動圖

表 9 黏流滾擺第二類型(無彈跳)特色區間物理運動情形(填充比例 45.600%(C17)為例)

標示	● 質心位置	● 下一瞬間質心位置	← 質心行進方向	● 圓盤標示點
編號	圖片	說明		
1-C		當液體質心到達 b 線時，因下方液體不斷殘留於圓壁上，使得 d 變小， $\theta_b$ 上升，而液體質心初始上升速度大於 b 線(圖中 M 線)上升速度，因此順力矩大於逆力矩， $\alpha < 0$ ；液體質心後期上升速度小於 b 線上升速度，因此在質心最高處 $b'$ 線重合，此時 $\alpha = 0$ 。		
1-D				
2-C		但由於黏滯力仍小於重力，因此液體再次滑落，而由於液體的滑落使蜂蜜聚集(d 變大)，因此 $\theta_b$ 又變小，而液體質心初始下降速度大於 $b'$ 線(圖中 N 線)下降速度，因此逆力矩大於順力矩 $\alpha > 0$ ；液體質心後期下降速度小於 $b'$ 線下降速度，因此在質心最低處 b 線重合，此時 $\alpha = 0$ 。		
2-D				

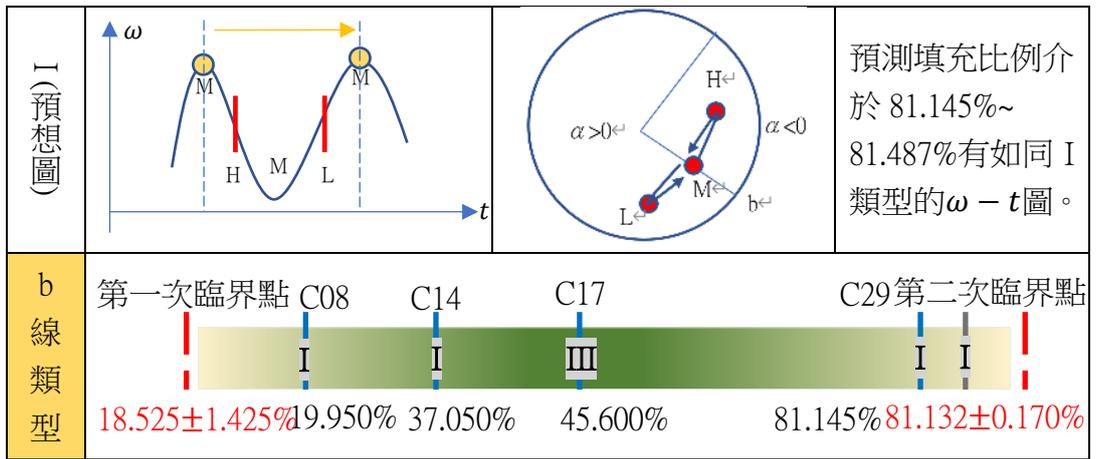
1-C	$\because$ 液體分布周圍( $d \downarrow$ ): $\cdot \theta_b \uparrow$ 、 $\omega_{液} > \omega_b$ 、 $ TR_1  <  mgd \sin \theta  \Rightarrow \alpha < 0$ 、 $ \alpha  \uparrow$
1-D	$\because$ 液體分布周圍( $d \downarrow$ ): $\cdot \theta_b \uparrow$ 、 $\omega_{液} < \omega_b$ 、 $ TR_1  <  mgd \sin \theta  \Rightarrow \alpha < 0$ 、 $ \alpha  \downarrow$
2-C	$\because$ 液體分布聚集( $d \uparrow$ ): $\cdot \theta_b \downarrow$ 、 $\omega_{液} > \omega_b$ 、 $ TR_1  >  mgd \sin \theta  \Rightarrow \alpha > 0$ 、 $ \alpha  \uparrow$
2-D	$\because$ 液體分布聚集( $d \uparrow$ ): $\cdot \theta_b \downarrow$ 、 $\omega_{液} < \omega_b$ 、 $ TR_1  >  mgd \sin \theta  \Rightarrow \alpha > 0$ 、 $ \alpha  \downarrow$
$1 \rightleftharpoons 2$	來回震盪於角速度平均值(指 $1 \rightleftharpoons 2$ )直至落地: $(\alpha_{1-C} \Delta t_{1-C} + \alpha_{1-D} \Delta t_{1-D}) + (\alpha_{2-C} \Delta t_{2-C} + \alpha_{2-D} \Delta t_{2-D}) + (\alpha_{1-C}' \Delta t_{1-C}' + \alpha_{1-D}' \Delta t_{1-D}') + \dots = \sum \Delta \omega = 0$

1. 黏流滾擺無彈跳填充範圍內 $\omega$ - $t$ 圖與 $b$ 線的變化關係

分析 $\omega$ - $t$ 圖與影片可發現 $b$ 線隨著填充範圍不同有不同狀態如下表 10。

表 10 黏流滾擺無彈跳填充範圍內 $\omega$ - $t$ 圖與 $b$ 線的變化關係表

標示	M:質心上升高度平均值；H:質心上升最高處；L:質心下降最低處		
類型	液體質心在 $\omega - t$ 圖的位置	$b$ 線於圓盤運動情形	舉例與備註
I			C08 b 線固定不動，液體質心在 b 線左右來回震盪。
II			C14 b 線隨著液體質心緩慢移動，且無法到達質心最低點或最高點。
III			C17 b 線追在液體質心後方，且可以到達質心最低點或最高點。
II			C29-5 b 線隨著液體質心緩慢移動，且無法到達質心最低點或最高點。



(四) 黏流滾擺臨界點成因

表 11 兩臨界點的成因及是否彈跳的關鍵要素

第一、二類型臨界點附近的差異	第二、三類型臨界點附近的差異
由圖 16 可發現 $\theta_b$ 均小，但第一類蜂蜜少，因此根據 $F_{黏} \propto \frac{1}{y}$ ，當蜂蜜厚度越薄時，黏滯力就越強，使蜂蜜質心越快到達 $\theta = 90^\circ$ (加速點)，讓黏流滾擺滾至底部具有較大的速度彈起。而第二類 $\theta_b$ 小，蜂蜜厚度已不易附著，因此質心不易到達 $\theta = 90^\circ$ (加速點)，導致液體於 $\alpha > 0$ 、 $\alpha < 0$ 來回，使圓盤 $\omega$ 在一小數值震盪直到圓盤落至最低點，此速度已不足以彈起。	由圖 16 可得知，第三類型 $\theta_b$ 本來就接近 $\theta = 90^\circ$ (加速點)，且液體近乎全滿的填充狀態，因此易產生較大的速度並彈起。第二類型於第二三臨界點附近，雖然 $\theta_b$ 很大，附著厚度達飽和後上層液體滑落使其無法容易達到 $\theta = 90^\circ$ (加速點)。
<b>結論</b> 是否彈跳要考慮初始 $\theta_b$ 和液體厚度兩因素。	

### 三、黏流滾擺第二類型(無彈跳)的週期性

(一) 黏流滾擺 b 線在第二類型中上升與落下的成因(以 b 線變化關係第 III 類型為例)

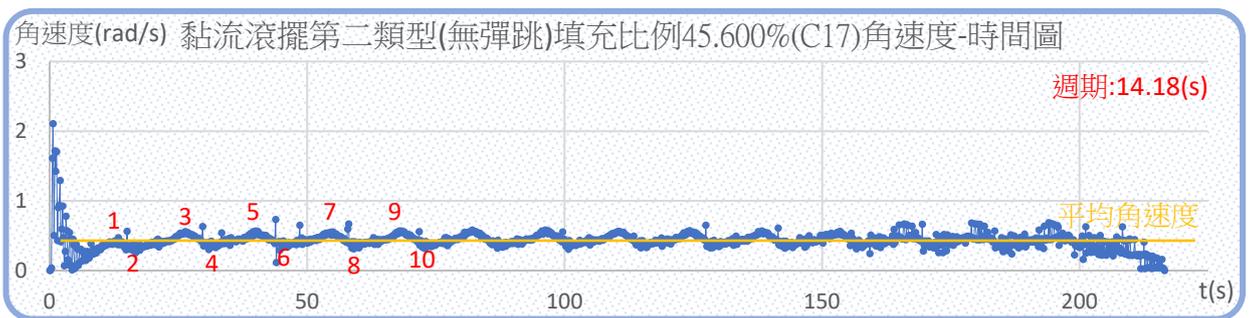


圖 22 黏流滾擺第二類型(無彈跳)填充比例 45.600%(C17)的角速度-時間圖

由圖 22 無彈跳的角速度對應時間圖可以看出角速度具有週期性，且角速度在一平均值來回震盪。從影片可分析出編號 1~10 的液面的斜率如下表 12。

表 12 填充比例 45.600%(C17)液體隨著編號而改變的液面斜率

編號	1	2	3	4	5
圖片					
斜率	0.242	0.281	0.242	0.285	0.245
編號	6	7	8	9	10
圖片					
斜率	0.295	0.250	0.268	0.237	0.271

由表 12 可得知液面斜率會隨著週期忽高忽低，而編號所在位置位於角加速度為 0 的地方，也就是  $\omega - t$  圖的凹點或凸點，顯示出 b 線是會隨著週期忽高忽低，b 線上升與下降分別對應於液體質心至圓心的距離 d 受到附著與滑落變小和變大。

