

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051804

有角速度之橄欖球的運動行為分析

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 高二 陳顥帆 高二 吳振宇 高二 詹仲睿	指導老師： 高銘宏
---	------------------

關鍵詞：橄欖球運動、反跳高度增加、運動行為模擬

摘要

本實驗在探討一顆旋轉橄欖球碰撞地面時，特定情況下反跳後的質心高度增加的現象。我們主要研究橄欖球彈跳高度與初始高度以及初始角速度的關係。首先觀察到旋轉橄欖球落地後有不同的運動軌跡，並由影像分析發現轉動動能以不同比例轉換成移動動能。接著研究不同的碰撞點對於彈跳高度的影響，以力學模型推導彈跳高度大於初始高度的條件後，以實驗驗證。接著進行理論模擬，運用電腦程式求不同初始條件下的碰撞點以及落地時的角度，並擬合實驗數據。最後修正赫茲接觸理論，建立碰撞模型並得到不同角速度與碰撞點下反跳速度的熱圖與碰撞時的正向力函數。

壹、研究動機

在學習碰撞時，老師提到一般生活中的碰撞為非彈性碰撞，因此自由落下的物體在撞擊地面之後無法超過初始高度。但我們在 2021 年的 IYPT 題目中看到，一個被給定初始角速度之膠囊狀物體，在特定落地情況能夠超越初始高度，而我們利用橄欖球做了同樣的實驗，發現同樣具有此現象。我們好奇 y 方向的能量從何而來，於是著手進行此研究。

貳、研究目的

- 一、拍攝影片後利用 Tracker 分析橄欖球碰撞前後 x 方向以及 y 方向的質心速度(v_x 、 v_y)、橄欖球端點對於質心的角速度(ω)，再求出碰撞前後的能量變化(ΔE)和碰撞時的平均正向力(N_{avg})。
- 二、透過大量的實驗，分析橄欖球以哪個角度落地時的恢復係數更大，並且以力學的角度分析出反跳變高的條件。
- 三、利用理論，在給定橄欖球初角速度與最大高度後，預測橄欖球落地的時間，以及碰撞地面時的角度。
- 四、利用電腦模擬，建立碰撞模型，在給定初始條件下，能預測出橄欖球反跳的高度。

參、研究設備及器材

橄欖球	手機	Tracker	高速攝影機
			
尺(100cm)	手機架	Excel	Python
			

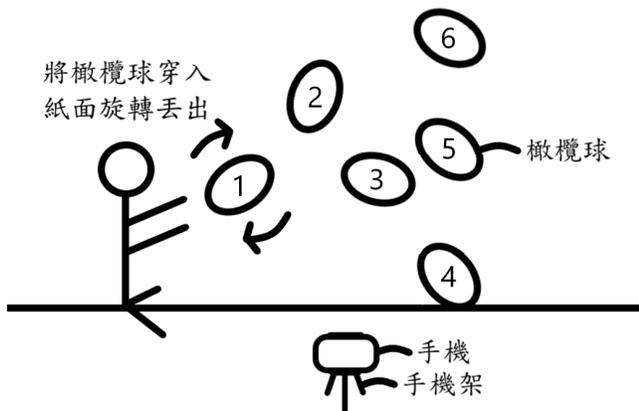
表(一)

肆、研究過程與方法

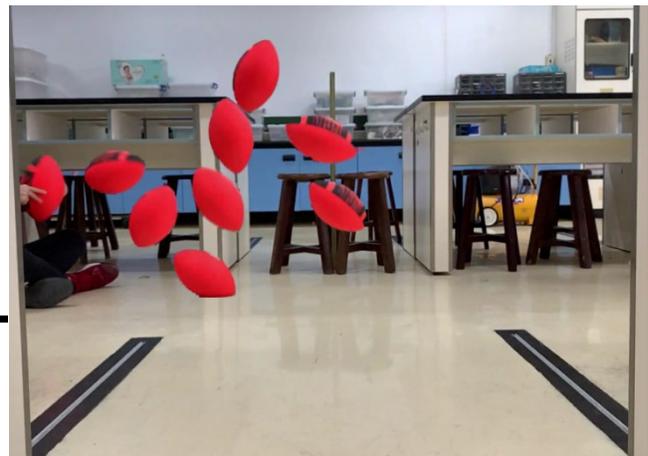
一、文獻探討

我們參考了 Rod Cross 的論文〈Bounce of an oval shaped football〉，論文中提到橄欖球碰撞地面時，碰撞點受正向力使之彈跳。論文中初步的力學分析，但是無法以他們的力學分析方法預測碰撞後的速度，因此我們參考了他們的分析方法，並加以修正。其中我們考慮正向力與摩擦力在碰撞過程中的變化，為此我們看了與赫茲碰撞理論相關的論文，其中〈Contact Force Models for Multibody Dynamics〉提到正向力與物體地面相對的形變量有關係，我們由此建立理論模型，並推導方程式。

二、儀器架設



圖(一)



圖(二)

圖(一)的阿拉伯數字為橄欖球的移動順序。圖(二)為將實驗照片疊圖後的示意圖。

三、實驗一：拍攝影片後由 Tracker 分析橄欖球碰撞前後之 v_x 、 v_y 、 ω 以及恢復係數 e

(一)利用 Tracker 點出橄欖球兩端點(A、B)後，由於 AB 線段之中點即為質心，因此質心的 x 、 y 座標為 $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ 。

(二)初步的數據（端點 A、B 的座標）較難看出橄欖球的旋轉週期，因此將其中一端點之座標減去上述之質心座標後便能求得端點對質心的相對運動，對時間作圖後便能看出橄欖球旋轉週期，進而求出角速度，如圖(三)。



圖(三)

(三)由於匯入 Tracker 的影片為慢動作，導致 Tracker 在分析時的 t 與實際不同，於是需要校正。Tracker 所分析之影片為 30fps，而我們所使用之慢動作影片則為 240fps，於是 Tracker 計算出之時間為實際之 $\frac{240}{30} = 8$ 倍，於是將 Tracker 所分析之時間 $\div 8$ 即能得出實際的時間 t 。

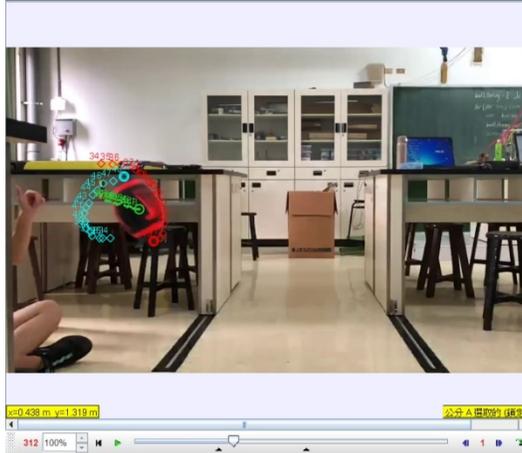
(四)實驗步驟

- 1.拍攝投擲橄欖球之影片，並匯入 Tracker，如圖(四)。
- 2.利用 Tracker 設水平方向為 x 、鉛直方向為 y 、橄欖球長為比例尺(0.286m)。



圖(四)

3.點出橄欖球兩端點後利用 Tracker 計算出質心之 x 、 y ，如圖(五)。



圖(五)

4.處理 Tracker 的時間數據得 t (實際)。

5.透過擬合碰撞前以及碰撞後的質心 $x - t$ 圖與 $y - t$ 圖分別求出 v_x 及 v_y 。

6.將其中一端點的 x 、 y 與質心的 x 、 y 相減，得端點相對於質心之 x 、 y 。

7.取質心之 x 、 y 、端點相對於質心之 x 、 y 對 t (實際)作圖。

8.透過端點相對於質心的 $x - t$ 圖與 $y - t$ 圖求出 ω 。

9.藉由碰撞前後的速度來求出回復係數 e 。

四、實驗二：觀察橄欖球以哪個角度落地時的恢復係數更大

(一)拍攝大量影片。

(二)將地面設為 $y = 0$ 後利用 Tracker 測量質心碰撞前後之最大高度 H 、 H' 。

(三)計算恢復係數 $e = \sqrt{\frac{H'}{H}}$ 。

(四)利用 Tracker 的量角器功能量出碰撞點與橄欖球半長軸之夾角 θ 。

(五)取 e 對 θ 作圖得出結論。

五、實驗三：給定橄欖球初角速度與最大高度後預測橄欖球落地時與地面的夾角與時間

(一)利用橢圓方程式求出旋轉中橄欖球最低點與質心間高度差對時間的函數 $h(t)$ 。

(二)有質心最大高度(H)後，落地時間為 $t = \sqrt{\frac{2(H-h(t))}{g}}$ 。

(三)求出對於最大高度 H 之碰撞時間的極大值與極小值。

(四)由落地時間求出兩方程式，並用程式求出其在最大值與最小值時之交點後，得到碰撞時間。

六、實驗四：給定橄欖球初始碰撞地面條件後預測碰撞後的運動

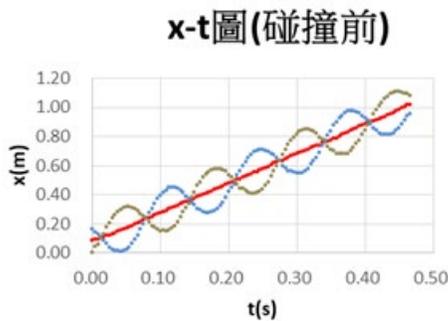
我們參考論文中的 Hunt and Crossley contact model. 此模型中碰撞物體之間的受力可被赫茲碰撞理論與一個非線性阻尼項表示： $F_N = K\delta^n + D\dot{\delta}$ (其中 F_N 為受力、 K 為廣義剛度係數 Generalized stiffness parameter、 δ 為最大變形量、 D 為阻尼係數)

- (一)將碰撞點視為有阻尼的彈簧，以電腦模型分析碰撞時的力與能量散失。
- (二)利用赫茲碰撞理論修正模型，計算正向力與橄欖球形變的關係。
- (三)計算碰撞瞬間時的牛頓方程式，並用以預測微小間隔時間後，系統的狀態，由此建立出電腦模型。
- (四)運用大量實驗數據擬和最佳擬合模型，建立不同初始條件下反跳速度的熱圖。

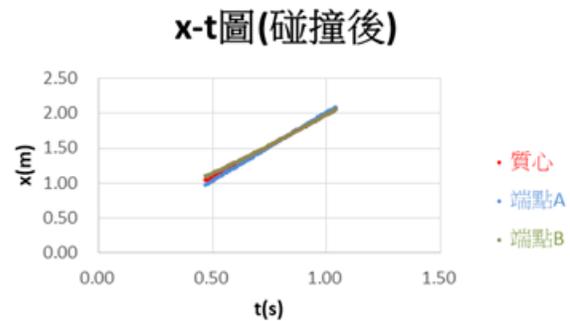
伍、研究結果

一、實驗一：拍攝影片後由 Tracker 分析橄欖球碰撞前後之 v_x 、 v_y 、 ω 以及恢復係數 e 。

(一)第一組數據：碰撞時間:0.466s，實驗結果如圖(六)到圖(十三)。



圖(六)



圖(七)

忽略空氣阻力， x 方向不受外力，故為等速度運動，藉由等速度運動公式： $x = vt + x_0$

對照 $y = 2.02x + 0.07$

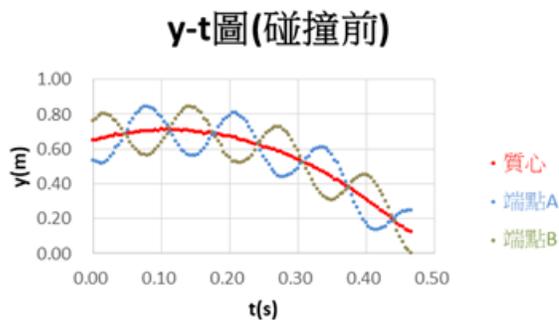
得到 $v = 2.02(m/s)$

決定係數 $R^2 = 0.9998$

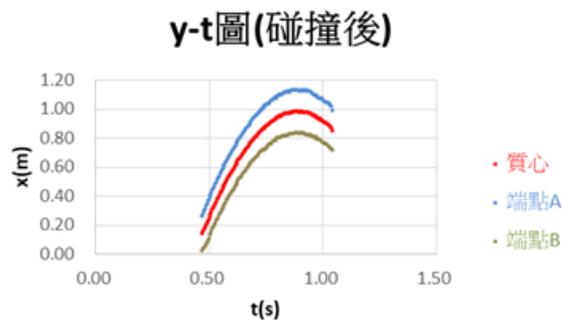
碰撞後等速度運動公式： $x = vt + x_0$ 對照 $y = 1.81x + 0.17$

得到 $v = 1.81(m/s)$

決定係數 $R^2 = 0.9997$



圖(八)



圖(九)

忽略空氣阻力，y方向僅受重力，故為等加速度運動，藉由等加速度運動公式：

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0 \text{ 對照 } y = -4.74x^2 + 1.06x + 0.55$$