## (二) 黏流滾擺第二類型(無彈跳)的圓盤角速度的週期

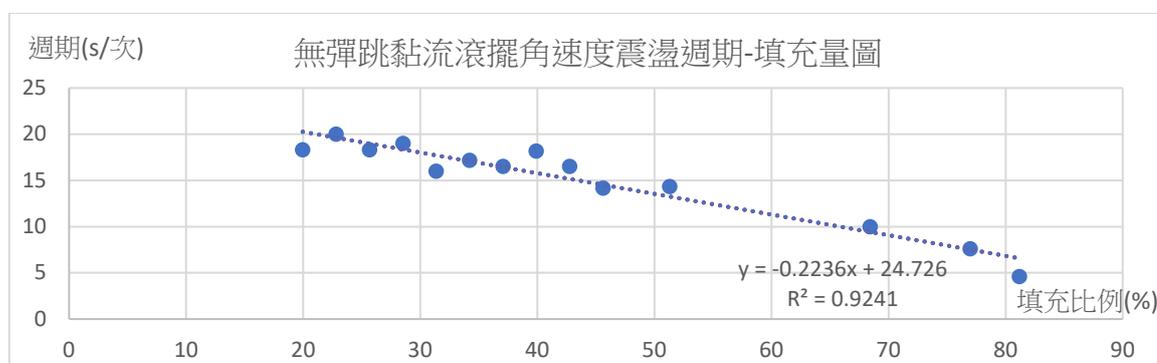


圖 23 黏流滾擺第二類型(無彈跳)範圍與角速度震盪週期對填充比例關係圖

從圖 23 可以得知，當黏流滾擺在第二類型(無彈跳)的範圍內，角速度的震盪週期會隨著填充比例增大而縮小，推測原因為，當填充比例越來越大時，質量也越來越大，造成初始繩張力較大，導致一開始角加速度能讓圓盤飆升至較高的角速度，如下圖 24，當填充比例越大時圓盤平均角速度越大。從圖 22 與表 12 可對照出，角

速度震盪一個週期大致對應圓盤轉一圈，也因此較高填充液體比例的平均角速度將產生較小的角速度震盪週期。

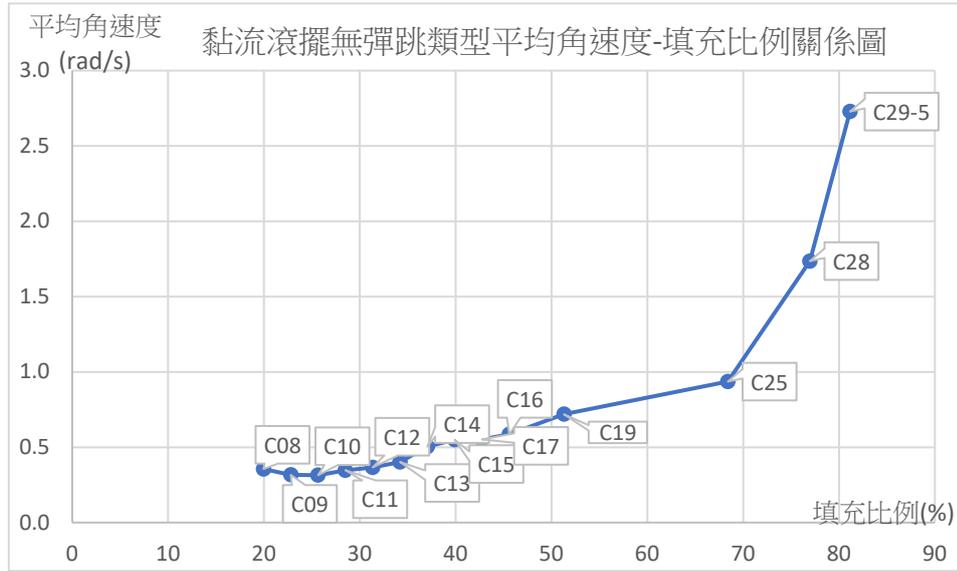


圖 24 黏流滾擺第二類型(無彈跳)的平均角速度

#### 四、黏流滾擺改由不同高度釋放的彈跳狀況

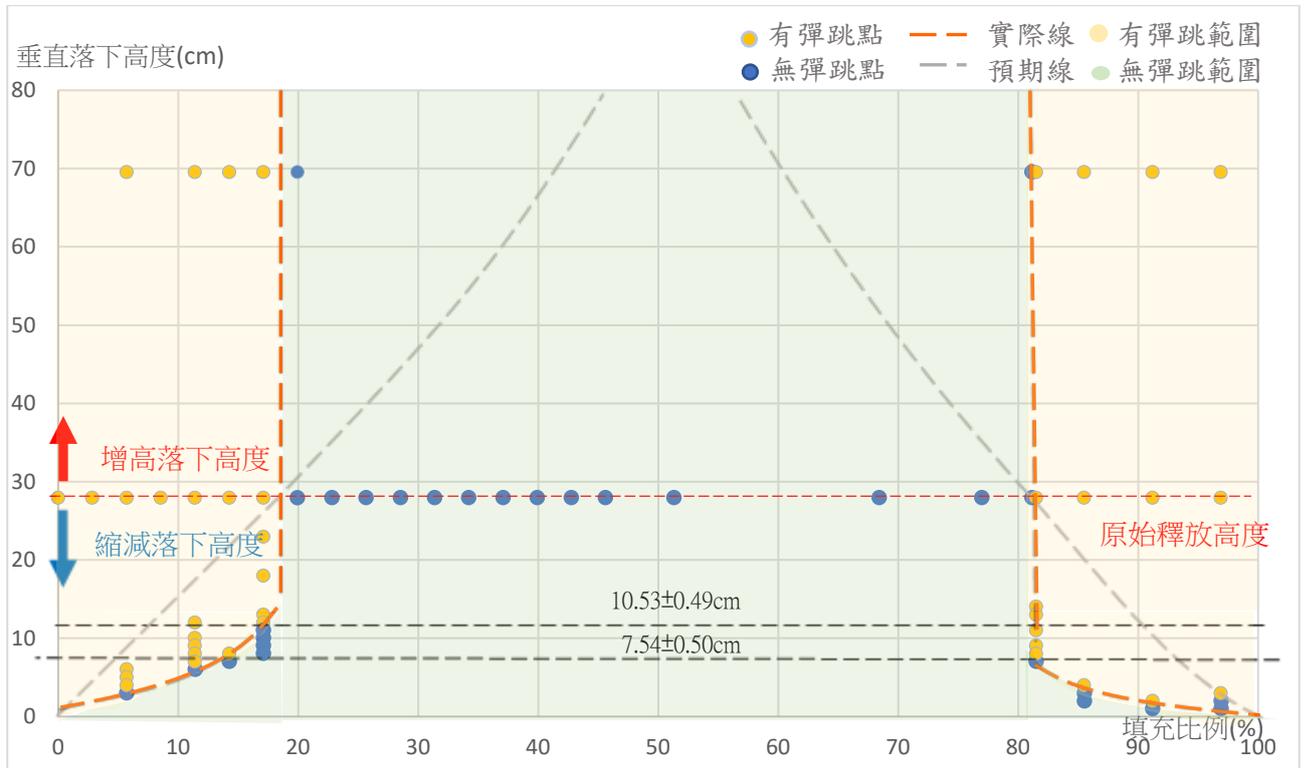


圖 25 不同高度對應填充比例的彈跳類型分佈圖

原先預期從更高的地方釋放，重力位能越大可以使落至最低點速度變大，無彈跳的填充臨界範圍會因此隨高度變大而變窄，如圖 25 灰色虛線的預期線。而實驗結果卻顯示釋放高度超過 10.53cm 無彈跳的填充範圍完全不會改變，代表這個範圍的填充量即使更高釋放也無法彈起，原因可對照圖 22，無彈跳的角速度只在一個平均值震盪，即便釋放高度增加，也無法增加到達最低點的速度，所以彈不起來。另一方面釋放高度如果低於 10.53cm 時，高度可能不足以讓滾擺加速至足夠的速度彈起，導致無彈跳填充範圍變大。

## 五、水滾擺的運動分析.

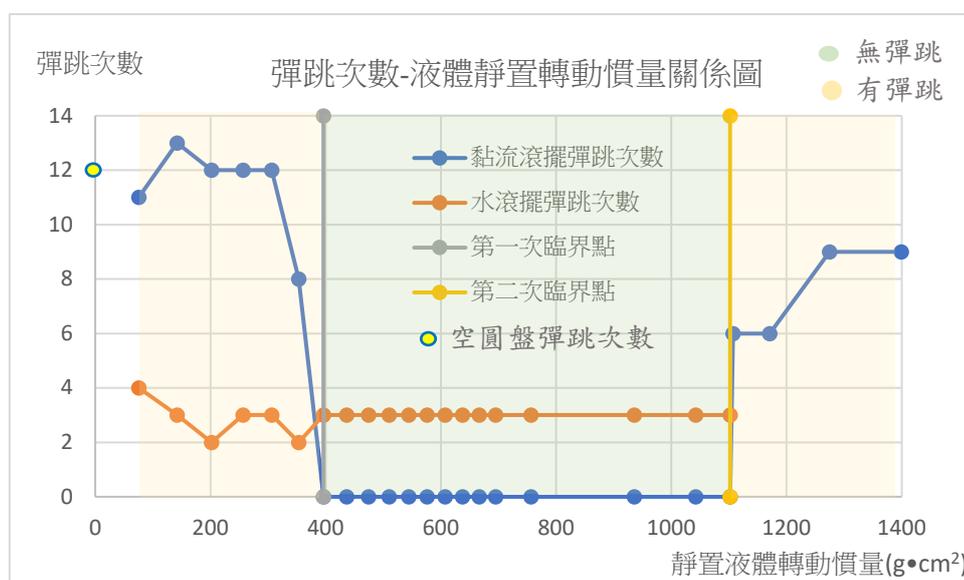


圖 26 水滾擺與黏流滾擺彈跳次數對應液體靜置轉動慣量關係圖

由圖 26 可發現相較於黏流滾擺，水滾擺彈跳次數較不會因填充比例改變而有特殊變化，平均彈跳次數為 3 次左右。在兩種液體均有彈跳的填充比例中，黏流滾擺彈跳次數遠超過水滾擺。

表 12 可彈跳類型黏流滾擺與水滾擺相同初始轉動慣量下落至最低點的角速度變化表

A:第幾次落至最低點 B:每兩次最低點的角速度變化量(rad/s) C:編號						
C \ B \ A	1~3	3~5	5~7	.....	9~11	平均角速度變化量(rad/s)
	C04(黏流滾擺)	-5.331	-11.575	-17.042		-3.317
D04(水滾擺)	-24.364	-13.443	--		--	-18.904

如表 12，可看出黏流滾擺落至最低點的角速度不像水滾擺損耗那麼快，因為水的黏滯係數較小，因此不容易服貼地附著於圓盤，導致滾擺的轉動動能轉移到水面的波動動能，因此黏流滾擺在可彈跳範圍內的彈跳次數大於水滾擺。

而水滾擺沒有無彈跳範圍的原因是，水無法附著於壁面上，因此無法產生持久的順力矩，使得水滾擺無法產生持久的負角加速度區域，因此水滾擺不具有無彈跳範圍。

## 六、細沙滾擺第 C 類型(中途即固定不動)的理論分析與應證

透過表 7 計算細沙滾擺合力矩為 0 的 $\theta$ ，對照影片中的細沙斜率，得到下列比較圖。

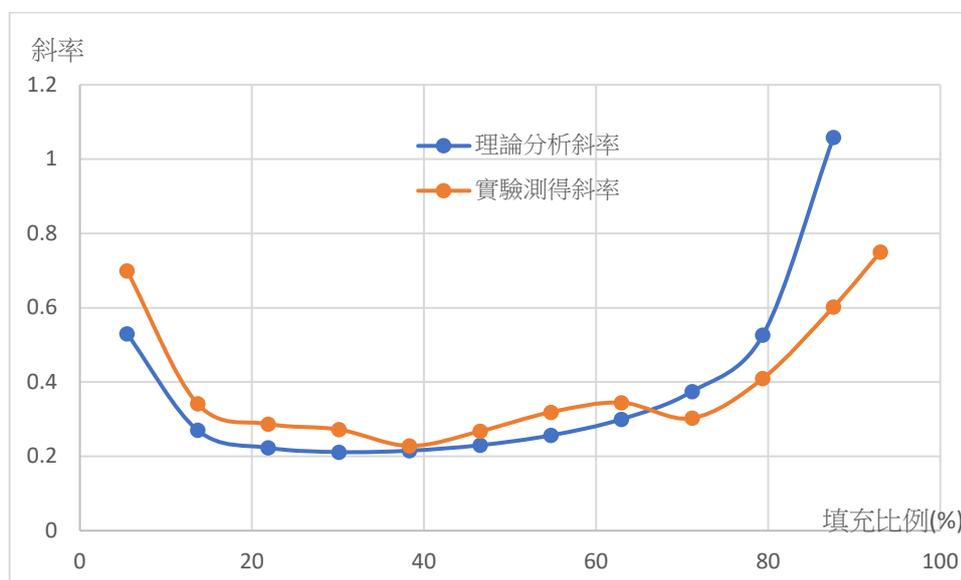


圖 27 細沙中途即固定不動時細沙面斜率與理論分析斜率比較圖

由圖 27 可得知，填充比例 62.952%之前兩者趨勢相同，超過 62.952%之後理論分析斜率大於實驗測得斜率，推測原因為，當細沙質量過多時，無法維持結構而坍塌，造成真實斜率較低。

## 七、空圓盤與黏滯流體、水、細沙對滾擺的比較與延伸應用

不同填充介質各取一樣品(滾擺至底部且緩衝效果最好)的角速度-時間圖來做比較，如圖 28~圖 31。

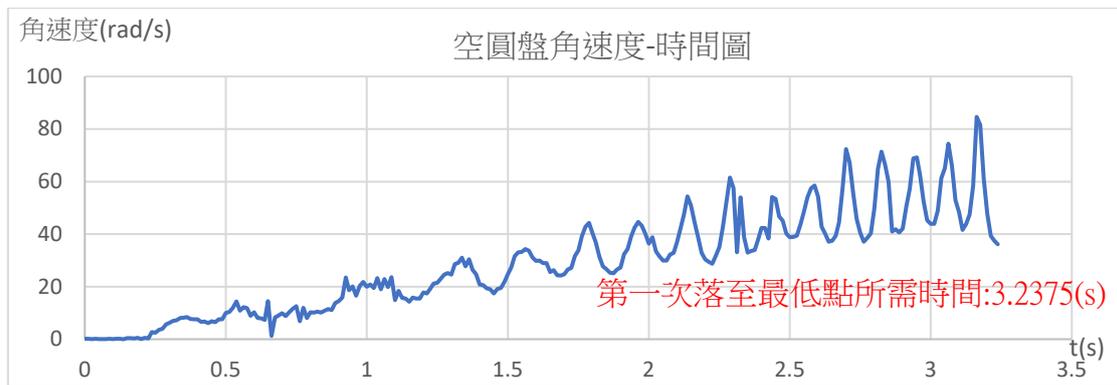


圖 28 空圓盤(C01)第一次落至最低點前的角速度-時間圖

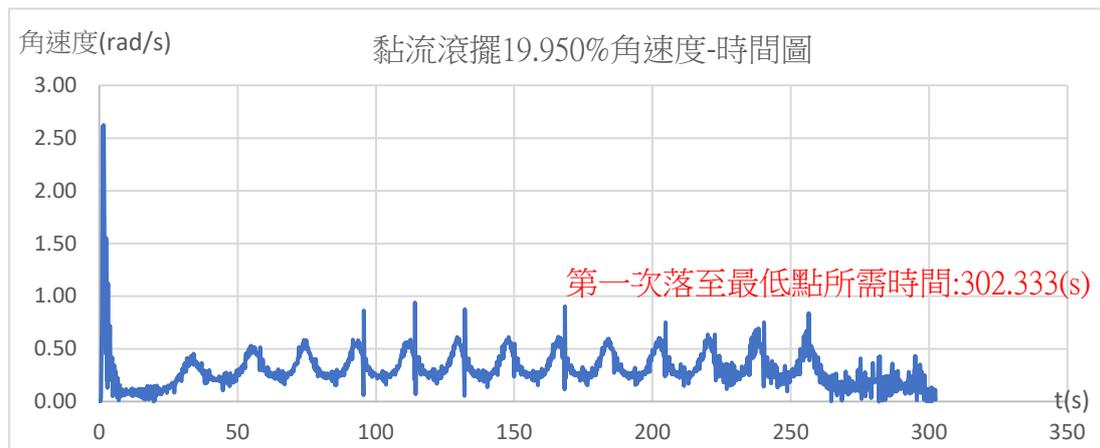


圖 29 黏流滾擺第二類型(無彈跳)19.950%(C08)第一次落至最低點前的角速度-時間圖

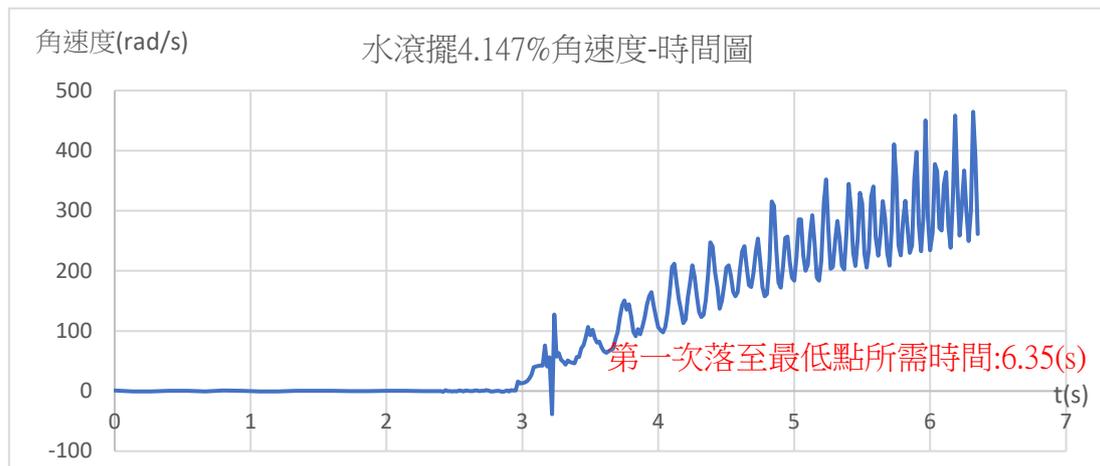


圖 30 水滾擺 4.147%(D02)第一次落至最低點前的角速度-時間圖

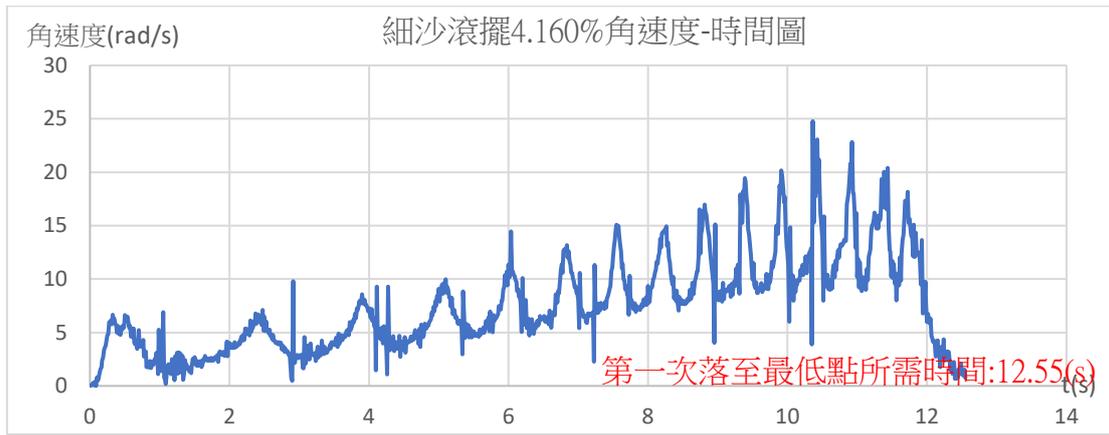


圖 31 細沙滾擺 B 類型 4.160%(S008-1)第一次落至最低點前角速度-時間圖

如要用於緩衝應用上，必須東西下降時間拉長，比較第一次落至最低點所需時間，黏流滾擺約為空圓盤 93 倍，而細沙雖有更長的第 C 類型(中途即固定不動)，但應用上應要使物體仍有降落，所以無法考慮細沙第 C 類型的情況，如觀察細沙滾擺的「未過半且無彈跳」的填充比例，如上圖 31，落下時間只有空圓盤 4 倍且張力計顯示出張力穩定度也不如黏流滾擺，如下圖 32，因此如果未來有機會應用在降落緩衝裝置上，黏滯流體為較佳填充介質。