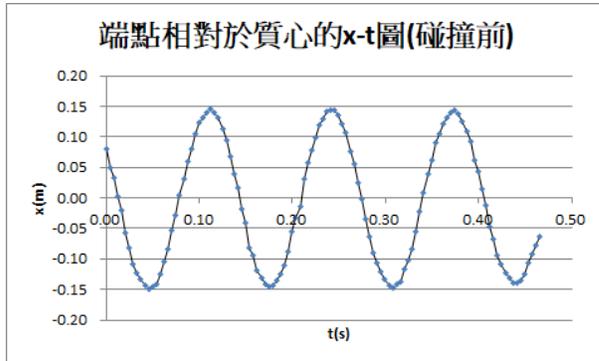
$$\text{得到 } a = -9.48(m/s^2)$$

$$\text{決定係數 } R^2 = 0.9997$$

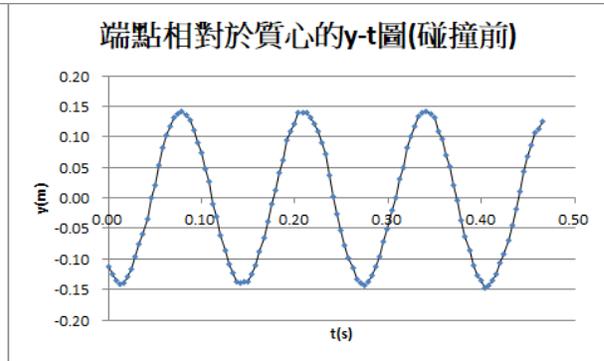
$$\text{碰撞後等加速度運動公式： } y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0 \text{ 對照 } y = -4.75x^2 + 8.48x - 2.91$$

$$\text{得到 } a = -9.50(m/s^2)$$

$$\text{決定係數 } R^2 = 0.9997$$

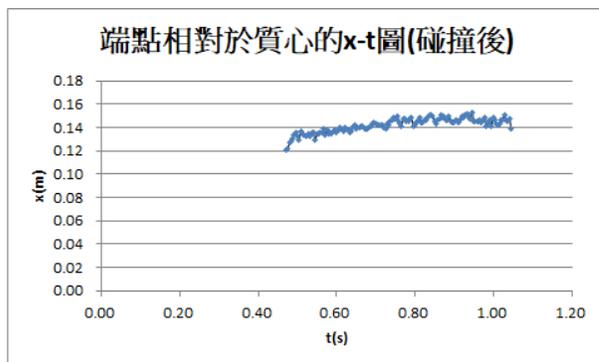


圖(十)

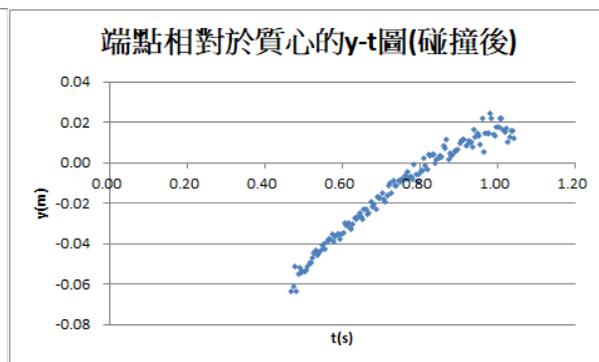


圖(十一)

$$\text{角速度 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(4.37 \times 10^{-1} - 4.58 \times 10^{-2}) \div 3} = 48.18(rad/s)$$



圖(十二)



圖(十三)

x-t、y-t 圖對 t 微分後可得 x、y 方向碰撞前後之速度

再由端點相對於質心之 x-t(y-t)圖可得旋轉週期，進而求出角速度 ω

最後得：

碰撞前：

$$v_x = 2.02(m/s)$$

$$v_y = -9.48t + 1.06(m/s)$$

$$\omega = 48.18(rad/s)$$

碰撞後：

$$v_x = 1.81(m/s)$$

$$v_y = -9.50t + 8.48(m/s)$$

ω 橄欖球在轉完一圈前便落地，因轉速過小，故難以分析

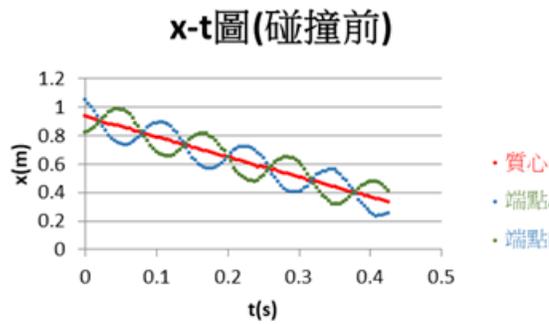
$$\text{恢復係數 } e = \frac{v_{y\text{後}}}{v_{y\text{前}}} = \left| \frac{-9.50 \times 0.466 + 8.48}{-9.48 \times 0.466 + 1.06} \right| \approx 1.20$$

速度之變化：

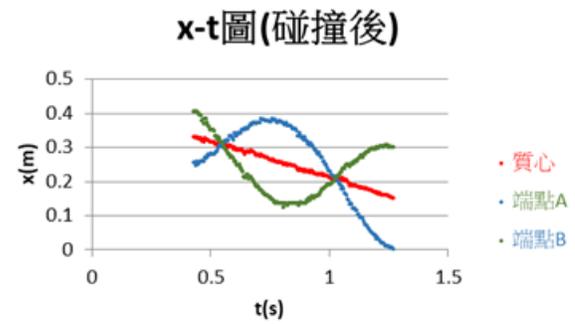
$$\Delta v_x = -0.21(m/s)$$

$$\Delta v_y = 7.41(m/s)$$

(二)第二組數據：碰撞時間:0.425s(實驗結果如圖(十四)到圖(二十一))



圖(十四)



圖(十五)

忽略空氣阻力， x 方向不受外力，故為等速度運動，藉由等速度運動公式： $x = vt + x_0$

對照 $y = -1.40x + 0.75$

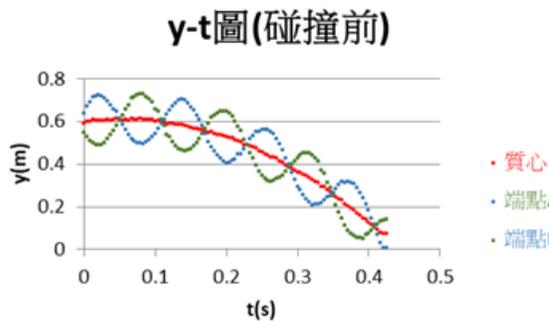
得到 $v = -1.40(m/s)$

決定係數 $R^2 = 0.9997$

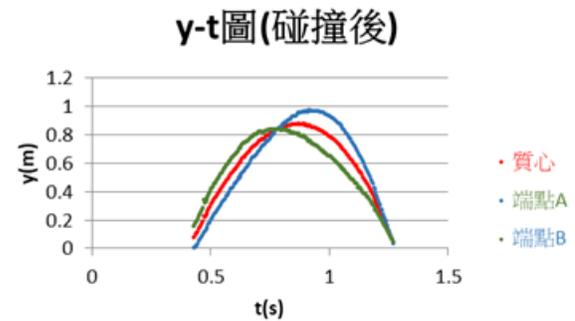
碰撞後等速度運動公式： $x = vt + x_0$ 對照 $y = -0.21x + 0.25$

得到 $v = -0.21(m/s)$

決定係數 $R^2 = 0.9961$



圖(十六)



圖(十七)

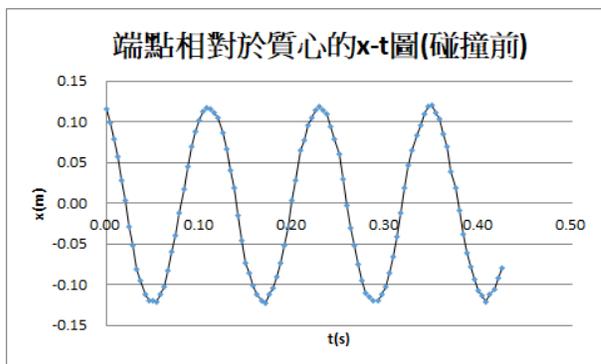
忽略空氣阻力， y 方向僅受重力，故為等加速度運動，藉由等加速度運動公式：

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$ 對照 $y = -4.05x^2 + 0.45x - 0.06$

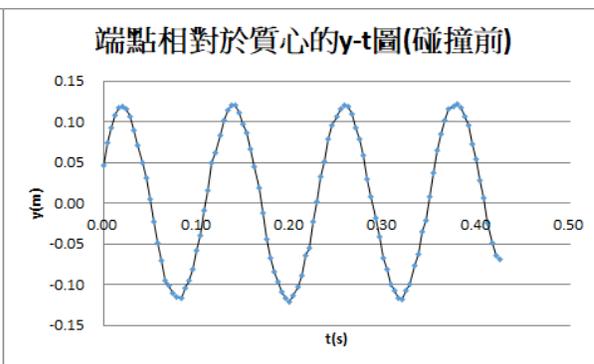
得到 $a = -8.10(m/s^2)$ ；決定係數 $R^2 = 0.9996$

碰撞後等加速度運動公式： $y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$ 對照 $y = -4.60x^2 + 7.88x - 3.03$

得到 $a = -9.20(m/s^2)$ ；決定係數 $R^2 = 0.9996$

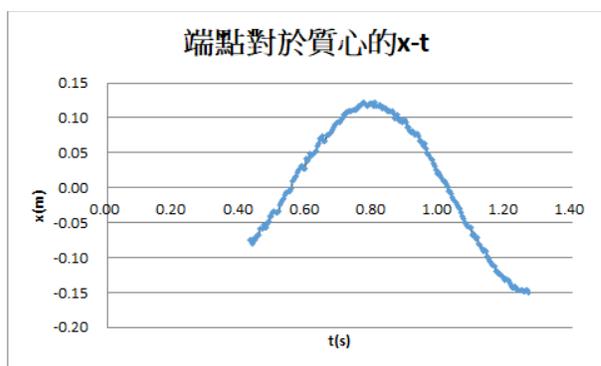


圖(十八)

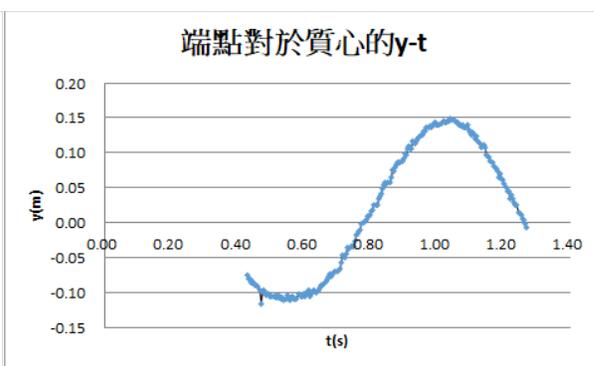


圖(十九)

$$\text{角速度 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(4.08 \times 10^{-1} - 5 \times 10^{-2}) \div 3} = 52.65(\text{rad/s})$$



圖(二十)



圖(二十一)

$$\text{角速度 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(1.04 \times 10^0 - 5.5 \times 10^{-1}) \div 0.5} = 6.41(\text{rad/s})$$

分析方法同實驗(一)，得：

碰撞前：

$$v_x = -1.40(\text{m/s})$$

$$v_y = -8.10t + 0.50(\text{m/s})$$

$$\omega = 52.65(\text{rad/s})$$

碰撞後：

$$v_x = -0.21(\text{m/s})$$

$$v_y = -9.20t + 7.88(\text{m/s})$$

$$\omega = 6.41(\text{rad/s})$$

回復係數 e：

$$\left| \frac{-9.20 \times 0.425 + 7.88}{-8.10 \times 0.425 + 0.50} \right| \approx 1.35$$

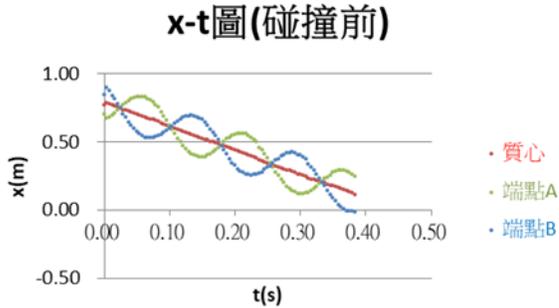
速度、角速度之變化：

$$\Delta v_x = 1.19(m/s)$$

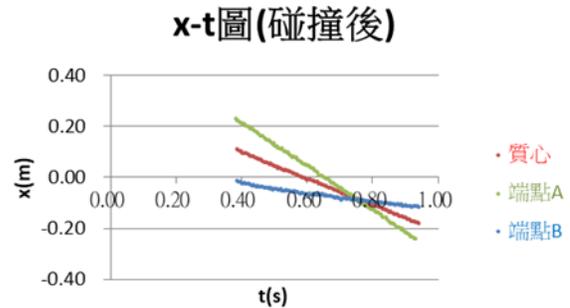
$$\Delta v_y = 6.98(m/s)$$

$$\Delta \omega = 46.24(rad/s)$$

(三)第三組數據：碰撞時間:0.383s(實驗結果如圖(二十二)到圖(二十九))



圖(二十二)



圖(二十三)

忽略空氣阻力， x 方向不受外力，故為等速度運動，藉由等速度運動公式： $x = vt + x_0$

對照 $y = -1.7595x + 0.789$

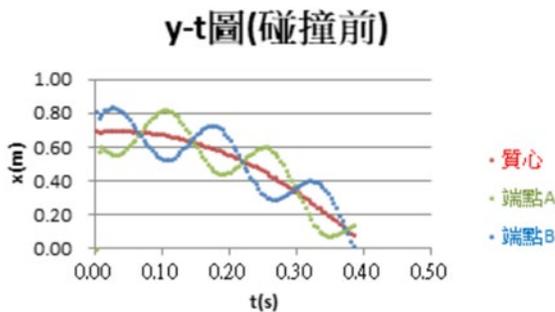
得到 $v = -1.7595(m/s)$

決定係數 $R^2 = 0.9996$

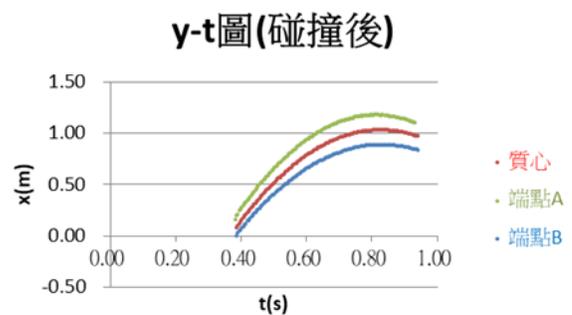
$$x = vt + x_0 \text{ 對照 } y = -0.5158x + 0.3037$$

得到 $v = -0.5158(m/s)$

決定係數 $R^2 = 0.999$



圖(二十四)



圖(二十五)

忽略空氣阻力，y方向僅受重力，故為等加速度運動，藉由等加速度運動公式：

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0 \text{ 對照 } y = -4.919 + 0.2867x + 0.2067$$

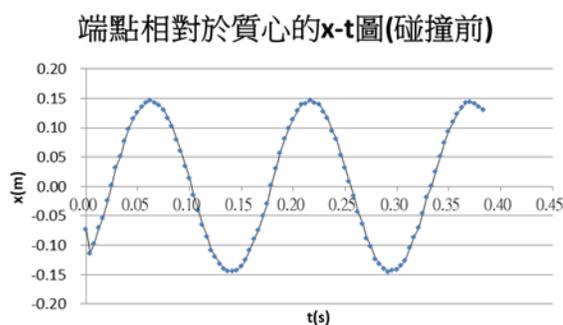
得到 $a = -9.838(m/s^2)$

決定係數 $R^2 = 0.9998$

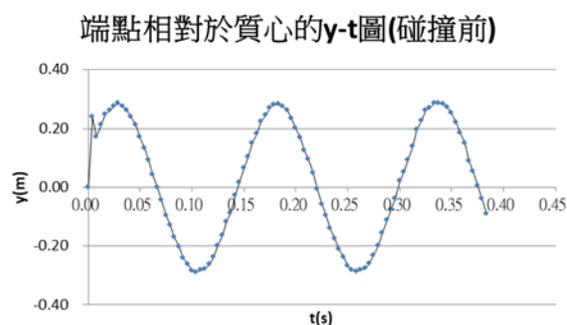
$$\text{碰撞後等加速度運動公式：} y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0 \text{ 對照 } y = -4.9206 + 8.1343x - 2.8156$$

得到 $a = -9.8412(m/s^2)$

決定係數 $R^2 = 0.9999$

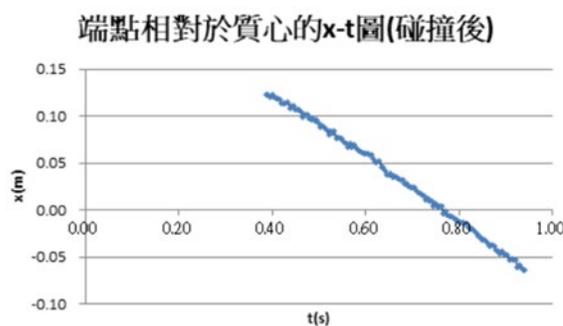


圖(二十六)

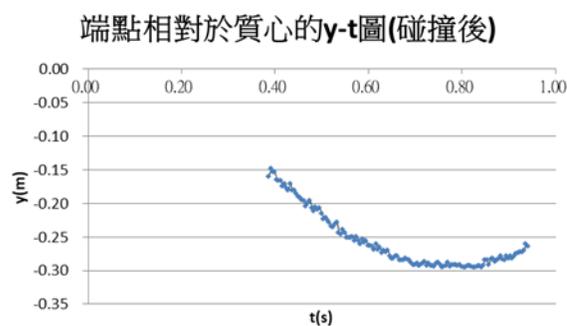


圖(二十七)

$$\text{角速度 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(3.3 \times 10^{-1} - 3 \times 10^{-2}) \div 2} = 41.8879(\text{rad/s})$$



圖(二十八)



圖(二十九)

分析方法同實驗(一)，得：

碰撞前：

$$v_y = -1.7595(m/s)$$

$$v_y = -9.8391t + 0.2867(m/s)$$

碰撞後：

$$v_x = -0.5158(m/s)$$

$$v_y = -9.8412t + 8.1343(m/s)$$

ω ：橄欖球在轉完一圈前便落地，因轉速過小，故難以分析

回復係數e：

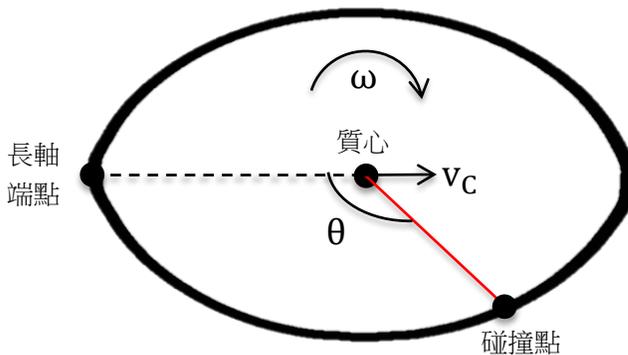
$$\left| \frac{-9.8412 \times 0.3833 + 8.1343}{-9.8391 \times 0.3833 + 0.2867} \right| \approx 1.252$$

速度之變化：

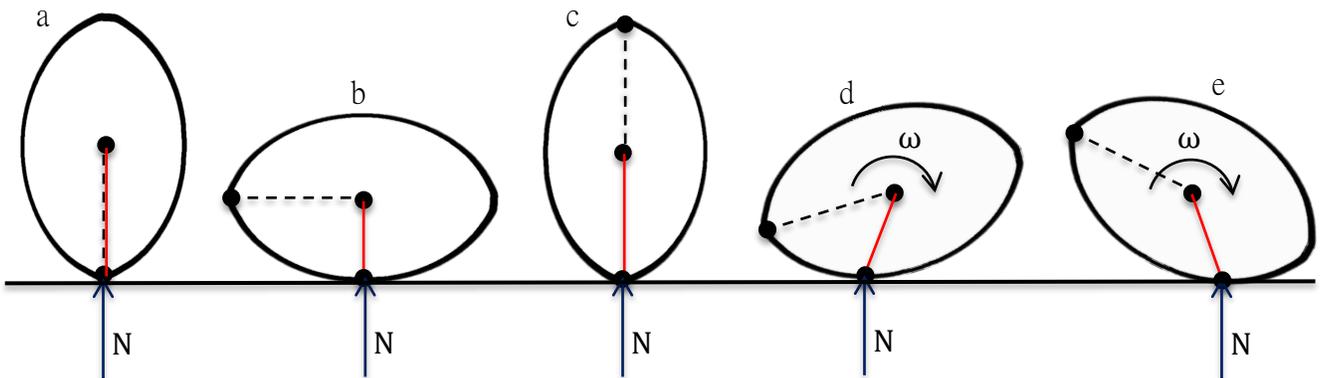
$$\Delta v_x = 1.2437(m/s)$$

$$\Delta v_y = 7.8468(m/s)$$

二、實驗二：拍攝 120 次投擲橄欖球的影片，選出其中以各個角度(θ 的定義如圖三十)碰撞地面的影片，並透過回復係數(e)對角度(θ)作圖，觀察橄欖球以哪個角度落地時的恢復係數更大(如圖三十一)，歸納其規律並分析原因。



圖(三十) 將質心分別與長軸端點及碰撞點連線，所得到兩條連線的夾角為 θ ，長軸端點有兩個，此處取質心後方的那一個。



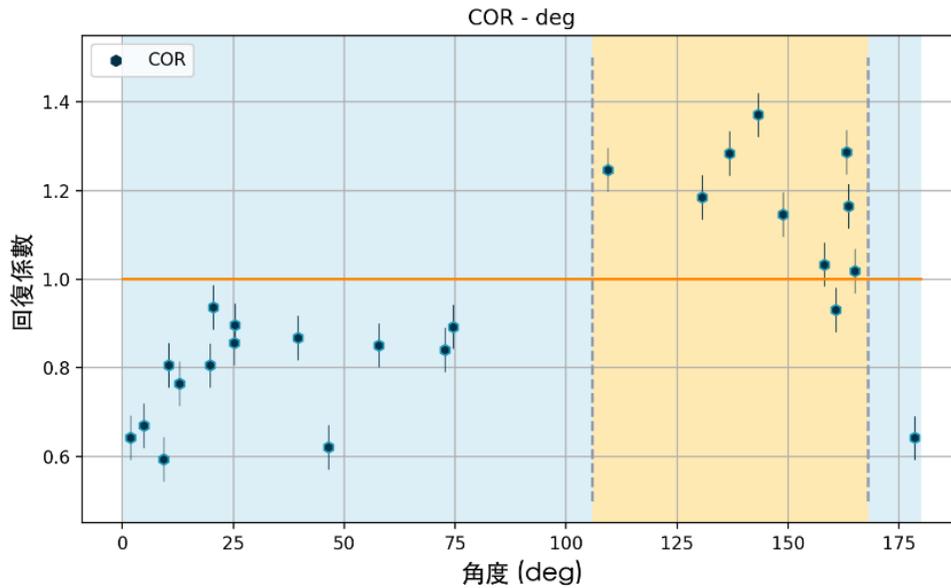
圖(三十一)橄欖球五種不同的落地位置

(二)由圖(三十二)中可看出：

1. $180^\circ > \theta > 0^\circ$ 時，恢復係數 $e < 1$ ，也就是不會發生反跳變高的現象。

2. $160^\circ > \theta > 100^\circ$ 時，多數情況碰撞 $e > 1$ ，會產生反跳變高的現象；但請注意仍有一個點 $e < 1$ 。

3. $180^\circ > \theta > 170^\circ$ 時，恢復係數 $e < 1$ ，也就是不會發生反跳變高的現象。

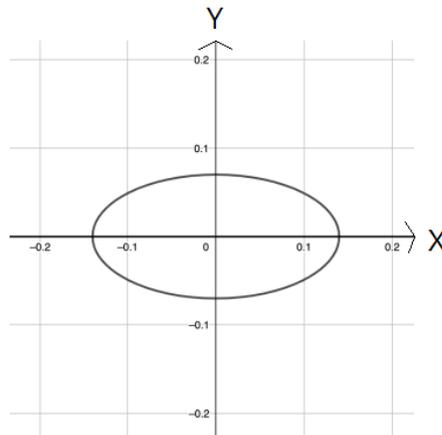


圖(三十二)碰撞角度與恢復係數 e 的關係

三、實驗三：用初角速度與最大高度預測落地時與地面的夾角及時間。

(一)橢圓最低點隨時間的變化:

1.我們的角頻率方向固定，且垂直於移動方向且平行於地面。因此在直角座標系中設定角頻率 ω 的方向為 z 軸的方向，則橄欖球可被簡化為一個在 $x - y$ 平面上的橢圓，如圖(三十三)。



圖(三十三)

2. 橢圓方程式可寫作： $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ——(1)

，其中a為半長軸，b為半短軸。

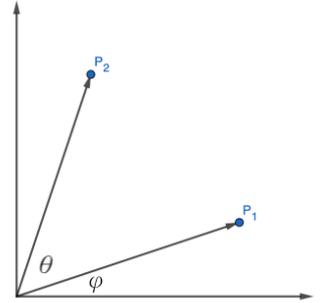
3. 實驗中橄欖球有角頻率，故長軸與地面的的夾角會隨時間改變，則假設初始狀態時橢圓長軸與地面的夾角為 ϕ ，某時間t時與地面的夾角是 $\phi + \theta$ ，則橢圓上的任意一點要被轉到新的一點。初始點的座標為 P_1 ，可表示為：

$$P_1 = (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi), r = \sqrt{x^2 + y^2}。$$

而某時間t時， P_1 新的座標為 P_2 ，可表示為：

$$P_2 = (x', y') = (r \cos(\phi + \theta), r \sin(\phi + \theta))。$$

如圖(三十四)。



圖(三十四)

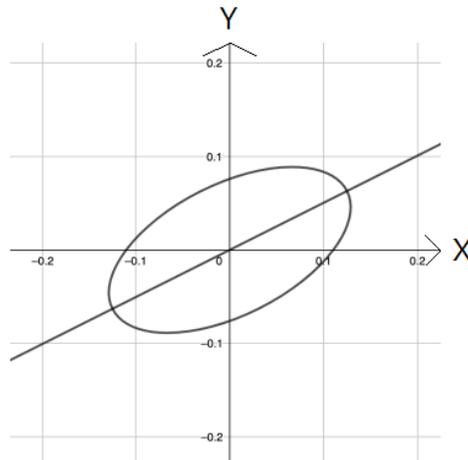
4. 用三角函數展開得：

$$y' = r \sin(\phi + \theta) = r \sin \phi \cos \theta + r \sin \theta \cos \phi = y \cos \theta + x \sin \theta \quad \text{—— (2)}$$

$$x' = r \cos(\phi + \theta) = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi = x \cos \theta - y \sin \theta \quad \text{—— (3)}$$