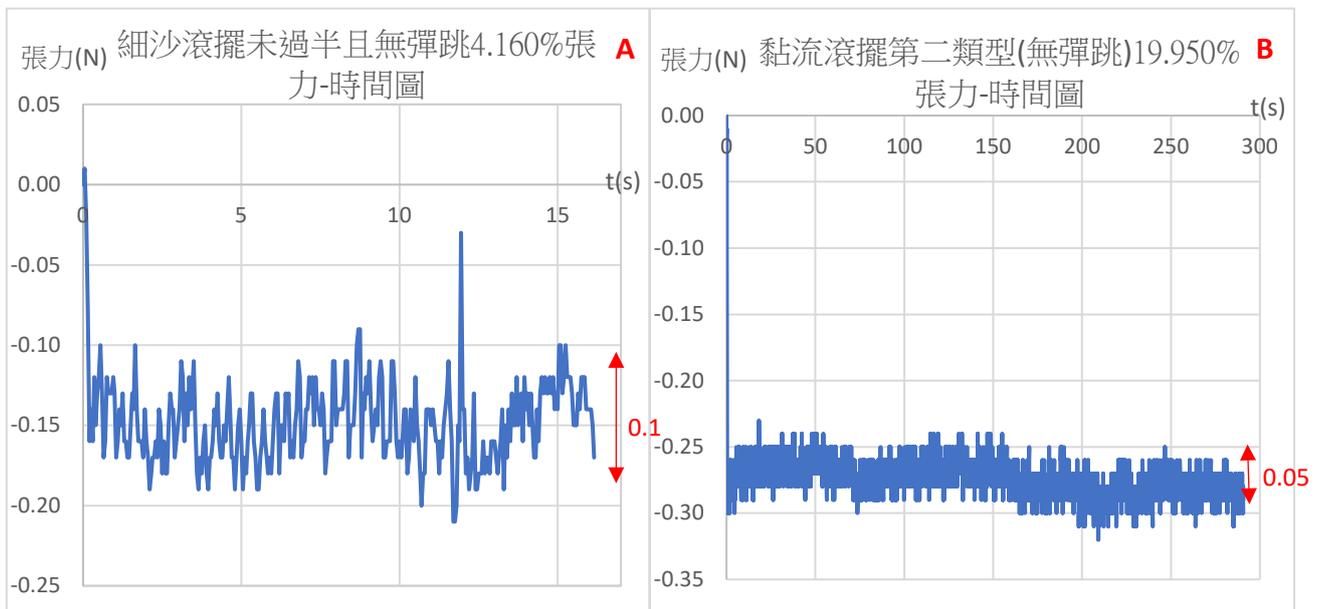


圖 32-A、32-B 細沙滾擺 B 類型(未過半且無彈跳)4.160%與黏流滾擺第二類型(無彈跳)19.950%繩張力圖

表 13 各類型滾擺緩衝效果比較

類型	落地時間	有無彈跳且落至最低點填充比例	備註	落至最低點比例	最佳緩衝裝置
空圓盤	3.237(s)	無	--	1	
黏流滾擺	302.333(s)	有	1.高度超過10.535cm 無彈跳填充範圍不變動 2.角速度具有穩定週期性 3.繩張力相較其他較穩定	約 93 倍	
水滾擺	6.350(s)	無	--	約 2 倍	
細沙滾擺	12.550(s)	有 (但填充範圍很窄)	1.繩張力相較於黏流滾擺較不穩定 2.沙子間的縫隙密實度會影響結果	約 4 倍	

## 柒、結論

- 一、黏流滾擺在黏滯流體填充量由少到多會有三種運動情形，分別為第一類型「未過半且能彈跳」、第二類型「無彈跳」、第三類型「過半且能彈跳」。
- 二、彈起條件為落到最低點角速度大於 $\omega_c$ (不同的樣品 $\omega_c$ 不一樣)，當液體質心到達 $\theta=90^\circ$ 之後，角速度才明確爬升，利用力矩和黏滯力可分析圓盤角速度的變化。
- 三、黏流滾擺在無彈跳填充範圍內，圓盤角速度對時間具有週期性，且填充比例越大週期越小、平均角速度越大。
- 四、本實驗所用的黏流滾擺釋放高度大於 10.53cm 之後，無彈跳填充比例維持在 19.950%~81.145%，也就是此填充範圍因重力與黏滯力作用，即使高度再高，也無法使圓盤加速到可彈起角速度 $\omega_c$ 。
- 五、滾擺改為填充黏滯係數較小的水，不存在無彈跳狀態，且填充比例不影響彈跳次數，與黏流滾擺可彈跳的情況相比，彈跳次數普遍比黏滯流體少。

六、滾擺改為填充細沙，填充比例由少至多可分為五種運動情形，分別為「未過半且能彈跳」、「未過半且無彈跳」、「中途即固定不動」、「過半且無彈跳」、「過半且能彈跳」。

七、釋放高度同為 27.96cm 情況下，填充比例 19.950%的黏流滾擺，落下時間約為空圓盤的 93 倍，故黏流滾擺也許可以應用於緩衝系統中。

## 捌、未來展望

黏流滾擺是我突發奇想的實驗，還有很多的相關物理因素還沒有探討完全，而非直觀的物理現象也引發我好奇，此實驗主題結合溜溜球的滾動力學，配合黏滯流體與細沙所創造出的特殊有趣物理現象，延展性十分高，不同的操作變因，產生不同的應變變因，黏流滾擺在未來相關的實驗也令我十分期待。

- 一、填充同質量但不同黏滯係數的液體，找出彈跳次數與黏滯係數的關係圖，可作為黏滯係數測量儀。
- 二、基於結論第七點，黏流滾擺的穩定性及功效皆較固態粒子的滾擺及空圓盤佳，因此黏流滾擺的緩衝效果或許可以實際應用於安全工程學中。

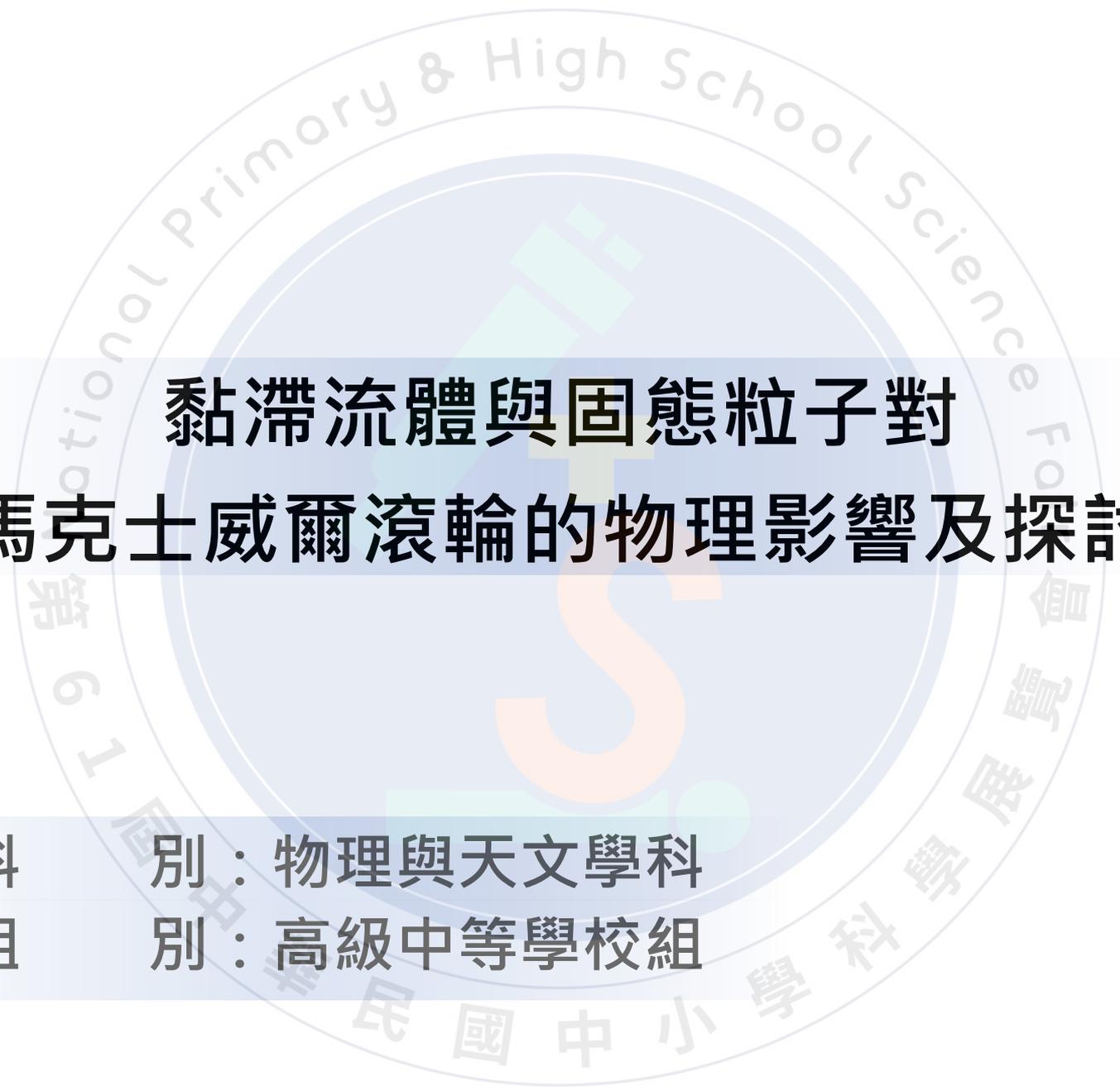
## 玖、相關資料

- 一、董宥言，王博玄，李冠陞，蝸牛球，第 59 屆全國中小學科展作品物理與天文學科第二名。
- 二、Childress, S. (1964) The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 20(2), 305-314.
- 三、Rohit Supekar & Mahesh V. Panchagnula, (2014) Dynamics and stability of a fluid filled cylinder rolling on an inclined plane, arXiv:1408.6654 [physics.flu-dyn].
- 四、Khan Marwat, Dil Nawaz, (2020) The flow of a viscous fluid over an infinite rotating and porous disk with stretching (shrinking) effects, *Rev. Mex. Fis.* 66, 171.
- 五、Koichi Takahashi, Application of the viscosity-expansion method to a rotating thin fluid disk bound by central gravity, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Volume 2015, Issue 7, July 2015, 073J01, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptv097>
- 六、A. Jarray and V. Magnanimo and S. Luding (2019) Wet granular flow control through liquid induced cohesion, *Powder Technology* 341, 126-139.