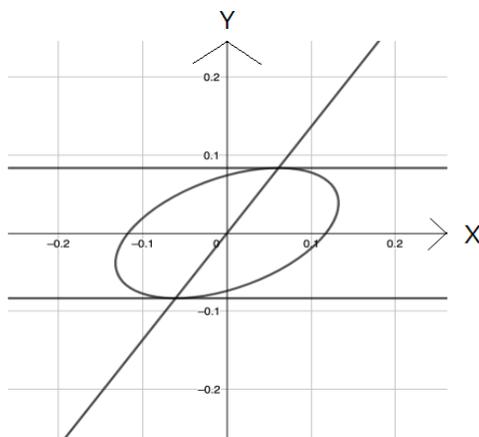
則有新的橢圓方程式可寫為：

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = \left(\frac{x \cos \theta - y \sin \theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{y \cos \theta + x \sin \theta}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{—— (4), 如圖(三十五)}$$



圖(三十五)

5.圖(二十七)中橢圓長軸與 x 軸的的夾角為 $\phi + \theta$ ，今天欲求橢圓的最低點隨時間變化的函數以判斷撞擊地面的瞬間與碰撞點的位置。通過橄欖球最低點與最高的兩切線的斜率皆為零，如圖(三十六)。



圖(三十六)

6.接著對這個函數微分求切線與角度的函數：

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{x \cos \theta - y \sin \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{y \cos \theta + x \sin \theta}{b} \right)^2 \right] = 0$$

$$\text{整理後得 } \frac{dy}{dx} = \frac{(A_1 + A_2)}{(B_1 + B_2)} = 0 \quad \text{---- (5)}$$

其中：

$$A_1 = \frac{1}{a^2} [2x \cos^2 \theta - 2y \sin \theta \cos \theta] \quad \text{---- (6)}$$

$$A_2 = \frac{1}{b^2} [2x \sin^2 \theta + 2y \sin \theta \cos \theta]$$

$$B_1 = \frac{1}{a^2} [2y \sin^2 \theta - 2x \sin \theta \cos \theta] \quad \text{---- (8)}$$

$$B_2 = \frac{1}{b^2} [2y \cos^2 \theta - 2x \sin \theta \cos \theta] \quad \text{---- (9)}$$

$$A_1 = -A_2$$

$$\frac{1}{a^2} [2x \cos^2 \theta - 2y \sin \theta \cos \theta] = -\frac{1}{b^2} [2x \sin^2 \theta + 2y \sin \theta \cos \theta] \quad \text{---- (11)}$$

7.此方程式可與修正的橢圓方程解聯立方程式，但計算過程過度繁雜。因此將方程式重新整理為：

$$\frac{1}{a^2} \cos \theta [x \cos \theta - y \sin \theta] = -\frac{1}{b^2} \sin \theta [x \sin \theta + y \cos \theta] \quad \text{-----}(12)$$

將 x', y' 代入得：

$$\frac{1}{a^2} x' \cos \theta = -\frac{1}{b^2} y' \sin \theta \quad \text{-----}(13)$$

整理後得：

$$x' = -\left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \tan \theta \right] y' \quad \text{-----}(14)$$

將此方程代入修正過的橢圓方程解聯立得：

$$y' = -b \left[\left(\frac{a}{b} \tan \theta \right)^2 + 1 \right] \quad \text{-----}(15)$$

因 x', y' 可以轉回到原來的座標，故碰撞點的座標可以下列形式表示：

$$x = r \cos(\phi + \theta - \theta) = r \cos(\phi + \theta) \cos \theta + r \sin \theta \sin(\phi + \theta) = x' \cos \theta + y' \sin \theta \quad \text{----}(16)$$

$$y = r \sin(\phi + \theta - \theta) = r \sin(\phi + \theta) \cos \theta + r \sin \theta \cos(\phi + \theta) = y' \cos \theta - x' \sin \theta$$

將 x', y' 代入可以解得最低點的座標到質心的鉛直距離 Y ：

$$Y = |y_{\min}| = \left| -b \left[\cos^2 \theta + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \right|, \theta = \omega t + \phi$$

(二) 碰撞時間 t ：

Y

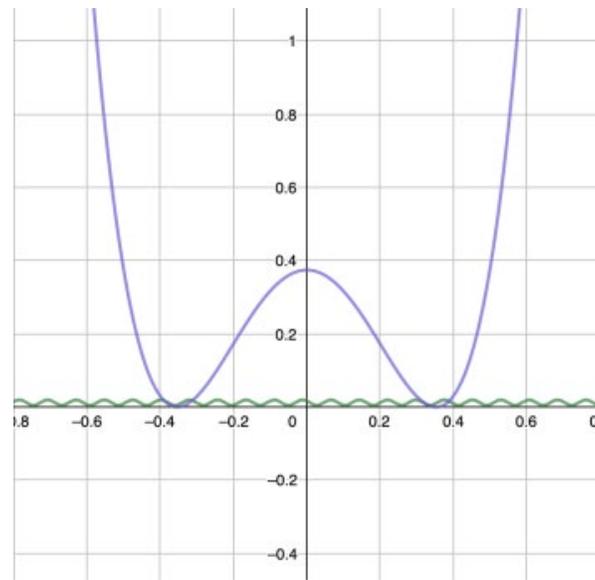
H

$$H = \frac{1}{2} g t^2 + Y \quad \text{-----}(19)$$

y_{\min}

$$b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(\omega t + \phi) = \left(H - \frac{1}{2} g t^2 \right)^2$$

函數圖如圖(三十七)



圖(三十七)

10.其中：

$$0 \leq \sin^2(\omega t + \phi) \leq 1 \quad \text{——— (21)}$$

$$a \geq b \geq 0 \quad \text{——— (22)}$$

$$a^2 - b^2 \geq 0 \quad \text{——— (23)}$$

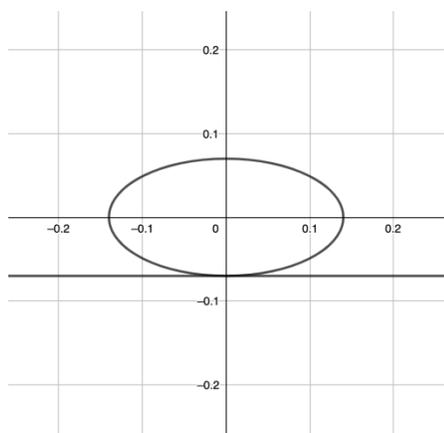
$$b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2(\omega t + \phi) = k \geq 0$$

故時間可表示為 $t = \sqrt{\frac{2(H - \sqrt{k})}{g}}$ 。其中當 $\sin^2(\omega t + \phi) = 1$ 時，橢圓以半短軸碰撞地

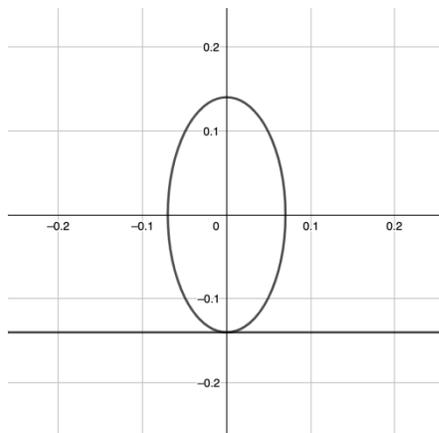
面，解出時間等於 $t = \sqrt{\frac{2(H - a)}{g}}$ 同於從高度 $H - a$ 做自由落體的質點，如圖(三十

八)。而當 $\sin^2(\omega t + \phi) = 0$ 時，橢圓以半長軸碰撞地面，解出時間等於

$t = \sqrt{\frac{2(H - b)}{g}}$ 同於從高度做自由落體的質點，如圖(三十九)。

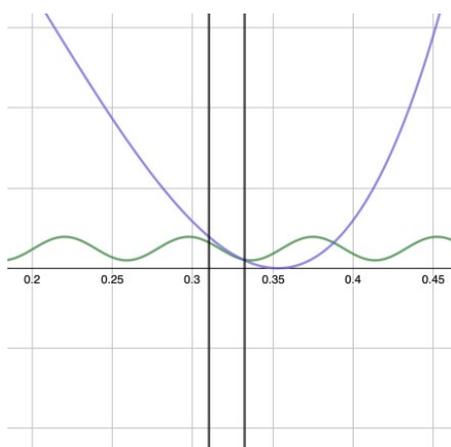


圖(三十八)

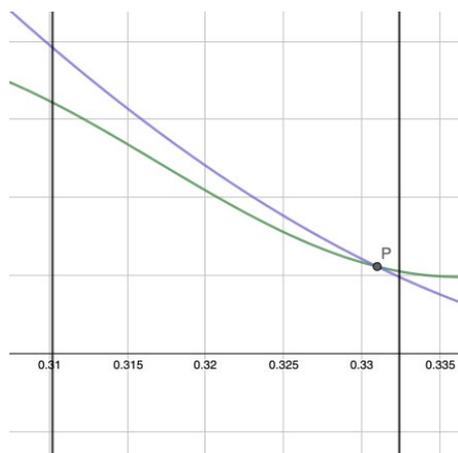


圖(三十九)

11. 因此我們找到時間的上下限 $\sqrt{\frac{2(H-b)}{g}} \leq t \leq \sqrt{\frac{2(H-a)}{g}}$ 。而碰撞必發生於這兩個值的區間，因此找兩個函數在此區間的交點則可求出碰撞時間 t 。其中我們以電腦程式分析求得交點座標與時間 t ，與實驗數據的相似度有 98%。



圖(四十)



圖(四十一)

(三)由 Tracker 軟體的影像分析可以人工追蹤橄欖球兩端點並由此求出橄欖球質心座標。在橄欖球質心達到最高點時將端點座標與質心座標相減可得到 y 座標差與 x 座標差。將 y 座標差除以 x 座標差即可求出 $\tan \theta$ 並間接求出 θ 。碰撞瞬間的傾角亦可由此方法出。

時間(s)	端點 A 座標	端點 B 座標	質心座標
0.0375	(0.801,0.088)	(0.645,0.328)	(0.723,0.208)
0.0417	(0.817,0.105)	(0.621,0.318)	(0.719,0.212)
0.0458	(0.825,0.124)	(0.594,0.295)	(0.710,0.299)

表(二)

時間(s)	y 座標差	x 座標差	$\tan \theta$	θ (rad)
0.0375	0.1200	0.0781	1.5362	0.9937
0.0417	0.1065	0.0978	1.0887	0.8278
0.0458	0.1743	0.1152	1.5131	0.9868

表(三)

(四)實驗數據求角速度的方法：

由 Tracker 軟體的影像分析可以人工追蹤橄欖球兩端點並由此求出橄欖球質心座標。在橄欖球質心達到最高點時將端點座標與質心座標相減可得到 y 座標差與 x 座標差。座標差會隨時間做週期性的簡諧運動。即可由週期得到角頻率。

(五)實驗數據求最大高度的方法：

在 Tracker 軟體中我們將地面視為 $y=0$ 的零位面，選取質心 y 座標最大的值

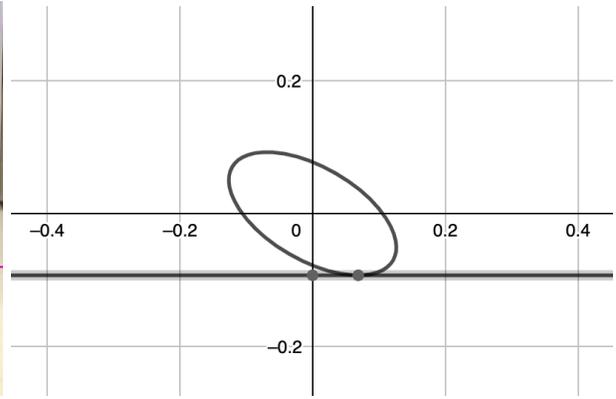
(六)模擬與實驗值的比較：

	H(m)	轉速 (rad/s)	角度 (rad)	預測時間(s)	實際時間(s)	相似度(預測時間 除以實際時間)
實驗一	0.715	47.60	0.197	0.350	0.358	0.979
實驗二	0.612	40.64	-0.827	0.335	0.341	0.984
實驗三	0.648	33.74	-0.231	0.356	0.367	0.970

表(四)



圖(四十二)



圖(四十三)

圖(四十二)為實際碰撞點，圖(四十三)為理論模擬之碰撞結果。

四、實驗四：給定碰撞前的物理量試圖理論模擬碰撞後運動。

(一)正向力的公式推導：

1.考慮彈性碰撞時，可加碰撞點視為理想彈簧，模擬碰撞過程，我們在彈簧當中加入了阻尼項，模擬非彈性碰撞：

$$N = -k\Delta y - bv_{\perp}$$

2.碰撞時考慮橄欖球的形變，假設符合赫茲理論，討論碰撞時的接觸面與接觸面的壓力分佈情形，在 theory of elasticity 中提到壓力成拋物分布：

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

3.對於拋物分佈，赫茲理論告訴我們最大壓力與物體最大形變量有關。將個接觸面個點的受力總和得正向力：

$$N = K\Delta y^n + X\Delta y^n v \quad (X \text{ 為遲滯阻尼係數})$$

(二)依據力學分析，列出運動方程式，其中 X,Y 為實驗三所得

1.力矩造成的角加速度：

$$NX(\theta) + fY(\theta) = \tau = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

2.碰撞點速度為質心速度加碰撞點相對質心的速度，分鉛直與水平：

$$v_{\perp}(t) = (v_{cy} + \int_0^t \frac{N}{m} dt) + X\omega$$

$$v_{\parallel}(t) = (v_{cx} + \int_0^t \frac{f}{m} dt) + Y\omega$$

3.積分速度得位置隨時間的函數:

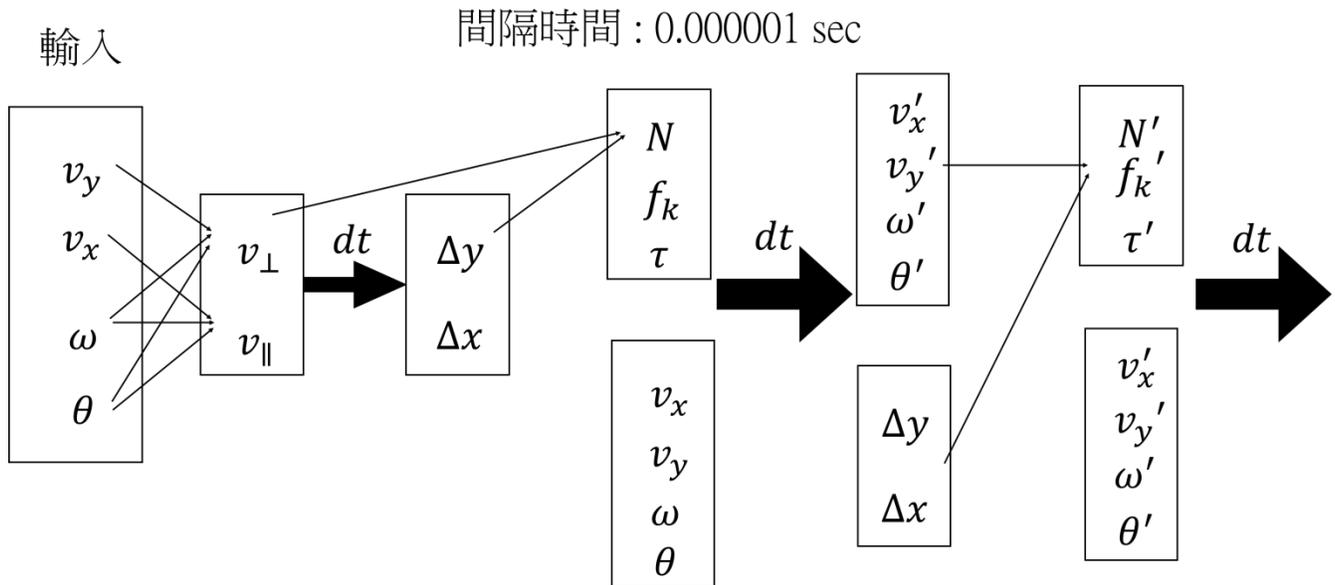
$$\Delta y(t) = \int_0^t v_{\perp}(t) dt$$

$$\Delta x(t) = \int_0^t v_{\parallel}(t) dt$$

4.正向力與摩擦力的關係:

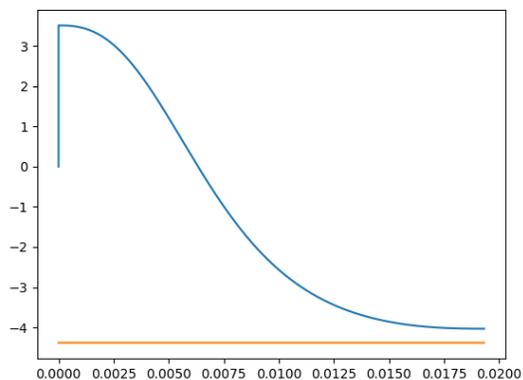
$$f = \mu_k N$$

(二)本研究的電腦程式如圖(四十四)在多個微小的間隔時間(0.000001 秒)內計算運動方程式，模擬積分。以輸入的物理量算出碰撞點的瞬時速度與瞬時摩擦力與正向力，這些力造成的加速度在下一個間隔時間內的作用會導致 v_y 與 v_x 的變化量。模擬重複計算直到橄欖球離開地面，條件為 $\Delta y=0$ ，模擬的結果如圖(四十五)到圖(四十八)。

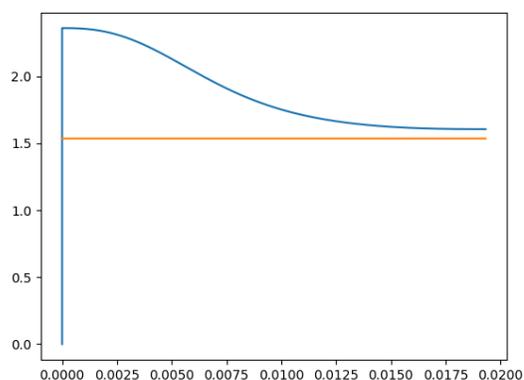


圖(四十四)

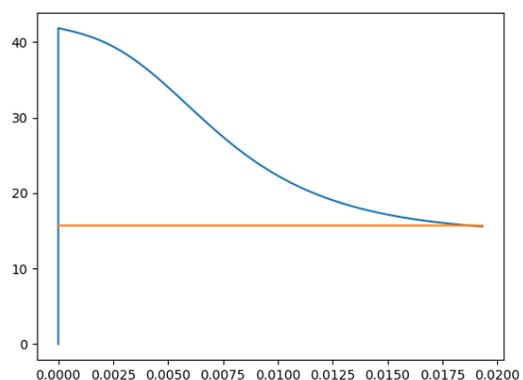
以多組實驗數據建立資料庫，以機器學習的方式讓模擬程式推算出正向力準確的 k 與 b 值



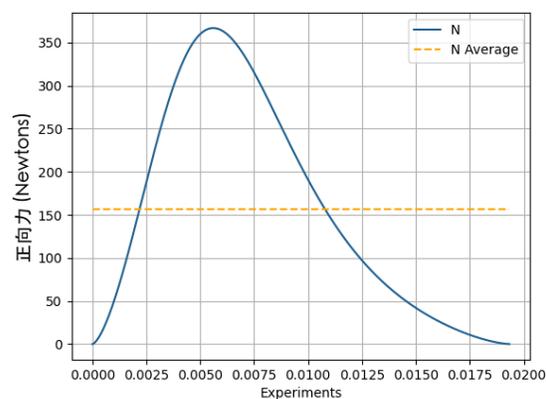
圖(四十五)y 方向速度隨時間的變化量



圖(四十六)x 方向速度隨時間的變化量



圖(四十七)角速度隨時間的變化量



圖(四十八)正向力隨時間的變化量

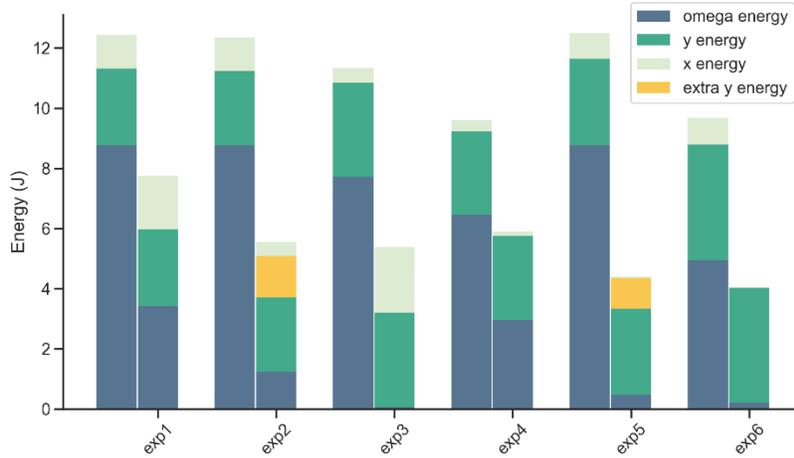
陸、討論

一、實驗一：

(一) 計算碰撞前後能量的變化：

取六組實驗數據後透過 tracker 分析後得到 x、y 方向的速度及角速度後便可以計算出能量

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \text{ 如圖(四十九)}$$



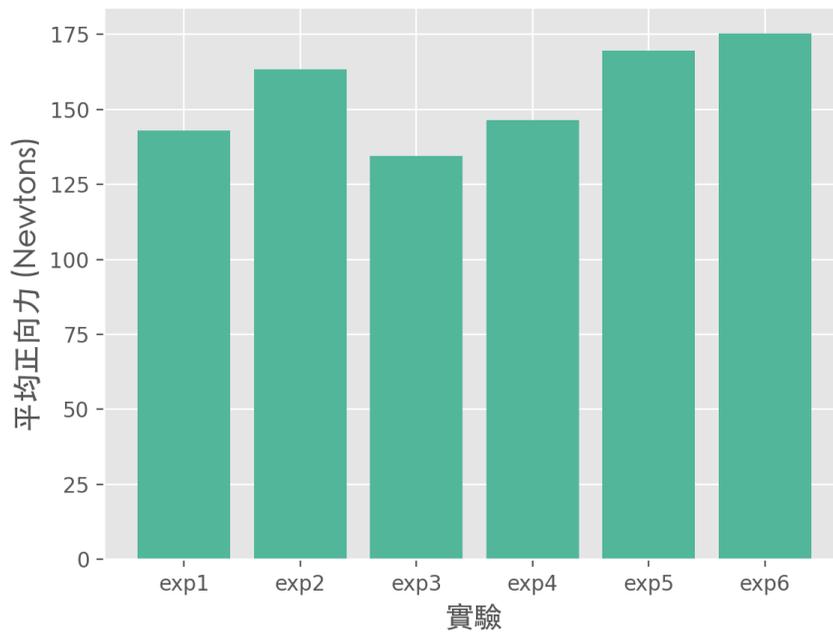
圖(四十九)

從圖(四十九)中可以看出碰撞前後有明顯總能量變化

(二)碰撞時的平均正向力：

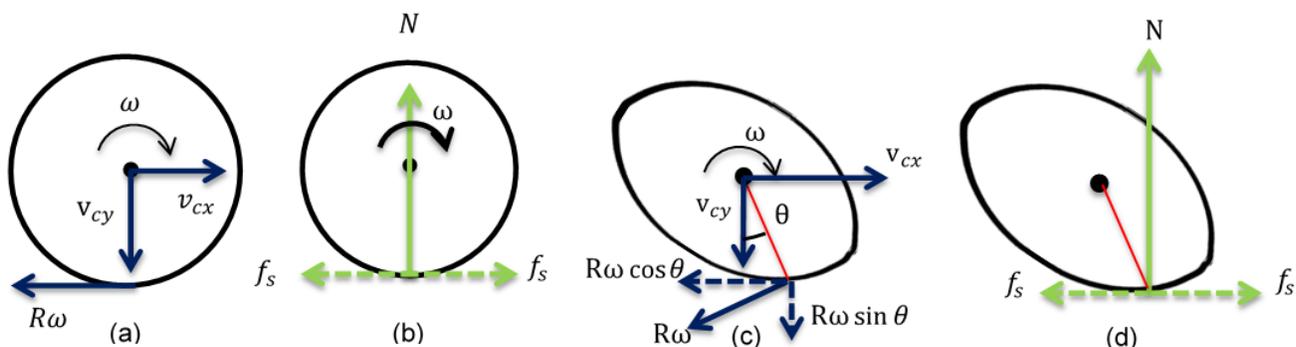
猜測讓 y 方向動量變化的力是正向力，考慮垂直方向受力為正向力，推測在碰撞時間一致的情況下，較高的平均正向力會造成較高的反跳

$$N_{avg} = \frac{m(v'_y - v_y)}{\Delta t}$$



圖(五十)

二、實驗二：用力學的角度分析反跳變高的原因以及條件



圖(五十一)

圖(五十一)的 a、b 為球體碰撞地面之情形；c、d 為橄欖球

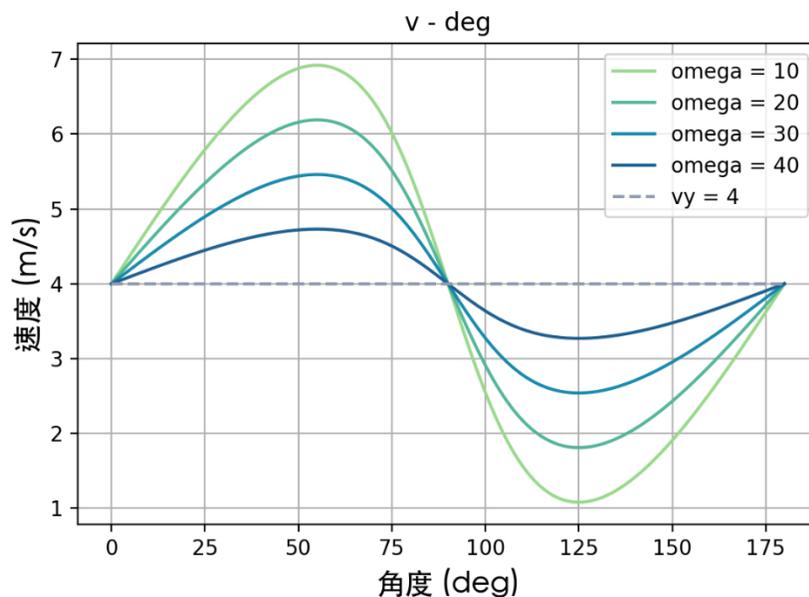
(一)X 方向：參考圖(五十一)-c，可以看出碰撞點的 $v_x = v_{cx} - R\omega \cos \theta$ ， v_x 的方向(正負) 便會決定摩擦力 f_s 的方向，可分為兩種情況：