## 【評語】 051805

本作品探討將不同填充比例的黏滯流體、水與固態粒子放入空心圓盤後，以類似溜溜球的方式觀測其運動情形(稱為黏流滾擺)。特別是探討改變繩長對黏流滾擺的影響、黏流滾擺無彈跳範圍的週期性、滾擺填充水與細沙的運動情形。本實驗作品主控參數豐富，內容完整，實驗結果發現在低填充率與高填充率時，黏流滾擺無彈跳運動，有某種對稱性，符合一般的直覺，對有內在運動之物體的研究之瞭解有貢獻。

## 作品簡報



# 黏滯流體與固態粒子對 馬克士威爾滾輪的物理影響及探討

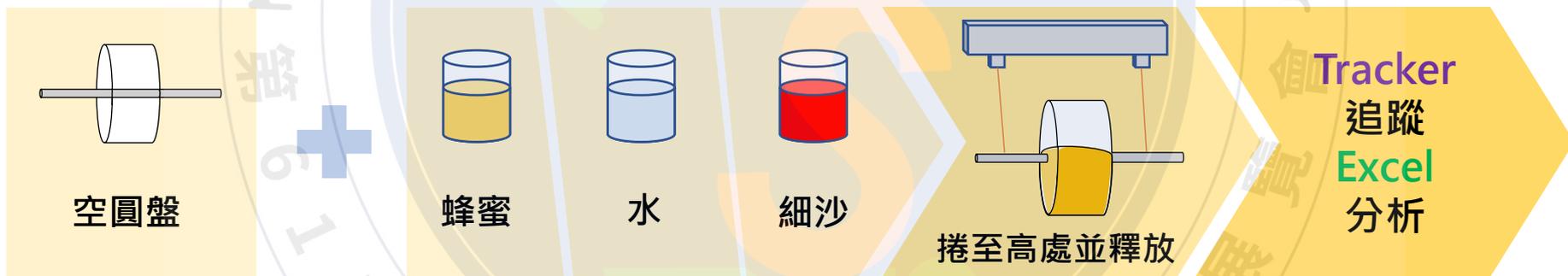
科 別：物理與天文學科  
組 別：高級中等學校組

# 壹、前言

## 一、研究介紹與動機

馬克士威爾滾輪是藉由純滾動與能量守恆來計算實心圓盤的轉動慣量的物理教材，物理原理與溜溜球相似。將不同填充比例的黏滯流體、水與固態粒子放入空心圓盤，並觀察其物理現象。

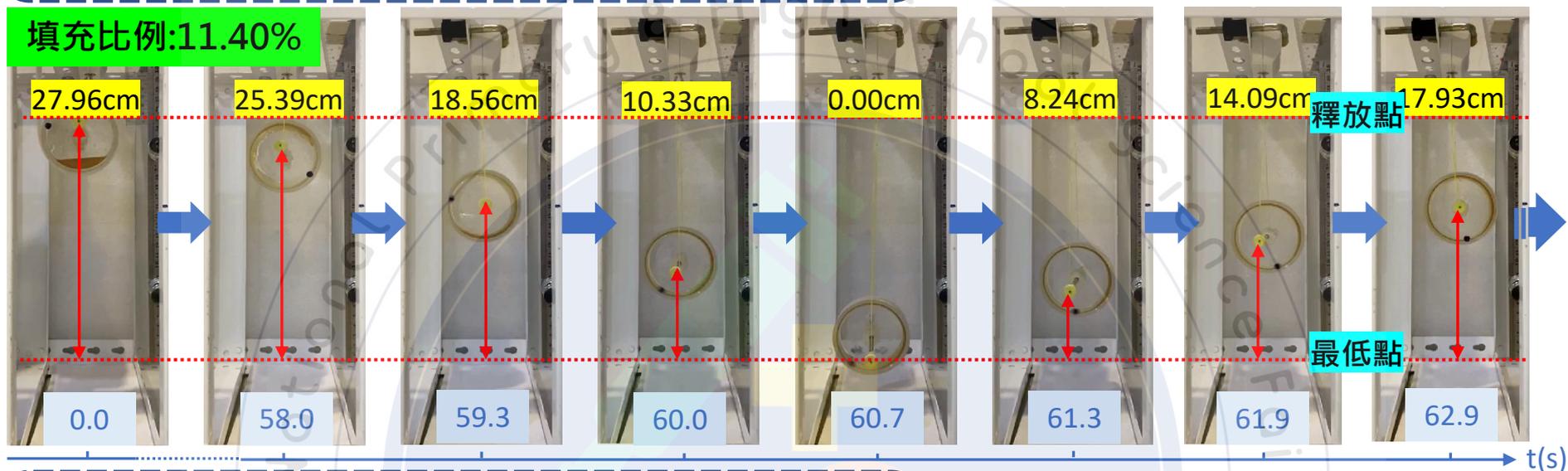
## 二、研究方法與目的



1. 探討黏流滾擺的運動情形
2. 探討改變繩長對黏流滾擺的影響。
3. 探討黏流滾擺無彈跳範圍的週期性。
4. 探討滾擺填充水的運動情形。
5. 探討滾擺填充細沙的運動情形。