1. $v_x > 0$ ，方向向右， f_s 向左，做功減少 x 方向移動動能、產生力矩與角速度方向相同，增加轉動動能。
2. $v_x < 0$ ，方向向左， f_s 向右，做功增加 x 方向移動動能、產生力矩與角速度方向相反，減少轉動動能。

(二)Y 方向：參考圖(五十一)-c，可以看出碰撞點的 $v_y = v_{cy} + R\omega \sin \theta$ ；對照圓球碰撞點速度 $v_y = v_{cy}$ (圖(五十一)-a)，在不考慮能量散失的情況下(彈性碰撞)圓球會彈回至原最大高度(無外加 Y 方向速度)。而橄欖球撞擊地面時相較圓球多了旋轉的 $R\omega \sin \theta$ ，以更大速度撞擊地面，因此會受到更大的正向力作用，增加 Y 方向移動動能，使反跳高度大於原最大高度；同時，正向力力矩與角速度方向相反，減少轉動動能。

三、實驗三：給定橄欖球初角速度與最大高度後預測橄欖球落地時與地面夾角及時間。

由實驗三的理論，我們可以算出碰撞點相對於地面的速度與角度的關係，發現撞擊點速度最大值在 50° 到 70° 之間為最佳的碰撞點，也發現當碰撞角度在 120° 到 125° 之間時，因碰撞點相對於地面的速度較低，容易出現滾動的現象。



圖(五十二)

四、實驗四：

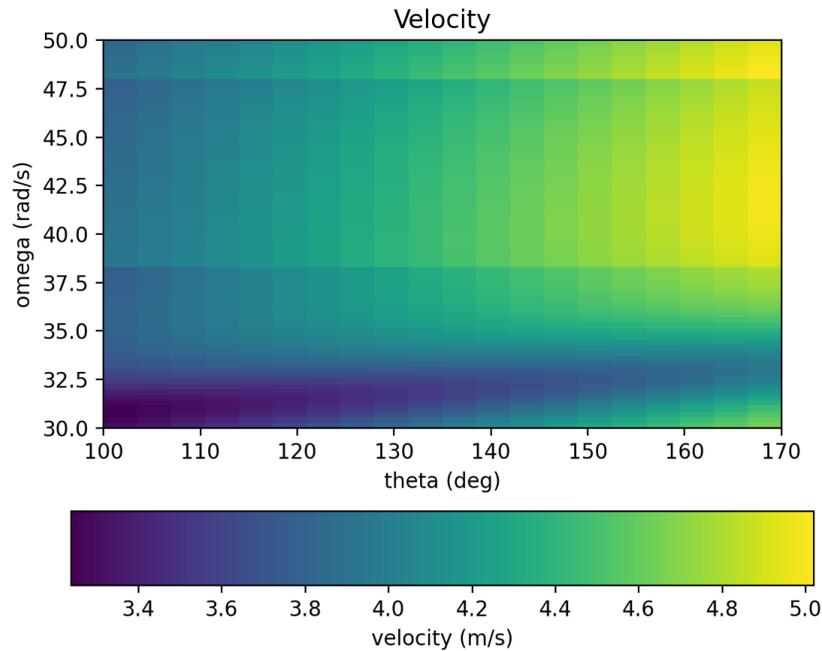
(一)正向力的經驗方程：

$$N \approx -101054x^{1.51} - 60423x^{1.51}v, (3 < v < 9)$$

其中 $n = 1.51$ 與論文中提及的 $\frac{3}{2}$ 誤差百分比 0.66%，而 k 和 b 的值與我們用網路上所查的材料的帕松比例(Poisson Ratio)跟楊氏模數依照論文給的經驗公式算出來的數量級相同。

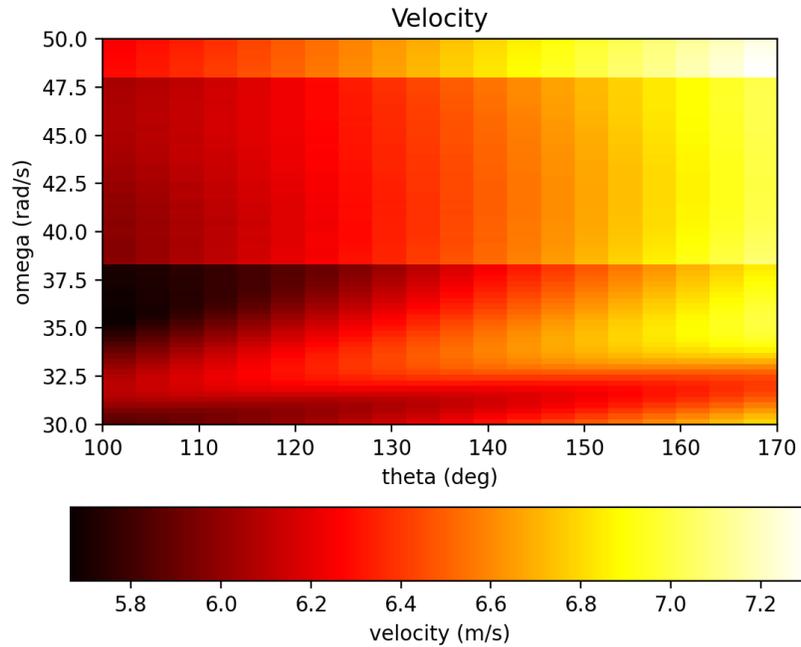
(二)反跳高度的相圖：

用我們的理論模型預測不同初始角速度與碰撞角度對碰撞後速度所造成的影響，並繪製成相圖：



圖(五十三)

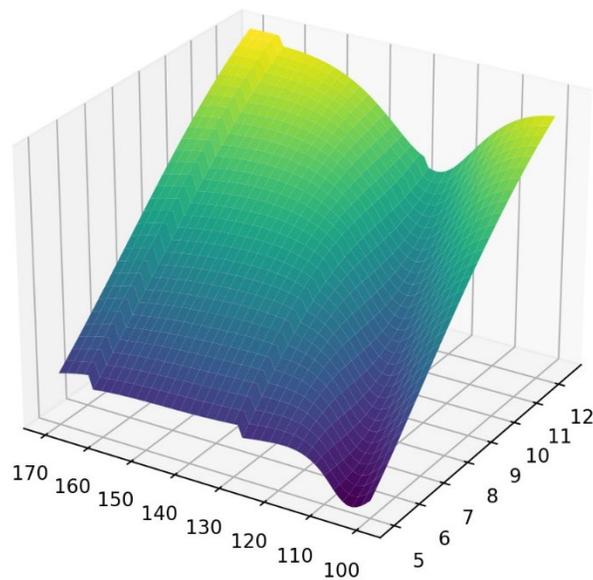
- 1.圖(五十三)中，為了讓模擬情況與我們的實驗相合我們設質心鉛直方向初速度為4m/s，轉速30~50rad/s。從實驗二當中看出回復係數大於1的其中一個限制條件是碰撞角度須在100~170度，我們因此選擇這個範圍進行模擬。
- 2.其中我們可看出實驗的限制條件是轉速需要足夠大，大約要在35 rad/s以上。能量分析轉動動能與鉛直方向移動動能的比值須大於2.56，否則即使碰撞角度正確，會因碰撞過程中的能量損失，使橄欖球無法大於初始高度。
- 3.我們還可看出碰撞角度接近170度時的反跳高度較高，與我們實驗三當中最大碰撞速度的區域不一樣，我們由正向力經驗方程中推測碰撞速度最大時碰撞過程中因形變而損失的能量過大無法有理想的反跳行為。
- 4.我們更發現對於同一個角度，當轉速達到限制條件後，轉速明顯的增加並沒有造成反跳速度明顯提高。我們從正向力經驗方程中推測轉速提高時，形變所造成的能量損失也隨之增加，因此對於我們的實驗最有效率的返跳範圍大約是碰撞角速度介在150度到170度，而轉速在40+-2 rad/s之間。
- 5.而當質心速度相對於轉速過高時沒有任何的碰撞角度可以使反跳高度大於初始高度。



圖(五十四)

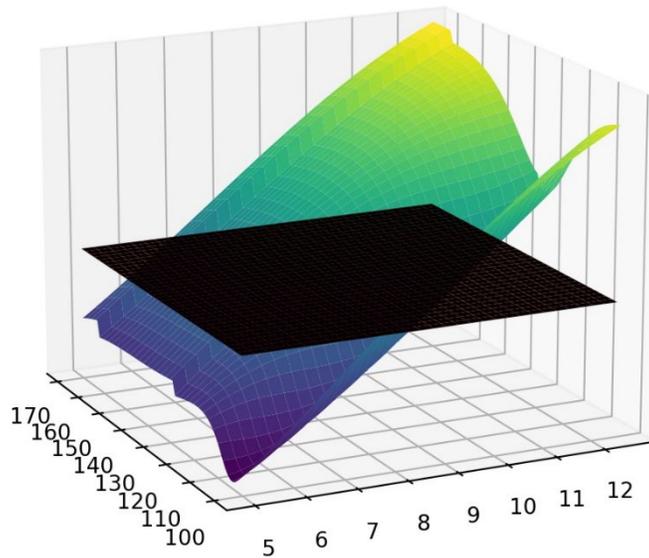
6.圖(五十四)中我們模擬碰撞時質心速度漸增時的反跳情形。模擬中我們將質心鉛直方向速度為 8m/s，其他參數均不調整。而圖中沒有在預設範圍內的初始條件能使橄欖球反跳高度超越原始高度。

7. 從能量的角度分析，鉛直方向的移動動能增加、轉動動能固定，兩個之間的比值皆小於 2.56。



圖(五十五)

8.為了減少初速對於繪圖的影響，我們用比值的方式呈現我們的資料，其中 x 軸依舊為碰撞角度 100 度~170 度，y 軸為角速度與質心初速度的比值，z 軸為初速度與末速度的比值；請參考圖(五十五)。



圖(五十六)

9. 加入 $z=1$ 的平面後(請參考圖五十六)，可看到轉速與初速比值的限制條件與碰撞角度有關；將兩曲線的焦點繪製成一張平面圖即得到反跳高度的邊界值。

柒、結論

- 一、我們利用 Tracker 分析橄欖球的運動，確認橄欖球有反跳後變高的現象，原因為橄欖球的轉動動能減少，轉換為鉛直方向的動能增加，故反跳後高度增加。
- 二、討論不同碰撞點造成鉛直方向速度的變化，發現碰撞點 Y 方向速度大於質心 Y 方向速度時，正向力會變得更大，才有反跳高度變高的現象。
- 三、給定橄欖球的最大高度與角速度，利用理論推導出橄欖球的碰撞位置，並利用 Tracker 分析得知，理論模擬的結果與實驗分析結果吻合並推論出最佳碰撞點。
- 四、透過與實驗數據的比較建立一個可以準確預測反跳速度的理論模型，並推導出正向力的經驗方程。以模擬器建立角速度與碰撞角度的相圖，探討反跳高度的邊界條件。

捌、參考資料

Rod Cross. (2006). Bounce of an oval shaped football. Physics Department, University of Sydney, Sydney NSW, Australia.