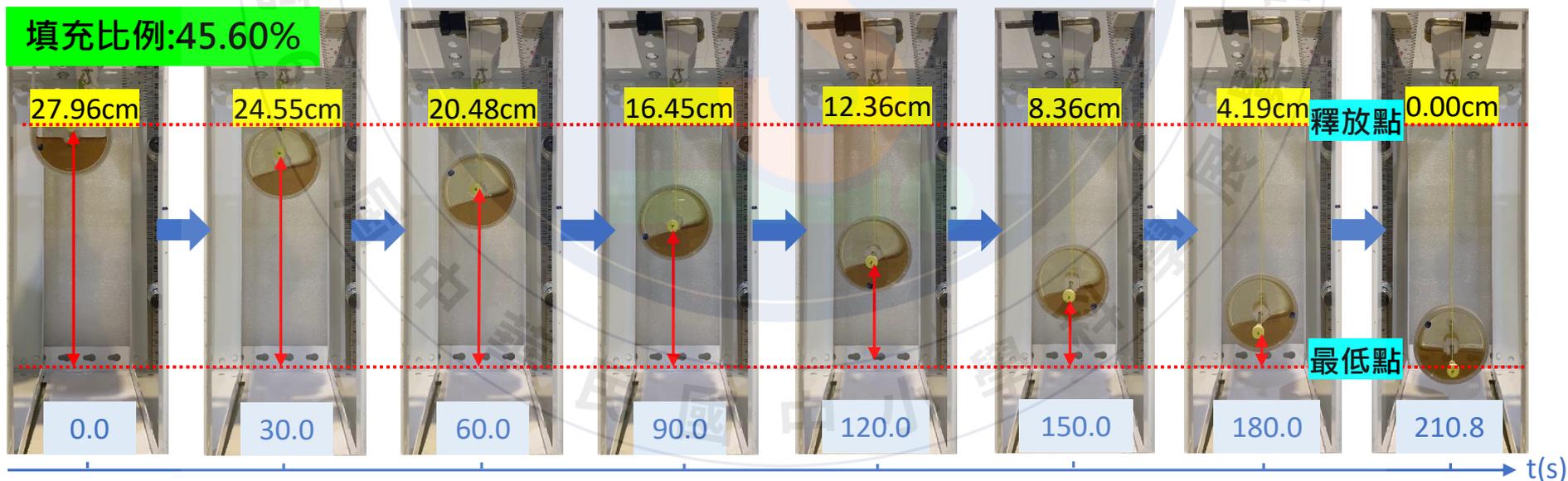
## 黏流滾擺的有彈跳類型的影像分格圖

填充比例:11.40%



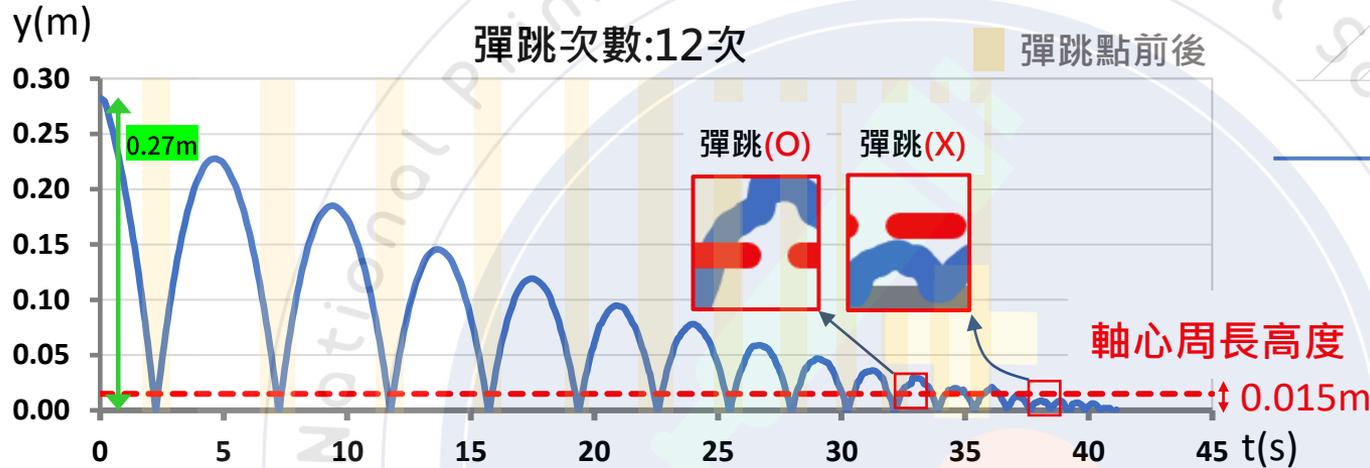
## 黏流滾擺的無彈跳類型的影像分格圖

填充比例:45.60%



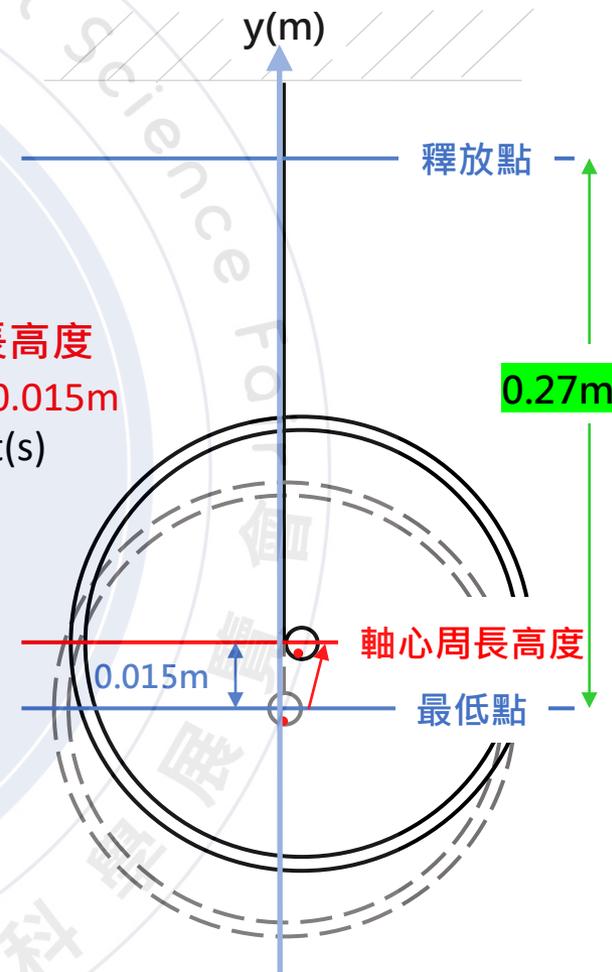
# 貳、研究結果與討論

## 一、彈跳次數計算方式



▲圖1 空圓盤鉛質位置-時間圖

- 釋放高度：**0.27m**
- 彈跳次數：滾擺到達最低點後，可上旋超過一圈則納入彈跳次數，也就是**軸心周長高度 0.015m**(如圖1紅色虛線)。

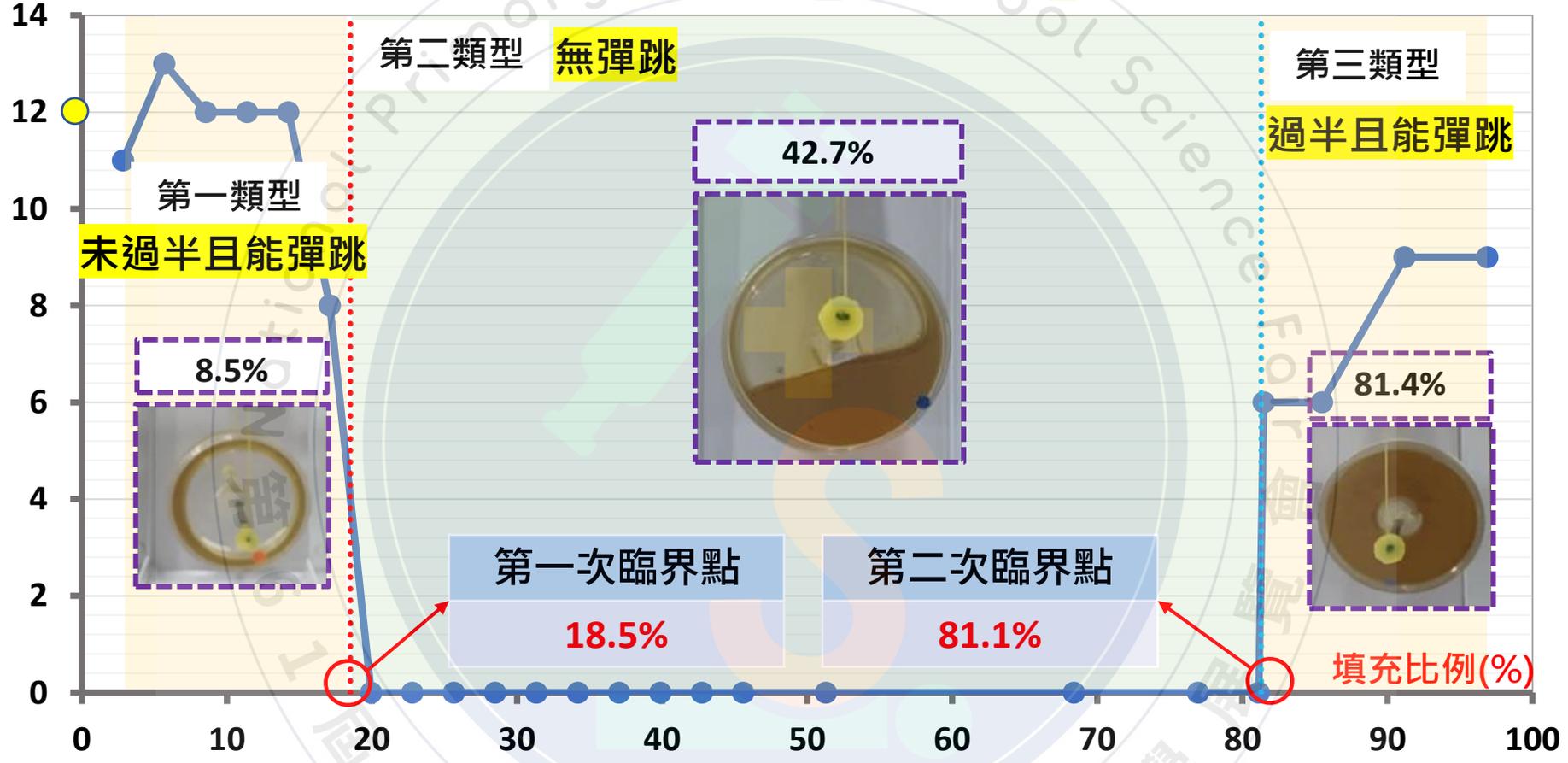


▲圖2 可彈跳高度示意圖

## 二、黏流滾擺彈跳次數對填充比例的關係(釋放高度:0.27m)

彈跳次數

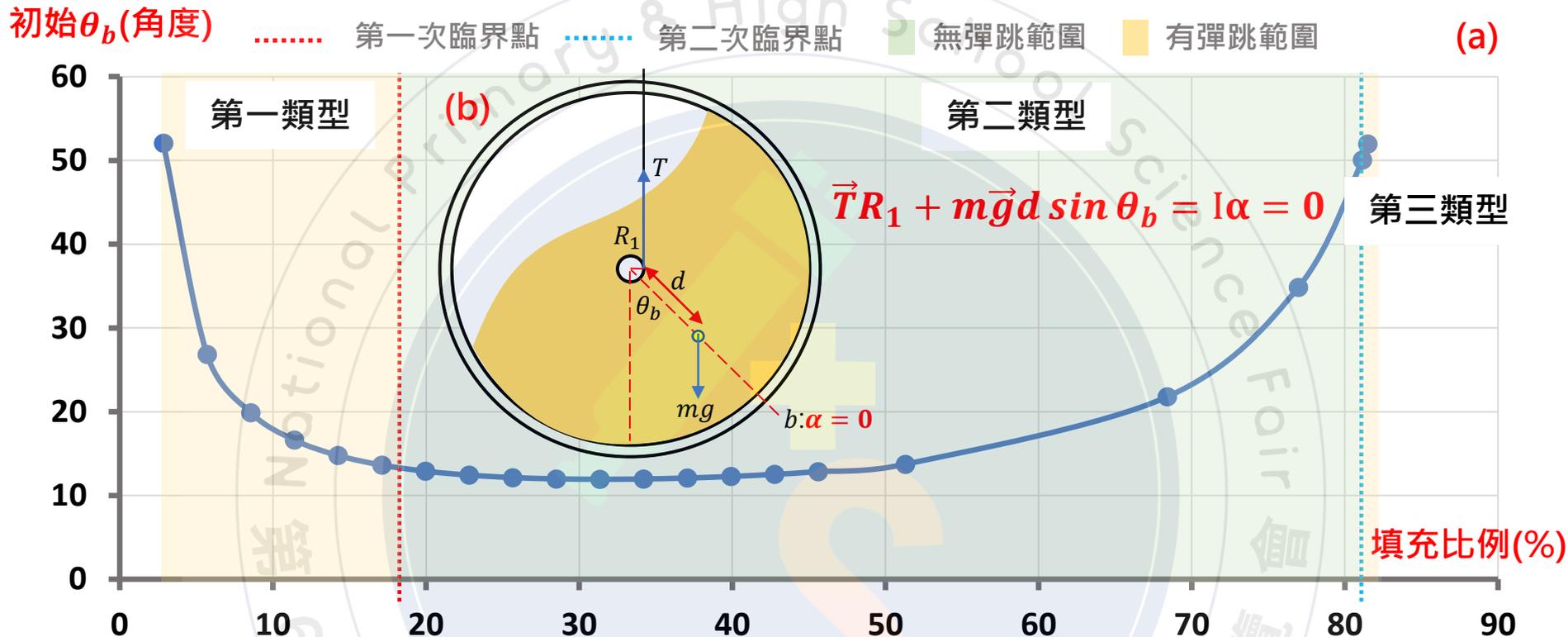
..... 第一次臨界點    ..... 第二次臨界點    ■ 無彈跳範圍    ■ 有彈跳範圍    ● 空圓盤彈跳次數