Paulo Flores& Hamid M Lankarani.(2016). Contact Force Models for Multibody Dynamics, Springer

【評語】 051804

本作品在探討有旋轉的橄欖球碰撞地面後在特定情況下反彈跳後的質心高度增加的現象，特別是透過實驗影像的觀測分析以及模擬研究橄欖球彈跳高度與初始高度以及初始角速度的關係。這個問題基本上是 2021 IYPT 的問題，相對來說，本作品在實驗的設計與模擬的比較上，結果算是不錯，特別是作品應用了文獻上碰撞接觸理論所導出之碰撞期間的受力，建立正向力與偏移量 X 的經驗關係式以預測橄欖球彈跳高度與初始高度以及初始角速度的關係，對於反彈跳的預測相當有幫助。

作品簡報



有角速度之橄欖球的 運動行為分析

組別:高中組

科別:物理與天文學科

摘要

本實驗在探討一顆旋轉橢球碰撞地面時，特定情況下反跳後的質心高度增加的現象。我們研究橢球彈跳高度與初始高度以及初始角速度的關係，由此推導出理論之後，建立電腦模型用以預測給定初始條件之後旋轉橢球落地的反跳情形。



研究過程與方法

研究目的

- 研究不同初始條件與不同變因如何影響碰撞過程與反跳高度
- 反跳高度增高的限制條件與物理原因
- 理論分析與電腦模擬並由初始條件預測碰撞結果

文獻探討

非彈性碰撞要考慮碰撞時的形變、

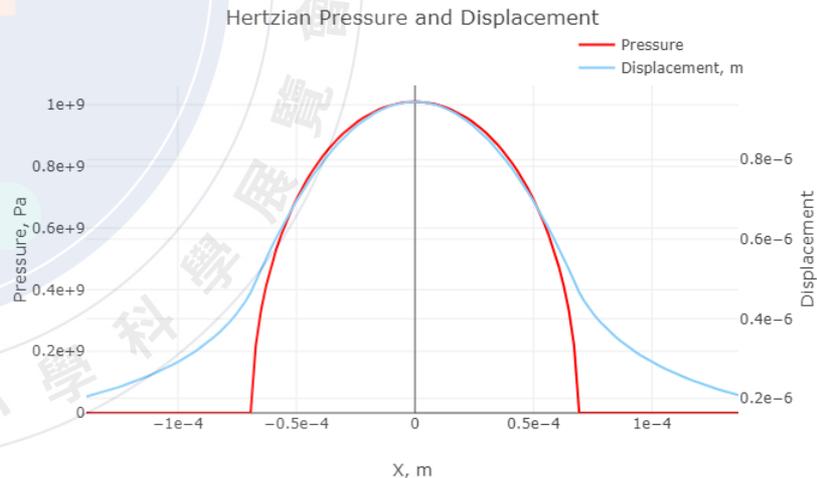
物體的楊氏係數與泊松式比影響能量散失跟正向力。

Hunt and Crossley模型的正向力公式為：

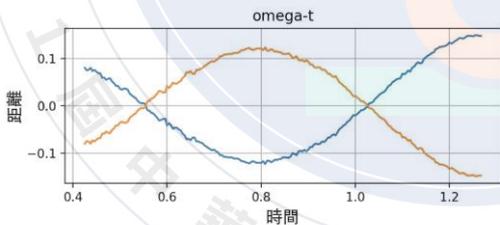
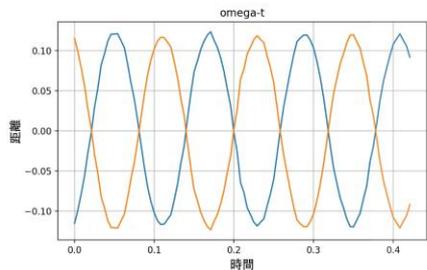
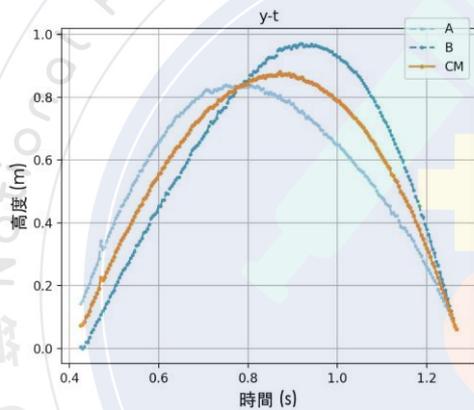
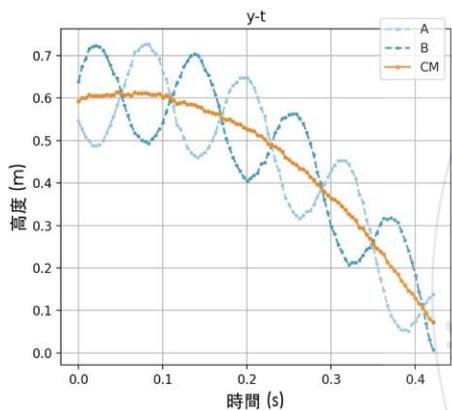
$$F_N = K\delta^n + D\dot{\delta}$$

(K 為廣義剛度係數、 δ 為最大變形量、 D 為阻尼係數)

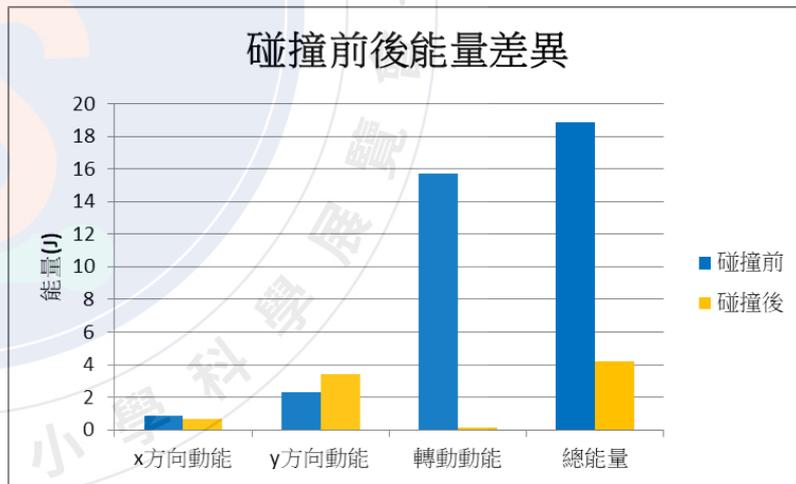
我們以此模型建立運動方程式。



實驗一、橄欖球的運動分析：結果



- 以回歸曲線找出質心的運動方程
- 找出碰撞前後的角速度
- $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$



實驗一、橄欖球的運動分析：討論

實驗數據觀察

- 角速度只因碰撞而改變，質心加速度恆為 g ——空氣阻力可忽略
- 力學能不守恆——非彈性碰撞

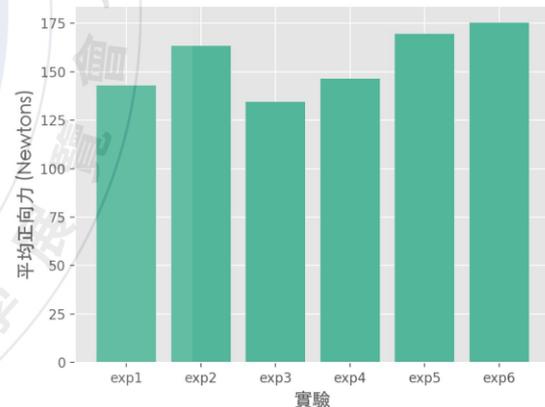
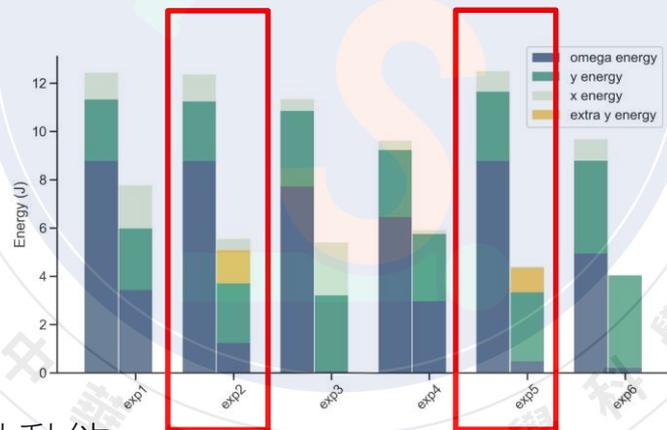
實驗數據分析

- Y方向移動動能增加

(反跳高度有增加)

轉動動能大幅下降

——轉動動能轉為移動動能



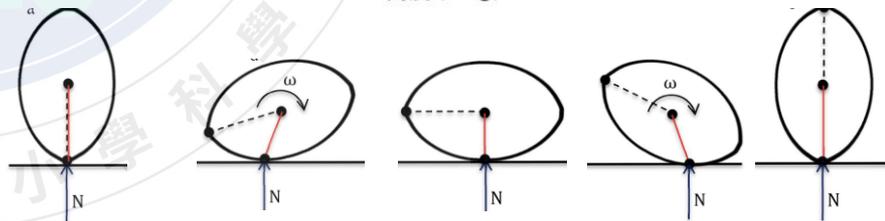
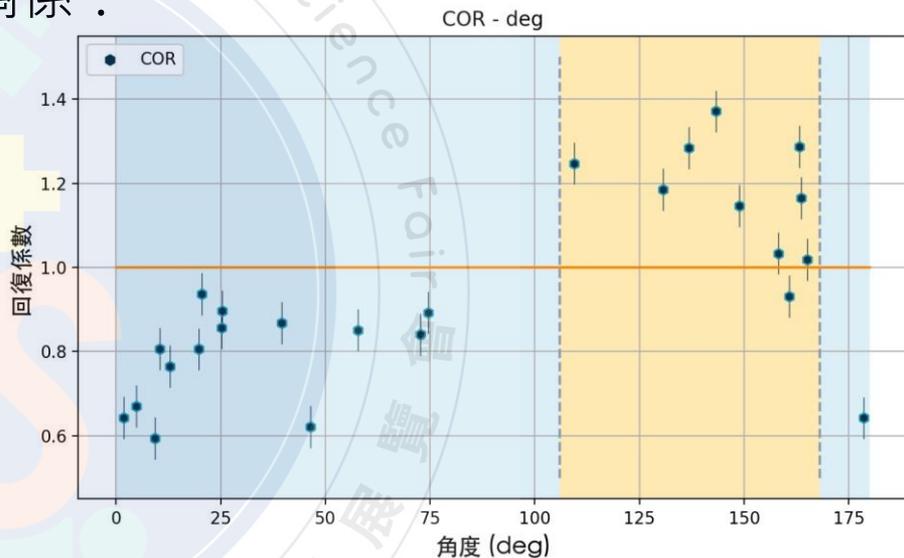
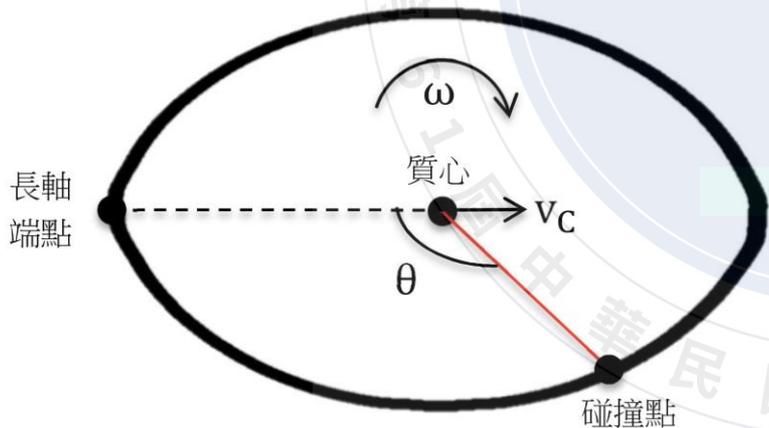
動量變化量 ÷ 碰撞時間 = 平均正向力

實驗二、角度與恢復係數的關係：結果

實驗數據發現恢復係數與反跳高度的關係：

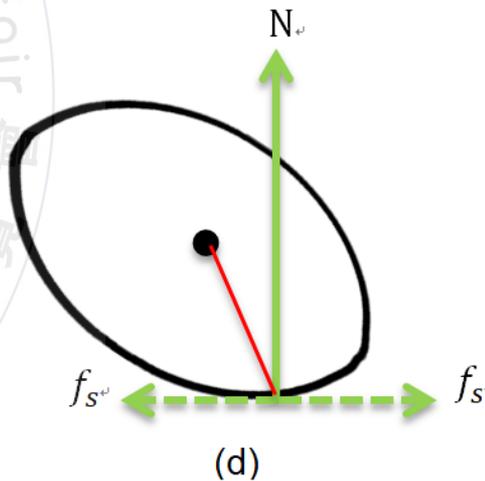
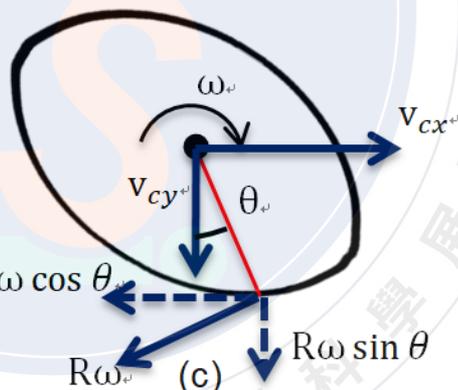
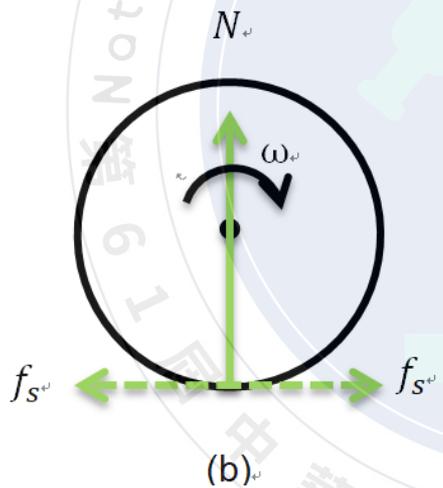
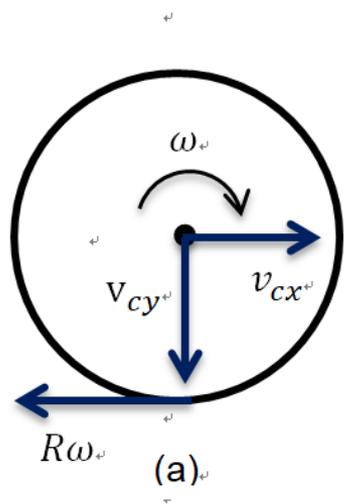
$$COR = \frac{|v_f|}{|v_i|} = \frac{\sqrt{2gh_f}}{\sqrt{2gh_i}}$$