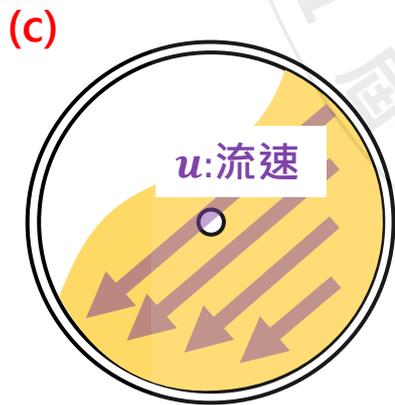
▲ 圖3 黏流滾擺彈跳次數對應填充比例關係圖

黏流滾擺愈接近雙邊臨界點彈跳次數越少。

# 三、黏流滾擺力圖與臨界點成因



▲圖4 (a)初始 $\theta_b$ 角-填充比例圖(b)黏流滾擺力圖(c)黏滯流體流速的說明圖



- 液體質心位置  $\theta < \theta_b$  時，為**加速**狀態  
 $\theta > \theta_b$  時，為**減速**狀態

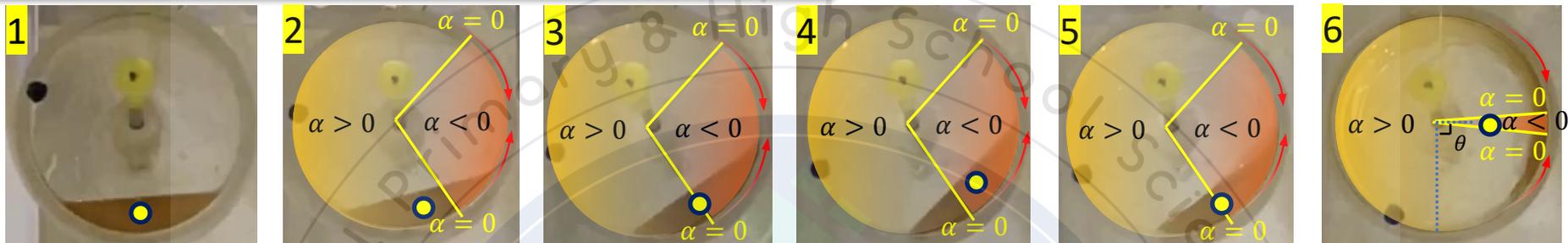
但填充比例影響 $\theta_b$ 的大小(如圖4)

- 第一次臨界點成因:因①  $\theta_b$  下降②厚度變厚，**易流動**
- 第二次臨界點成因:因**第三類型**幾乎**無 $\theta_b$** 存在

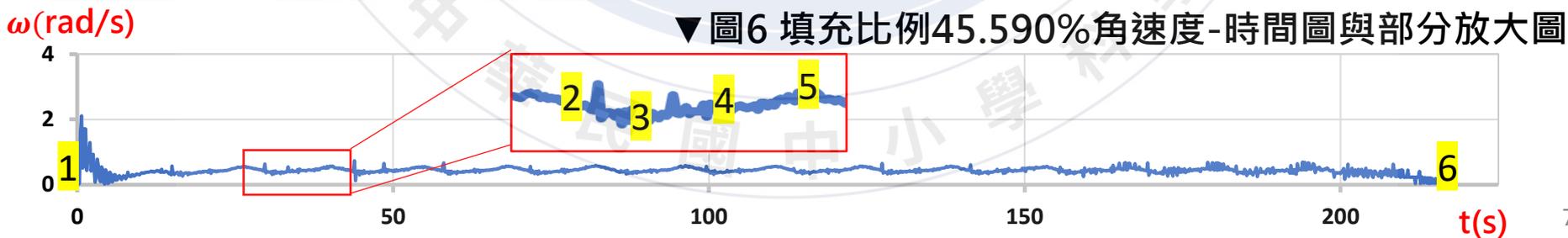
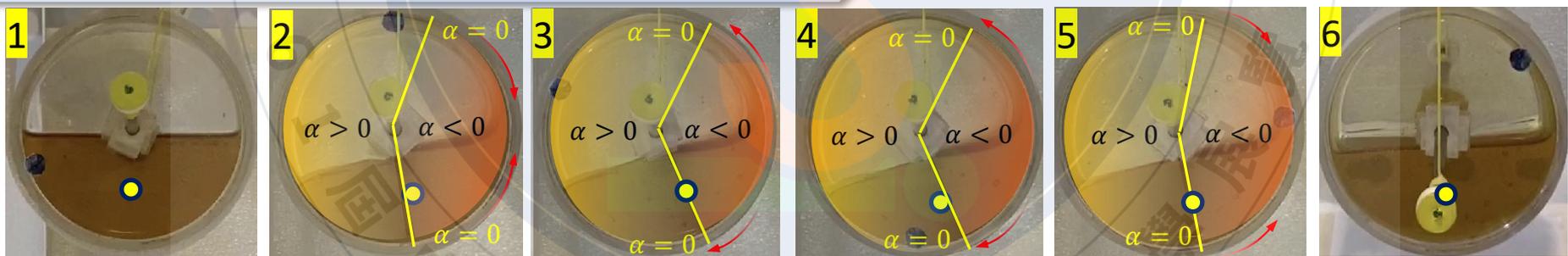
# 四、黏流滾擺(可彈跳)物理運動分析

液體質心

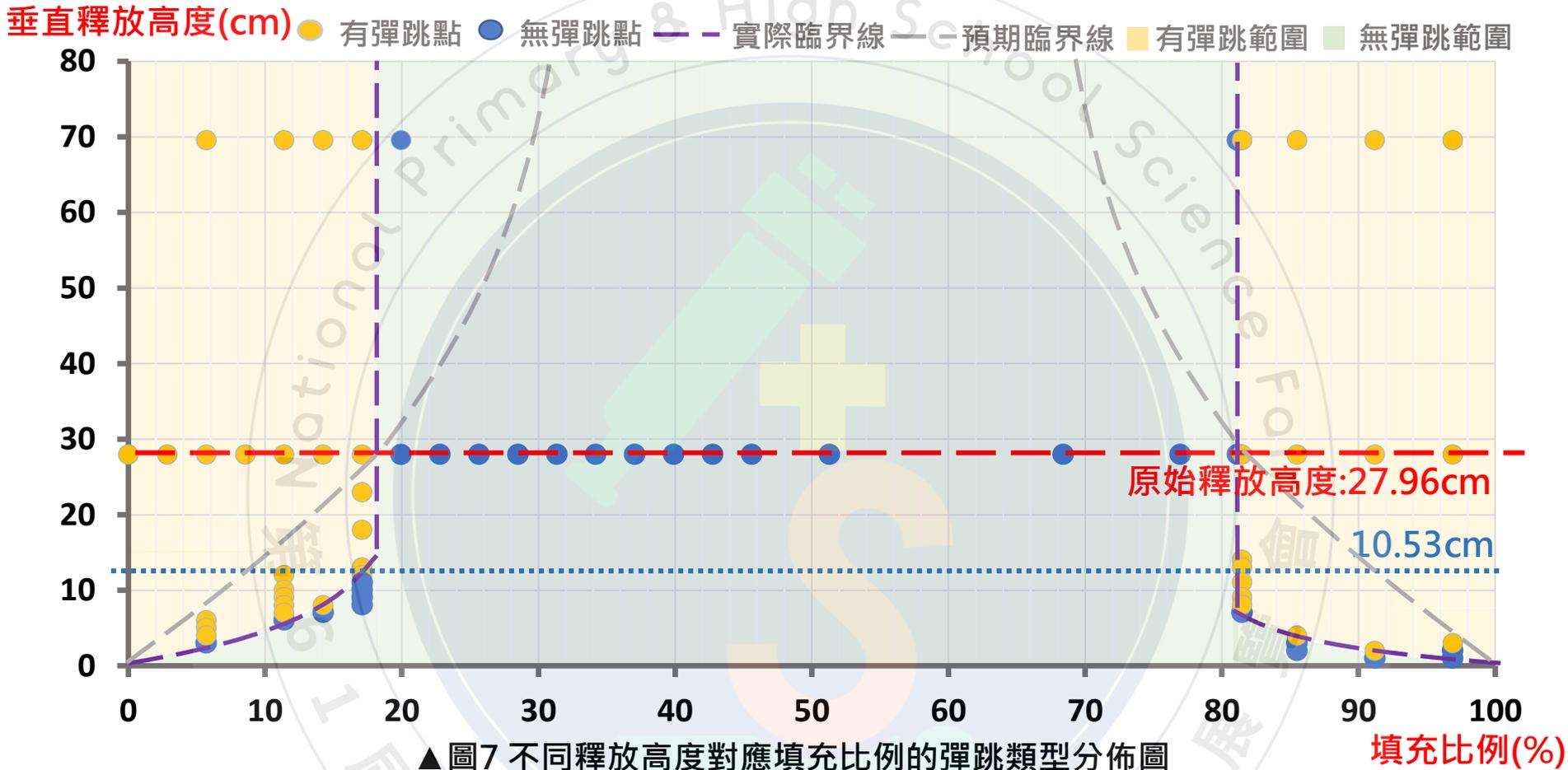
$$\vec{T}R_1 + m\vec{g}d \sin \theta = I\vec{\alpha}$$