實驗找出恢復係數與角度的關係：



實驗二、角度與恢復係數的關係：討論

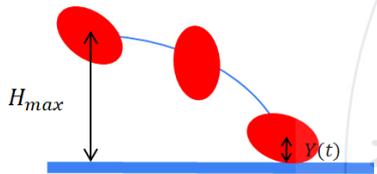
Y方向 \rightarrow 接觸點速度 $v = v_{cy} + R\omega \sin \theta$ \rightarrow $N > N_{\text{球}}$ τ_N 與 ω 反向 \rightarrow $v_{cy}' > v_{cy\text{球}}'$ 、Y方向動能增加 ω 減少、轉動動能減少



實驗三、預測碰撞：結果與討論

1. 從初始條件預測碰撞時間與碰撞角度：

$$H_{max} = \frac{1}{2}gt^2 + Y(t)$$

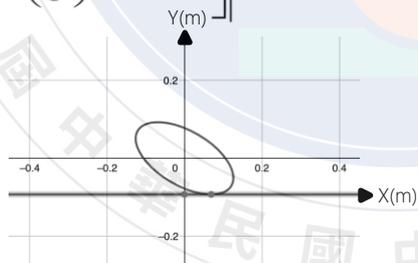


2. 微分有傾角的橢圓方程得最低點隨時間的變化得：

$$Y = |y_{min}| = \left| -b \left[\cos^2 \theta + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \right|, \theta = \omega t + \phi$$

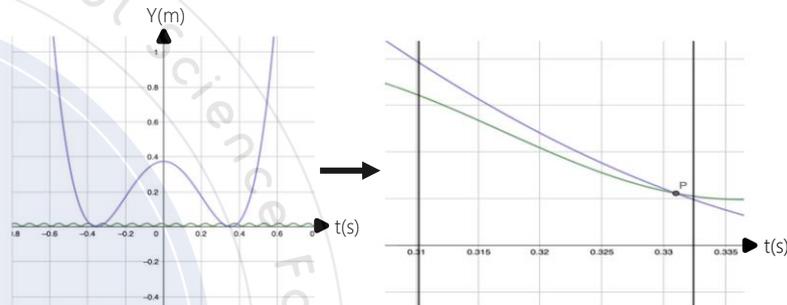


實際碰撞圖形

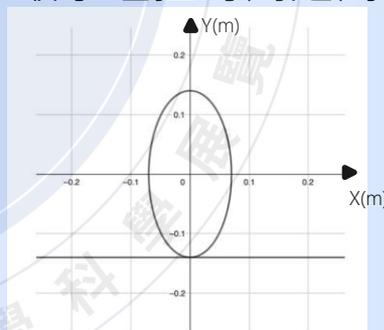


預測碰撞圖形

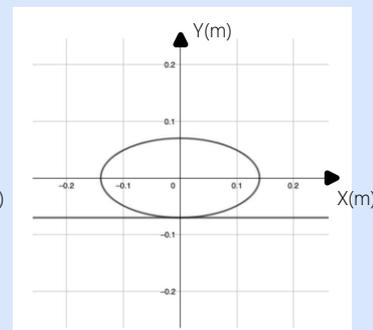
3. 將方程式用電腦軟體繪出：



4. 有效交點在最大碰撞時間與最小碰撞時間之間：



以長軸碰撞地板
時間最小



以短軸碰撞地板
時間最大

實驗四、電腦模擬：方法

參考論文對非彈性碰撞的理論，運用電腦模擬找出材料阻尼係數與廣義剛度係數

推導運動方程式：

1. 力矩造成的角加速度：

$$NX(\theta) + fY(\theta) = \tau = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

2. 碰撞點速度為質心速度加碰撞點相對質心的速度，分鉛直與水平：

$$v_{\perp}(t) = (v_{cy} + \int_0^t \frac{N}{m} dt) + X\omega$$

$$v_{\parallel}(t) = (v_{cx} + \int_0^t \frac{f}{m} dt) + Y\omega$$

3. 積分速度得位置隨時間的函數：

$$\Delta y(t) = \int_0^t v_{\perp}(t) dt$$

$$\Delta x(t) = \int_0^t v_{\parallel}(t) dt$$

4. 正向力與摩擦力的關係：

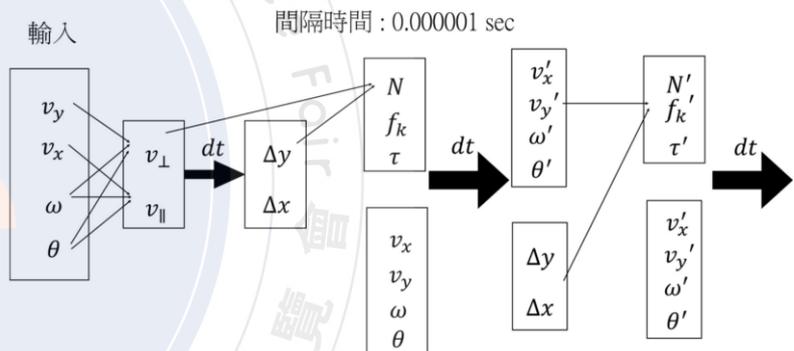
$$f = \mu_k N$$

5. 正向力模型公式：

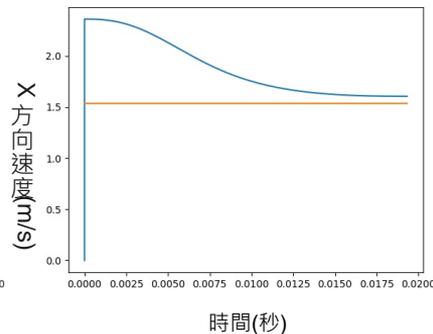
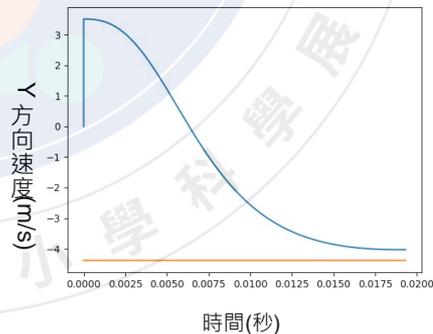
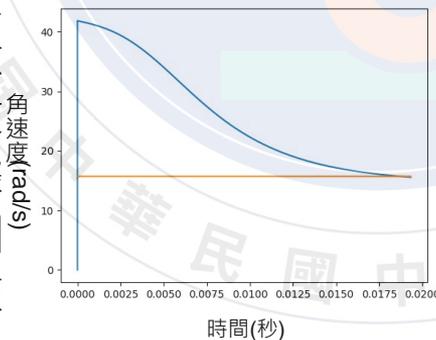
$$F_N = K\delta^n + D\dot{\delta}$$

由運算值調整K、n、D

建立電腦模型



實驗數據訓練

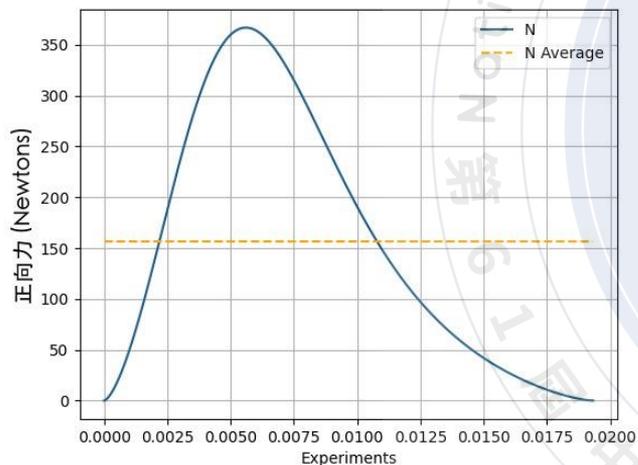


實驗四、電腦模擬：結果

初始條件與反跳速度的相圖

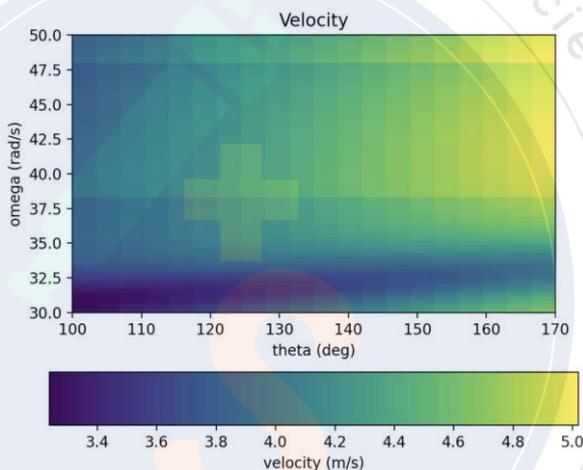
正向力的經驗方程：

$$N \approx -101054x^{1.51} - 60423x^{1.51}v, (3 < v < 9)$$

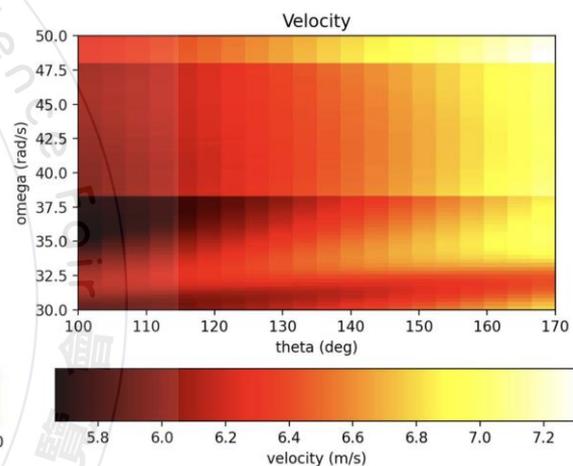


正向力曲線所求出的平均正向力與實驗值相近

初始質心速度4m/s



初始質心速度8m/s

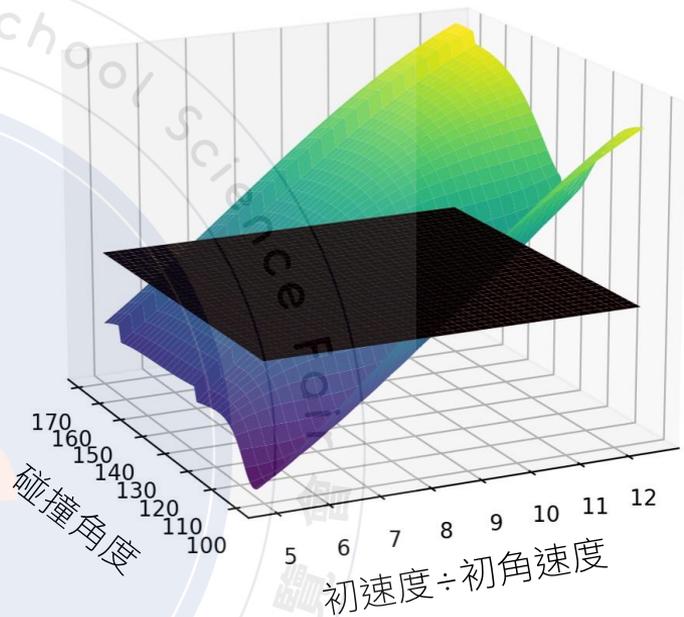
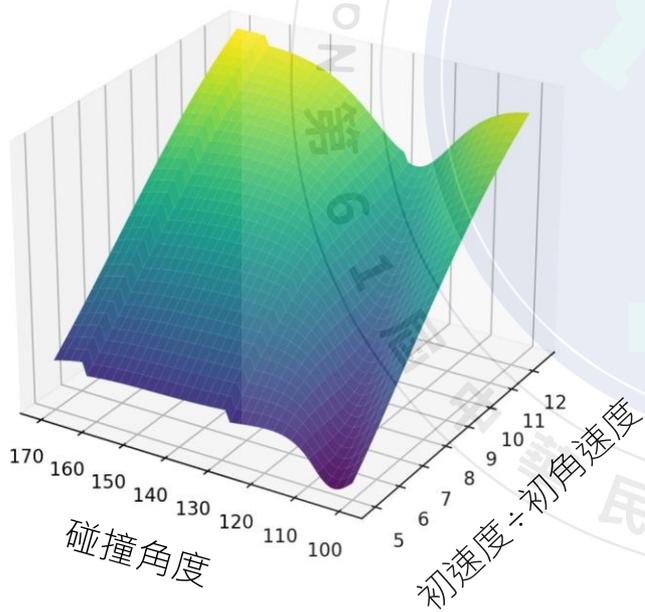


初始質心速度越大，碰撞時所損失的總能量越大。
轉動動能不足，無法跳更高。

對於越大的初始質心速度要有越大的角速度才能讓反跳增高。

實驗四、電腦模擬：討論

- 碰撞角度作為x軸
- 初始質心速度與初始角速度的比值作為y軸
- 碰撞後質心速度與初始質心速度的比值為z軸



- 加入 $z = 1$ 的平面
- 平面與曲面的交點是各角度對應到的限制條件

結論

- 一、因轉動動能減少，轉換為鉛直方向的動能增加，故反跳後高度增加。
- 二、當碰撞點 Y 方向速度大於質心 Y 方向速度時，正向力會變得更大，才有反跳高度變高的現象。
- 三、由理論推導的結果與實驗分析結果推論出最佳碰撞點。
- 四、以模擬器建立角速度與碰撞角度的相圖，探討反跳高度的邊界條件。