# 五、黏流滾擺(無彈跳)物理運動分析



# 六、黏流滾擺改變不同釋放高度的無彈跳範圍變動情形

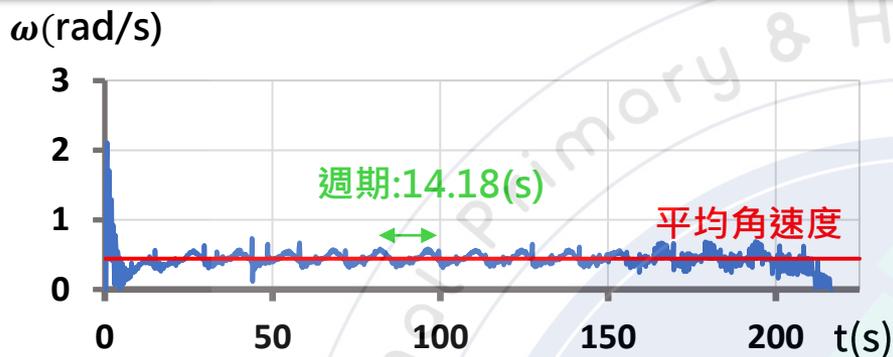


1. 實驗預期: 越高釋放, 重力位能愈大  $\Rightarrow$  無彈跳填充範圍較窄

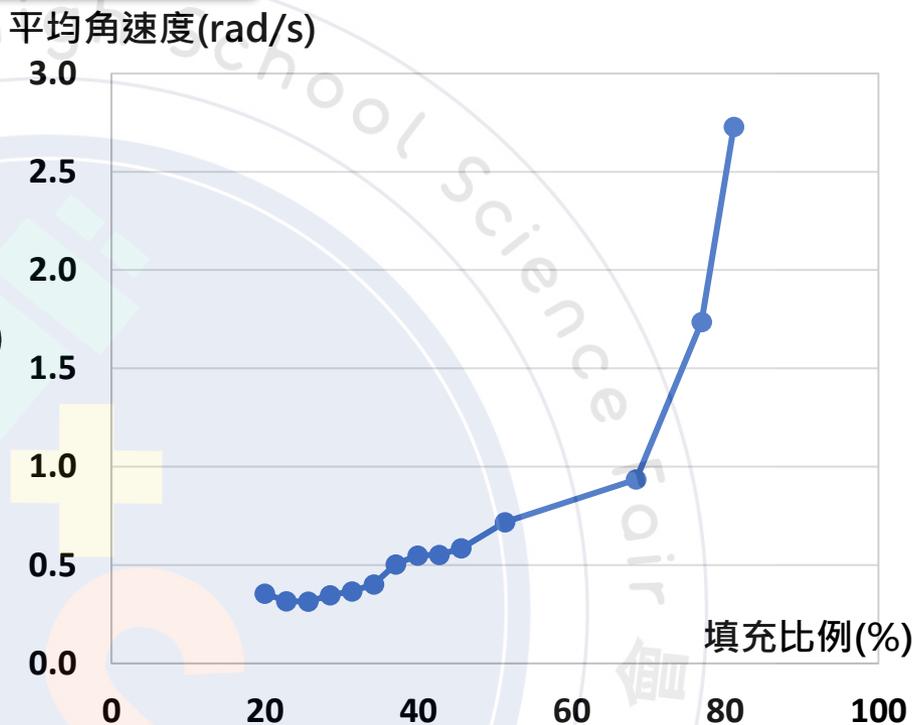
2. 實驗結果: 釋放高度  $> 10.53\text{cm}$   $\Rightarrow$  無彈跳填充範圍不會改變

釋放高度  $\leq 10.53\text{cm}$   $\Rightarrow$  無彈跳填充範圍變寬

# 七、黏流滾擺第二類型(無彈跳)的週期性



▲圖8 填充45.590%黏滯流體的圓盤角速度-時間圖



▲圖9 無彈跳黏流滾擺角速度震盪週期-填充比例圖 ▲圖10 黏流滾擺無彈跳類型平均角速度-填充比例關係圖

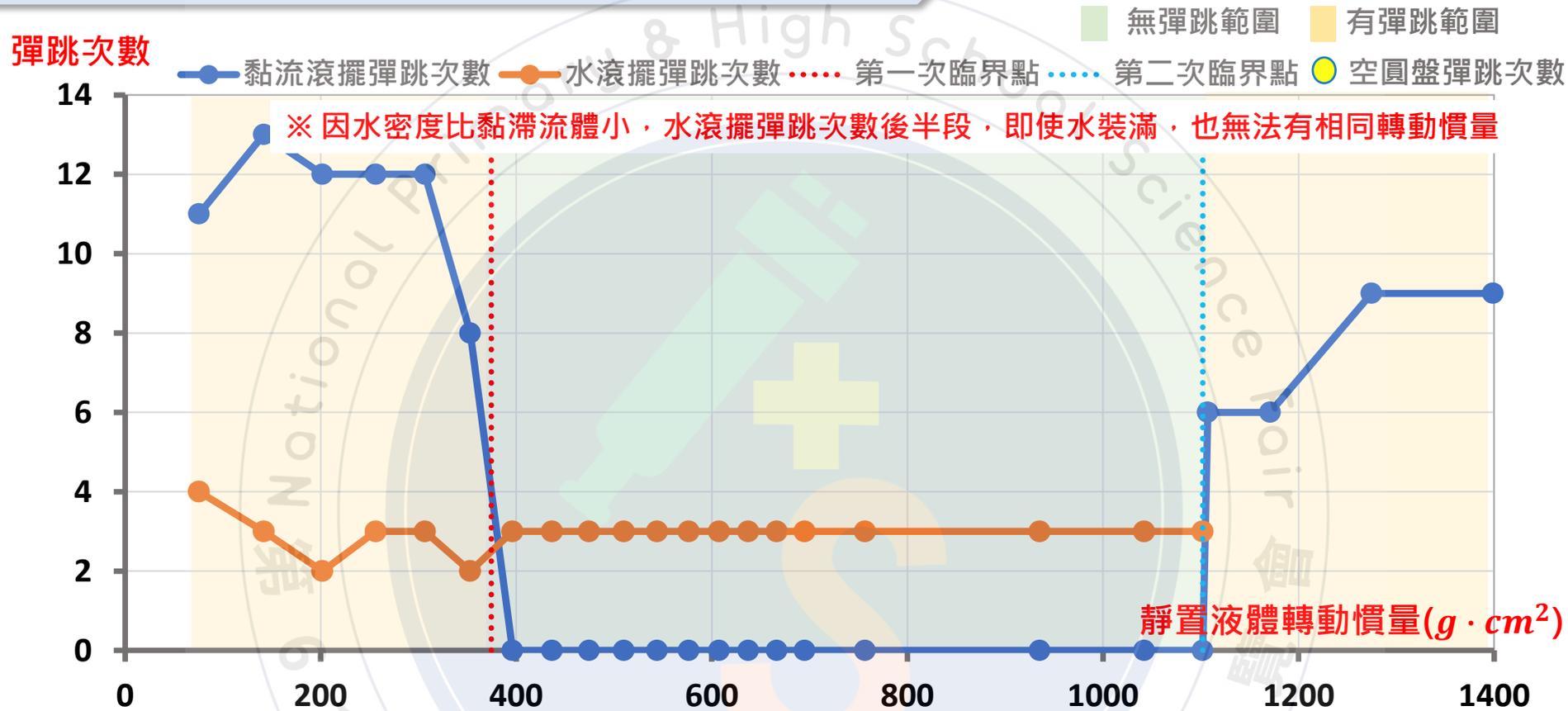
1. 無彈跳類型角速度在一定數值區間內振盪

⇒ 不會加速 ⇒ 釋放高度 > 10.53cm 無彈跳填充比例不變

2. 無彈跳類型填充比例越大角速度震盪週期越小

3. 無彈跳類型填充比例越大平均角速度越大

# 八、水滾擺與黏流滾擺彈跳次數比較圖



▲ 圖11 (a)水滾擺與黏流滾擺彈跳次數對應轉動慣量關係圖

1. 水黏滯係數小  $\Rightarrow$  無持久的減速力矩  $\Rightarrow$  不具有無彈跳填充範圍
2. 兩者都可彈跳填充範圍: 水滾擺彈跳次數  $<$  黏流滾擺彈跳次數



## 參、結論

- 一. 黏流滾擺在黏滯流體**填充量由少到多**會有三種運動情形，分別為第一類型「**未過半且能彈跳**」第二類型「**無彈跳**」、第三類型「**過半且能彈跳**」。
- 二. 黏流滾擺在無彈跳類型，圓盤角速度對時間具有**週期性**，且**填充比例越大週期越小、平均角速度越大**。
- 三. 本實驗所用的黏流滾擺釋放高度大於**10.53cm**之後，無彈跳填充比例維持在**19.9%~81.1%**，也因角速度在**一定值震盪**，即使繩長再長，也無法使圓盤加速至可彈起角速度。
- 四. 填充**黏滯係數較小**的水滾擺，不存在無彈跳類型，且填充比例不影響彈跳次數，與黏流滾擺可彈跳的情況相比，**彈跳次數普遍比黏流滾擺少**。
- 五. 滾擺改為填充細沙，相對黏流滾擺出現「**中途即固定不動**」的狀態，無法落至最低點。

## 肆、參考資料

- [1] Childress, S. (1964) The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid. Journal of Fluid Mechanics, 20(2), 305-314.
- [2] Rohit Supekar & Mahesh V. Panchagnula, (2014) Dynamics and stability of a fluid filled cylinder rolling on an inclined plane, arXiv:1408.6654 [physics.flu-dyn].
- [3] Koichi Takahashi(2015)Application of the viscosity-expansion method to a rotating thin fluid disk bound by central gravity, Progress of Theoretical and Experimental Physics, Volume 2015, Issue 7, 073J01, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptv097>